SPARING OG INVESTERING UNDER SIKKERHET OG USIKKERHET[1]

AV AGNAR SANDMO

Formålet med denne artikkelen er å gi en fremstilling av og på enkelte punkter å generalisere Irving Fishers klassiske analyse av spare- og investeringsbeslutninger. Fisher la grunnlaget for denne analysen i en serie tidsskriftartikler i 1890-årene og i boken *The Rate of Interest* fra 1907. Sin endelige form fikk hans teori i *The Theory of Interest*, som kom ut i 1930. På tross av teoriens anselige alder og Fishers ry som økonom, ser det ut til at det er de færreste økonomer som har noe særlig kjennskap til grunntrekkene i hans analyse. Dette er uheldig fordi Fishers analyse behandler sentrale og viktige problemer i økonomisk teori, og — mer spesielt — fordi den er et forsøk på å bygge opp en logisk og konsistent investeringsteori på grunnlag av nyttemaksimering.

Del I av denne artikkelen er en fremstilling av Fishers teori under den vanlige forutsetning om full sikkerhet og innen rammen av en enkel to-periodemodell. Vi analyserer først en ren sparemodell og utleder noen komparativ-statiske resultater. Deretter innføres investeringer, og vi gir en diskusjon av maskimering av kontantverdien som investeringskriterium og av mulighetene for å separere spare- og investeringsbeslutningene. I del II innføres usikkerhet med hensyn til realkapitalens avkastning. Modellen blir da et spesialtilfelle av en integrert modell for spare- og porteføljebeslutninger som er analysert i to andre artikler [13, 14]. Vi diskuterer også en betingelse som muliggjør separate analyser av spare- og investeringsbeslutninger under usikkerhet.

Analysen gjennomføres hele tiden for en to-periodemodell. En utvidelse til et vilkårlig antall perioder er av mindre interesse for de problemene vi diskuterer her, men den reiser en del problemer for investeringsteorien som en to-periodemodell glatter over. Ved flere

[1] Jeg takker Karl Borch, Einar Hope, Jan Mossin og Gerhard Stoltz for nyttige kommentarer.

Særtrykk av Statsøkonomisk Tidsskrift nr. 3 1968.

perioder blir ikke kapitalanvendelse og investering identiske, slik tilfellet er ved to perioder. Siden dette skillet ikke er vesentlig for de problemene vi skal ta opp i det følgende, kommer vi til å bruke «kapitalanvendelse» og «investering» i samme betydning.

I. *Sparing og investering under sikkerhet.*

Sparebeslutningen.

Vi skal først analysere tilfellet hvor individet står overfor eksogent gitte inntektsbeløp i hver tidsperiode og dessuten har adgang til et lånemarked hvor det kan låne ut og også selv låne til en gitt rentefot. For å forenkle fremstillingen skal vi holde oss til tilfellet med to tidsperioder, periode 1 og 2. Individet befinner seg ved begynnelsen av periode 1 og skal allokere ressursene mellom konsum i de to periodene.

Budsjettrestriksjonen kan skrives som

$$C_2 = (Y_1 - C_1)(1 + r) + Y_2. \tag{1}$$

Her er C_i konsum i periode i ($i = 1,2$), Y_i er den eksogent gitte inntekt i periode i, og r er rentesatsen. Ligning (1) sier at til disposisjon for konsum i periode 2 står sparingen i periode 1, med tillegg av renter, samt inntekten i periode 2. Sparingen kan være positiv eller negativ, slik at C_2 kan være større eller mindre enn Y_2.

Individet har en preferanseordning over konsumprofiler (C_1, C_2). Den antas å kunne representeres ved en kontinuerlig, ordinal nyttefunksjon med positive deriverte av første orden,

$$U = U(C_1, C_2). \tag{2}$$

Maksimering av (2) under bibetingelsen (1) leder til førsteordensbetingelsen for maksimum

$$U_1 - (1 + r)U_2 = 0 \quad \left(U_i = \frac{\delta U}{\delta C_i}\right), \tag{3}$$

eller (siden $U_1/U_2 = -(dC_2/dC_1)$, for konstant U)

$$-\frac{dC_2}{dC_1} - 1 = r. \tag{4}$$

Dette er Fishers berømte «regel» for optimal allokering over tiden;

likhet mellom rentesatsen og «the marginal rate of time preference», som er den marginale substitusjonsrate mellom konsum i første og annen periode minus 1.

Det kan være verd å merke seg at Fishers bruk av begrepene «time preference» og «impatience» ikke impliserer noen klar tilslutning til det syn som særlig assosieres med Bøhm-Bawerk, nemlig at det i menneskenaturen er en iboende tendens til å undervurdere fremtidsbehov i forhold til nåtidsbehov. Om dette har han følgende bemerkning ([4], s. 66):

> «Time preference, a concept which psychologically underlies interest, lends itself to express any situation, either preference for present as against future goods or preference for future as against present goods or for no preference. The term impatience carries with it the presumption that present goods are preferred. But I shall treat the two terms (impatience and time preference) as synonymous. Henceforth the term impatience will be the one chiefly used partly because its meaning is more self-evident, partly because it is shorter, and partly because it does carry a presumption as to the *usual* direction of the time preference.»

Fishers forhold til Bøhm-Bawerks tidspreferanseteori er imidlertid mindre klart enn dette sitatet kanskje kan gi inntrykk av. På de følgende sider i boken uttrykker han seg som om arten av tidspreferansen bare har å gjøre med variasjonen av den marginale substitusjonsbrøk langs en indifferenslinje, slik at man vurderer en gitt tilvekst i konsum i enhver periode høyere jo mindre man har av det. Dette impliserer ikke mer enn konvekse indifferenskurver og er ikke noe særlig interessant tidspreferansebegrep. En mulig måte å presisere tidspreferansebegrepet på er å knytte det til verdien av den marginale substitusjonsbrøk for en konsumprofil hvor $C_1 = C_2 = C$. Positiv, nøytral eller negativ tidspreferanse ville da svare til henholdsvis

$$\frac{U_1(C, C)}{U_2(C, C)} \gtreqless 1 .$$

Det er mulig at den siste setningen i Fisher-sitatet ovenfor (om den vanlige retningen på tidspreferansen) kan tolkes som om han mente at positiv tidspreferanse i denne forstand var det normale tilfellet.

Vi går nå over til det sentrale komparativ-statiske resultatet i Fishers spareteori. Dette resultatet gjelder virkningen på konsumet i første periode av en endring i renten og viser at denne virkningen kan splittes opp i en substitusjons- og en inntektseffekt. Resonnementet finnes ikke hos Fisher, men det er etter hvert blitt et populært innslag i mange fremstillinger av mikroøkonomisk teori. Vi skal her uttrykke det i form av en Slutsky-ligning, og dermed gi det en mer presis form enn den man vanligvis finner.

Ved implisitt derivasjon med hensyn på Y i ligning (3) får vi

$$\frac{\delta C_1}{\delta Y_1} = (1 + r)\frac{(1 + r)U_{22} - U_{12}}{D}, \tag{5}$$

hvor

$$D = U_{11} - 2(1 + r)U_{12} + (1 + r)^2 U_{22} < 0\,,$$

som en annenordensbetingelse for maksimum. *A priori* kan vi ikke bestemme fortegnet til den deriverte (5); muligheten for at konsumet i første periode er mindreverdig, står åpen. Imidlertid er det i det foreliggende problem naturlig å begrense oppmerksomheten til slike nyttefunksjoner som gjør både C_1 og C_2 til fullverdige goder, hvilket vil si at $0 < \delta C_1/\delta Y_1 < 1$.[1]

Ved å derivere i (3) med hensyn på r får vi

$$\frac{\delta C_1}{\delta r} = (Y_1 - C_1)\frac{(1 + r)U_{22} - U_{12}}{D} + \frac{U_2}{D},$$

eller, ved innsetting fra (5),

$$\frac{\delta C_1}{\delta r} = \frac{1}{1 + r}(Y_1 - C_1)\frac{\delta C_1}{\delta Y_1} + \frac{U_2}{D}. \tag{6}$$

Det første leddet på høyre side er inntektsvirkningen. Den er positiv for en långiver ($Y_1 > C_1$) og negativ for en låntaker ($Y_1 < C_1$). Den intuitive tolkning av dette er klar: Til disposisjon for konsum i periode 2 står $Y_2 + (Y_1 - C_1)(1 + r)$. For en långiver fører høyere rente til en økning i dette beløpet, mens den for en låntaker

[1] Ved å sette inn for D i (5) er det lett å se at de (lokale) betingelser for dette er $(1 + r)U_{22} - U_{12} < 0$ og $U_{11} - (1 + r)U_{12} < 0$. Generelt er betingelsen at den marginale substitusjonsbrøk er synkende i C_1 og stigende i C_2.

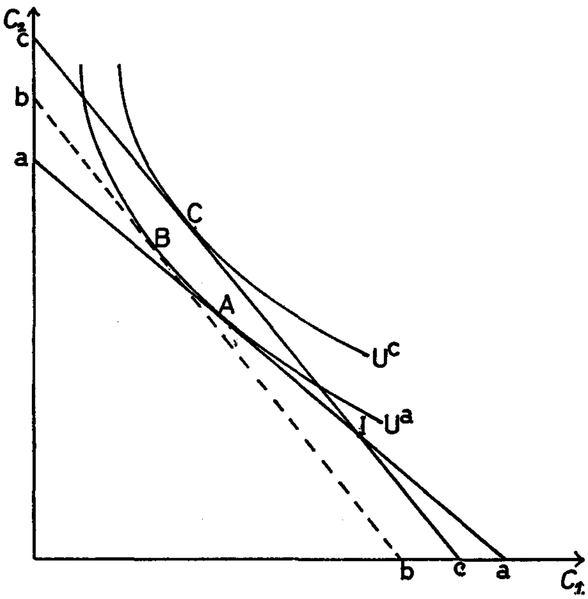

Fig. 1.

fører til en nedgang. Følgelig må en låntaker konsumere mindre i periode 1 for å holde dette beløpet konstant, mens en långiver kan opprettholde det ved å konsumere mer i periode 1. Det andre leddet på høyre side er substitusjonsvirkningen, virkningen av en endring i r når U holdes konstant. Den er alltid negativ. (Dette er den teoretiske tolkning av det populære utsagnet om at høyere rente gjør det mer lønnsomt å spare.) For en låntaker fører inntekts- og substitusjonsvirkningene begge til lavere konsum (og høyere sparing). Men for en långiver trekker de to virkningene i hver sin retning, og det er ikke mulig å trekke noen konklusjon med hensyn til totalvirkningen.

Resutatene kan illustreres i to diagrammer for henholdsvis en långiver (fig. 1) og en låntaker (fig. 2). I begge diagrammene er punktet (Y_1, Y_2) markert ved I. Budsjettlinjen ved det opprinnelige rentenivå er aa, og ved det høyere rentenivå cc. Det initiale tilpasningspunkt er i begge diagrammene A, og tilpasningspunktet ved det høyere rentenivå er i begge tilfeller C. Ved økningen i renten vris budsjettlinjen rundt punktet I fra posisjonen aa til cc. Linjen bb, som er parallell med

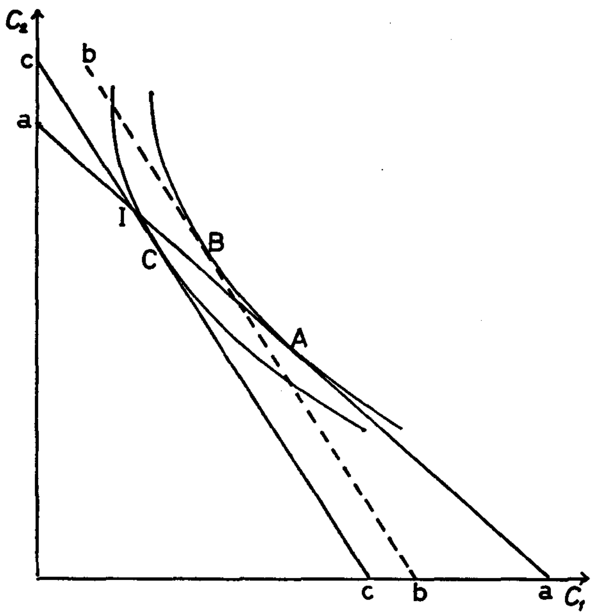

Fig. 2.

cc, skiller inntekts- og substitusjonsvirkningen. Substitusjonsvirkningen illustreres ved forskyvningen av tilpasningspunktet langs indifferenskurven U^a (altså med U konstant) fra A til B. B må nødvendigvis ligge til venstre for A, altså er substitusjonsvirkningen negativ. Inntektsvirkningen illustreres ved parallellforskyvning av *bb* til *cc* og forskyvning av tilpasningspunktet fra B til C. Denne virkningen går i forskjellig retning i de to diagrammene.[1]

Virkningen av en endring i renten er det sentrale komparativstatiske resultat i denne modellen. Dette impliserer selvsagt ikke noen vurdering av rentens kvantitative betydning for valget mellom konsum og sparing. Men resonnementet inneholder i en viss forstand alle modellens komparativ-statiske egenskaper, slik at endringer i andre parametre som man måtte ønske å trekke inn, til syvende og sist alltid vil kunne studeres som kombinasjoner av endringer i rente og inntekt.

[1] Forutsetningen om at C_1 og C_2 ikke er mindreverdige goder, kommer til uttrykk ved at punktet C i fig. 1 ligger NØ for B og i fig. 2 SV for B.

Velkjent er f. eks. Bent Hansens [6] påvisning av at virkningen av en økning av en proporsjonal inntektsskattesats kan betraktes som en simultan reduksjon av inntekt og rente.

Sparing og investering.

Hittil har vi forutsatt at den eneste måten hvorpå et individ kan endre sin initiale inntektsstrøm, er transaksjoner i fordringsmarkedet. Vi skal nå også ta hensyn til at inntektsstrømmen kan endres ved produktive investeringer.[1]

For enkelhets skyld skal vi nå tenke oss at $Y_2 = 0$; all eksogent gitt inntekt foreligger altså som et fond ved begynnelsen av første periode. Individet gis nå mulighet til å investere en del av sin inntekt, K, i en produksjonsprosess med positivt og avtakende grenseprodukt av kapitalen, og produktet av denne prosessen utgjør inntekt i annen periode. Samtidig har individet som før adgang til transaksjoner i lånemarkedet til en gitt rentesats, r.

Forutsetningene om produksjonsprosessens karakter kan vi oppsummere som

$$Y_2 = F(K),\ F'(K) > 0,\ F''(K) < 0.$$

Vi vil også forutsette

$$F(0) = 0,\ F'(0) > 1 + r.$$

Den siste av disse forutsetningene gjøres her bare for å unngå trivielle løsninger på maksimumsproblemet.[2]

Kontantverdien av individets inntektsstrøm ved en investering lik K blir

$$Y_1 - K + \frac{F(K)}{1+r},$$

[1] For en alternativ behandling av dette, som også går inn på spørsmålet om valg av investeringskriterier, se Hirschleifer [7]. En lignende oversikt finnes også i [8].

[2] Funksjonen $F(K)$ er å oppfatte som en transformasjonsfunksjon hvorved inntekt i periode 1 transformeres til inntekt i periode 2. $F'(K)$ er da den marginale transformasjonsrate, $F(K) - K$ er kapitalens nettoprodukt, og $F'(K) - 1$ er kapitalens grenseprodukt. Kapital og konsumvarer måles i de samme enheter, slik at vi strengt tatt analyserer en énvareøkonomi.

og budsjettbetingelsen kan formuleres som likhet mellom kontantverdien av konsumet og kontantverdien av inntekten,

$$Y_1 - K + \frac{F(K)}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r},$$

eller

$$C_2 = (Y_1 - K - C_1)(1+r) + F(K), \tag{7}$$

som svarer direkte til budsjettrestriksjonen (1) i den rene sparemodellen.

Ved å sette (7) inn i nyttefunksjonen (2) og maksimere med hensyn på C_1 og K får vi førsteordensbetingelsene.

$$U_1 - (1+r)U_2 = 0, \tag{8}$$

$$F'(K) = (1+r)\,. \tag{9}$$

(8) er den samme betingelsen som vi hadde i den rene sparemodellen. (9) sier at investeringen skal drives til det punkt hvor kapitalens grensepunkt er lik renten i fordringsmarkedet.

Løsningen kan illustreres i et velkjent diagram, som finnes allerede hos Fisher ([4], s. 271). Den krumme kurven gjennom I (fig. 3) viser individets muligheter for gjennom produktive investeringer å transformere ressurser disponible i periode 1 til ressurser disponible i periode 2. Hvis individet ikke hadde adgang til transaksjoner i fordringsmarkedet, ville optimum være i P', men det er åpenbart bedre å bevege seg til punktet P, som svarer til maksimal kontantverdi. P svarer imidlertid ikke til konsumoptimum. Det oppnår individet ved å låne i markedet slik at tilpasningen skjer i C. Fig. 4 adskiller seg fra fig. 3 ved at punktet C ligger til venstre for P. I dette tilfellet vil individet med utgangspunkt i inntektsstrømmen P justere denne ved selv å låne ut i fordringsmarkedet. For det tilfellet som er avbildet i fig. 3, vil balansekonto i periode 1 vise postene «realkapital» på aktivasiden og «gjeld» og «nettoformue» på passivasiden. For individet i fig. 4 vil balansekonto vise «realkapital» og «finanskapital» på aktivasiden og «nettoformue» på passivasiden.

Det mest iøynefallende trekk ved denne løsningen er utvilsomt at den kan realiseres ved en fullstendig separasjon av spare- og investeringsbeslutningene. Man kan tenke seg at individet «først» treffer

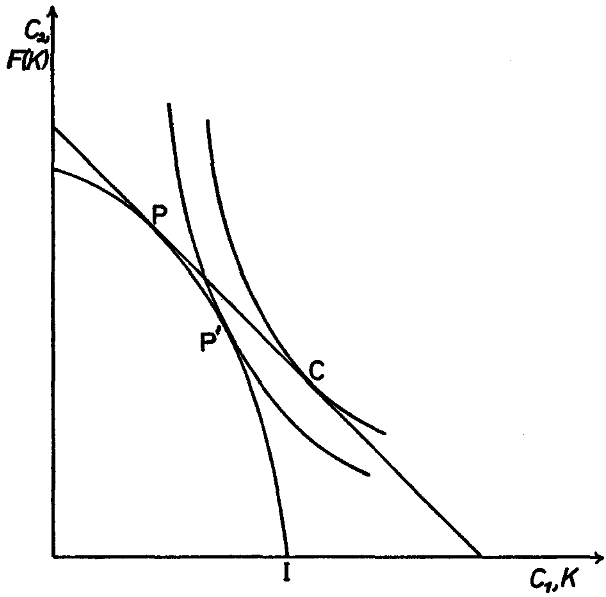

Fig. 3.

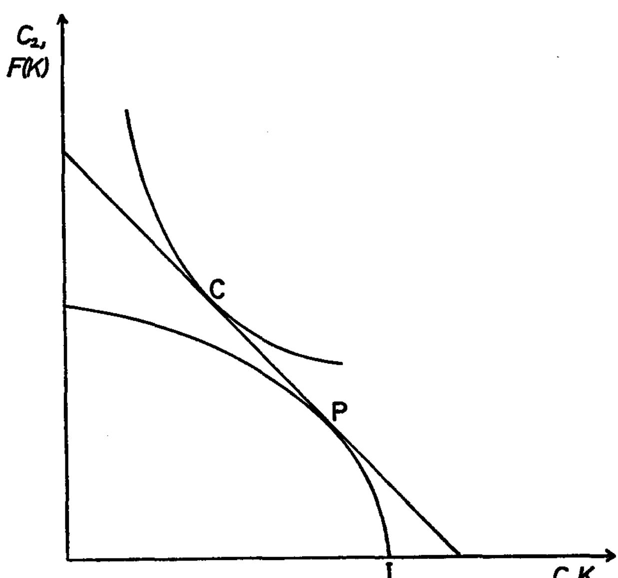

Fig. 4.

sin investeringsbeslutning med maksimering av kontantverdien av inntektsstrømmen som beslutningskriterium. Maksimering av $\{Y_1 - K + F(K)/(1 + r)\}$ med hensyn på K gir betingelsen (9). «Dernest» foretas sparebeslutningen som analysert i foregående avsnitt, og da med inntektsstrømmen $Y_1 - K$ og $Y_2 = F(K)$ som et gitt datum.[1]

Hvordan må dette modifiseres dersom låne- og fordringsrentene ikke lenger er identiske? Dette problemet er analysert av Hirschleifer ([7], s. 333—336). Vi skal her gi en alternativ diagrammatisk analyse.

Vi tar utgangspunkt i en gitt transformasjonskurve og i en rentesats for lån (lånerenten) som er høyere enn den individet får dersom det selv kjøper fordringer (fordringsrenten). I fig. 5 er *i'i* budsjettlinjen for en långiver og *uu'* budsjettlinjen for en låntaker. Merk at den første bare er aktuell til *venstre* for dens tangeringspunkt med transformasjonskurven, mens den andre bare er aktuell til *høyre* for dens tangeringspunkt med transformasjonskurven. Individets konsummulighetskurve er dermed beskrevet ved *i'iuu'*.

I fig. 5 har vi tegnet inn tre indifferenskurver svarende til tre ulike preferansestrukturer, eller tre individer. For individ *U* er det optimale å foreta en investeringstilpasning i punkt *i* og kjøpe fordringer i lånemarkedet for å realisere sitt konsumoptimum. Den relevante rentesats til bruk ved beregning av kontantverdien, er fordringsrenten. For individ *W* er preferansen slik at konsumoptimum nås ved å ta opp lån. Dermed blir lånerenten å legge til grunn ved kontantverdiberegningen, og investeringstilpasningen finner sted i *u*. For individ *V* er ingen av de to rentesatser relevante for fastleggelse av det optimale investeringsprogram, fordi konsummulighetskurven tangerer en indifferenskurve i segmentet *iu*. I dette spesielle tilfellet bestemmes altså optimal investering som om individet ikke hadde adgang til finansielle markeder i det hele tatt.[2]

[1] Slike «separasjonsteoremer» er velkjente fra flere felter i økonomisk teori. Et eksempel har vi i teorien om internasjonal handel, der diagrammer svarende til fig. 3 og fig. 4 brukes til å vise optimal produksjon og optimalt konsum for et land som står overfor gitte priser på verdensmarkedet.

[2] Gitt transformasjonskurvens form vil lengden av segmentet *iu* være mindre, jo mindre avviket er mellom utlåns- og innlånsrenten. For et gitt avvik mellom utlåns- og innlånsrenten, vil segmentet *iu* være større, jo «flatere» transformasjonskurven er i det aktuelle intervall.

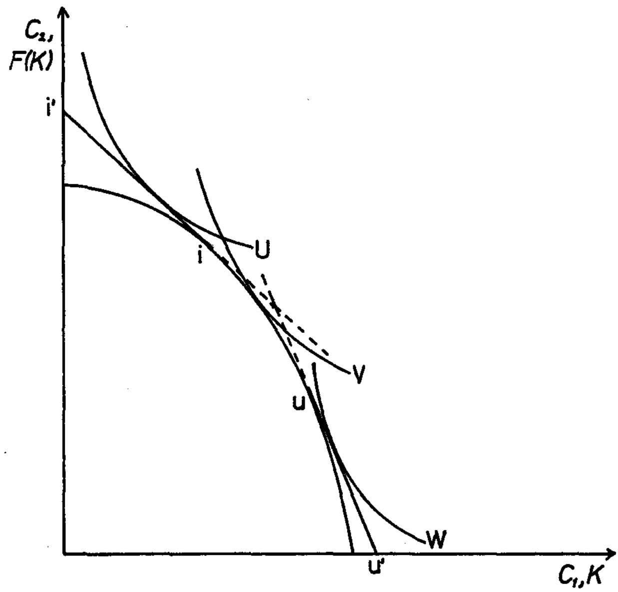

Fig. 5.

Vi kan nå oppsummere resultatene for tilfellet med forskjellig låne- og fordringsrente. (1) Fishers tosidige optimalitetskriterium, (a) maksimal kontantverdi av inntektsstrømmen og (b) likhet mellom den marginale substitusjonsrate i konsumet og 1 + rentesatsen, er stadig gyldig. (2) Hvorvidt låne- eller fordringsrenten er den teoretisk korrekte, avgjøres av om den optimale konsumplan gjør individet til låntaker eller långiver. Det er imidlertid en teoretisk mulighet for at ingen av de to er relevant.

Fisher-modellen kan brukes til å kaste lys over problemet om hvilket investeringskriterium som er det korrekte å bruke ved valg av investeringsprogram. Analysen ovenfor impliserer at kontantverdikriteriet er det teoretisk korrekte, i den forstand at det er konsistent med nyttemaksimering som den fundamentale målsetting. Det kan lett vises at i en toperiodisk analyse vil internrentekriteriet være ekvivalent med kontantverdikriteriet, men i flerperiodiske problemer reiser bruken av internrenten alvorlige problemer, som vi imidlertid ikke skal gå inn på her. Problemene er behandlet av bl. a. Hirschleifer [7] og Bailey [2].

Mer om separasjonsteoremet.

Det separasjonsteoremet vi utledet ovenfor i tilknytning til ligningene (8) og (9) og fig. 3 og 4 kan tolkes på to alternative måter. Den ene har vi allerede vært inne på: En konsument som også er produsent og kan investere direkte i produksjonsvirksomhet, kan nå sitt konsumoptimum ved en toskrittsprosess. Det optimale investeringsprogram fastlegge etter et rent «objektivt» kriterium, nemlig maksimal kontantverdi av inntektsstrømmen. Med denne inntektsstrømmen som et gitt datum fastlegges det optimale konsumprogram ved betingelsen $U_1/U_2 = 1 + r$ og realiseres ved transaksjoner i fordringsmarkedet.[1]

En alternativ tolkning av modellen er at den viser hvordan konsum- og investeringsbeslutningene kan desentraliseres når bedriftene følger målsettingen om maksimering av kontantverdien, eller «profittmaksimering på lang sikt». La en bestemt produksjonsbedrift være eiet av en gruppe konsumenter. Eierne behøver ikke selv lede bedriften, for de vet at når de pålegger bedriftsledelsen å gjennomføre det investeringsprogram som maksimerer kontantverdien, da er det en målsetting for bedriften som er konsistent med hver enkelt eiers ønske om å oppnå det beste konsumprogram som kan realiseres med de gitte ressurser og den gitte teknologi. Legg merke til at dette resonnementet ikke forutsetter noe om likhet i preferansene innen eiergruppen. Det eneste som teller for hver enkelt eier, er at bedriften følger en målsetting som bringer ham opp på den høyeste konsummulighetskurve.[2]

II. *Sparing og investering under usikkerhet.*

Innledning.

I vår diskusjon hittil har vi ikke tatt noe hensyn til at fremtiden som regel er preget av usikkerhet. Vi vet ikke med sikkerhet hva vår fremtidige inntekt vil bli, og vi vet heller ikke med sikkerhet hva våre investeringer vil kaste av seg. Diskusjonen i det følgende vil i det ve-

[1] Dette separasjonsteoremet holder ikke dersom individets arbeidsinnsats inngår som argument *både* i transformasjonsfunksjonen og i nyttefunksjonen.

[2] Ved forskjellige utlåns- og innlånsrenter må dette modifiseres. Eierne må nå også instruere bedriftsledelsen om hvilken rentesats den skal bruke i sine investeringskalkyler, og valget av rentesats er, som vist ovenfor, betinget av preferansene. Det vil derfor være et grunnlag for dannelse av eierkoalisjoner hvor eierne i noen bedrifter består av långivere, i andre av låntakere.

sentlige ha relevans for disse to typene av usikkerhet, men der er åpenbart mange andre former for usikkerhet som er av stor økonomisk betydning. For den individuelle konsuments sparebeslutning vil det f. eks. være av betydning at han ikke vet med sikkerhet hvor lang tid han har igjen å leve.

Hvorfor er vi egentlig så interessert i å innføre usikkerhet i en modell som denne? Det ligger jo implisitt i hele vår behandling av tilfellet med full sikkerhet at vi ser på dette som en god og legitim analyse av spare- og investeringsbeslutninger. Jeg tror det kan anføres tre grunner til at vi ønsker en slik generalisering og utvidelse av modellen.

Den første grunnen gir seg nærmest av seg selv. Et av de kriterier vi legger til grunn når vi bedømmer kvaliteten av en økonomisk modell, er dens grad av realisme. Når fremtiden i virkeligheten er usikker, er det et skritt i retning av øket realisme å ta hensyn til dette ved konstruksjon av modellen.

Den andre grunnen, som henger sammen med den første, er at innføringen av usikkerhet gjør det mulig å analysere fenomener i det økonomiske liv som ikke engang er meningsfylte når vi forutsetter full sikkerhet. Hvis avkastningen på alle typer aktiva var kjent, ville det for eksempel ikke være noen grunn til at folk skulle holde en diversifisert aksjeportefølje. Moderne porteføljeteori, som er en anvendelse av teorien for beslutninger under usikkerhet, kan forklare et slikt fenomen ved eksistensen av risikoaversjon og fordelen ved risikospredning.

Den tredje grunnen er at vi kan være interessert i å anvende modeller av denne typen som *normative* modeller med sikte på å gi regler for optimal adferd i situasjoner karakterisert av usikkerhet. Det ville være høyst urimelig å gi slike regler for en verden hvor et av de mest essensielle elementer ved beslutningssituasjonen er forutsatt bort.

Porteføljeteori.

Porteføljeteorien analyserer optimal formuessammensetning når avkastningen på de ulike typer aktiva er usikker. Som grunnleggeren av moderne porteføljeteori er det naturlig å regne Markowitz [9]. Den første som anvendte von Neumann og Morgensterns nytteforventningsteorem til å utlede etterspørselsfunksjoner for aktiva, var imidlertid Tobin [15]. Arrow [1] har senere presentert en elegant generalisering av opplegget hos Tobin.

En støter av og til på den misforståelse at porteføljeteorien er en slags spesialanalyse med sikte på formuesforvaltning i mer snever forstand. Men porteføljeteorien er av atskillig mer generell interesse for økonomisk teori. Vi skal her vise hvordan opplegget i porteføljeteorien kan betraktes som en direkte generalisering av kontantverdikriteriet i klassisk investeringsteori.[1]

Det er innlysende at kontantverdikriteriet er ekvivalent med det vi kan kalle *sluttverdikriteriet*. Hvis $V(K,r)$ er kontantverdien, er $(1 + r)V(K,r)$ sluttverdien, og den verdien av K som maksimerer kontantverdien, maksimerer også sluttverdien.

I porteføljeteorien tenker man seg at individet har en preferanseordning over sannsynlighetsfordelingen av formuens sluttverdi, Z. Denne preferanseordningen kan representeres ved en kontinuerlig, konkav[2] nyttefunksjon

$$W = W(Z)\,, \quad W'(Z) > 0, \quad W''(Z) < 0.$$

Anta nå at individet kan investere sin initialformue, A, i et sikkert aktivum (m) med avkastning r og i realkapital, hvor avkastningen er stokastisk. Dette kan vi uttrykke ved å innføre i transformasjonsfunksjonen en stokastisk variabel x med subjektiv tetthetsfunksjon $f(x)$. Transformasjonsfunksjonen blir da $F(K;x)$. Vi skal fra nå av, når ikke annet er sagt, forutsette $F_{KK} = 0$. Det gjør uttrykkene nedenfor noe mindre kompliserte og gjør dem lettere sammenlignbare med den tilsvarende analysen i [14]. Det er også interessant å merke seg at under usikkerhet og risikoaversjon byr det ikke på noen vanskeligheter å gjøre en slik forutsetning. Det kan vises at enhver nyttefunksjon som tilfredsstiller betingelsene for von Neumann og Morgensterns nytteforventningsteorem, må være begrenset både ovenfra og nedenfra. Et bevis for dette finnes hos Arrow [1].

Budsjettrestriksjonen er nå[3]

$$m + K = A\,,$$

[1] Dette er spesielt enkelt i en toperiodemodell. For en formulering av flerpriodemodellen, se Mossin [10].

[2] For en diskusjon av sammenhengen mellom konkavitet og risikoaversjon se Mossins artikkel i dette nummer av Statsøkonomisk Tidsskrift [11].

[3] Vi antar at $K \geqq 0$, mens m kan anta både positive og negative verdier. Betingelsen for $K \geqq 0$ er $E[F_k] \geqq r$.

mens sluttformuen er definert som

$$Z = F(K; x) + m(1 + r) .$$

Disse to uttrykkene kan kombineres til

$$Z = A(1 + r) + F(K; x) - K(1 + r) .$$

Forventet nytte kan nå skrives som

$$E[W(Z)] = \int W(A(1 + r) + F(K; x) - K(1 + r))f(x)dx$$

Maksimering med hensyn på K gir nå førsteordensbetingelsen

$$E[W'(Z)(F_K - 1 - r)] = 0 . \tag{10}$$

Av dette uttrykket ser vi at dersom $W'(Z)$ er konstant, altså lineær nytte, reduserer (10) seg til

$$E[F_K] = 1 + r . \tag{11}$$

Siden begge sider i denne ligningen er gitte tall, vil vi generelt ikke få noe indre maksimum i dette tilfellet. Hvis $E[F_K] < 1 + r$, er optimal investering 0, og for $E[F_K] > 1 + r$, er den uendelig. Men i tilfellet $F_{KK} < 0$ finnes der en endelig løsning, og kriteriet for optimal investering blir da ganske enkelt *maksimal forventet sluttverdi*. I det generelle tilfellet kan vi ikke formulere en regel som er fullt så enkel. Men ved å skrive (10) som

$$E[W'(Z)F_K] = E[W'(Z)(1 + r)] \tag{10'}$$

kan vi formulere følgende «Gossen-betingelse»: *Forventet nytte skal være den samme for den siste krone investert i hvert av de to aktiva.*

Under sikkerhet er optimal kapitalanvendelse en fallende funksjon av renten, r.[1] Vi skal nå undersøke om dette også holder under usikkerhet.

Annenordensbetingelsen for maksimum er

$$E[W''(Z)(F_K - 1 - r)^2] < 0 .$$

[1] Dette kan lett sees av f. eks. diagram 3 og 4. Ved høyere rente blir den rette linjen brattere, og punktet P forskyves mot I.

Ved implisitt derivasjon i (10) finner vi først virkningen på K av en endring i initialformuen som (Totaldiff. [illegible] 10)

$$\frac{\delta K}{\delta A} = -\frac{E[W''(Z)(F_k - 1 - r)](1 + r)}{E[W''(Z)(F_k - 1 - r)^2]}. \tag{12}$$

Det kan vises at telleren i denne brøken er positiv dersom nyttefunksjonen har synkende absolutt risikoaversjon.[1] Vi skal anta at dette er tilfelle og at $\delta K/\delta A$ følgelig er positiv. Vi kan nå skrive virkningen av en endring i renten som

$$\frac{\delta K}{\delta r} = \frac{m}{1 + r}\frac{\delta K}{\delta A} + \frac{E[W'(Z)]}{E[W''(Z)(F_k - 1 - r)^2]}. \tag{13}$$

Her er det andre leddet på høyre side substitusjonsvirkningen, som er negativ. Inntektsvirkningen trekker i samme retning for $m < 0$, altså når individet har tatt opp lån for å finansiere kjøp av realkapital. Men for $m > 0$ trekker inntekts- og substitusjonsvirkningen i hver sin retning, og fortegnet kan ikke entydig bestemmes.

I en modell med full sikkerhet kan vi avlede kontantverdikriteriet (eller sluttverdikriteriet) som konsistent med den underliggende, fundamentale målsetting som er nyttemaksimering over tiden. Kan kriteriet (10) gis en lignende begrunnelse? Dette er åpenbart det samme som å spørre om det kan gis en begrunnelse for å foreta separat analyse av spare- og porteføljebeslutninger.

Vi skal presisere dette spørsmålet: Finnes der en klasse av nyttefunksjoner $U(C_1, C_2)$ som er slik at optimalt konsum i første periode avhenger bare av initial inntekt og rente og er uavhengig av den stokastiske avkastning på kapitalen? I så fall ville det åpenbart også holde at optimal porteføljesammensetning vil kunne analyseres med porteføljens størrelse som et gitt datum.[2]

Før vi gir et svar på dette spørsmålet, skal vi stille opp en integrert modell for spare- og investeringsbeslutninger under usikkerhet.

[1] Se Jan Mossins artikkel [11], hvor der er et bevis for dette og en grundig diskusjon av risikoaversjonsbegrepet. Se også beviset i [13].

[2] Separat analyse av spare- og porteføljebeslutninger er selvsagt mulig dersom de to typene av beslutninger ikke har noen direkte sammenheng i tid, dvs. dersom usikkerheten med hensyn til kapitalens avkastning faller bort *før* sparebeslutningen tas. Men dette tilfellet er av liten interesse i denne sammenheng.

En integrert modell.

Vi tenker oss nå en konsument som maksimerer forventet nytte, $E[U(C_1, C_2)]$. Budsjettrestriksjonen er

$$C_1 + K + m = Y_1,$$

og konsum i periode 2 er en stokastisk variabel definert som

$$C_2 = F(K; x) + m(1 + r) .$$

Vi kan da skrive

$$C_2 = (Y_1 - C_1)(1 + r) + F(K; x) - K(1 + r) ,$$

og forventet nytte blir

$$\int U(C_1, (Y_1 - C_1)(1 + r) + F(K; x) - K(1 + r))f(x)dx .$$

Førsteordensbetingelsene for maksimum blir

$$E[U_1 - (1 + r)U_2] = 0 , \tag{14}$$

$$E[U_2(F_K - 1 - r)] = 0 . \tag{15}$$

Betingelsen (14) er en generalisering av Fishers klassiske «regel», mens (15) er en generalisering av optimumsbetingelsen i den rene porteføljeteorien. Den optimale konsumplan tilfredsstiller altså to betingelser:

(a) Forholdet mellom forventet nytte av den siste krone anvendt til konsum i periode 1 og forventet nytte av den siste krone investert med henblikk på konsum i periode 2 er lik $1 + r$, som er transformasjonsraten mellom konsum i første og annen periode ved investering i det sikre aktivum.

(b) Forventet nytte av den siste krone investert i hvert av de to aktiva må være den samme.

Annenordensbetingelsene for maksimum er

$$\begin{aligned} H = {} & E[U_{11} - 2(1 + r)U_{12} + (1 + r)^2 U_{22}]\, E[(F_K - 1 - r)^2 U_{22}] \\ & - \{E[(F_K - 1 - r)U_{12} - (1 + r)(F_K - 1 - r)U_{22}]\}^2 > 0 , \end{aligned} \tag{16}$$

$$E[U_{11} - 2(1 + r)U_{12} + (1 + r)^2 U_{22}] < 0 , \tag{17}$$

$$E[(F_K - 1 - r)^2 U_{22}] < 0\,. \tag{18}$$

Vi skal nå gi noen komparativ-statiske resultater for denne modellen. Den marginale forbrukstilbøyelighet er

$$\begin{aligned}\frac{\delta C_1}{\delta Y_1} = \frac{1}{H}\{&E[(1+r)^2 U_{22} - (1+r)U_{12}]E[(F_K - 1 - r)^2 U_{22}] \\ &+ E[(F_K - 1 - r)U_{12} - (1+r)(F_K - 1 - r)U_{22}] \\ &E[(1+r)(F_K - 1 - r)U_{22}]\}\,.\end{aligned} \tag{19}$$

På samme måte som under full sikkerhet kan ikke fortegnet på denne deriverte bestemmes uten ytterligere antagelser om nyttefunksjonens form.[1]

Virkningen på konsumet av en endring i renten blir

$$\begin{aligned}\frac{\delta C_1}{\delta r} &= \frac{m}{1+r}\frac{\delta C_1}{\delta Y_1} \\ &+ E[U_2]\frac{E[(F_K - 1 - r)^2 U_{22}] - E[(F_K - 1 - r)U_{12} - (1+r)(F_K - 1 - r)U_{22}]}{H}\end{aligned} \tag{20}$$

Det er her av interesse å merke seg at fortegnet på substitusjonsvirkningen ikke kan entydig bestemmes, mens det i modellen med full sikkerhet alltid er negativt. Rentevirkningen fører til en overføring av inntektsanvendelse *til* det sikre aktivum *fra* konsum og investering i realkapital, men selv når vi bare ser på substitusjonsvirkningen, er det ikke mulig å konkludere med at dette fører til en nedgang i konsumet.

Er også optimal kapitalanvendelse en fallende funksjon av renten? Vi har at

$$\begin{aligned}\frac{\delta K}{\delta r} = -\frac{m}{1+r}\frac{\delta K}{\delta Y_1} + \frac{E[U_2]}{H}\{&E[U_{11} - 2(1+r)U_{12} + (1+r)^2 U_{22}] \\ &- E[(F_K - 1 - r)U_{12} - (1+r)(F_K - 1 - r)U_{22}]\}\end{aligned} \tag{21}$$

Inntektsvirkningen svarer til den vi hadde i den rene porteføljemodellen, men det er ikke lenger mulig å bestemme fortegnet på substitusjonsvirkningen. Den intuitive tolkning av dette fremgår av kommentaren til ligning (20).

[1] Slike tilleggsantakelser er gjort i [14] ved å innføre en risikoaversjonsfunksjon og bestemte hypoteser om dens avhengighet av C_1 og C_2.

Separat analyse av spare- og porteføljebeslutninger.

Vi skal nå studere nærmere det spesialtilfelle hvor

(22) $$E[(F_K - 1 - r)U_{12} - (1 + r)(F_K - 1 - r)U_{22}] = 0.$$

Determinanten i formel (16) reduseres da til

$$H^* = E[U_{11} - 2(1 + r)U_{12} + (1 + r)^2 U_{22}]E[(F_K - 1 - r)^2 U_{22}],$$

og uttrykkene (19), (20) og (21) blir nå

(19') $$\frac{\delta C_1}{\delta Y_1} = (1 + r)\frac{E[(1 + r)U_{22} - U_{12}]}{E[U_{11} - 2(1 + r) + (1 + r)^2 U_{22}]},$$

(20') $$\frac{\delta C_1}{\delta r} = \frac{m}{1 + r}\frac{\delta C_1}{\delta Y_1} + \frac{E[U_2]}{E[U_{11} - 2(1 + r) + (1 + r)^2 U_{22}]},$$

(21) $$\frac{\delta K}{\delta r} = -\frac{m}{1 + r}\frac{\delta K}{\delta Y_1} + \frac{E[U_2]}{E[(F_K - 1 - r)^2 U_{22}]}.$$

Bortsett fra operatoren E er (19') og (20') identiske med uttrykkene (5) og (6) fra den rene sparemodellen under sikkerhet, forutsatt at vi setter $Y_1 - C_1 = m$, altså når all sparing finner sted i det sikre aktivum. Og (21') er identisk med (13) i den rene porteføljemodellen med grensenytten av sluttformuen erstattet av grensenytten av fremtidig konsum. Men dette betyr at når (22) holder, blir modellens komparativ-statiske egenskaper slik at beslutningene kunne vært splittet opp i to: Individet bestemmer optimal C_1 ved å maksimere nyttefunksjonen $U(C_1, C_2)$ under bibetingelsen $C_2 = Y_2 + (Y_1 - C_1)(1 + r)$. Dette gir optimalt konsum $\hat{C}_1$. Optimal porteføljesammensetning (investering) finnes ved maksimering av $U(\hat{C}_1, C_2)$ med porteføljens størrelse $K + m = Y_1 - C_1$ som et gitt datum.

Vi skal nå vise at betingelsen (22) følger når den marginale substitusjonsrate er lineær i C_2 for $\hat{C}_1 = C_1$.[1] Altså

(23) $$\frac{U_1(C_1, C_2)}{U_2(C_1, C_2)} = F(\hat{C}_1)C_2 + g(\hat{C}_1).$$

[1] Dette er vist på en annen måte av Dreze og Modigliani [3].

Ved å derivere med hensyn på C_2 får vi

$$\frac{U_{12}U_2 - U_{22}U_1}{U_2^2} = f(\hat{C}_1),$$

eller

$$\frac{1}{U_2}\left\{U_{12} - \frac{U_1}{U_2}U_{22}\right\} = f(\hat{C}_1).$$

Men når $C_1 = \hat{C}_1$, vet vi at $U_1/U_2 = 1 + r$. Altså har vi at

$$\frac{1}{U_2}\{U_{12} - (1 + r)U_{22}\} = f(\hat{C}_1).$$

Vi multipliserer nå med $U_2(F_K - 1 - r)$ og får

$$(F_K - 1 - r)U_{12} - (1 + r)(F_K - 1 - r)U_{22} = F(\hat{C}_1)U_2(F_K - 1 - r).$$

Vi tar nå forventningen på begge sider av likhetstegnet. Siden $F(\hat{C}_1)$ er en konstant, blir høyresiden 0 p.g.a. førsteordensbetingelsen (15). Beviset er dermed fullstendig.

En klasse nyttefunksjoner som tilfredsstiller betingelsen (23) er

$$U(C_1, C_2) = F(C_1^{\alpha}C_2^{\beta}) \qquad (F' > 0), \tag{24}$$

altså alle positive transformasjoner av Cobb-Douglas-funksjonen. Denne klassen nyttefunksjoner kan antas å ligge til grunn for Milton Friedmans konsumfunksjon [5], som forutsetter en *homotetisk* nyttefunksjon.[1]

Vi kan altså konkludere med at det under visse betingelser er mulig å separere spare- og porteføljebeslutninger for et enkelt individ under usikkerhet. I teorien kan vi da stadig operere med en analyse av sparebeslutningen som forutsetter full sikkerhet[2] og analysere investeringsbeslutningen ved hjelp av porteføljeteori med porteføljens størrelse som et gitt datum. Dette gir oss en langt mer komplisert investerings-

[1] At nyttefunksjonen er homotetisk vil si at

$$\frac{U_1(C_1, C_2)}{U_2(C_1, C_2)} = \frac{U_1(\lambda C_1, \lambda C_2)}{U_2(\lambda C_1, \lambda C_2)}. \qquad (\lambda > 0)$$

Dette betyr at den marginale substitusjonsbrøk avhenger bare av forholdet C_2/C_1 og ikke av konsumets absolutte nivå. Pestieau [12] har vist at betingelsen (23) og antakelsen om en homotetisk nyttefunksjon tilsammen impliserer (24).

[2] Forutsatt at der ikke er noen usikkerhet med hensyn til fremtidig inntekt, Y_2.

teori enn vi har under sikkerhet, for det er ikke lenger mulig å gi noe generelt, «objektivt» optimalitetskriterium som er uavhengig av individets preferanser. Men dette er prisen vi må betale for en mer realistisk teori.

Den andre tolkningen av Fishers separasjonsteorem har imidlertid ikke noe motstykke under usikkerhet. Det ser ikke ut til å finnes noen generell regel for optimale investeringsbeslutninger som gjør at de kan treffes desentralisert, uavhengig av de enkelte eieres preferanser.

REFERANSER

[1] ARROW, K. J.: *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Helsinki, 1965.

[2] BAILEY, M. J.: «Formal Criteria for Investment Decisions», *Journal of Political Economy*, 1959, s. 476–488.

[3] DRÈZE, J. og F. MODIGLIANI: «Consumption Decisions under Uncertainty», upublisert manuskript.

[4] FISHER, I.: *The Theory of Interest*, New York, 1930.

[5] FRIEDMAN, M.: *A Theory of the Consumption Function*, Princeton, 1957.

[6] HANSEN, B.: *Finanspolitikens ekonomiska teori*, Uppsala, 1955.

[7] HIRSCHLEIFER, J.: «On the Theory of Optimal Investment Decision», *Journal of Political Economy*, 1958, s. 329–352.

[8] — «Investment Decision under Uncertainty: Choice-Theoretic Approaches», *Quarterly Journal of Economics*, 1965, s. 509–536.

[9] MARKOWITZ, H. M.: «Portfolio Selection», *Journal of Finance*, 1952, s. 77–91.

[10] Mossin, J.: «Optimal Multiperiod Portfolio Policies», *Journal of Political Economy*, 1968.

[11] — «Risikoaversjon og beslutningsadferd», *Statsøkonomisk Tidsskrift*, 1968, s. 125.

[12] PESTIEAU, P.: «Epargne et consommation dans l'incertitude: Un modèle à trois périodes», *CORE Discussion Paper* nr. 6715 Louvain, 1967.

[13] SANDMO, A.: «Portfolio Choice in a Theory of Saving», *Swedish Journal of Economics*, 1968, s. 106–122.

[14] — «Capital Risk, Consumption and Portfolio Choice», stensilert, 1968. Vil bli publisert i *Econometrica*.

[15] TOBIN, J.: «Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk», *Review of Economic Studies*, 1958, s. 65–86.