NORGES HANDELSHØYSKOLE
Bergen, Våren 2006

Opsjonsprising

UTVIKLING OG BETYDNING AV BLACK-SCHOLES-MERTON-MODELLEN

Øystein Vormestrand

Veileder: Førsteamanuensis Jøril Mæland

Masterutredning i hovedprofilen Finansiell Økonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Forord

Denne masterutredningen ble utført som en obligatorisk del av Masterutdanningen ved Norges Handelshøyskole. Temaet var opsjonsprising, og utredningen tok for seg utviklingen og betydningen av Black, Scholes og Mertons opsjonsprisingsmodell. Dette ble satt i perspektiv ved at modellen ble grundig gjennomgått, og vurdert i forhold til styrker og begrensinger.

Jeg vil benytte anledningen til å takke min veileder Jøril Mæland for god rettledning underveis. Videre vil jeg takke det øvrige personellet ved høyskolen for assistanse med innhenting av informasjon.

Øystein Vormestrand

Norges Handelshøyskole, Bergen

20.06.2006

Sammendrag

Opsjoner er avtaler mellom to parter som gir kjøper retten til å kjøpe (selge) og utsteder plikt til å selge (kjøpe) et underliggende verdipapir innen en bestemt tidsperiode til en på forhånd bestemt pris eller innløsningskurs. Dette er en relativt ny investeringsform i det norske finansmiljøet, og hvordan disse prises er sentralt i bruken av dem.

I denne oppgaven ønsket jeg å ha et historisk perspektiv på opsjonsprising. Hvordan har opsjonsprisingsteorien utviklet seg, og hva har vært betydning av arbeidet til Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton? Black-Scholes-Merton-modellen er en sentral del av moderne finans. Modellen løste et problem som økonomer hadde brukt lang tid på å studere. Modellen kan anvendes på en mange problemstillinger, gjennom generalisering og utvidelser, og har vært av betydning både teoretisk og praktisk.

Den teoretiske betydningen har blant annet vært hvordan risikofri verdsetting og finans i kontinuerlig tid har påvirket finansteorien. Den praktiske betydningen har vært at modellen brukes til prising og risikostyring av opsjoner.

Innholdsfortegnelse

Kapittel 1: Innledning

Teoretiske nyvinninger gjør at finansverdenen er i stadig endring. Nye metoder blir stadig benyttet i aktørenes hverdag. Investorer og meglere foretar hele tiden verdiberegninger av finansielle instrumenter, og foretar investeringsvalg ut fra dette. Men hva er det som egentlig er bakgrunnen for deres handlemåte? Jeg opplever at det er grundige analyser som må ligge til grunn for enhver investering. Blant de mange redskapene aktørene innen derivathandel har tilgjengelig finner man teoretiske prisningsmodeller. For disse modellene er det mange forutsetninger og ulike parametere som inngår, og som er av stor betydning for resultatene man ender opp med. Interessen rundt teori og praksis innen finanssektoren har gitt mange verdifulle bidrag til lønnsomme og effektive markeder. Mange av de klokeste hodene verden har å tilby har studert problematikken rundt opsjonspriser. For økonomer er det både interessant og viktig å ha en klar formening om hvordan en opsjon prises.

Derivathandel som vi kjenner den i dag er et relativt nytt fenomen. Derfor er det spennende å se på det viktigste og mest omtalte bidraget innenfor dette området. Ved å se på Black, Scholes og Mertons modell for verdsetting av opsjoner kan man få større innsikt i deres banebrytende arbeid, og bedre forståelse av hvor viktig teoretiske prisingsmodeller er for finanssektoren. Temaet for oppgaven er å se på opsjonsprisingsmodellen til Black-Scholes-Merton, for å kunne svare på følgende spørsmål: Hva var foranledningen for arbeidet til Black-Scholes-Merton, og hvilken betydning har den utviklede modellen hatt? Problemstillingen blir altså å fortelle den delen av historien som ofte blir forbigått i en vanlig presentasjon av Black-Scholes-Merton-modellen. Med Black-Scholes-Merton-modellen forstår jeg modellen som ble utviklet av Fischer Black og Myron Scholes i samarbeid med Robert Merton for å bestemme en opsjons teoretiske verdi. Modellen ble publisert i 1973, i artiklene «The Pricing of Options and Corporate Liabilities» (Black og Scholes, 1973) og «The Theory of Rational Option Pricing» (Merton, 1973).

For å kunne vurdere betydningen av arbeidet til Black-Scholes-Merton, har jeg funnet det nødvendig å ta en grundig undersøkelse av litteraturen omkring derivater generelt og Black-Scholes-Merton spesielt. Kildene jeg har valgt er hovedsaklig amerikanske, ettersom det er her mye av utviklingen innen opsjonsprisingsteorien har funnet sted. Videre har jeg tatt for meg forskningsrapporter fra det finansielle utdanningssystemet for å være sikker på at informasjonen er oppdatert.

I kapittel 2, «Derivater», ser jeg på derivatenes historie, og formålet med disse instrumentene. Videre tar jeg for meg egenskaper ved dem, og ser på hvordan opsjoner omsettes i markedet. I kapittel 3, «Grunnleggerne av teoretisk opsjonsprising», går jeg gjennom de viktigste modellene for verdsettelse av opsjoner i tiden før 1973. I kapittel 4, «Black, Scholes og Mertons gjennombrudd», gjør jeg rede for deres arbeid for å finne en modell som priser opsjoner korrekt, og er viktig for å forstå nytten av modellen. Det femte kapittelet, «Mer om Black-Scholes-Merton-modellen», er en sentral del av oppgaven. Her ser jeg på ulike forhold angående modellen som ble utviklet, og hvilken nytte man har hatt av modellen. Kapittel 6, «Betydningen av B-S-M-modellen», tar for seg betydningen av opsjonsprisingsmodellen, og gir eksempler på anvendelse av teorien. I siste del, kapittel 7, vil jeg drøfte de funnene jeg har gjort, og anbefale forslag til videre studier.

Neste kapittel vil nå dreie seg om grunnleggende derivatteori, og jeg vil presentere ulike instrumenter som finnes både i Norge og i utlandet.

Kapittel 2: Derivater

2.1 Innledning

Derivater som finansinstrumenter har aner langt tilbake i tid, men bruken av dem er allikevel en relativt ny, og lite brukt, metode for å tjene penger på her til lands. I resten av verden har man sett at derivathandel har skutt fart, og dette er også noe man regner med at vil skje i Norge. Det er derfor interessant med en gjennomgang av formålet med derivathandel. Samtidig er det viktig å se på ulike egenskaper ved derivater, og i særlig grad opsjoner. I dette kapittelet tar jeg et tilbakeblikk over utviklingen av derivater og hvilken nytteverdi man har av dem. Videre diskuterer jeg hvordan instrumenter settes sammen i strategier, og hvordan handelen i det norske og amerikanske opsjonsmarkedet fungerer. Dette gjør at man er godt rustet til å se på verdsettingen av opsjoner med Black-Scholes-Merton-modellen, og forstå viktigheten av å ha en god modell for å prise opsjoner.

For å kunne skrive en oppgave om modellen til Black-Scholes-Merton, er det nødvendig å ta et steg tilbake og få et overblikk over hva derivater egentlig er. Derivater er et relativt nytt finansielt instrument, og er derfor ikke viden kjent. Finansielle instrumenter av denne typen er kompliserte, og bruk av avansert matematikk forekommer ofte. Oslo Børs definerer et derivatinstrument som et «verdipapir som er utledet av andre finansielle instrumenter og hvor kursutviklingen bestemmes av utviklingen i et eller flere underliggende instrumenter. Eksempler er opsjoner og futures» (www.oslobors.no). Av ordet kan man se at derivat stammer fra det engelske språk, der «derived from» betyr «avledet fra».

Derivater er en felles betegnelse for flere forskjellige instrumenter. Profesjonelle, så vel som private, investorer kan velge mellom å handle med opsjoner, swaps og terminer. Ettersom markedene for derivater har ekspandert, har investorer fått mulighet til å sikre seg mot så og si enhver finansiell risiko. Terminer er en felles betegnelse for futures- og forwardkontrakter. I det norske lovverket (Lov om verdipapirhandel, 1997) brukes følgende definisjoner: «med varederivater menes finansielle termin-, opsjons- eller byttekontrakter knyttet til varer eller tjenester. En derivatkontrakt som er gjenstand for omsetning på børs eller autorisert markedsplass regnes alltid som finansiell.» Med finansiell menes det at kontrakten er av pengemessig karakter.

2.2 Derivatenes historie

Derivater har eksistert som finansielle instrumenter i lang tid, men avledete instrumenter som finnes i markedet i dag er relativt nye fenomener. Opsjoner som avtaleform omtales faktisk i Bibelen. I kapittel 29 av Første Mosebok blir ekteskapsavtalen mellom Jakob og Laban presentert. Labans datter Rakel skulle bli Jakobs hustru mot at Jakob først jobbet i 7 år for Laban. Dersom det antas at Jakob hadde en rett, men ingen plikt til å gifte seg med Rakel, står man overfor en av de første kjente opsjonskontraktene. Tiden gikk fort, men uheldigvis for Jakob gikk Laban bort fra avtalen etter de syv årene var gått. Jakob fikk istedenfor tilbud om Lea som sin kone mot nye 7 år i arbeid, og deretter et giftemål med Rakel.

Den greske filosofen og forskeren Aristoteles (1992) på sin side, forteller historien om filosofen Thales, som ønsket å bevise at selv mennesker som ham kunne tjene penger. Mange hadde fortalt ham at hans liv som filosof bare hadde resultert i fattigdom for seg selv, og intet annet. Men Thales mente at dette ikke var relevant for hans suksess i livet, og ville vise at hans fattigdom ikke gjorde filosofien mindre viktig. Thales var begavet på flere områder, og kunne bruke stjernene, og deres plassering på himmelen for å finne ut noe om fremtiden. Ved å se opp mot nattehimmelen så han at neste innhøstning av olivener kom til å bli mye bedre enn vanlig, og gikk derfor til innehaverne av olivenpresser med et forslag. Det han foreslo var at han skulle betale et lite forskudd mot at han fikk førsteretten til olivenpressene ved innhøsting. Det var lenge til olivenene skulle høstes, og innehaverne av olivenpressene visste ikke om det kom til å bli et godt eller dårlig år.

Det var heller ingen andre som var villig til å betale for retten til pressene, så dermed fikk Thales en god pris. Som Thales forutså ble avlingen veldig bra, og han kunne derfor kreve den prisen han ville for å leie ut pressene til de mange etterspørrerene. Opsjonen Thales betalte for gjorde ham til en rik mann, selv om dette ikke var et poeng i seg selv for filosofen.

Bishop (1996) nevner forwardkontraktene som ble brukt av flamske handelsfolk så tidlig som på 1200-tallet. På 1700-tallet var det i Amsterdam, som tidligere har vært et viktig sted for handel, mulig å få handlet med både futures- og forwardkontrakter, samt andre derivater.

Omtrent samtidig vokste også futuresmarkedet for ris fram i Osaka, Japan. Mange av de erfaringene japanerne gjorde i denne perioden er fremdeles gjeldende for handel med terminer. Ris var en viktig råvare som ble brukt til å gi næring til en hel nasjon, og var et mulig betalingsmiddel for jordbruksskatt. Prisen på ris var fallende i denne perioden, og dette utgjorde en trussel mot levebrødet til vanlige familier. Samtidig var krigerne avhengige av ris både i form av forsyninger og kompensasjon for sine tjenester. Dette gjorde at den åttende Shogun innførte et system for clearing av futureskontrakter i 1730, for å få en stabil utvikling i rismarkedet. Dette systemet ble opprettet i Osaka, som ble omtalt som Japans kjøkken. Her startet mange handelsmenn institusjoner som kunne yte finansiell støtte til den nye handelsplassen. Myndighetene på sin side støttet handelen i et håp om at prisene på ris skulle stige for å unngå vedvarende deflasjon (Hamori *m.fl.*, 2001).

Det er altså mulig å finne spor av derivathandel langt tilbake i tid, og fra ulike steder i verden. Men det var i USA markedene for futures, forwards og opsjoner til de grader fikk utvikle seg. Hull (2002) tar for seg de viktigste hendelsene, og begynner med *The Chicago Board of Trade* som ble etablert i 1848, for at bønder og handelsmenn kunne finne sammen. I begynnelsen var det et behov for landbruksnæringen å ha større fleksibilitet og bedre risikostyring over sine inntekter. Avlinger over hele verden er avhengig av været, og dette gjaldt også for amerikanske bønder på 1800-tallet. Livet som bonde har fra tidenes begynnelse vært hardt arbeid, og det var derfor et ønske om en mer forutsigbar pris på avlingene. Dermed var det fritt frem for de som ville inngå ulike typer termin- og opsjonskontrakter. På denne måten ble en mer løsrevet fra værforholdene, som kunne endre seg dramatisk fra ett år til neste.

I 1874 ble *The Chicago Produce Exchange* startet opp, og her ble det mulig å handle med en lang rekke landbruksprodukter. Senere, i 1919, ble *Chicago Mercantile Exchange* benyttet til futures-handel. Det var tidlig på 1900-tallet at flere bedrifter gikk sammen for å etablere *The Put and Call Brokers and Dealers Association*. Formålet med dette var å skape et sted hvor kjøpere kunne kontakte en av bedriftene, som videre kunne formidle kontrakten.

Aksjeopsjoner ble populært på Wall Street i mellomkrigsårene, der meglere kunne utforme kontrakter som ble solgt over disk. Dette blir gjerne kalt «over the counter» som tilsier at kontraktene ble utformet etter hver enkelt investors behov. Dessverre var det også problemer med denne typen kontrakter, ettersom det var vanskelig å få solgt kontraktene i annenhåndsmarkedet. Videre ble det omsatt flere og flere kontrakter med forskjellige betingelser, som en følge av at hvem som helst hadde muligheten til å skreddersy sin kontrakt. Dette førte til at *Chicago Board Options Exchange* så dagens lys i april 1973, med hensikt å gjøre aksjeopsjoner mer standardiserte. Dette har blitt et populært tiltak blant investorer, og flere og flere børser begynte å føre denne typen produkter. Likevel har «over the counter»-markedet vokst sterkt, og er nå større enn volumet som handles på børs (Hull, 2006). Utviklingen har gått raskt, og nå handles det med opsjoner og terminer over hele verden, med underliggende varer som aksjer, aksjeindekser, pengemarkedsinstrumenter, råvarer, olje, gull osv.

Svenskene var de første i Skandinavia som hadde suksess med derivathandel. I 1990 var det Norge som stod for tur, og opsjonen så dagens lys i finansmarkedet. I Norge er det opsjoner og terminer som er blitt standardisert med hensyn på kontraktsstørrelse, løpetid og leveringsbetingelser. Den første tiden var det bare aksjene til Norsk Hydro, DnB, Bergersen d.y. og Hafslund Nycomed som det var mulig å handle aksjeopsjoner med. Senere har flere selskaper blitt notert (www.opsjoner.com).

Bruken av derivater har også blitt utvidet til andre finansielle markeder etablert i nyere tid, deriblant Nord Pool (kraftderivater, 1993), Imarex (fraktderivater innen shipping, 2001) og Fish Pool (fisk- og sjømat-derivater, 2006).

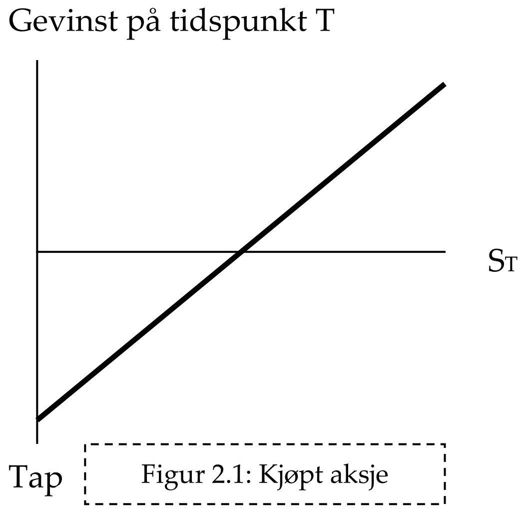
2.3 Ulike instrumenter og bruk av disse til risikostyring

Derivatenes inntog i de finansielle markedene har ført til at det nå er mange instrumenter som det er mulig å handle med. Felles for dem alle er at det ligger et underliggende instrument til grunn for verdsettelsen av derivatet. Blant de mest brukte underliggende aktiva finner man aksjer eller aksjeindekser. Andre underliggende aktiva kan være råvarer, kraftpriser, værutvikling, renter, valuta og realinvesteringer. For opsjoner finnes det fire grunnposisjoner. Disse posisjonene er de mest elementære strategiene innen opsjonshandel, og kalles gjerne «nakne» eller udekkede posisjoner. Disse blir omtalt nedenfor i avsnitt 2.3.3 og 2.3.4. For å gi en grafisk fremstilling av posisjonene som kan inntas i markedet, brukes avkastningskurven. Avkastningskurven viser gevinst eller tap for en posisjon som en funksjon av aksjekursen (www.opsjoner.com). Avkastningskurven blir også omtalt som avkastningsprofil og pay-off kurve. På den horisontale aksen ser man gevinst vs tap, og den vertikale aksen viser kurs på underliggende aktiva ved forfall (S_T).

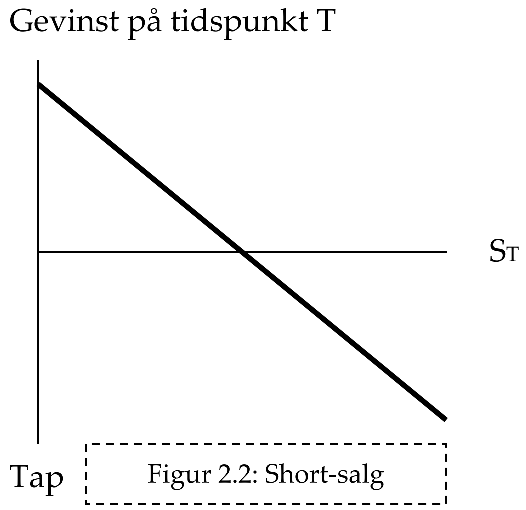
2.3.1 Aksjer

Kjøperen av en aksje forventer gjerne en positiv kursutvikling for en spesifikk aksje. For hver krone aksjekursen stiger, tjener investoren en krone pr. aksje som er kjøpt. Det motsatte er tilfellet dersom kursen synker. Dersom aksjekursen faller til null, er hele det investerte beløpet tapt. Fordelen er at kursen kan stige ubegrenset, og gevinstpotensialet er likedan. Figur 2.1 viser dette grafisk, der 45-graders linjen representerer gevinsten fra aksjekjøpet som funksjon av aksjeprisen på tidspunkt T, S_T.

«Short-salg» betyr at man selger noe man ikke eier. Dette skjer ved at den som shorter låner for eksempel aksjer av en bank eller fondsmegler. Innen et gitt tidspunkt må aksjene som er lånt tilbake til den rettmessige eier, og den som har «shortet» må kjøpe i markedet. Dersom kursen har falt tjener en penger fordi en kan kjøpe aksjene tilbake for en mindre sum enn de ble solgt for. Uheldigvis kan kursen gå i motsatt retning, og en taper penger dersom situasjonen tilsier at aksjene må kjøpes tilbake for mer enn de ble solgt for. Fra figur 2.2 ser man at en kort posisjon gir motsatt profil enn hva som er tilfellet om en kjøper aksjer. Dette gjør at tapsmulighetene er ubegrenset.



Figur 2.1: Kjøpt aksje



Figur 2.2: Short-salg

2.3.2 Terminer

Fellesbetegnelsen for forward- og futureskontrakter er som tidligere nevnt terminkontrakt. En forwardkontrakt eller futureskontrakt er en avtale om kjøp eller salg av et underliggende aktivum på et bestemt tidspunkt i fremtiden til en forhåndsdefinert pris. Dette betyr at det som skiller mellom kjøp av underliggende aktiva til spotpris og en terminkontrakt på aktiva, er at oppgjøret av handelen skjer frem i tid ved en terminkontrakt. For en forwardkontrakt vil oppgjøret falle på samme dag som forfallsdagen, mens en futureskontrakt vil ha daglige oppgjør. For terminer som enten er kjøpt eller solgt vil man ha de samme avkastningskurvene som for kjøp og salg av underliggende verdipapir.

Utbetalingen fra en kjøpt/lang posisjon i en forwardkontrakt kan skrives som:

$$S_T - F_0$$

der S_T er spotprisen ved forfall, og F_0 representerer forwardprisen, som er leveringsprisen. Sammenhengen mellom spotpris og forwardpris er $F_0 = S_0 e^{r_f T}$, der r_f er risikofri rente, og T er tid til forfall.

Utbetalingen fra en utstedt/kort posisjon i en forwardkontrakt kan skrives som:

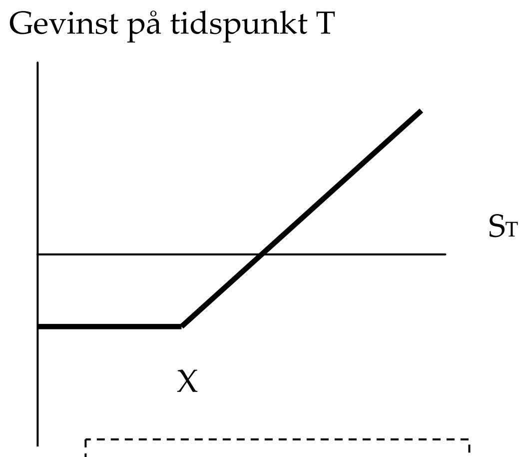
$$F_0 - S_T$$

2.3.3 Kjøpsopsjoner

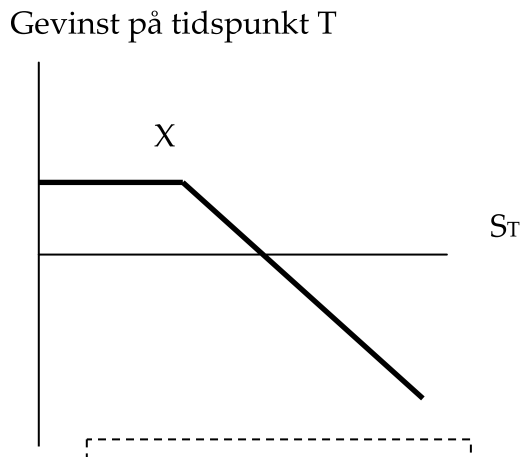
Eieren av en kjøpsopsjon (long call) har rettigheten til å kjøpe den underliggende varen til innløsningskursen. For denne rettigheten betaler han en premie. Motivasjon for å kjøpe en kjøpsopsjon kan være at en forventer at underliggende, for eksempel en aksje, skal stige i verdi. Ved å kjøpe en kjøpsopsjon kan en ta del i en eventuell stigning i kursen, uten at en er forpliktet til å kjøpe underliggende aktiva. Dette gjør at investoren ikke taper mer enn premien som er betalt. Dersom kursutviklingen har vært god kan en innløse opsjonen og selge underliggende aktivum i markedet. Figur 2.3 viser at denne posisjonen gir gevinst når kursen på underliggende aktiva ved forfall er høyere enn innløsningskursen og premien som er betalt. På denne måten kan en oppnå store gevinster.

«Gearing-effekten» refererer til avkastningen på opsjoner i forhold til aksjer. For et relativt lite beløp kan en opsjonsinvestor få en avkastning som i vesentlig grad overgår tilsvarende aksjeinvestering (www.oslobors.no). Dersom kjøpsopsjoner kjøpes for å styre risiko, begrunnes dette med at man vil sikre seg mot prisøkninger. Dette gjør at man ikke taper penger om markedet stiger. Videre kan det presiseres at datoen en opsjonskontrakt forfaller kalles bortfallsdag på norsk, og er altså det tidspunktet da rettighetene og pliktene ved opsjonen ikke gjelder lenger.

Utstederen av en kjøpsopsjon (short call) er forpliktet til å selge den underliggende varen til innløsningskursen. For å påta seg denne forpliktelsen mottar investoren en premie. Dette gjøres for eksempel dersom en har liten tro på at kursen på underliggende vil stige framover. Premien som blir mottatt har flere formål, nemlig at den øker avkastningen på den underliggende varen og samtidig gir en kompensasjon i de tilfellene der kursen faller. Stiger kursen, så vil opsjonen ofte bli innløst, og premien vil da være en kompensasjon for kursgevinsten som en ikke får dra nytten av. Figur 2.4 viser at en short call har begrenset gevinstpotensial, og muligheter for et ubegrenset tap, der X er innløsningskurs.



Figur 2.3: Kjøpt kjøpsopsjon



Figur 2.4: Utstedt kjøpsopsjon

Utbetalingen fra en innehatt/lang posisjon i en kjøpsopsjon kan skrives som:

$$\max (S_T - X, 0)$$

Dette betyr at opsjonen blir innløst når $S_T > X$, og ikke innløst når $S_T \leq X$

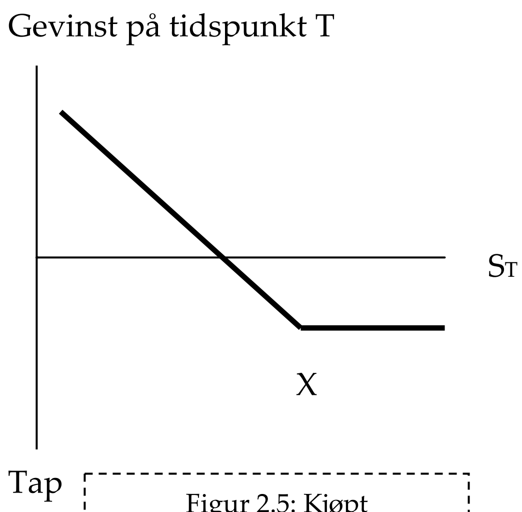
Utbetalingen fra en utstedt/kort posisjon i en kjøpsopsjon kan skrives som:

$$-\max (S_T - X, 0) = \min (X - S_T, 0)$$

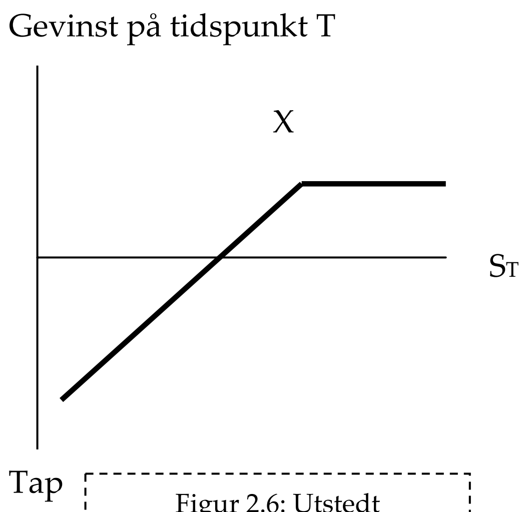
2.3.4 Salgsopsjoner

Kjøperen av en salgsopsjon (long put) har rettigheten til å kjøpe den underliggende varen til innløsningskursen. For denne rettigheten betaler han en premie. Tanken bak et slikt kjøp kan være at en forventer at kursen på underliggende skal falle. På denne måten er en sikret en minimumspris på den underliggende varen. Dermed kan en selge til en høyere pris en det som oppnås i markedet om kursen skulle falle, og en er ikke forpliktet til å selge dersom kursen stiger. Figur 2.5 viser at det er gevinstmuligheter i tilfeller der kursen på underliggende aktiva faller.

Utstederen av en salgsopsjon (short put) er forpliktet til å kjøpe den underliggende varen til innløsningskursen. Ved å påta seg denne forpliktelsen mottar investoren en premie. En motivasjon for å utstede en salgsopsjon er at en er av den oppfatning at kursen fremover vil ligge stille, eller i ytterste tilfelle stige litt. Om utviklingen blir som forventet, blir ikke opsjonen innløst, og premien beholdes. Faller kursen må en som utsteder salgsopsjonen kjøpe den underliggende varen til en kurs som er høyere enn det som er markedskurs. Figur 2.6 viser at premien beholdes i sin helhet når kursen på underliggende aktiva er over innløsningskursen. Når kursen på underliggende aktiva faller under innløsningskursen, vil gevinsten fra premien forsvinne, og det vil etter hvert være mulig å tape på den utstedte salgsopsjonen.



Figur 2.5: Kjøpt salgsopsjon



Figur 2.6: Utstedt salgsopsjon

Utbetalingen fra en innehatt/lang posisjon i en salgsopsjon kan skrives som:

$$\max (X - S_T, 0)$$

Utbetalingen fra en utstedt/kort posisjon i en salgsopsjon kan skrives som:

$$-\max (X - S_T, 0) = \min (S_T - X, 0)$$

2.3.5 Warrant

Med en warrant menes en opsjon utstedt av et foretak eller finansinstitusjon. Når disse utøves vil antall aksjer i foretaket øke, noe som resulterer i en utvanningseffekt. Innehaveren av en warrant vil, som ved vanlige opsjoner, ikke motta dividende, og verdien av warranten vil derfor falle hver gang dividende utbetales. Videre vil en warrant ofte ha lengre løpetid enn en opsjon som er omsatt på børs.

2.3.6 Swap

Med en swap menes en avtale om å bytte kontantstrøm på et fremtidig tidspunkt. Avtalen gir informasjon om når bytte av kontantstrøm skal skje og hvordan kontantstrømmene skal beregnes. Det skilles hovedsakelig mellom renteswap og valutaswap. Ved en renteswap mottar den ene aktøren flytende rente, mot at man gir fra seg en fast rente til den andre aktøren. Ved en valutaswap vil den ene aktøren betaler rente på pålydende beløp i en bestemt valuta, mot at man får tilbake pålydende i en annen valuta fra den andre aktøren. Andre typer swapkontrakter er kredittderivater, som beskytter långiver mot risikoen for at låntaker skal misligholde gjelden. Det mest kjente kredittderivatet er en default swap, der kjøperen av swapkontrakten betaler en fast premie mot at motparten betaler tapet dersom en låntaker misligholder et lån.

Det finnes altså en rekke ulike derivater og tilhørende underliggende aktivum som kan gi mange forskjellige utbetalingsprofiler.

2.4 Ulike typer opsjoner

To hovedtyper opsjoner er europeiske og amerikanske opsjoner. Forskjellen ligger i opsjonenes egenskaper, og har ingenting med hvor de blir omsatt. En europeisk opsjon kan kun innløses på bortfallsdagen, og det var for denne typen opsjoner Black, Scholes og Merton fant en formel for verdsetting. En amerikansk opsjon kan innløses når som helst i hele perioden, frem til og med bortfallsdagen.

Dette betyr at en amerikansk opsjon er verdt minst like mye som den tilsvarende europeiske opsjonen fordi den gir større fleksibilitet, noe som øker verdien på opsjoner. Denne opsjonstypen vil bli drøftet senere.

En bermuda-opsjon er en amerikansk opsjon i den forstand at den kan innløses før forfall, men bare på bestemte tidspunkter. Et derivat som er mye brukt, er opsjoner av asiatisk type. Disse opsjonene har den egenskapen at opsjonens utbetaling avhenger av den gjennomsnittlige kursutviklingen for underliggende aktivum over en gitt tidsperiode.

Compound opsjoner er opsjoner på opsjoner, der en stort sett skiller mellom en kjøpsopsjon på en kjøpsopsjon, en salgsopsjon på en kjøpsopsjon, en kjøpsopsjon på en salgsopsjon, og en salgsopsjon på en salgsopsjon. Denne typen opsjoner har to innløsningskurser og to bortfallsdager.

En chooser opsjon gir innehaveren rett til å velge om opsjonen skal være en kjøpsopsjon eller en salgsopsjon.

Barriere opsjoner er opsjoner som avhenger om underliggende aktivum når et forhåndsdefinert nivå gjennom opsjonens levetid. En knock-in opsjon starter sin levetid når nivået blir nådd, mens en knock-out opsjon faller bort ved barrieren.

Verdien av en opsjon avhenger blant annet av om den er in-the-money, out-of-the-money eller at-the-money. In-the-money er en opsjon med realverdi. Det vil si at en kjøpsopsjons innløsningskurs er lavere enn markedskursen på underliggende verdi, og at en salgsopsjons innløsningskurs er høyere enn markedskursen på underliggende verdi. Out-of-the-money er en opsjon uten realverdi. Det vil si at en kjøpsopsjons innløsningskurs er høyere enn markedskursen på underliggende verdi, og at en salgsopsjons innløsningskurs er lavere enn markedskursen på underliggende verdi. At-the-money er en opsjon der opsjonens innløsningskurs er tilnærmet lik underliggende markedspris. Opsjonens realverdi er tilnærmet lik null (www.opsjoner.com).

Det er nødvendig med en metode som skiller ulike børsnoterte opsjonsserier fra hverandre, og identifiserer dem på en entydig måte. Betegnelser på opsjonsserier angir nødvendige opplysninger som underliggende vare, innløsningskurs, bortfallsdato, og om det dreier seg om en kjøpsopsjon eller salgsopsjon. På Oslo børs angir de første tre tegnene underliggende aksje eller indeks. Dette kan for eksempel være NHY (Norsk Hydro) eller OBX (OBX-aksjeindeks). Tegn nummer 4 angir året som opsjonen bortfaller. Tegn 5 angir bortfallsmåned og opsjonens type. Bokstavene A-L angir kjøpsopsjoner med bortfallsmåned januar-desember, og bokstavene M-X angir salgsopsjoner med bortfallsmåned januar-desember. Tegn 6-8 angir opsjonens innløsningskurs.

Ticker kode: **NHY 5F 440**

Innløsningskurs

Type og
bortfallsmåned/år

Underliggende
aksje/indeks

2.5 Opsjonsstrategier

Man kan fra det foregående se at det finnes mange derivater, og særlig mange typer opsjoner å velge mellom. Forskjellige aktører bruker opsjoner til ulike formål. Noen investorer vil ønske å bruke opsjoner til spekulasjon, mens bedrifter ofte vil risikostyre ved bruk av derivater. Market makere, som tilbyr å kjøpe og selge opsjoner på samme tidspunkt, vil gjerne sikre sine posisjoner. Dette betyr at man er avhengig av å sette sammen ulike instrumenter i en strategi for å oppnå en ønsket kontantstrøm.

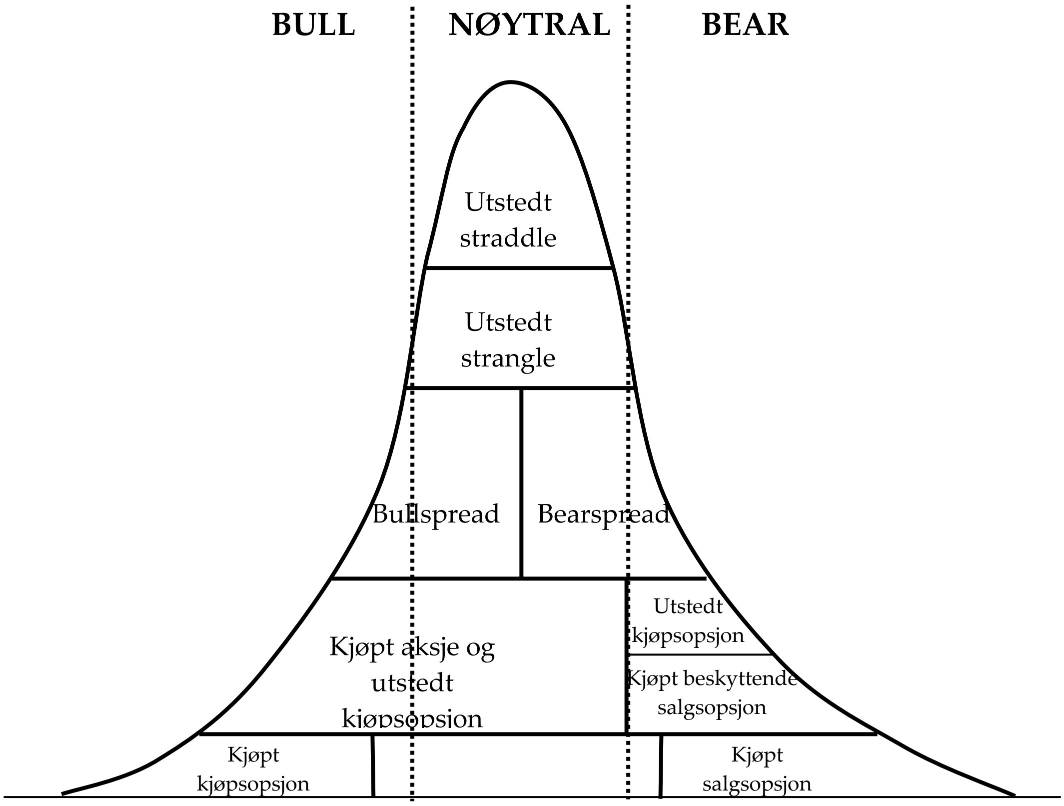
Dersom en opsjonsstrategi bestående av flere opsjoner kan deles opp i enkeltopsjoner, vil verdien av strategien være lik summen av verdiene til de ulike delene. Dette prinsippet kalles verdiadditivitet.

Det er flere hensyn som må tas til følge før kapital investeres i en opsjonsstrategi. En strategi bør baseres på investors forventning til den fremtidige aksjeutvikling, samt investors behov, mål og risikovilje. Videre ser en på investors valg av finansinstrumenter – spot, opsjon eller kombinasjon av disse og overvåking og oppfølging – hvordan investors handlingsalternativ forandres i løpetiden

Ved å bruke de mange alternativene som er tilgjengelige, er investoren godt rustet for å oppnå ønsket risikonivå eller spesifikke kontantstrømmer. Salomon Jr. (1994) argumenterer for at individuelle investorer ikke bør bruke opsjoner til å øke risikoen på sine investeringer, fordi opsjoner ikke er et substitutt til å kjøpe aksjer. Opsjoner er kortsiktige instrumenter, og investorens beste mulighet for gevinst er ved kjøp av aksjer og holde dem langsiktig. Opsjoner kan fremdeles være nyttige som risikostyringsinstrument.

Opsjonsspekteret i Fig. 2.7 (www.opsjoner.com [1]) gir en oversikt over strategier som er vanlige i opsjonsmarkedet. Spekteret er inndelt i tre ulike felt, som viser hvilke strategier en kan benytte ut fra forskjellige markedsforventninger. Et Bear-marked viser til en situasjon der et negativt marked forventes. De strategiene som passer til denne forventningen ligger til høyre i opsjonsspekteret. Har man derimot en nøytral markedsforventning, velges en av strategiene midt i spekteret. Er man i den situasjonen at en forventer en positiv utvikling, velger man fra strategiene til venstre. Disse strategiene passer når man er positiv til markedsutviklingen, og en står ovenfor et Bull-marked. Opsjonsstrategiene er nærmere forklart i de neste avsnittene.

[1] Figur 2.7 hentet fra «Opsjoner på egenhånd» – selvstudium fra opsjoner.com s. 62

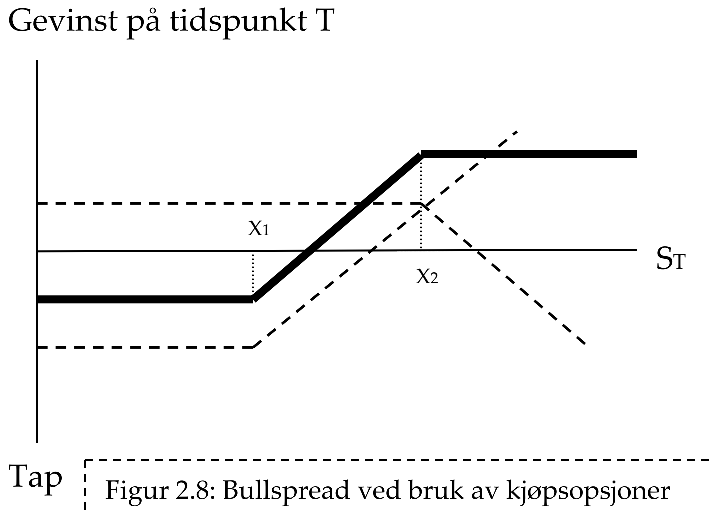


Figur 2.7: Opsjonsspekteret

2.5.1 Bullspread

En investor som tror at markedet vil gjøre moderat framgang, kan inngå en Bullspread. En Bullspread består vanligvis av en kjøpt kjøpsopsjon (long call) med lav innløsningskurs (X_1), og en utstedt kjøpsopsjon (short call) med høyere innløsningskurs (X_2) og samme bortfallsdato. Denne strategien gjør at premien på den kjøpte kjøpsopsjonen forandres mer ved en forandring i kursen på underliggende enn premien på den utstedte opsjonen. Dersom kursen på underliggende aktiva stiger, vil premien på den kjøpte kjøpsopsjonen øke raskere i verdi enn den utstedte kjøpsopsjonen. Av figur 2.8 ser en at det er den tykke linjen som utgjør Bullspreaden, og at en ved å bruke denne strategien kan få fortjeneste dersom kursen stiger, uten at en er helt udekket dersom kursen faller. Denne forsikringen mot kursfall begrenser oppsiden. På den andre siden vil totalkostnaden ved strategien være lavere enn ved kjøp av en enkelt kjøpsopsjon, ettersom investor mottar premien på den solgte kjøpsopsjonen.

Denne strategien kan også skapes ved bruk av salgsopsjoner. Da må en kjøpe en salgsopsjon med lav innløsningskurs, og selge en salgsopsjon med høy innløsningskurs. En slik sammensetning vil medføre et positivt beløp til innehaveren av posisjonen ved tid 0, og en utbetaling ved innløsning som enten er negativ eller null.

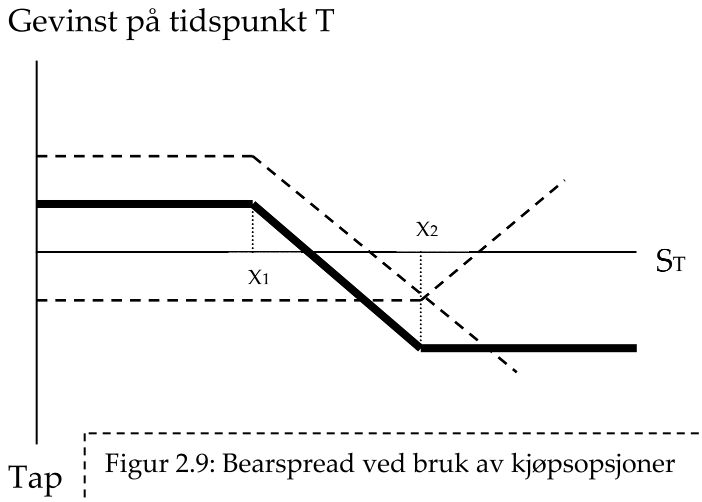


Figur 2.8: Bullspread ved bruk av kjøpsopsjoner

2.5.2 Bearspread

Ikke alle investorer er like, og dersom en mener at kursene kan komme til å falle i tiden framover, kan man sette sammen en Bearspread. Som Bullspreaden kan denne strategien lages ved hjelp av enten kjøps- eller salgsopsjoner. Men i dette tilfellet må en kjøpe kjøpsopsjonen med høyere innløsningskurs (X_2), enn den utstedte kjøpsopsjonen med lavere innløsningskurs (X_1), og begge opsjonene må ha samme bortfallsdato. Når kursen faller vil premien på den utstedte opsjonen falle raskere enn premien på opsjonen en eier. Som figur 2.9 viser, vil også denne strategien begrense både gevinstpotensialet og nedsiderisikoen.

En Bearspread kan som tidligere nevnt også lages ved å benytte salgsopsjoner. Da kjøpes en salgsopsjon med høyere innløsningskurs, og en utsteder en salgsopsjon med lavere innløsningskurs og samme bortfallsdato. Dersom en aktør velger denne fremgangsmåten må han eller hun ut med et positivt beløp ved tid 0, og på denne måten oppgir aktøren noe av fortjenestemulighetene mot at strategien skal bli billigere enn om en bare hadde kjøpt en enkelt salgsopsjon.



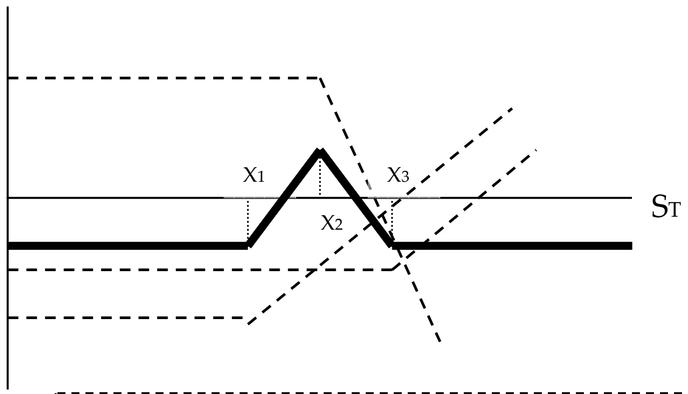
Figur 2.9: Bearspread ved bruk av kjøpsopsjoner

2.5.3 Butterflyspread

Det er ikke alltid mye aktivitet på markedene rundt omkring i verden, og da er det passende å ikke forvente de helt store endringene, enten i den ene eller den andre retningen. Dersom man som investor ser for seg at det i tiden fremover er lite sannsynlig at det vil forekomme store endringer i kursen på underliggende, kan en Butterflyspread gi en pen gevinst. Til denne strategien trengs det opsjoner med tre forskjellige innløsningskurser. Figur 2.10 viser hvordan en Butterflyspread kan settes sammen. Man kjøper en kjøpsopsjon med relativ lav innløsningskurs (X_1), og en kjøpsopsjon med relativ høy innløsningskurs (X_3). Dernest selger man to kjøpsopsjoner med innløsningskurs (X_2) midt mellom de andre. Innløsningskursen til de utstedte opsjonene er som regel nær dagens kurs. Dersom kursene ligger nær X_2 på bortfallsdagen oppnår man en fortjeneste, men man går på et lite tap dersom kursene beveger seg drastisk opp eller ned.

Dersom investoren velger å bruke salgsopsjoner til denne strategien, kjøpes en salgsopsjon med lav og en med høy innløsningskurs, og det selges to salgsopsjoner med kurs midt mellom.

Gevinst på tidspunkt T



Tap

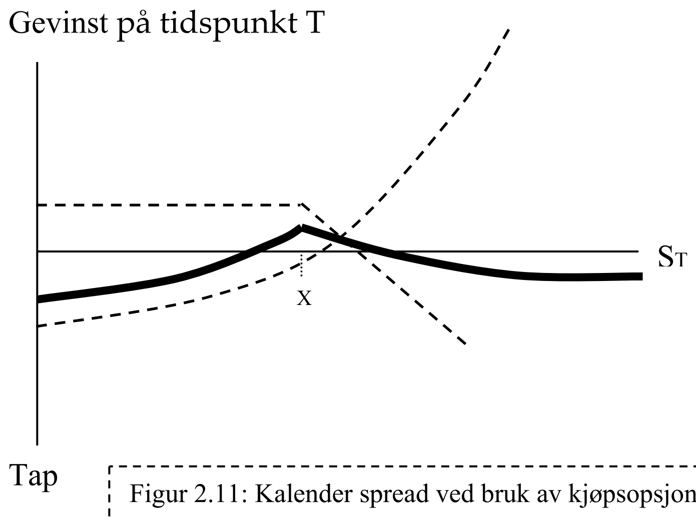
Figur 2.10: Butterfly spread ved bruk av kjøpsopsjoner

2.3.4 Kalender spread

En kalender spread dannes ved at investoren selger en kjøpsopsjon med en bestemt innløsningskurs, og kjøper en kjøpsopsjon med lenger tid til forfall med samme innløsningskurs. Figur 2.11 viser gevinstmulighetene fra denne posisjonen, og det er mulig å se at utbetalingen er på linje med hva man får av butterflyspreaden i figur 2.10. Desto lengre tid til forfall det er på opsjonen, desto dyrere blir den som oftest. Dette betyr at en må ut med et positivt beløp til å begynne med for å sette sammen strategien.

Når underliggende aktiva har veldig lav kurs når opsjonen med kort tid til forfall forfaller, vil denne opsjonen være verdiløs. Samtidig vil verdien på opsjonen med lang tid til forfall være nesten null. Investoren må dermed tåle et tap som er nesten lik kostnaden ved å sette sammen posisjonen. Skulle derimot verdien på underliggende aktiva være nær innløsningskursen, så vil tapet fra opsjonen med kort levetid være begrenset. Samtidig vil verdien på opsjonen med lang levetid være høy. Nettogevinsten kan derfor bli stor, fordi når børskursen forblir uforandret så vil prisforskjellen mellom de to opsjonene øke etter hvert som tiden går.

I en nøytral kalender spread velges en innløsningskurs nær den nåværende aksjekursen. En bullish kalender spread gjør seg nytte av en høyere innløsningskurs, mens en bearish kalender spread benytter en lavere innløsningskurs. Kalender spread kan også lages ved å kjøpe en salgsopsjon med lang tid til forfall, og selge en salgsopsjon med kort tid til forfall.

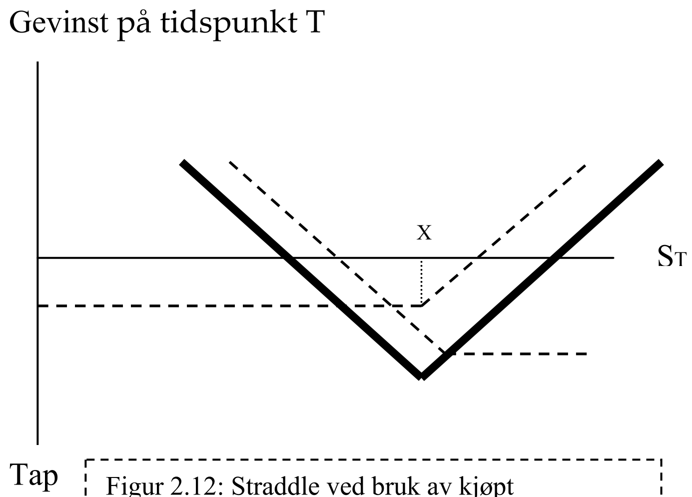


Figur 2.11: Kalender spread ved bruk av kjøpsopsjoner

2.5.5 Straddle

En straddle dannes ved at investoren kjøper en kjøpsopsjon og en salgsopsjon med samme innløsningskurs og forfallsdato. Strategien som er vist i figur 2.12 er en bottom straddle. Denne strategien er hensiktsmessig når man forventer store prisendringer på underliggende aktiva, men er usikker på hvilken retning kursen vil gå. Investor tror med andre ord at volatiliteten er høyere enn det markedsprisene tilsier. Ved kursoppgang vil kjøpsopsjonen gi profitt, og ved kursnedgang vil salgsopsjonen gi profitt. Ulempen ved en slik posisjon er at det kan være dyrt å kjøpe to opsjoner.

Strategien kan også dannes ved at man selger en kjøpsopsjon og en salgsopsjon med samme innløsningskurs og forfallsdato. Dette er en veldig risikabel strategi, og kalles for top straddle. Strategien er risikabel, ettersom tapet kan være ubegrenset. Derfor må en slik posisjon overvåkes nøye.

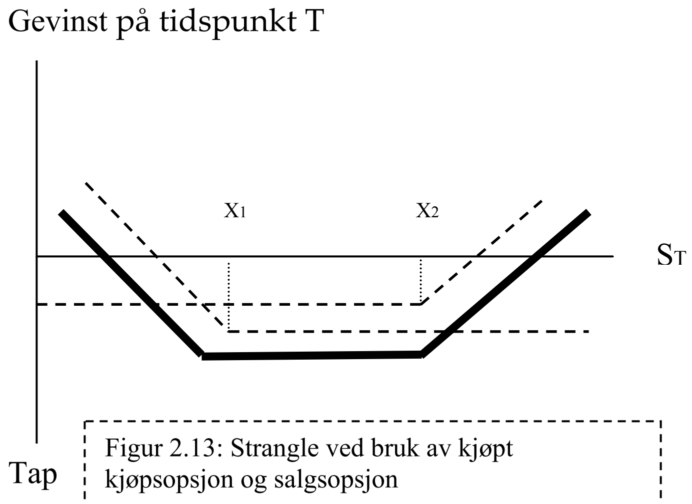


Figur 2.12: Straddle ved bruk av kjøpt kjøpsopsjon og salgsopsjon

2.5.6 Strangle

En strangle (bottom vertical combination) dannes ved at man kjøper en salgsopsjon og en kjøpsopsjon med samme forfallsdato, men med ulik innløsningskurs. Kjøpsopjonens innløsningskurs (X_2) er høyere enn salgsopsjonens innløsningskurs (X_1). Figur 2.13 viser hvordan strategien gir gevinst når det er store prisbevegelser i underliggende aktivum. Denne strategien vil være billigere enn en straddle, fordi man nå kjøper out-of-the-money opsjoner, som koster mindre enn at-the-money opsjoner som brukes ved straddles. Dette betyr at potensielt tap blir noe lavere, men gevinsten blir derfor mindre ved store endringer i kursen på underliggende aktiva.

Strategien kan også dannes ved at man selger en kjøpsopsjon og en salgsopsjon med samme forfallsdato, men med ulik innløsningskurs. Dette er også en veldig risikabel strategi, og kalles for top vertical combination.

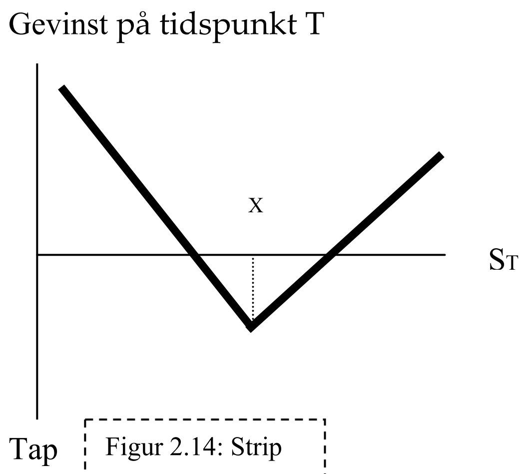


Figur 2.13: Strangle ved bruk av kjøpt kjøpsopsjon og salgsopsjon

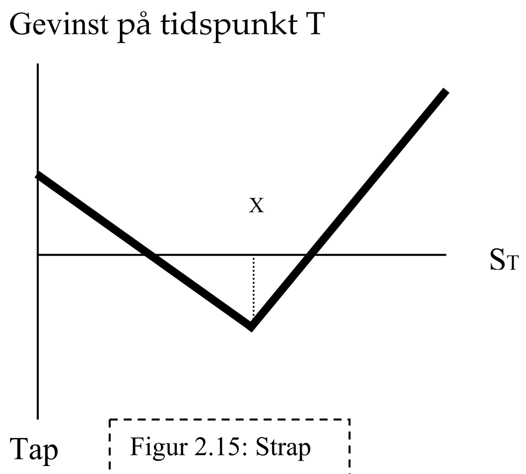
2.5.7 Strip og Strap

En strip dannes ved at investoren kjøper en kjøpsopsjon og to salgsopsjoner med samme innløsningskurs og forfallsdato. Dette betyr at man tror mer på kursfall i underliggende aktiva enn oppgang, og strategien vil derfor gi størst gevinst nå kursen faller. Da vil innehaveren av de to salgsopsjonene være sikret stor gevinst, samtidig som en kan sikre seg noe dersom kursen skulle gå i helt motsatt retning.

En strap dannes ved at man kjøper en salgsopsjon og to kjøpsopsjoner med samme innløsningskurs og forfallsdato. Her vil sannsynligheten for kursoppgang etter investorens mening være høyere enn sannsynligheten for nedgang, og gevinsten blir størst når underliggende aktiva stiger i pris. Figur 2.14 og 2.15 viser gevinstpotensialet til strategiene.



Figur 2.14: Strip



Figur 2.15: Strap

2.6 Organisering av opsjonsmarkedet i Norge

Et standardisert opsjonsmarked vil bestå av en markedsplass, en børs i de fleste tilfeller, og en clearingsentral. Interaksjonen mellom disse gjør det mulig å ta del i investeringsmulighetene som skapes i markedet. Dette vil utgjøre fundamentet i handelen med opsjoner.

Markedsplassen eller Børsen har som oppgave å organisere den daglige handelen med opsjoner. Her blir kjøps- og salgsordrene meldt inn av kundene gjennom meglerselskap. Disse meglerselskapene kan også melde inn egne ordre. Når kjøper og selger blir enig om pris blir handelen gjennomført. I Norge er det Oslo Børs som er ansvarlig for driften av markedsplassen, samt fordeling av kursinformasjon til ulike interessenter. På markedsplassen blir innkomne ordre rangert etter pris og tidspunkt, samt at slutning av handlene blir foretatt. Ansvaret for notering av nye opsjonsserier faller også inn under oppgavene til markedsplassen. Ordre kan plasseres direkte inn i det elektroniske systemet til Oslo Børs eller legges igjen hos børsens eget meglerbord. Systemet kan ta hensyn til forskjellige kombinasjonsordre, og automatisk foreta slutning mellom kjøper og selger ved overlappende kjøps- og salgsinteresser. Systemet overvåker også den daglige handelen.

NOS ASA er clearingsentral i Norge, og garanterer at rett oppgjør mellom kjøper og selger blir foretatt til angitt tid. Oppgjøret vil bestå av opsjonspremien og avgifter som skal dekke utgiftene til både børsen og clearingsentralen. Hver dag etter handelens slutt blir oppgjørsbeløp og avgifter beregnet for den enkelte opsjonshandel. Megleren får dermed vite hvor mye som skal betales eller mottas, og hvor mye som skal betales i avgifter. Det vil også ligge under clearingsentralens ansvarsområde å garantere for at de nødvendige transaksjonene ved innløsning av opsjonskontraktene finner sted. Dermed er partene i en opsjonskontrakt ikke avhengige av hverandre etter at kontrakten er inngått. Risikoen for at partene ikke skal kunne oppfylle sine forpliktelser faller på denne måten bort. Ved innløsning har innehaveren av en opsjon mulighet til å benytte seg av de rettighetene som er forbundet med opsjonen. Dette gjennomføres av en megler. Aksjeopsjoner handles normalt med seks måneders løpetid, det vil si tidsperioden frem til opsjonens bortfallsdag. Bortfallsdagen er normalt tredje torsdag i bortfallsmåneden. Når opsjoner innløses blir en tilfeldig utvalgt motpart trukket ut til å levere eller motta de underliggende aksjene. Aksjene leveres til clearingsentralen som ekspederer til innløser av opsjonen. Samtidig står clearingsentralen også for leveransen av verdipapirer og/eller penger.

Clearingsentralen i Norge trer inn i hver kontrakt som kjøper overfor selger, og selger overfor kjøper. På denne måten sørger de for at kontraktene og betingelsene som inngår blir oppfylt. Det kan være aktuelt for clearingsentralen å kreve at partene i en handel stiller med sikkerhet. Hver dag vil det bli foretatt beregninger av sikkerheten som må stilles i henhold til retningslinjene i et eget regelverk. Regelverket er bestemt av Finansdepartementet og går generelt ut på at utsteder skal stille tilstrekkelig sikkerhet overfor NOS. Mislighold blir tatt hensyn til, som går ut på at NOS må stenge en posisjon til markedspris. Det kan i enkelte tilfeller være praktisk å ha både børsens og clearingsentralens oppgaver i en og samme organisasjon, men her til lands deles rollene i separate organisasjoner og juridiske enheter.

Investoren er den viktigste aktøren i opsjonsmarkedet. Han eller hun må foreta sine transaksjoner gjennom en autorisert megler som fungerer som et ledd mellom instansene. En representantavtale mellom investor og megler gjør at megleren kan handle på vegne av investoren på børsen, etter spesifikke ordre fra investoren.

Verdipapirsentralen (VPS) registrerer alle verdipapirene, inkludert opsjoner, på Oslo Børs, hos investorens konto i VPS. Kontoen har som formål å kunne pantsettes til fordel for clearingsentralen, som gjør at sentralen kan realisere posisjonene på kontoen for å dekke sikkerhetskrav.

Bankene hjelper til med sikkerhetskrav som skal dekkes inn med kontanter som settes inn på depotkontoer hos depotbankene, der investoren står registrert med eget navn. Før man kan begi seg ut på børsen for å handle med opsjoner må nødvendige avtaler og konti være opprettet. Dette kalles åpningshandling, og blir normalt gjennomført av meglerapparatet som er godt kjent med prosedyrene. Bankenes oppgave er å bekrefte overfor clearingsentralen at beløpet som er satt inn er nok til å dekke hver enkelt investors forpliktelser. Norges Bank har også en funksjon, ettersom de overfører daglige netto oppgjørsbeløp mellom meglere for aksjer, obligasjoner og opsjoner.

Andre aktører, som godkjente fondsmeglerforetak har mulighet til å søke om tillatelse til å være opsjonshandlerforetak som kan opptre som megler på vegne av kunder, og som market maker. En market maker er et selskap som stiller forpliktende kjøps- og salgskurser på børsen. Formålet til dette er å bidra til økt likviditet i markedet, samtidig som investorene til enhver tid kan være sikre på at det er mulig å få kjøpt eller solgt på børsen. Det er selskap som er godkjente opsjonshandlerforetak som kan aksepteres som market maker.

I det standardiserte opsjonsmarkedet på Oslo Børs handles det opsjoner på 14 forskjellige aksjer samt på OBX indeksen (indeks sammensatt av de 25 mest omsatte aksjene på Oslo Børs). Aksjeopsjonene er av amerikansk type, mens opsjoner på OBX indeksen er av europeisk type. Handelen med disse er ikke spesielt utbredt, men man ser at i perioder med store svingninger så benyttes derivater for å redusere volatiliteten. Fra starten i 1990 til 2005 har omsetning- i antall kontrakter for aksjeopsjoner per år økt fra å ligge mellom ca. 500 000 – 1,5 millioner den første halvdelen av perioden, til mellom 1,7 millioner og 3,4 millioner siste halvdel. Indeksopsjoner har ligget mellom 200 000 og 1 million. Antall transaksjoner i underliggende aksjer har vært sterkt økende i den samme perioden, og det var i 2005 ca. 5,5 millioner transaksjoner (www.oslobors.no).

For OMX børsene (Stockholm, Helsinki og København) ble det i 2005 omsatt 57 millioner aksjeopsjonskontrakter, og over 12 millioner indeksopsjoner (www.omxgroup.com).

I USA er bruken av derivater veldig utbredt, og i over-the-counter markedene var nominelle beløp utestående passert 270 000 milliarder dollar i juni 2005. Når det gjelder kreditt-derivater var det ventet at det ville omsettes for 4 000 milliarder dollar. (www.bis.org). Ved CBOE var det omsatt 360 millioner opsjonskontrakter med totalverdi lik 165 milliarder dollar i 2004. Trenden i antall kontrakter, og verdien av dem, har vært økende siden oppstarten i 1973 (www.cboe.com)

I kraftmarkedet er bruk av opsjonsstrategier utbredt, ettersom dette markedet er preget av høy volatilitet. Ved Nord Pool var kontraktsverdien for derivater samlet sett 189 milliarder kroner over børsens finansielle marked i 2005. Dette var en oppgang på 33 % i handlet volum fra året før (www.statnett.no).

Innenfor shipping har handelen ved Imarex stått for betydelige summer. For 2004 og 2005 var nominell verdi på handelen 3,3- og 4,4 milliarder dollar. Dette var fordelt på henholdsvis 6 300- og 4 400 kontrakter (www.imarex.com).

2.7 Nytten av derivater

Den globale økonomien har hatt stor nytte av derivater, og Creswell (2003) konstaterer at derivathandelen har vært veldig lønnsom for meglerhusene på Wall Street. Det har vært mulig for ulike aktører å ta del i store gevinster som følge av spekulasjon, eller sikre seg mot tap dersom et foretak ender opp som Enron eller WorldCom.

Det kan identifiseres tre forskjellige typer aktører som handler med disse instrumentene. Hull (2002) beskriver sikrere (hedgers) som aktører som ønsker å redusere og/eller styre risiko, mens spekulantene (speculators) vil vedde på fremtidige priser for å oppnå gevinst. Arbitrasjehandlerene ser etter ulikheter i pris i to forskjellige markeder simultant, for å oppnå en risikofri gevinst. Markedet tiltrekker seg i større grad profesjonelle aktører, som følge av økende grad av kompleksitet i handelen med derivater. Private investorer benytter i mindre grad derivater i sine porteføljer, selv om enkelte derivatprodukter er populære, deriblant aksjeindekserte obligasjoner.

2.7.1 Sikring

Sikrere er i en posisjon hvor de står overfor risiko, og derivater har den grunnleggende egenskap at det er mulig å fordele risiko mellom aktørene i finansmarkedet. Forwardkontrakter vil kunne nøytralisere risiko, mens opsjoner kan fungere som forsikring mot uønsket prisutvikling på det underliggende aktivumet. En forwardkontrakt fastsetter i dag prisen på et aktivum ved en bestemt dato i fremtiden. Opsjoner gjør det mulig å sikre seg mot uønsket prisutvikling, samtidig som det er mulig å være med på en eventuell gunstig utvikling i prisen på det underliggende aktivum. Dette gjøres ved at risikoen i et aksjeselskap gis til dem som er villige til å påta seg den risikoen, samtidig som mer forsiktige aktører på denne måten kan redusere sin risiko.

Markedsrisikoen er noe alle aksjer kan utsettes for. Denne typen risiko påvirkes av endringer i inflasjonsforventninger, beskatning, politisk klima, allmenne konjunkturforventninger og rentestruktur. Dette er noe de aller fleste selskaper må forholde seg til, uavhengig av virksomhet.

Selskapsrisikoen er på den andre siden risikoen forbundet med et gitt aksjeselskap. Denne typen risiko omhandler risikoen for at selskapet i løpet av en tidsperiode utvikler seg bedre eller dårligere enn aksjemarkedet. Selskapsrisikoen avhenger av omstendigheter som er entydige for det aksjeselskapet, eller evnen det har til å opprettholde lønnsomheten.

Risikoen som fordeles mellom aktørene er virkelig økonomisk risiko som oppstår som følge av de forhold som påvirker både den aktuelle selskapsrisiko og markedsrisiko. Dette er risiko som bare kan fordeles og omplasseres mellom aktørene, og ikke fjernes helt. Dette har gjort sitt til at aktørene har større valgmuligheter, samt økt effektiviteten til aksjemarkedet.

Foretak bruker derivater for å sikre kontantstrømmene som kan variere sterkt som følge av svingninger i finansmarkedene, skattefordeler og for å redusere kostnadene ved finansiell vanskeligheter. Kredittderivater nevnt tidligere i avsnitt

2.3.6 benyttes mer og mer, fordi problemene som mislighold medfører skaper problemer for flere parter. Videre kan det være et motiv for å redusere kostnadene ved lånefinansiering og endre kapitalstruktur.

Som det ble nevnt i avsnitt 2.3.6 kunne foretak bruke en swapkontrakt for å styre renterisikoen. Dersom bedriften ønsker å erstatte et lån som har flytende rente med et lån som har fast rente, kan man løse inn lånet med flytende rente og utstede et nytt lån med fast rente. Dessverre er det store transaksjonskostnader forbundet med kjøp og salg av gjeld. Dermed kan et alternativ være en swapkontrakt, der låntaker til å begynne med betaler flytende rente på gjelden. Samtidig mottar foretaket flytende rente fra swapkontrakten, og betaler en fast rente i henhold til swapen. Dermed betaler foretaket i praksis fast rente.

Derivater gjør det mulig å styre hvor utsatt aktører er for finansiell prisrisiko. Dermed kan man på lang sikt ha et fortrinn over konkurrentene for å kunne overleve i markedet (Grant og Marshall, 1997). Dersom et flyselskap skal kjøpe drivstoff om 3 måneder, kan selskapet bruke en forwardkontrakt som beskrevet i avsnitt 2.3.2. På denne måten kan selskapet sikre prisen i dag ved levering av drivstoff om 3 måneder. Flyselskapet kan også kjøpe en kjøpsopsjon som beskrevet i avsnitt 2.3.3, fordi dette sikrer mot at prisen stiger over innløsningskursen for kontrakten. En produsent vil ikke ønske å kjøpe en kjøpsopsjon til risikostyring, ettersom en produsent er opptatt av å sikre seg mot prisfall.

Som det ble nevnt innledningsvis i avsnitt 2.3, så hadde foretakene mange underliggende aktiva å velge mellom når de skulle velge hvilke derivater de ønsket å bruke. I mange tilfeller vil internasjonale bedrifter benytte opsjoner, futures og swaps for å styre rente og valutarisiko. Ifølge DaDalt *m.fl.* (2002) er det et inverst forhold mellom foretaks bruk av derivater, og målt informasjonsasymmetri mellom ledelsen og andre interessenter. Særlig valutaderivater er viktige, men også rentederivater spiller en sentral rolle. Foretak som er direkte involvert i finanssektoren er aktivt opptatt av å finne nye måter å styre finansiell risiko. Foretak som ikke er i finanssektoren har på den andre siden en lav andel derivater til risikostyringsformål (Guay og Kothari, 2003).

2.7.2 Spekulasjon

Derivater gir også mange muligheter for de som ønsker å spekulere i fremtidig prisutvikling på underliggende aktiva. Markedet for derivater er veldig likvid, og gir muligheter for å velge mellom mange kontrakter. Dette gjør spekulasjon aktuelt for både de aktørene som har mye og lite midler tilgjengelige, ettersom det alltid er mulig å finne en passende kontrakt. Samtidig er det ikke noe vanskeligere å få tilgang til derivatmarkedet enn et vanlig aksjemarked gjennom meglere.

Spekulanten drar også nytte av «gearing-effekten», ettersom en slik aktør kan ta del i store underliggende verdier med et lite forhåndsbetalt beløp. De nakne posisjonene omtalt i avsnitt 2.3.3 og 2.3.4 kan brukes av en investor som vil utnytte sin tro om fremtidig prisutvikling i langt større grad enn om investor bare hadde handlet i underliggende aktivum. Dermed kan det være utfordrende for spekulanten å plassere sin ekspertise og erfaring, samt kapital i markedet, for å oppnå store gevinster.

Porteføljeforvaltere kan bruke derivater sammen med vanlige instrumenter for å oppnå en mer kompleks portefølje i et håp om høyere avkastning enn porteføljer uten derivater. Dersom forvalteren tror at markedet skal bevege seg mer oppover eller nedover i tiden fremover enn andre aktører, kan bruk av straddles gi ønsket investeringsprofil. På denne måten tar forvalteren høyde for at volatiliteten i markedet kan bli høyere enn det de andre aktørene forventer. Forvalterne bruker altså ikke derivater ensidig for å endre risikoprofil. Målet med å bruke derivater er å få en portefølje som er sammenlignbar med porteføljer uten derivater i forhold til risiko og avkastning (Lynch Koski og Pontiff, 1999).

Det er særlig i forbindelse med spekulasjon at det har gått galt i bruken av derivater. Derfor har mange aktører sterke meninger om bruken av finansielle derivater. Blant dem er en av verdens rikeste menn, Warren Buffet. Han har som filosofi å ikke gjøre en handel med noe han ikke forstår fullt ut, og forsøker dermed å styre unna derivater (Lowe, 1997). Store verdier har forsvunnet som følge av uklok bruk av derivater, og han har til tider utalt seg sterkt kritisk til bruken av nevnte finansielle instrument. «Derivatives are financial weapons of mass destruction, carrying dangers that, while now latent, are potentially lethal» (Callahan *m.fl.*, 2004, s. 32). Punch (1996) forteller at selv om enkelte opsjoner og futures kan fortone seg enkle å håndtere, har enkelte amerikanske selskaper rekruttert ansatte fra NASA for å hanskes med de kompliserte matematiske formlene som ofte brukes. Nick Leeson (1996, s. 99), som ble utpekt som syndebukk for Barings Bank konkursen forteller om ledelsens syn på verdipapirer. Etter at Leeson tilsynelatende hadde tjent store summer på derivathandel, kom ledelsen frem til at «Barings må konkludere med at det faktisk ikke er særlig vanskelig å tjene penger på handel med verdipapirer.» På den andre siden finner vi tidligere sentralbanksjef i USA, Alan Greenspan som lovpriser derivater, og er av den oppfatning at de stabiliserer det globale økonomiske systemet.

2.7.3 Arbitrasje

Det at det er mulig å velge mellom forskjellige kontrakter med mange forskjellige underliggende aktiva, gjør det også mulig å utnytte feilprising i markedet. Arbitrasjehandlere er avhengige av informasjon og å kunne benytte seg av den innen kort tid for å oppnå gevinster. Dersom det er ulike pris på et aktivum ved forskjellige markedsplasser rundt omkring i verden, vil en arbitrasjehandler raskt sette inn store beløp for å profittere på feilprisingen. Dette er nødvendig, ettersom forskjellen i pris ofte er marginal, og tidsrommet for å utnytte feilprisingen er kort. Slike muligheter oppstår for eksempel dersom prisen på gull er forskjellig i London og New York, og arbitrasjehandleren oppnår gevinst ved å kjøpe i markedet hvor prisen er lav, og selge der prisen er høy. Transaksjonskostnader vil alltids kunne redusere gevinstmuligheten, og det er derfor særlig de store aktørene som begir seg ut på jakt etter arbitrasjemuligheter. Dette kan være store investeringsforetak, fordi deres transaksjonskostnader ofte er lave i forhold til omsetningen de står for.

Arbitrasjehandlere er avhengige av å finne muligheter hvor det er uenighet om prisingen av for eksempel en aksje. Dette betyr ikke nødvendigvis at arbitrasjehandleren kjøper og selger den samme aksjen. For å benytte seg av en slik mulighet må arbitrasjehandleren finne et annet aktivum som er forbundet med aksjen, og finne verdisammenhengen mellom dem. Aktivaene må være slik at prisen på dem endres på samme måte, samtidig som de er forskjellige nok til at få aktører ser at det er en arbitrasjemulighet.

2.7.4 Annen bruk

Opsjoner spiller også en stor rolle i finansiell administrasjon, og Emery (1998) påpeker at finansielle instrumenter og aksjeopsjoner gir ansatte og ledere i bedrifter en mulighet til å sette seg inn i en eiers situasjon, og bedrer utsiktene der risiko er en faktor. Ansatteopsjoner er rettigheter ansatte mottar for å tegne aksjer i eget selskap. Løpetid, antall underliggende aksjer pr opsjon, om tegningskurs er forhåndsbestemt osv. varierer fra selskap til selskap. Ansatteopsjoner er utbredt som kompensasjonsgrunnlag siden de skaper incentiver til at de ansatte arbeider hardere, som vil føre til høyere aksjekurs og dermed også høyere opsjonsverdi. Opsjoner kan også lede til at de ansatte utforsker nye muligheter og vurderer mer risikable alternativer. Dette vil kunne gi mulighet for større opsjonsgevinst.

Ledelsen kan i følge Barton (2001) ha flere motiv som ligger til grunn for bruk av avledete instrumenter, blant annet for å redusere skjønnsmessig gjeldsavsetninger. På denne måten kan derivater være en måte å redusere inntjeningsvolatiliteten. Dermed reduserer ledelsen også agentkostnader, skatt og informasjonsasymmetri. Bruk av derivater kan påvirke graden av asymmetrisk informasjon i forhold til et foretaks inntjening.

Ulike aktiva kan settes sammen til nye instrumenter. Dette gjør at derivater blir byggeklosser for å lage nye finansielle produkter. Modigliani og Miller (1958) kom frem til at kapitalstruktur ikke påvirker verdien til et foretak under noen forholdsvis strenge antagelser. Denne tankegangen er overførbar til sammensetningen av derivater til nye instrumenter. I den virkelige verden er det likevel slik at når antagelsene blir brutt, så kan dette være kostbart for foretaket.

Tradisjonelt har bankene enten operert som rådgivere til klienter, eller som selgere av en eiendel. Derivathandel faller mellom disse to posisjonene, ettersom bankene deltar aktivt i markedet både for kundens og egen regning. Et problem for en bank eller finansiell institusjon er hvordan de skal kontrollere eller håndtere risikoen forbundet med kjøp og salg av slike finansielle instrumenter (Waring og Glendon, 1998).

Opsjoner er et instrument som er virkningsfullt for institusjoner, men også for private investorer som vil tilpasse investeringer i henhold til forutsetninger, mål og holdning til risiko. Selv om derivater er lite brukt av private investorer, brukes ofte strukturerte produkter som sparing. Et strukturert produkt består av to komponenter, en nullkupongsobligasjon og en opsjon på for eksempel en indeks, en valutakurv eller en aksjekurv. Denne investeringsformen er rettet mot de som vil kombinere tryggheten i en kapitalsikret investering med for eksempel aksje- eller valutamarkedets avkastningsmuligheter. Slike produkter gir sikkerhet mot kursfall i og med at utstederen påtar seg å betale tilbake minst 100 % av det pålydende beløpet på forfallsdagen. Opsjonsdelen gir mulighet til å være med på en oppgang i det aktuelle markedet.

Et annet produkt som nå ser dagens lys er boligderivater. Dette er derivater som lar investorer eksponere seg mot boligprisene, men uten å måtte kjøpe bolig. Det gir også boligeiere muligheten til å sikre seg mot usikkerheten i boligmarkedet. Selv om dette er noe som i utgangspunktet er særlig aktuelt for de som sitter med store eiendomsinvesteringer, vil det også gi mulighet for private aktører.

Som det ble vist i avsnitt 2.3 og 2.5 kunne ulike aktører bruke nakne posisjoner, eller sammensatte strategier for å oppnå ønsket kontantstrøm. Opsjonsmarkedet vil fungere side om side med aksjemarkedet og tilføre økt effektivitet og flere alternative investeringsmuligheter, samtidig som risikovillig kapital strømmer til markedet og norske bedrifter. Aksjemarkedet og opsjonsmarkedet konkurrerer ikke, men fører til at likviditeten til aksjer forbedres når det er mulig å handle med opsjoner med samme underliggende aksje. Risiko trenger ikke nødvendigvis å bare fordeles mellom opsjonsmarkedet og aksjemarkedet, men også med pengemarkedet, valutamarkedet og råvaremarkedet.

Derivater kan med andre ord tjene flere formål, og mange ulike aktører har en formening om nytteverdien ved dem. Spørsmålet blir om man bør frykte derivater for skadene som kan oppstå når noe går galt, eller om de bør omfavnes for mulighetene de tilbyr. Stulz (2004) mener at det er nødvendig å respektere derivater, og være våkne for tapene som følge av dårlige investeringer. Men man må også akseptere at hele økonomien tjener på eksistensen av markedene for derivater.

2.8 Oppsummering

I dette kapittelet har jeg sett på noen av de mest sentrale temaene inne derivater og opsjoner. Det er beskrevet hvordan markedene for derivater har utviklet seg, og det er særlig lagt vekt på grunnleggende teori omkring hvordan derivater fungerer. Innenfor opsjonshandel er det flere interresenter som samhandler for at markedet skal fungere. Det påpekes også at det ikke eksisterer konsensus blant aktørene omkring finansielle instrumenter og rollen disse spiller.

Neste kapittel vil dreie seg om verdsetting av opsjoner og utviklingen før Black-Scholes-Mertons-formel for verdsettelse av nevnte derivat. Hva var de teoretiske metodene for verdsetting den første tiden, og hva var det som gjorde at disse kom til kort? Dette vil jeg svare på i neste kapittel, som omhandler personene som først studerte problematikken rundt opsjonsprising, og deres bidrag til løsing av problemet.

Kapittel 3: Grunnleggerne av teoretisk opsjonsprising

3.1 Innledning

Som vist foran er det en rekke derivater som må kunne verdsettes. Dermed blir det også klart at det er behov for et verktøy for å prise disse. Før jeg diskuterer arbeidet til Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton er det nødvendig med en gjennomgang av de første modellene for opsjonsprising. Dette vil gjøre det lettere å forstå hvorfor Black-Scholes-Merton-modellen har vært så betydningsfull. I dette kapittelet presenterer jeg noen av de viktigste bidragsyterne til verdsettelse av opsjoner, og deres forsøk på å utvikle en modell for teoretisk riktig opsjonspris. Videre redegjør jeg for hvor mye av kunnskapen som ble utviklet stammer fra forskjellige vitenskapsgrener.

Det har vært mange bidragsytere til litteraturen omkring verdsettelse av opsjoner opp gjennom årene, og mange var nær ved å finne fram til tilsvarende løsning som Black, Scholes og Merton. Som så ofte ellers i økonomisk teori velger man mange ganger å vektlegge de siste resultatene, og den seneste empirien. Dette gjør at en kan til tider oppleve manglende perspektiv, og flere av de mest innflytelsesrike økonomene får ikke den oppmerksomhet de fortjener. Som vist i avsnitt 2.2 finnes det spor av derivathandel langt tilbake i tid, og selv da var det metoder for å prise kontraktene som ble omsatt.

Det var på 1960 – tallet det akademiske miljøet tok fatt på utfordringen med å finne en fornuftig metode for å beregne opsjonspriser. Til alles store overraskelse fant man at mye av forskningen allerede var gjennomført før 1900, og særlig en person skilte seg ut, Louis Bachelier (Smith, Jr., 1976).

3.2 Louis Bachelier

Louis Bachelier var en fransk matematiker som tidlig begynte å studere problemstillingen med å prise derivater. Bachelier hadde bakgrunn fra matematikk, sannsynlighetsteori og statistikk, og var i så måte ikke en opplagt kandidat til å vurdere derivater. Han ble født Le Havre i 1870 og begynte å studere i Caen. Rett etter at Bachelier hadde fullført Bachelorutdannelsen, døde foreldrene hans. Faren var næringsdrivende og moren var datter av en person med kjennskap til det finansielle miljøet. Dermed var det Louis som måtte overta forretningen, og på denne måten ble han kjent med finansmarkedene.

Flere år senere kunne han igjen sette seg på skolebenken i Paris. Da tiden kom for at Bachelier skulle velge seg et tema til sin doktorgradsavhandling, valgte han som mange andre store personligheter å gå sin egen vei. Flere personer, deriblant veileder for prosjektet Henri Poincarê, ble forundret da Bachelier begynte å studere prosessen til aksjer, futures og opsjoner på Paris-børsen. Et slikt valg av tema var malplassert (Harrison, 1997, s.175). Det var særlig standard opsjoner som ble studert, men også mer spennende kontrakter ble vurdert. Blant aksjene, futuresene og opsjonene fant man straddles og call-o-mores som var mindre omsatte kontrakter. Studien resulterte i avhandlingen «*Thèorie de la spèculation*» i 1900, som senere har blir regnet som pioneerarbeidet innen opsjonsprising. Gjennom hele sin akademiske karriere fra 1900 og utover kan man se antydninger til erfaringer Bachelier gjorde seg i den tiden han ledet familieforetaket (Courtault *m.fl.*, 2000).

Uheldigvis for Bachelier, og derivatmarkedene som sådan, var det ingen som forstod fullt ut konsekvensene av hans forskning. Rapporten fra 1900 var mer finansielt anlagt enn det som var vanlig for en avhandling om matematikk. Dette gjorde at Bachelier ikke fikk den nødvendige anerkjennelsen for sitt arbeid, og han hadde dermed vanskeligheter med å få en akademisk stilling av betydning. Selv om han hadde flere opphold ved ulike universiteter i Frankrike, var Bachelier en produktiv forsker som fikk utgitt flere bøker og artikler. Mye av denne litteraturen dreide seg om matematikk og sannsynlighetsteori, og han var en person som klarte å videreføre noe av denne abstrakte tankegangen til praktiske utfordringer på børsen i Paris (Taqqu, 2001).

Mange av de resultatene Bachelier kom fram til er blitt videreført i moderne tid. Men det er allikevel ikke den matematiske utledningen for prising av derivater som blir mest brukt. Kasper *m.fl.* (1991) forteller at Bachelier var den som gjorde avkastingsdiagrammer som er vist i kapittel 2.3 kjent. Figur 4 i hans avhandling beskrive tap og gevinst som følge av en posisjon i en standard europeisk kjøpsopsjon. Bachelier benyttet flere forutsetninger for å kunne verdsette opsjoner og warrants. For å kunne prise opsjoner er det nødvendig å ha en prosess som beskriver utviklingen til det underliggende aktivumet. Bachelier klarte ved å modellere aksjeprisendringene på en bestemt måte, og ved bruk av sentralgrenseteoremet, å finne en normalfordelt aksjeprisutvikling. Dette kom som et resultat av at prisendringene var identiske og uavhengig fordelt.

Det er en vanlig antagelse at aksjeprisen følger en Markov-prosess, som er en spesiell type stokastisk prosess. Ved en Markov-prosess er bare nåtidens verdi til en variabel relevant for å predikere fremtiden. Dermed er historiske bevegelser, og hvordan variabelen kom til dagens nivå av ingen interesse. Denne typen prosess stemmer overens med svak markedseffisiens, som sier at dagens aksjekurs inneholder all informasjon fra tidligere aksjepriser. Bachelier valgte Wiener-prosessen (også kalt Brownsk bevegelse) for utviklingen til opsjonens underliggende aktivum. En variabel z som følger en Wiener-prosess har to viktige egenskaper:

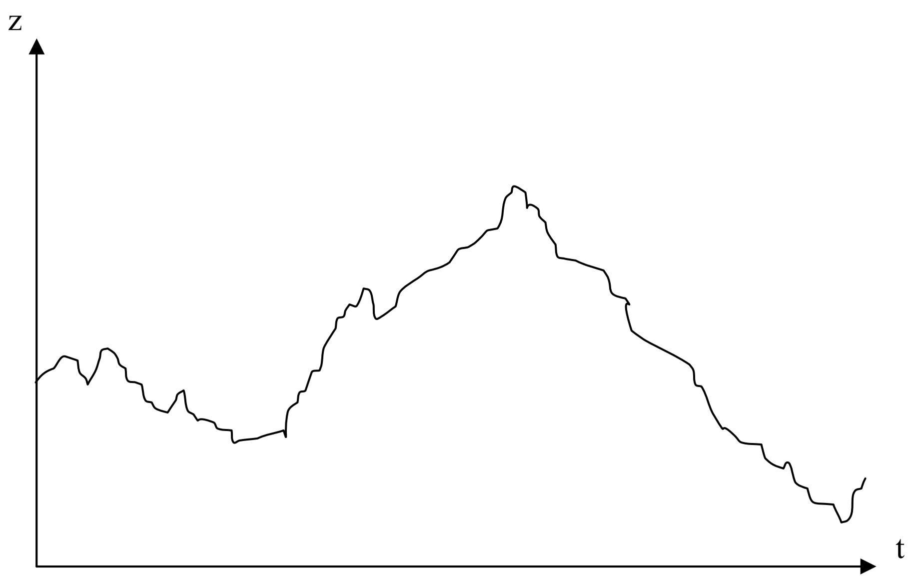
1. Endringen over en kort tidsperiode er gitt ved:

$$\delta z = \varepsilon\sqrt{\delta t}$$

der δz tolkes som endring i variabelen z, ε er en tilfeldig trekning fra en standard normalfordeling, og δt er endring over en kort tidsperiode.

2. Verdiene til δz for enhver forskjellig kort tidsperiode δt er uavhengige.

Dette er en variant av Markov-prosessen som har 0 i gjennomsnittlig endring og 1 i variansrate per år. Fordelen for Bachelier var at denne prosessen tillater at aksjekursen kan variere dramatisk, og ikke nødvendigvis bare i små steg. Det som gjorde Wiener-prosessen så anvendelig var at en slik metode å forholde seg til aksjekursutviklingen impliserer en random walk modell. Dette betyr at det er tilfeldig om kursen går opp eller ned. Stien som en slik prosess genererer vil kunne omtales som hvit støy, noe som betyr at aksjekursen ikke har noen systematisk trend som kan utnyttes av aktørene i markedet. Figur 3.1 viser hvordan man får en Wiener-prosess når δt går mot 0 i $\delta z = \varepsilon\sqrt{\delta t}$. Kurven vil ha skarpe kanter som følge av at bevegelsene i z ved δt er proporsjonal med $\sqrt{\delta t}$ og når δt er liten så vil $\sqrt{\delta t}$ være mye større enn δt.



Figur 3.1: Wiener-prosess

Bachelier var tidlig ute med å bruke kunnskapen som lå i det som nå blir omtalt som Wiener-prosessen. Denne prosessen hadde sitt opphav fra 1828, da en botaniker ved navn Robert Brown observerte hvordan pollen beveget seg i vann. Dette ga grunnlag for at Norbert Wiener i 1918 kunne utlede den matematiske bakgrunnen for denne prosessen. Albert Einstein brukte denne prosessen for å studere forhold i fysikkens verden, og da spesielt for å beskrive bevegelsene til en partikkel som blir utsatt for små sjokk fra molekyler (Kac, 1947).

Det som kan være nyttig å ha med seg i vurderingen av ulike måter å verdsette derivater på, er det ulike utgangspunktet Bachelier hadde i forhold til de som kom etter ham. I tiden Bachelier studerte opsjoner og andre instrumenter på børsen i Paris var det vanlig at opsjonsprisen var fastsatt ved inngåelse av kontakten, og innløsingskursen varierte. Dette er motsatt av hva som har blitt vanlig senere, der innløsningskursen er fastsatt og opsjonsprisen varierer i henhold til tilbud og etterspørsel (Schachermayer og Teichmann, 2006). Modellen Bachelier utledet ser med moderne notasjon ut som:

$$c = E\left[c_T\right] = \int_X^{\infty} \left(S_T - X\right) N'(S_T) dS$$

$$c = S_0 \cdot N\left[\frac{S_0 - X}{\sigma\sqrt{T}}\right] - X \cdot N\left[\frac{S_0 - X}{\sigma\sqrt{T}}\right] + \sigma\sqrt{T} \cdot N'\left[\frac{X - S_0}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

c = prisen på en europeisk kjøpsopsjon ved tidspunkt 0

S_0 = Aksjekurs på tidspunkt 0

S_T = Aksjekurs ved forfallstidspunkt T

X = Opsjonens innløsningskurs

T = Tid til forfall

σ = volatilitet/kursbevegelse i underliggende verdipapir

N(x) = Kumulert standard normalfordeling

N'(x) = Standard normalfordeling

Formelen viser hvordan Bachelier mente at verdien av en kjøpsopsjon i dag er lik forventet forskjell mellom aksjekursen ved forfall og innløsningskursen. Den underliggende modellen for aksjeprisutviklingen er en Wiener-prosess, der aksjekursen er normalfordelt.

Denne modellen har bare en parameter som trengs estimeres for at det skal være mulig å finne en bestemt sannsynlighetsfordeling for variabler som avhenger av underliggende aktivum. Finner man volatiliteten er det mulig å evaluere parametere med faktiske prestasjoner. Bachelier forstod tidlig at det var volatiliteten som var viktig når verdien på opsjoner og warrants skulle avgjøres. Dersom en aksje X har dobbelt så høy volatilitet som aksje Y, så vil bevegelsene i aksje X over ett år tilsvare bevegelsene i aksje Y over 4 år. Dette betyr også at en warrant, med aksje X som underliggende, med ett år til forfall vil ha samme verdi som en warrant, med aksje Y som underliggende, med 4 år til forfall.

Modellen til Bachelier hadde uheldigvis noen mangler som gjorde at den i mange tilfeller kunne gi meningsløse resultater. Dette kommer av at han valgte en aritmetisk Brownsk bevegelse for aksjekursprosessen, og ikke en geometrisk Brownsk bevegelse. Den geometriske Brownske bevegelsen vil bli studert nærmere i avsnitt 3.5, som omhandler Paul A. Samuelson og Richard Kruizenga. Følgene av at en aritmetisk Brownsk bevegelse ble valgt var f.eks at sannsynligheten for at aksjekursen kunne bli negativ var positiv. Dette bryter med antagelsen om begrenset ansvar for aksjeselskaper, der verdien aldri kan bli lavere enn null (konkurs). Dermed kan man oppleve verdier som er absurde (Samuelson, 1973).

Det er i ettertid gjort forsøk på å dempe kritikken av nettopp dette punktet. Man finner at med kvadratisk volatilitet, så vil Bacheliers tankemåte holde stand (Zűhlsdorff, 2001). Man kunne også oppleve at dersom tid til forfall for en opsjon eller warrant gikk mot uendelig, så ville verdien av instrumentet bli tilsvarende høyt. Dette bryter med at en rasjonell investor ikke vil betale mer for det avledete instrumentet enn for selve aksjen. Videre antar Bachelier at gjennomsnittlig prisendring er null, og at en investor ikke har tidspreferanser og at han er risikonøytral.

Etter at derivatmarkedene har blitt mer betydningsfulle, har også historikere begynt å se grundigere på forhistorien til de mest kjente resultatene fra nyere finansteori. Det som er klart fra disse undersøkelsene er at Bachelier var både en tidlig og innflytelsesrik bidragsyter. Men han var ikke alene om å forme tanker omkring opsjonsprising og hypotesen om random walk for aksjekursutvikling. Før Bachelier hadde økonomen Jules Regnault forsøkt å finne en sannsynlighetsmodell for finansmarkedene. Det var økonomen Henri Lefevre som først benyttet utbetalingsdiagrammer, som senere kan ble benyttet av meglere på børsen. Dette var et trebrett som gjorde det mulig for meglerne å visualisere posisjonene sine. Forskjellen fra diagrammet som senere ble brukt av Bachelier er at diagrammet til Lefevre ble brukt for å studere individuelle beslutninger, mens Bachelier fokuserte på prisbevegelser (Preda, 2004). Utbetalingsdiagrammer viser bare hva som skjer med opsjonen ved forfall, uten å ta hensyn til premien man må ut med, eller mottar ved kontraktsinngåelse.

Altså var ikke Bachelier alene om å studere det som foregikk i finansmarkedene, men han var mer av akademisk legning mot de andres operative legning.

3.3 Case M. Sprenkle

Som student ved Yale University ved slutten av 50- tallet, kom Case Sprenkle svært nær løsningen som Black, Scholes og Merton senere fant frem til. På denne tiden hadde forskjellige akademikere og praktikere ulikt syn på opsjonsprising. Ett ståsted var at dersom kjøpere og selgere av opsjoner priset kontraktene på en slik måte at det var vedvarende profittmuligheter for enten kjøper eller selger, så ville deres forventninger om fremtiden være ukorrekte. Videre var noen opptatt av at dersom kjøper og selger var villig til å kjøpe og selge til en annen pris enn matematisk beregnet pris, så kunne dette være en indikator på aktørenes risikoholdning.

Sprenkle tok utgangspunkt i det siste, og var opptatt av hva prisene på warranter og opsjoner kunne si om investorenes holdning og forventninger om risikonivå (Cootner, 1964). For å kunne si noe fornuftig om risikopreferanser var det nødvendig å sammenligne faktisk opsjonspris i markedet med teoretiske verdier beregnet med bakgrunn i markedsdata. Forventet opsjonsverdi i matematiske termer var etter Sprenkles mening avhengig av både forventet gjennomsnittlig aksjepris, og størrelsen og form på den delen av fordelingen til forventet aksjeverdi som lå over innløsningskursen.

Ved å se på faktiske priser som ble betalt for opsjonene når prisen på underliggende aksje endret seg, burde det være mulig å estimere forventningene til en investor. Denne marginale investorens forventninger med hensyn til gjennomsnittlig pris og varians tilhører en opsjonsinvestor, og ikke en investor i aksjemarkedet, som kunne ha andre forventninger. En investor som ikke var risikonøytral ville basere sin verdsettelse av opsjonen både på forventet verdi til opsjonen, men også individuelle risikopreferanser. Opsjonskjøperen er opptatt av at opsjonen har mer risiko i seg, ettersom en endring i aksjeverdi medfører en enda større endring i opsjonsverdi (Sprenkle, 1961).

Modellen Sprenkle utviklet tok for seg både bruk av normalfordelt aksjeprisutvikling, og lognormalfordelt utvikling. Dersom investoren var av den oppfatning at prisen på en aksje var like sannsynlig til å gå opp eller ned med samme beløp over en kort tidsperiode, så kunne man akseptere bruk av normalfordelingen. Dersom investoren var av den oppfatning at prisen på en aksje var like sannsynlig til å gå opp eller ned med samme prosentsats over en kort tidsperiode, så kunne man akseptere bruk av lognormalfordelingen.

I denne artikkelen ble antagelsen om normalfordelt forventet aksjeprisendringer forkastet, og Sprenkle argumenterte for bruk av lognormalfordelingen. Dette på bakgrunn av at normalfordelingen kunne gi negative aksjepriser, og at risikoholdning ville endre seg på bakgrunn av at kursen til å begynne med var høy eller lav. Når det ble vurdert hvilke av de to fordelingene som passet best overens med faktiske data, viste lognormalfordelingen å være den mest presise.

Hovedsakelig var Sprenkle opptatt av hva verdien til en warrant kunne gi av innsikt i forhold til risikoholdning. Men han tok også høyde for at hans tankegang kunne benyttes for verdsetting av andre derivater. For å finne forventet verdi av underliggende aksje ved forfall benyttet han sannsynlighetsfordelingen til S_T, og standard integral formulering for forventet verdi av en kontinuerlig variabel.

$$\int_X^\infty (S_T - X) f(S_T) dS_T$$

Forventet aksjekurs ved forfall, S_T, ble beregnet som dagens aksjepris S_0, multiplisert med en konstant k. Dette gir at forventet gjennomsnittlig vekst i aksjeprisen er gitt ved $e^{kT} = E\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$. Da han løste dette ut, fant han at forventet verdi til en kjøpsopsjon eller warrant i dag ble:

$$c = e^{kT} S_0 \cdot N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(k + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - (1 - P_e)X \cdot N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(k - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Her er σ^2 variansen til fordelingen av sluttkurser, og ln gir den naturlige logaritmen mellom aksjekurs og innløsningskurs. N(x) er standard normalfordeling. Pe er prisen per enhet gjeldsgrad. Denne gjeldsgraden kan også sees på som forholdet mellom standardavviket til prosentvis endring i opsjonsprisen og standardavviket til prosentvis endring i aksjepris (Sprenkle, 1961, s 419).

Pe er sentral i denne analysen fordi den forteller noe om investorens risikopreferanser. Positiv verdi tilsier risikosøker, negativ tilsier risikoavers, og null tilsier risikonøytral. Denne parameteren vil derfor være unik for hver mulig investor. Videre ville konstanten k og sigma være representert ved hver investors subjektive formening om forventning og syn på risiko. Dette førte til at warrantprisene ville være forskjellig for ulike investorer, og faktiske priser ville gjenspeile den marginale investors forventning og preferanser. For å estimere disse faktorene benyttet

Sprenkle seg av data fra perioden 1923 til 1932, og 1953 til 1959. Dette viste seg å være umulig, men han kom uansett frem til interessante resultater.

Det kom klart fram fra studien at prisen på en warrant kunne forklares bra ved bruk av modellen Sprenkle benyttet. Dette betyr at verdsettelsen av en warrant avhenger av risikoen, målt ved standardavvik, til underliggende aksje. Videre mente han at investorene i markedet hadde forventninger som tok hensyn til tidligere hendelser i markedet, og nær fortid var spesielt innflytelsesrik på beslutningstakeren. Investorene var villige til å akseptere lav avkastning i forhold til å det påta seg mer risiko. I perioder der et tilfeldig aktiva var risikabelt, var det ikke aktuelt å betale for å påta seg mer risiko.

3.4 A. James Boness

De fleste forsøkene som ble gjort for å finne en løsning på opsjonsprisingsgåten hadde sitt utspring i Bacheliers banebrytende arbeid. Dette er også tilfellet for A. James Boness og hans bidrag. Boness var en av de første som fattet interesse for Bacheliers avhandling fra 1900, og var den som oversatte den fra fransk til engelsk. Som student ved University of Chicago skrev Boness en doktorgradsavhandling om teorien rundt aksjeopsjoner og hvordan verdien til disse best kunne fastsettes. Denne avhandlingen fra 1962 ble senere oppdatert, og en studie av lønnsomheten ved bruk av kjøpsopsjoner og salgsopsjoner ble foretatt i 1964.

Boness relaterer opsjonsmarkedet til andre markeder som følge av de mange variablene som er felles i bestemmelse av korrekte priser. Verdien av et aktivum kan sees på som en funksjon av risikoholdning og avkastningskrav til alle aktørene, samt deres subjektive sannsynlighetsfordeling for fremtidige priser. Dersom risikopreferanser kan representeres ved en risikopremie i forhold til diskonteringsraten, så vil man få likevektspriser i markedet når diskonteringsraten er lik forventet apresieringsrate til aktivaprisene (Boness, 1964, s. 174).

Modellen Boness kommer frem til tar utgangspunkt i 4 antagelser om markedslikevekt, sannsynlighetsfordeling, avkastningsvariasjon og risikoholdning.

1. Konkurransen i markedet gir likevektspriser der alle aksjer i samme risikokategori har lik forventet avkastning
2. Aksjeprisene er lognormalt fordelt.
3. Variansen til avkastningen er direkte proporsjonal med hensyn til tiden ($\sigma^2 = \sigma^2 T$).
4. Investorer er indifferent med hensyn til risiko.

Forutsetningene tar høyde for at diskonteringsraten i markedet er lik forventet avkastning på en investering i en opsjonsposisjon. Videre forutsettes det en random walk prosess, og det vil være en trend eller drift i prosessen for aksjekursutvikling. Samtidig er markedsforventningene slik at variablene ikke endrer seg i likevekt. Boness ser for seg at dagens markedspris for en opsjon er neddiskontert forventet utbytte fra en investering i opsjonen. Kostnaden ved å innløse opsjonen er gitt ved innløsningskursen og sannsynligheten for at opsjonen faktisk innløses, og etter Boness mening var forventet verdi ved forfall lik differansen mellom forventet fremtidig aksjekurs, gitt at denne er fordelaktig, og innløsningskursen (Galai, 1978)

For å finne en hensiktsmessig diskonteringsrate (k) som gjør det mulig å bestemme dagens verdi av en opsjon, bruker Boness lineær regresjon av markedspriser. Denne renten ble satt lik forventet avkastning på aksjen, etter det regresjonsresultatet som var mest konsistent med markedsdata. Dermed komme Boness frem til en formel for verdsetting av opsjoner, som også samsvarte godt overens med markedsprisene.

$$c = S_0 \cdot N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(k + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-kT}X \cdot N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(k - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Denne formelen viser at verdien av en europeisk kjøpsopsjon ved forfall er lik den betingede sannsynligheten for at S_T er større enn innløsningskursen. Aksjekursen er lognormalfordelt, og for å finne dagens verdi av opsjonen brukes forventet avkastning fra aksjen som diskonteringsrate. Denne modellen er noe enklere enn det som Sprenkle kom fram til, og tar hensyn til pengenes tidsverdi.

3.5 Paul A. Samuelson og Richard Kruizenga

Den første amerikaneren som ble tildelt Nobelprisen i økonomi var Paul Samuelson i 1970. Denne fikk han for sitt vitenskapelige arbeid for utvikling av statisk og dynamisk økonomisk teori, og på denne måten hevet han nivået på økonomisk forskning. Samuelson har vært en av de fremste økonomene innen mange forskjellige felt, og han var også nær ved å komme frem til samme opsjonsprisingsformel som Black, Scholes og Merton.

Hans doktorgradsavhandling fra Harvard sørget for at han ble et kjent navn i akademiske kretser rundt omkring i verden, selv lenge før han hadde startet sin profesjonelle karriere. En av grunnene til at han var blant de første som studerte måter for å prise opsjoner, var hans forkjærlighet for bruk av matematikk for å analysere økonomiske problemstillinger. Denne iveren til å bruke matematiske symboler fremfor en vanlig litterær fremstilling gjorde det mulig for ham å se en mulig løsning innen flere økonomiske felt som ikke var vanlig på denne tiden.

Etter flere år ved Harvard fant Samuelson ut at han ville prøve lykken ved MIT (Massachusetts Institute of Technology) ved starten av andre verdenskrig. Her fikk han utvikle seg innen økonomi, matematikk, og under krigen med noe så uvanlig som radarmekanismer for at fly ikke skulle bli skutt ned. Dette var etter eget utsagn avgjørende for krigens utfall (Bernstein, 1992).

Etter krigen var det store muligheter for å tjene penger i aksjemarkedet, noe han også gjorde. I denne perioden ble han også kjent med instrumentet warrant, og det faktum at det kunne være større oppside-potensial ved å holde warranten fremfor aksjen. Videre er nedsiderisikoen mindre enn for aksjen. Samuelson var av den oppfatning at prisen på en warrant måtte gi like fordeler til eieren av warranten som til den som ville kjøpe den. Matematikken bak dette, og en mulig måte å prise opsjonskontrakter på ble problemstillingen til en av Samuelsons studenter i en doktorgradsavhandling.

Studenten var Richard Kruizenga, og han gjennomført en stor studie av kjøpsopsjoner og salgsopsjoner. Kruizengas upubliserte avhandling fra 1956 hadde mye å si for utvidelsen av opsjonsemnet, ettersom han gikk gjennom mange av de grunnleggende egenskapene til kjøpsopsjoner og salgsopsjoner for å kjøpe og selge en underliggende aksje. Han kom også inn på forhold omkring opsjoner som gjorde dem til mer krevende instrumenter å håndtere i forhold til en vanlig aksje. Ettersom opsjonene var mer avanserte enn underliggende, mente han at det var mulig for en investor å handle med opsjonene på en slik måte at investoren kunne kjøpe aksjen til en pris lavere enn markedspris. Dermed var det også mulig å selge aksjen til en pris som lå høyere enn markedspris.

Kruizenga brukte aktivt avkastningskurvene diskutert i kapittel 2 for å belyse sine poeng. Han gjorde også nytte av vektornotasjon for å gi eksempler på hvordan man kunne sette sammen en portefølje av opsjoner og underliggende, eller en portefølje med forskjellige opsjoner for å danne en ny posisjon.

Etter flere år med studier var avhandlingen nesten ferdig. Først da ble Samuelson gjort kjent med arbeidet til Bachelier. Uheldigvis for Kruizenga viste det seg at mange av hans resultater allerede var å finne i mer generell form i Bacheliers avhandling. Men uansett var hans gjennomgang av forhold rundt opsjoner viktige, og han kom frem til mye av det samme som Bachelier uten å ha noen som helst kjennskap til «*Thèorie de la spèculation*».

Samuelson på sin side falt straks for de generelle formuleringene til Bachelier, og så raskt hvor det var forbedringspotensial. En av de fremste ekspertene på stokastiske prosesser i kontinuerlig tid, Henry P. McKean Jr., hjalp til med den videre utviklingen (Stone, 1975). Som det ble nevnt i avsnittet om Bachelier var det særlig utviklingen til underliggende aktivum som skapte stor hodebry. Bachelier kom frem til en modell som gjorde det mulig for aksjeprisene til å falle under null, og dette var rett og slett umulig. For å kunne si noe om hvordan opsjonspremien skulle fastsettes, mente Samuelson at det var nødvendig å se på hvordan aksjekursen faktisk beveget seg. Dette gjorde igjen at teorien omkring random walk kom til å spille en sentral rolle (Davis, 2001).

Fokus til Samuelson lå i det faktum at prisene i markedene for aksjer, obligasjoner og råvarer er gitt ved konkurransen mellom kjøper og selger for å finne det beste valget med hensyn på fremtidig utvikling. Samuelson hadde tidlig på 50-tallet fattet interesse for hvordan aksjeprisene utviklet seg. For å kunne si noe om hvordan prisen varierte introduserte han skyggepriser som skulle karakterisere sanne verdier (Samuelson, 1965a). Det beste estimatet for disse verdiene ville etter hans mening være markedsprisene, som ble oppdatert konstant gjennom en handelsdag. I et marked vil det ofte være en kjøper for hver selger, og dersom disse tror at aksjeverdien i morgen er høyere enn i dag, så vil aksjeprisen allerede ha steget. Aktørene i markedet ville som følge av egeninteresse ta hensyn til fremtidige hendelser, og dette ville føre til at sannsynligheten for disse hendelsene kaster skygger fremover i tid. Dermed vil en aksjekurs som en investor er sikker på at vil stige, allerede ha steget (Samuelson, 1965b).

Dette førte Samuelson mot en noe annerledes versjon av Brownske bevegelser enn det Bachelier hadde tatt utgangspunkt i. Istedenfor å vurdere prisendringene i absolutte forhold, var det mer formålstjenlig å benytte seg av prosentvise endringer. Dette førte til at en kunne vurdere aksjeprisene i henhold til en geometrisk Brownsk bevegelse, eller lognormal random walk, og man unngikk dermed problemet med negative aksjekurser.

En grunnleggende egenskap ved aksjeinvesteringer er at investoren krever en avkastning fra investeringen som er uavhengig fra aksjekursen. Dette betyr at dersom investoren krever 15 % avkastning når aksjeprisen noteres til 100 kroner, så vil investoren kreve den samme avkastning om kursen var 10 kroner. Dermed kan en anta at S er aksjekursen ved tid t, og denne kursen vil ha forventet driftrate lik μS, der μ er en konstant parameter. Ved korte tidsintervaller (δt) vil forventet økning i aksjekursen være μSδt. Aksjer er også innbefattet med volatilitet, og en antar at svingningene i prosentvis avkastning over korte tidsintervaller er den samme uansett aksjekurs. Dette betyr at investoren er like usikker med hensyn på prosentvis avkastning enten aksjekursen skulle være 100 kroner eller 10 kroner. På denne måten kan man få en modell for utviklingen av aksjekurser som inneholder både drift og volatilitet. Volatiliteten er representert ved standardavviket (σ) til endringen, og er proporsjonalt med hensyn på aksjekursen, der dz er en Wiener prosess.

Modellen for aksjeprisutviklingen blir dermed;

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \text{, alternativt formulert som } \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

I diskret tid blir modellen;

$$\delta S = \mu S dt + \sigma\varepsilon\sqrt{\delta t} \text{, alternativt formulert som } \frac{\delta S}{S} = \mu dt + \sigma\varepsilon\sqrt{\delta t}$$

Her vil variabelen δS være endringen i aksjekursen over en kort tidsperiode, og ε er et tilfeldig trukket tall fra en standard normalfordeling med gjennomsnitt lik 0 og standardavvik lik 1. Forventet avkastning per tidsenhet er gitt ved μ, og σ er volatiliteten til aksjen. Begge parameterne forutsettes vanligvis å være konstante. En kan av denne modellen se at avkastningen til en aksje over en kort periode er gitt ved forventet avkastning, og et stokastisk bidrag. Kravet til avkastningen er som regel høyere desto høyere risikoen er, og avhenger av den risikoen til aksjens avkastning som ikke kan diversifiseres bort. Avkastningen avhenger samtidig av rentenivået i økonomien, ettersom en vil kreve høyere avkastning desto høyere renten er. Volatiliteten kan forstås som standardavviket til aksjekursen i løpet av et år.

På samme måte som Sprenkle benyttet Samuelson seg av den lognormale fordelingen for å studere verdsettingen av opsjonene, og antok altså at aksjeprisutviklingen følger en geometrisk Brownsk bevegelse med positiv drift. For å finne en mulig opsjonsverdi benyttet han seg av α, som var forventet avkastning på underliggende verdipapir. Videre brukte han β som er forventet avkastning fra derivatet for å kunne verdsette en europeisk kjøpsopsjon.

$$c = e^{(\alpha-\beta)T} S_0 \cdot N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-\beta T} X \cdot N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Denne formelen gjør det mulig å ha forskjellig risikonivå på aksjen og opsjonen. Ettersom formelen inneholder forventet avkastning fra underliggende verdipapir, så vil den gi sann sannsynlighet for at aksjekursen overstiger innløsningskursen. Opsjonsverdien fra denne formelen er den rasjonelle prisen på opsjonen. Samuelson forsøkte å finne mulige løsninger både når $\beta = \alpha \geq 0$ og når $\beta > \alpha \geq 0$, men klarte ikke å finne tilfredsstillende løsninger. Det var ikke mulig å finne noe empirisk grunnlag for å ha begge disse parametrene med i verdivurderingen av det aktuelle instrumentet. Problemet med Samuelsons bidrag var at han ikke kunne finne en løsning som ga at verdipapir med samme risiko, også må lik pris. Uten dette er det arbitrasjemuligheter.

3.6 Sheen Kassouf og Edward O. Thorp

Det som er felles for fremgangsmåtene til Bachelier, Sprenkle, Kruizenga, Samuelson og Boness er at disse personene alle forsøkte å finne en fair verdi på opsjonene. Denne verdien eller prisen var forventet break-even pris basert på en sannsynlighetsfordeling for forventet prisendring i underliggende aktiva. Sheen

Kassouf (MacKenzie, 2003) valgte en alternativ fremgangsmåte for å verdsette opsjoner og warrants. Ved å studere forholdet mellom derivatpriser og underliggende aktiva empirisk, kunne man estimere opsjonsverdi ved bruk av økonometriske modeller. Kassouf var til tider aktiv i finansmarkedet, selv om resultatene var varierende. Tidlig på 1960-tallet var han usikker på om han skulle kjøpe aksjer eller opsjoner i et selskap, og satte derfor i gang med å finne en sammenheng som kunne fortelle hva som ville være det beste valget. Den enkle formelen han fant viste seg å stemme overens med observerte priser i markedet for opsjoner og underliggende aktiva.

$$w = \sqrt{X^2 + S_0^2} - X$$

Dette var en empirisk funksjon som gav verdier på derivatet som samsvarte med den observerte ikke-lineære kurven som beskrev forholdet mellom prisen på underliggende aktivum, derivat, og innløsningskurs. Som formelen viser, tok Kassouf bare hensyn til opsjonspris, kursen på underliggende aktiva og innløsningskurs for å vise sammenhengen i markedsdata.

Etter flere år utenfor den akademiske sirkel, valgte Kassouf å tre inn i de lærdes rekker igjen. I 1962 returnerte han til Columbia University i California for å skrive en doktorgradsavhandling om prising av warrants. Kassouf valgte å fokusere på teknikker brukt i økonometri, og benyttet seg mye av regresjonsanalyse. Dette arbeidet førte ham til et mer komplisert uttrykk for verdien til en warrant enn det han hadde funnet tidligere. Det Kassouf hadde observert tidlig var at warrants og aksjer beveget seg i samme takt. Dette betydde at når aksjen steg i verdi, så gjorde derivatet det samme. Dersom aksjen falt i verdi, så ville det samme skje med opsjonen. Dermed var det mulig for en investor å styre risikoen for ulike posisjoner i aktivaene, samtidig det var mulig å utnytte feilprising. Skulle det vise seg at derivatet var overpriset i forhold til underliggende aksje, var det mulig å ta en kort posisjon i derivatet og kjøpe aksjen for å sikre seg.

Analysen Kassouf gikk gjennom med faktiske priser i markedet resulterte i en empirisk funksjon (λ) for innløsningskurs, tid til forfall, aksjeprisen, trend i aksjekurs, dividendeutbetaling og utvanningseffekt ved innløsning (French, 1983).

$$\lambda = k_1 + k_2(1/M) + k_3 D + k_4 d + k_5 \log\left(\frac{S_0}{\overline{S}}\right) + k_6\left(\frac{S_0}{X}\right)$$

k_i = parametre estimert ved multippel regresjon, i = 1,...,6

M = tid til forfall i måneder

D = dividendeutbetaling

d = utvanningseffekt ved innløsing av derivat

$\overline{S}$ = gjennomsnittet av de høye og lave aksjeprisene gjennom året

Med denne funksjonen var det mulig å verdsette warrants i forhold til innløsningskurs og aksjepris. For hver observerte warrantpris, kunne λ bli bestemt ut fra iterasjon, men ikke algebraisk. Verdien for λ kunne så settes inn i uttrykket for en warrant

$$\frac{W}{X} = \left[\left(\frac{S_0}{X}\right)^{\lambda} + 1\right]^{\frac{1}{\lambda}} - 1$$

S_0 = aksjekurs

W = warrantpris

X = innløsningskurs

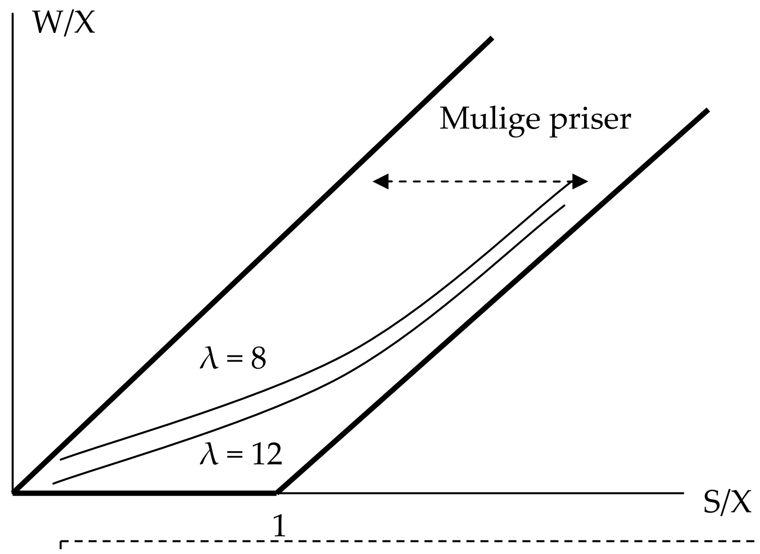
λ = empirisk funksjon

Formelen forteller at forholdet mellom warrant og innløsningskurs skal være det samme som forholdet mellom aksjekurs og innløsningskurs, justert med den empiriske funksjonen. Denne modellen mente Kassouf gjorde det mulig å identifisere feilprisete derivater, og dermed oppnå en risikofri gevinst ved å aktivt handle i markedet.

Edward O. Thorp fattet interesse for finansmarkedene gjennom noe spesielle omstendigheter. Thorp, som var en forsker som hadde spesialisert seg innen matematikk og statistikk, hadde i flere år jobbet ved MIT for å finne effektive metoder for å slå et kasino i spillene blackjack og baccarat. Etter en stund fant Thorp at noen av de største risikoene og gevinstmulighetene ikke var å finne ved rulettbordet, men ved de mange meglerbordene som fantes nærmest overalt rundt omkring i landet. Problemet for Thorp var at det i finansmarkedene var langt flere variabler å holde styr på enn hva som var tilfellet med noen kortstokker, terninger og rulettbjul. Det å predikere aksjekursen virket som en utilnærmelig oppgave, men ved å fokusere på aksjen i forhold til en warrant, så kunne mange av de variablene han først trengte å estimere elimineres fra vurderingen.

Når Thorp møtte Kassouf på midten av 1960- tallet for å diskutere prising av warrants, hadde han gjort seg flere tanker om observerbare forhold mellom warranten og underliggende aktiva. Disse tankene resulterte i grafer som viste utviklingen mellom aksje og warrant, og med modellen til Kassouf hadde han et matematisk uttrykk som sammenfalt med disse skissene (Thorp, 2003a).

I 1967 gav Kassouf og Thorp ut boken *Beat the Market* som var et viktig bidrag til de som ønsket å benytte seg av arbitrasjemuligheter ved handel med konvertibler og warrants. I denne boken brukte de matematiske uttrykk på et nytt nivå i forhold til det å dele konvertible obligasjoner inn i 2 ulike deler, nemlig en obligasjon og en warrant. Poenget med å dele instrumentet inn i disse to delene var å synliggjøre når prisen var underpriset, men også med muligheter for gevinst dersom aksjekursen skulle stige. Videre så de på overprising og sikring av å innta en posisjon for å utnytte dette (Calamos, 2003). Etter at konvertiblen var delt mellom en obligasjonsdel og en warrantdel, kunne Thorp og Kassouf grafisk forklare forholdet mellom warrant og underliggende aktiva. Kurvene i figur 3.2 ble generert med modellen som er presentert ovenfor.



Figur 3.2: Sammenheng mellom opsjonspris og aksjepris

Det var etter deres mening umulig at en warrant skulle koste mer enn underliggende aksje, ettersom en warrant bare er en rett til den samme aksjen. Dermed var det etablert en maksimumslinje for verdien til en warrant. Videre argumenterte de for at dersom aksjeprisen ved forfall var lavere enn innløsningskursen, så ville ikke warranten ha noen verdi. Dersom aksjekursen lå over innløsningskursen, så ville warranten ved forfall være verdt differansen mellom S_T og X. Dersom prisen på en warrant var lavere enn denne differansen, så var det muligheter for en risikofri gevinst. Ettersom bortfallsdagen nærmet seg, så ville de normale priskurvene for en warrant nærme seg verdien ved forfall, og dette var også minimumsverdien på et gitt tidspunkt. Innenfor disse grensene var det mulig ved bruk av priskurvene for warrants å identifisere instrumenter som var verdsatt feil i markedet. Dersom warranten var overpriset ble den solgt, og motsatt dersom den var underpriset.

Ved å handle med underliggende aktiva var det mulig å sikre ved å innta en posisjon som fjernet mye av risikoen som påløper i et forsøk på å utnytte feilprisingen. Andelene en burde risikostyre var etter Kassouf og Thorps mening bestemt ut fra helningen på priskurven ved startposisjonen. Dersom denne helningen var lik 1/4, så burde man kjøpe en aksje for hver fjerde warrant. Små prisendringer ville ha lite å si for totalverdien på posisjonen, ettersom oppgang eller nedgang i aksjekursen vil tilsvare tap eller gevinst på warranten. Større endringer ville kreve en rebalansering av posisjonen i henhold til kurvehelningen (Thorp, 2003b).

Den empiriske modellen som Kassouf kom frem til med regresjonsanalyse viste seg å gi resultater som var nær det Kassouf og Thorp fant i sine videre studier. Men de var også rimelig sikre på at det var noe i modellen som de ikke kunne forklare fullt ut. Thorp begynte derfor å se på hvordan forventet verdi til warranten kunne bestemmes ved bruk av den lognormale sannsynlighetsfordelingen. For å finne forventet verdi til en warrent, trengte Thorp et estimat for forventet aksjekurs. Dette fant han ved å anta at aksjen steg med samme takt som den risikofrie renten, noe som etter hans mening ikke ville medføre store feil. Dette arbeidet førte Thorp til en formel som i stor grad lignet den som Case Sprenkle tidligere hadde utledet, og som er beskrevet tidligere. Det som var viktig for Thorp var at det ikke var store avvik fra de verdiene som kunne observeres i markedet, og de prisene man beregnet ved bruk av modellen. I de tilfeller avvik fant sted, var det arbitrasjemuligheter. Thorp var involvert i et foretak som utnyttet feilprising i markedet for å generere profitt, og brukte teoretiske modeller som ett av flere hjelpemidler for å identifisere slike muligheter.

3.7 Oppsummering

I dette kapittelet har jeg sett på bidraget til noen av de mest innflytelsesrike personene innen teoretisk opsjonsprising. Det er lagt fokus på bakgrunnen for ønske om å utvikle en god formel for verdsetting av opsjoner og warrants. Flere av forsøkene har som vist forskjellig utgangspunkt, men det er også mulig å se likhetstrekk ved de ulike modellene.

Neste kapittel vil handle om hvordan Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton utledet modellen for prising av opsjoner. Her vil det bli gjort rede for hvilken bakgrunn disse personene hadde som gjorde dem velegnet til å finne en løsning på opsjonsprisingsgåten. Hva var behovet for en modell, og hvilke forutsetninger brukte

Black, Scholes og Merton i deres arbeid? Dette vil jeg svare på i kommende kapittel, som handler om utviklingen av Black-Scholes-Merton-modellen.

Kapittel 4: Black, Scholes og Mertons gjennombrudd

4.1 Innledning

I det foregående kapittelet ble det gjort rede for de første bidragene til en god modell for å prise opsjoner. Dette er helt nødvendig kunnskap for å kunne ta fatt i arbeidet til Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton, og da særlig betydningen av opsjonsprisingsmodellen, som blir behandlet mer nærgående i kapittel 6. I dette kapittelet vil jeg ta for meg den historiske bakgrunnen og utviklingen som førte frem til Black-Scholes-Mertons-formel for verdsetting av opsjoner. Det vil også bli vist hvordan formelen ble utledet. Avslutningsvis vil jeg gi en fremstilling av put-call pariteten, som er av stor betydning for verdsettelsen av opsjoner.

Modellen til Fischer Black og Myron Scholes tar i sin originale form for seg europeiske kjøpsopsjoner og salgsopsjoner. For å finne en fremgangsmåte for å fastsette prisen på en opsjon er det nødvendig med en modell for hvordan aksjekursen utvikler seg.

Mange forskere har som vist jobbet med teorier angående verdsettelse av opsjoner på en rasjonell måte. Så tidlig som i 1900 var en av de første genuine formlene klar, og den franske matematikeren Louis Bachelier stod bak modellen. Siden den gang har det versert flere teorier omkring temaet, og felles for dem alle var at de inneholdt ett eller flere vilkårlige parametre. På 1960-tallet begynte arbeidet virkelig å ta form, og blant de som var først ute var Sprenkle og Samuelson. Disse benyttet flere forutsetninger, både i forhold til risikoholdning, forventet avkastning og om opsjonens verdi ved forfall skulle neddiskonteres til datoen for prising, inngikk. Problemet var at ingen av disse faktorene kunne observeres i markedet, og avhengig av preferansene kunne investorer vektlegge forskjellige verdier til disse faktorene.

Problemet med faktorene i forrige avsnitt var noe som gjorde at Fischer Black og Myron Scholes måtte benytte seg av en annerledes fremgangsmåte. Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton stod bak modellen som har hatt stor innvirkning på hvordan aktører i finansmarkedet har priset opsjoner. Viktigheten av deres arbeid ble anerkjent i 1997 da Myron Scholes og Robert Merton ble tildelt Nobelprisen i økonomi. Fischer Black døde i 1995, men han hadde utvilsomt mottatt prisen på lik linje med de andre dersom han hadde vært i live. Fischer Black og hans kompanjong Myron Scholes har ved flere anledninger blitt anklaget for å ha oppfunnet derivater. Da særlig de derivatproduktene som har resultert i store tap. Det som ofte glemmes i den sammenheng er at når noen taper, så vinner andre.

Det var i 1973 artikkelen som for mange er blitt bibelen innen opsjonshandel først ble publisert som «The Pricing of Options and Corporate Liabilities» i *The Journal of Political Economy*. Men før dette hadde arbeidet møtt flere vanskeligheter, og en av de første versjonene av dokumentet ble refusert. Black og Scholes var ikke sikre på om deres formuleringer var helt eksakte, men mente at det med deres tankegang var mulig for investorer å diversifisere bort risiko. Etter flere forsøk, ble *the Journal of Political Economy* overtalt til å vurdere arbeidet dersom det ble omarbeidet og gjort mer anvendelig (Scholes, 1997).

Fischer Black (1989) erindrer at det var hans interesse for CAPM (Capital Asset Pricing Model) og andre finansielle teorier som brakte ham inn på gåten omkring verdsettelse av opsjoner. Black og Scholes hadde begge brukt mye tid hver for seg på gjerningen omkring opsjoner og bedrifters forpliktelser, men det var først når de satte seg sammen at de små grå fikk utfolde seg fritt. Noe av det første de innså var at de måtte basere seg på en formel som var avhengig av volatilitet, og ikke forventet avkastning. Dermed ble det klart at de var på jakt etter en formel som relaterte opsjonsverdien til aksjeprisen. Samarbeidet med Robert Merton gjorde sitt til at resultatet ble så bra som det ble. Men det er ingen tvil om at det var både konkurranse og rivalisering mellom dem, samtidig som de evnet å ha et profesjonelt og fruktbart forhold.

Robert C. Merton har dessverre ikke fått den samme oppmerksomheten som Black og Scholes. Fischer Black var selv av den oppfatning at artikkelen som ble skrevet av ham selv og Myron Scholes burde blitt kalt «Black-Merton-Scholes-artikkelen», og at Robert Merton burde blitt viet like mye ros som de andre, ettersom hans bidrag var svært viktig. Robert Merton var delaktig i at formelen som ble presentert i 1973 har bestått til dags dato. Selv om han hadde kontakt med Black og Scholes allerede mot slutten av 60-tallet, var det ikke klart for dem at de alle jobbet med de samme problemstillingene. Mertons bidrag til det hele var å vise at den dynamiske handelsstrategien som ble forutsatt av Black-Scholes ville resultere i en perfekt sikker posisjon med kontinuerlig handel. På denne måten kunne handelen fortsette kontinuerlig uten kostnader, og ved å benytte seg av den underliggende varen og den risikofrie eiendelen ville gevinsten bli lik opsjonens gevinst. Dette betyr at opsjonspris må være lik Black-Scholes prisprediksjon i et effisient marked, ellers ville det være arbitrasjemuligheter. Når finansielle teoretikere oppdager at noe mangler i finansmarkedet, har markedet en tendens til å tilføre den manglende komponenten.

Ifølge Merton (1997) var arbeidet også anvendelig til andre verdsettelsesproblemer. Blant det mest sentrale bruksområdet etter opsjonsprising kan det nevnes en bedrifts verdsettelse av dets passiva, eller enkelt sagt; høyresiden i bedriftens balanse. Verdsetting av egenkapitalen og gjeld i forbindelse med foretakets finansieringsvalg kunne bli belyst på nye måter ved å bruke opsjonsprisingsmodeller. Det var også nødvendig å kunne bestemme verdien av fleksibilitet i valg mellom ulike investeringsvalg.

4.2 Fischer Black

Fischer Black var ikke fra tidlig alder en kandidat til å revolusjonere finansverdenen. Fra en oppvekst i det øvre sjiktet av New Yorks befolkning var en mulig karriere innen medisin blant de mest naturlige stedene Fischer Black ville ende opp. Han hadde allerede som barn vist at han hadde eksepsjonelle evner innenfor matematikk og vitenskap. På barneskolen kunne han hoppe over et trinn, og var hele tiden på jakt etter ny kunnskap. Det var derfor ikke en overraskelse at han endte opp som student ved Harvard. Men etter å ha forsøkt ulike studieretninger, var det klart at det var fysikk og matematikk som var de største interessene for Fischer Black. Det var særlig fokus på datamaskiner og kunstig intelligens som engasjerte. På mange måter var Fischer Black den fødte teoretiker, men hans manglende intellektuelle disiplin og konstante søken etter områder hvor han kunne utfordre vedtatte sannheter gjorde at han ikke fikk fullført sitt studium ved Harvard.

Dette var for så vidt ikke en ulempe for Fischer Black, som fikk seg jobb i et konsulentforetak. Videre fikk han anledning til å utforske de mange interessene han hadde utenom akademiske spørsmål. Mye av tiden innen konsulentbransjen brukte Fischer Black på å lage programvare for datamaskiner, og dette ble lagt merke til av personellet ved MIT. Dette gav Fischer Black muligheten til å fullføre sin doktorgrad, som hadde fokus på anvendt matematikk. Doktorgradsavhandlingen tok for seg et system for å finne svar på spørsmål ut fra gitte alternativer. Det var dessverre ikke tilstrekkelig datateknologi på denne tiden til at teorien til Black kunne benyttes til praktiske formål (Mehrling, 2005).

Etter å endelig ha fullført doktorgraden i 1964 var mulighetene for Fischer Black mange. Han hadde kontakt med alle de ledende aktørene innenfor kunstig intelligens, og kunne dersom han ville, få midler til videre forskning innen området. Men igjen gikk han inn i konsulentbransjen, hvor han møtte Jack Treynor. Jack Treynor hadde spesialisert seg innenfor finans, og var opptatt av hvordan man kunne neddiskontere fremtidige kontantstrømmer for å vurdere ulike prosjekter mot hverandre. Dette gjorde at han utledet en tidlig variant av Kapitalverdimodellen (CAPM), og dette var noe både han og Fischer Black fattet interesse for (Dimson og Mussavian, 1999).

CAPM forteller på systematisk vis hvilken risikopremie investorer krever for å være villige til å investere i en aksje. Denne risikopremien er den ekstra avkastningen man må ha utover risikofri rente. Med kapitalverdimodellen er det mulig å se sammenhengen mellom avkastningskrav i forhold til en aksjes samvariasjon med en markedsportefølje og risikoen i markedet. For mange var meningen med å analysere verdipapirer å finne aksjer som gjorde det bedre enn markedet som helhet. Praktikere mente at markedet ikke var effisient. Det var dermed en mulighet for at analyse av enkeltaksjer og marked kunne gi porteføljer som gav bedre resultater enn dersom man ikke analyserte aksjer og markedet. Teoretikere var på den andre siden opptatt av at dersom markedet faktisk var effisient, så ville analyse av enkeltaksjer og markedet som helhet være unødvendig. Det Jack Treynor og Fischer Black ønsket å gjøre, var å la erfaringene avgjøre hva som var riktig. Som konsulenter var det viktig å kunne vurdere teori og praksis fra flere ståsted.

Treynor skulle vise seg å være en av de personene som hadde størst innflytelse på Fischer Black og hans studier innen finans. Black hadde egentlig ingen formell utdannelse innen verken økonomi eller finans, men lærte ved å omgås personer som var ledende innenfor fagfeltene. Det som kanskje kjennetegner Fischer Black og hans syn på økonomisk teori er hvordan han og Treynor ikke brukte samme språk som den etablerte eliten innen finans. Der personer som Samuelson og andre benyttet matematikk for å belyse problemstillinger, valgte Black og Treynor den enkleste fremstillingsmetoden de fant hensiktsmessig. Dette gjorde at versjonen av CAPM som Treynor og Black jobbet med ikke ble anerkjent tidlig nok av de ledende økonomene rundt omkring ved de prestisjetunge skolene (French, 2003).

4.3 Myron Scholes

I 1941 kom Myron Scholes til verden, nærmere bestemt i byen Timmins i Canada. Som tidligere nevnt i avsnitt 3.2 ble Bachelier introdusert til økonomiens verden gjennom familieforetaket, og slik var det også for Myron Scholes. Moren til Myron og hennes onkel etablerte flere butikker i området rundt Timmins, og hadde nærmere 1000 ansatte totalt i disse butikkene. Da onkelen hennes døde oppstod det en konflikt mellom moren til Myron og familien til hennes onkel om rettighetene til disse butikkene. Dette var den første gangen unge Myron Scholes fikk se resultatene av en økonomisk konflikt. Denne episoden hadde stor innvirkning på Myron Scholes, og han ble fascinert av hvordan agentproblematikken og uoverensstemmelser over kontrakter kunne utvikle seg (Scholes, 2004).

Myron Scholes ble påvirket både av sin mor og far i sin søken etter ny kunnskap. Faren var tannlege, men også en kunnskapssøkende person inne flere felt. Dette bidrog til at Myron Scholes alltid gjorde det bra på skolen, selv om innsatsnivået ikke alltid var på det høyeste. Men han satte pris på variasjonen i fagområder han opplevde som elev, og kunne derfor dyrke flere interesser på en gang. Han fant tidlig ut at det var i samarbeid med andre at han virkelig fikk yte sitt beste. Det var aktiviteter som var virkelighetsnære som fenget mest, og ikke oppgaver som var abstrakte, ensidige og fjerne fra den virkelige verden.

Før han skulle begynne på universitetet utviklet han en øyesykdom som gjorde all lesing vanskelig. Men for Myron Scholes var ikke dette nødvendigvis en ulempe, fordi han da måtte utvikle andre metoder for å tilegne seg kunnskap. Dette gjorde at han lærte seg å tenke mer abstrakt, og vurdere ulike løsninger på problemer han stod overfor. Senere ble problemene med øynene rettet opp, men tankemåten til Myron bestod, og var til stor nytte i hans videre karriere.

Flere fagfelt interesserte Myron, men det var særlig fysikk og økonomi som var hovedinteressene. Men det var spenningen med aksjehandel som fikk ham til å virkelig satse på finans, samtidig som han ble introdusert til økonomisk teori på høyt nivå. Sommeren 1963 ble en minneverdig tid for Scholes, ettersom han i denne perioden ble introdusert for økonomisk forskning og dataprogrammering ved University of Chicago. Han hadde ingen erfaring med datamaskiner, men programmeringen viste seg å åpne nye måter å løse oppgaver på. Selv uten noen som helst tidligere kjennskap til data, utviklet han seg raskt til å bli en flink dataspesialist. Det var derfor ikke overraskende at flere av professorene ønsket hans assistanse til sine forskningsprosjekter.

Dette gav mersmak, og han valgte derfor å satse på en doktorgrad innen finansiell økonomi i Chicago. Det var Merton Miller, som selv vant Nobelprisen i økonomi i 1990, som overtalte Scholes til å velge denne retningen. Miller hadde introdusert Scholes for noe av sin forskning, og Scholes hadde vært delaktig med å hjelpe til med dataprogrammeringen i flere forskningsprosjektene hans (Scholes, 2001).

Det var forholdet mellom risiko og avkastning som fascinerte Scholes. Videre var interessen stor for sannsynligheten for gevinst ved gambling, enten det var i spill eller i aksjemarkedet. Det som var grunnsteinen i hans akademiske og senere profesjonelle karriere, var interessen for relative priser på ulike aktiva og hvordan graden av arbitrasje påvirket mulighetene for å oppnå unormal avkastning.

Doktorgradsavhandlingen tok for seg etterspørselskurven til omsatte verdipapirer, og hvordan informasjon påvirket aktivaprisene. Dette prosjektet ble sluttført i 1968, og veien derfra gikk til MIT. Selv om lønnen ikke var spesielt imponerende, var det faglige miljøet absolutt blant det beste en ung økonom kunne ønske seg. Her møttes Myron Scholes, Robert Merton og Fischer Black.

4.4 Robert C. Merton

Som Fischer Black hadde også Robert Merton sin oppvekst nær New York. Det var liten tvil om at unge Robert hadde gode aner i forhold til et liv i den akademiske sirkel. Faren er den kjente sosiologen Robert K. Merton, som er professor ved Columbia University. På skolen var matematikk det faget som gav størst glede for Robert Merton. Han var en flink elev, men på ingen måte den som alltid var best i alle fag. Idrett var også blant interessene, og det samme kan sies om biler. Dette gjorde at han fikk anvendt sin interesse for tall med å holde orden på all tenkelig statistikk rundt baseball og bilmotorer. Det å kunne arbeide for en bilfabrikant stod høyt på listen over mulige karrierevalg, og blant de få jobbene Merton har hatt utenfor akademia er et opphold hos Ford.

Da Robert Merton begynte på college var det ingen tvil om at det var matematiske fag som dominerte hans kursportefølje. På fritiden var han en flittig observatør av hva som foregikk i aksjemarkedet, og til tider var han aktiv i utnyttelsen av arbitrasjemulighetene som kunne oppstå. Selv om Merton kunne regne seg frem til de fleste verdier, stolte han også på sin intuisjon når det gjaldt økonomiske sammenhenger. Han hadde en egen evne til å se hvordan ulike faktorer virket sammen, og hvordan dette kunne påvirke aksjemarkedet.

Som student ved ingeniørdelen på college fikk han utfolde seg i ulike matematiske grener, og veien var derfor ikke lang til en doktorgradstudie innenfor matematikk. Men før han kom så langt hadde han også vist interesse for fagfelt som lå langt fra tallenes verden. Merton hadde tidlig lært fra sin far hvilke høye krav som burde stilles til egne prestasjoner, og det er derfor ingen overraskelse at den første artikkelen han fikk publisert omhandlet noe som ikke hadde med matematikk å gjøre. I 1966 ble en artikkel han hadde skrevet om Gullivers reiser publisert i *The Journal of the History og Ideas*. Denne artikkelen var et resultat av et kurs i engelsk litteratur tidlig i hans studie ved Columbia College.

Doktorgradsarbeidet begynte i 1966 ved the California Institute of Technology. Her var det en lang rekke fag innen både anvendt og teoretisk matematikk som kunne utforskes. Det som fikk Merton til å gå fra en ren matematisk doktorgrad til en innen økonomi, var betydningen av makroøkonomi på 1960 – tallet. Han følte at dette var et område som virkelig var av betydning, og som kunne påvirke livet til millioner av mennesker. Videre var han av den oppfatning at hans kunnskaper innen ingeniørfaget kunne gi ham et fortrinn i analysen av komplekse problemstillinger (Merton, 1998a).

Dermed var en overgang i slutten av 1967 til en mer økonomisk anlagt skole naturlig. Merton søkte innpass ved flere av de mest kjente universitetene og høyskolene, men det var ved MIT han fikk tilbud. Dermed var han godt på vei til å kunne anvende sine teoretiske kunnskaper på praktiske problemstillinger, og et studieopplegg fokusert rundt økonomi var det neste stoppet for Robert Merton.

MIT var som kjent på denne tiden en institusjon med noen av de fremste økonomene i sine rekker. Her var det forskere og forelesere som den tidligere omtalte Paul Samuelson, Franco Modigilani og Robert Solow. Dermed var det ikke mangel på spennende kurs som var tilgjengelige for Merton når han skulle fullføre den obligatoriske delen av doktorgradsutdannelsen.

Men forskning skulle vise seg å være lidenskapen til Merton, og derfor ble denne undervisningen nedprioritert. Han fokuserte mye av sin tid og energi på doktorgradsavhandlingen, og dette resulterte i at tre av fem kapitler i denne avhandlingen ble publisert før den ble fremlagt til vurdering. Men han møtte opp i kurset Paul Samulson holdt om økonomi og matematikk, og dette skulle få store konsekvenser for dem begge. Samuelson så tidlig hvilket potensial den unge matematikeren hadde, og ansatte ham som sin forskningsassistent.

Det var liten tvil om at Samuelson i 1965 hadde vært nær ved å løse problemet med verdsetting av opsjoner og warranter, men det var noe som manglet. Dette gjorde at Samuelson og Merton (1969) slo seg sammen i et forsøk på å finne en mer matematisk korrekt verdsettingsregel. Siden Merton hadde praktisk erfaring fra handel i markedet, og var en fremragende matematiker, fant de frem til en modell uten de eksogent bestemte α- og β-parametrene omtalt i avsnitt 3.5. Modellen de foreslo var en alternativ opsjonsteori basert på nyttemaksimering. Dette var en likevektsmodell der begge disse faktorene ble bestemt periode for periode i henhold til tilbud og etterspørsel og investorenes risikopreferanser. Artikkelen ble «A Complete Model of Warrant Pricing That Maximizes Utility», og ble utgitt i 1969. Her tar de for seg en generell likevektsformulering der verdien til en warrant blir bestemt ved følgende formel;

$$w = e^{-rT} \int_{X/S}^{\infty} (ZS - X) dQ(Z;T)$$

Her vil dQ være en sannsynlighetsfunksjon, der forventet verdi til avkastningen Z er lik e^{rT}. Denne funksjonen er en risikojustert nytte-sannsynlighetsfordeling som avhenger av flere forhold. Disse forholdene vil være preferansene investorene har med hensyn til risiko, og samlet tilbud i markedet. I artikkelen viser de at opsjonsprisen kan sees på som opsjonens diskonterte forventede verdi. Forventet verdi ble funnet med bruk av nytte/risikojusterte sannsynligheter, og ikke faktiske sannsynligheter (Jarrow og Protter, 2004).

Etter et kort opphold som konsulent for en bank i California, var Merton tilbake ved MIT, der han begynte å undervise i finans. Der fikk han anledning til å forske og undervise ved samme fakultet som Myron Scholes, som hadde blitt ansatt året før.

4.5 Behov for en modell

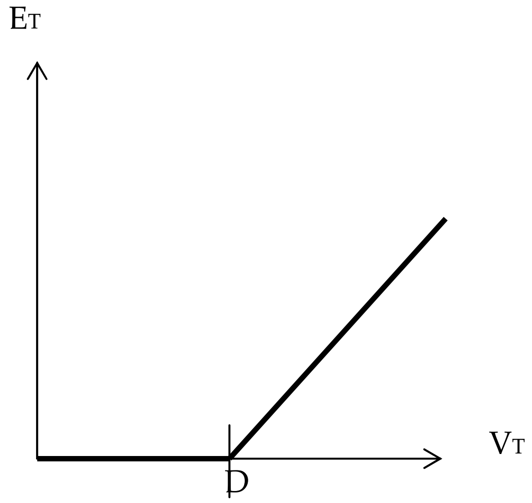
Finans hadde ingen høy status innen økonomisk forskning i perioden før 1950 – tallet. Det måtte komme personer som Markowitz, Miller og Modigliani, Sharpe, Fama, og andre til institusjonene før man fikk bukt med de lite vitenskapelige metodene som ble brukt i finans før disse personene revolusjonerte måten man tenkte på. Merton (1997) erindrer at finansteorien før disse personene kom med sine bidrag var preget av en samling anekdoter, tommelfingerregler og omstokking av regnskapsdata for å belyse utfordringer i finansverdenen. Men det var ikke bare i et forsøk på få bedre teoretisk grunnlag innen finans som motiverte Black, Scholes og Merton: «But, like other scientists, we had no practical objective. We simply found the options-pricing problem interesting. It was an engaging puzzle, a difficult challenge.» (Merton, 1998b).

Når forskjellige investeringsalternativer skal vurderes har det alltid vært viktig å bestemme verdien av fleksibilitet. Et alternativ kan være mer fleksibelt enn et annet, og verdien av den fleksibiliteten må kunne bestemmes. Det er nødvendig å bestemme verdien av et foretaks forpliktelser, forsikring og økonomiske garantier. Dermed var det nødvendig med en modell som kunne klargjøre noe av dette, og en modell for warrantpriser var et steg i riktig retning. Det var særlig utfordringen rundt verdsettelsen av et foretaks aktiva som stod sentralt i behovet for en modell. Som kjent hadde Modigliani og Miller funnet at totalverdien av et foretak ikke var avhengig av hvordan foretaket var finansiert. Men det man ikke hadde sett nok på var hvordan verdien av egenkapitalen og gjeld ble påvirket av finansieringsvalg.

Når et foretak tar opp lån, betyr dette på mange måter at långiver overtar selskapet, samtidig som aksjonærene mottar en opsjon om å kjøpe det tilbake ved å tilbakebetale gjelden. Dette betyr at aksjonærene har kjøpt en kjøpsopsjon på foretakets aktiva. Obligasjonseieren har solgt aksjonærene denne kjøpsopsjonen. Innløsningskursen vil være lik pålydende verdi av gjelden. Ved en fremtidig dato vil obligasjonseierne få verdier opp til og med pålydende verdi av gjelden, mens aksjonærene får resten ved likvidasjon av foretakt. Dersom verdien av foretakets aktiva er lavere enn lånet som skal betales tilbake, så vil selskapet misligholde gjelden. I dette tilfellet vil obligasjonseierne få det som er igjen av verdier i selskapet.

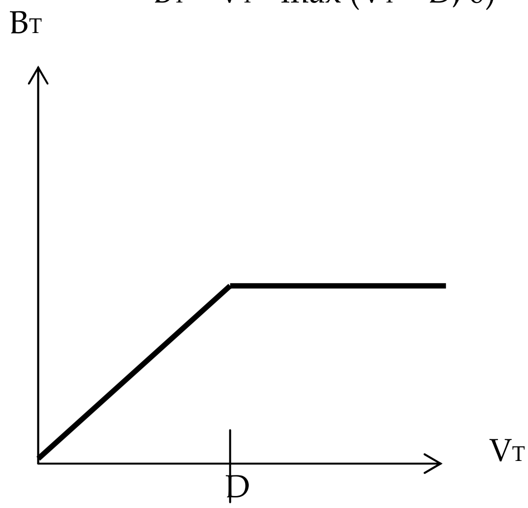
Figur 4.1 viser hvordan egenkapitalen (E_T) i foretaket kan fortolkes som en kjøpsopsjon på selskapets verdi (V_T), der innløsningskursen er pålydende gjeld (D). Figur 4.2 viser hvordan risikabel gjeld (B_T) kan fortolkes som risikofritt utlån, med fradrag av en salgsopsjon på selskapets verdi (V_T). Risikabel gjeld kan også tolkes som verdien av selskapets aktiva (V_T) med fratrekk av en kjøpsopsjon.

$$E_T = \max(V_T - D, 0)$$



Figur 4.1: Verdien av egenkapital på tidspunkt T

$$B_T = D - \max(D - V_T, 0)$$
$$B_T = V_T - \max(V_T - D, 0)$$



Figur 4.2: Verdien av risikabel gjeld på tidspunkt T

På denne måten kommer det frem at det var behov for å verdsette egenkapitalen i et selskap, og opsjonsteori var en mulig løsning. Tradisjonelle problemer knyttet til verdsetting i forbindelse med foretakets finansieringsvalg kunne bli belyst på nye måter ved å bruke verdsetting av opsjoner i forbindelse med betingede krav.

De finansielle markedene utviklet seg raskt på denne tiden, og som det er nevnt i avsnitt 2.2, Derivatenes historie, så ble standardisert opsjonshandel mulig i USA i april 1973. For en ny markedsplass er det alltid behov for gode og effektive måter å verdsette produktene på. Fremmarsjen av slike produkter, og de allerede omsatte warrantene gjorde at personer som Sprenkle, Samuelson, Kassouf, Black, Scholes og Merton så et behov hos praktikerne som måtte dekkes. De som spekulerte i markedet kunne bruke en opsjonsmodell til å gi seg selv et fortrinn i konkurransen med andre spekulanter. Det var også behov for investorer å sikre sine investeringer, og fremmarsjen av derivater gjorde at det ble mange flere valgmuligheter tilgjengelig. Men ingen vil betale for mye for et produkt, og ingen vil selge til for lav pris, og dermed merket finansinstitusjonene en økende etterspørsel etter produkter som var lettere å verdsette.

4.6 Modellen blir til

Med kapitalverdimodellen til Treynor tilgjengelig, gikk Fischer Black i gang med å anvende denne modellen på andre instrumenter enn bare aksjer. Blant disse instrumentene var warrants. Grunnen til at warranter ofte ble valgt som grunnlag for forskning var at prisingen av warranter var mer effisient enn hva som var tilfellet for opsjoner i over-the-counter markedet.

Fischer Black hadde nettopp startet opp sin egen konsulentvirksomhet, og var dermed klar for å prøve ut kapitalverdimodellen i virkeligheten. Black antok at både aksjen og warranten ville ha forventet gevinst proporsjonalt med risikoen som ikke kunne diversifiseres bort. Det var derfor naturlig for ham å skrive ned en differensialligning som beskrev hvordan verdien på warranten endret seg over tid. Det var en antagelse fra Blacks side om at warranten bare var avhengig av prisen på underliggende aktiva og tiden til forfall som gjorde at han kunne finne en differensialligning. Han antok at verdien til en warrant (w) i tidsintervallet (t, t+δt) endret seg slik at

$$\partial w = w(S + \partial S, t + \partial t) - w(S, t)$$

der δS er prisendringen i underliggende aksje over tidsperioden. Ettersom kapitalverdimodellen lå til grunn for analysen, gikk Black videre med tankegangen om at forventet prisendring i det aktuelle tidsrommet ville avhenge av betaene til henholdsvis underliggende aksje og warrant.

$$\beta_w = \left[\frac{\frac{\partial w}{\partial S} S}{w} \right] \beta_S$$

Uttrykket innenfor parentesen er elastisiteten til warranten eller opsjonen, som forteller prosentvis endring i derivatverdi relativ til prosentvis endring i aksjekurs. Black videreførte deretter tankegangen, og benyttet seg av en annenordens Taylorrekkeutvikling og fant forventet verdi til warranten

$$E[\partial w] = \frac{\partial w}{\partial S} E(\partial S) + \frac{\partial w}{\partial t} \partial t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} E(\partial S^2) + \frac{\partial^2 w}{\partial S \partial t} \partial t E(\partial S) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} E(\partial t^2)$$

Samtidig benyttet han seg av lognormalfordelingen, noe som resulterte i følgende differensialligning;

$$\frac{\partial w}{\partial t} = r_f - r_f S \frac{\partial w}{\partial S} - \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial S^2}$$

r_f = risikofri rente

σ = volatilitet/kursbevegelse i underliggende verdipapir

Differensialligningen er et forhold mellom en ukjent funksjon av flere uavhengige variabler og dens partiellderiverte med hensyn til disse variablene. Denne ligningen er kjent som Black-Scholes partiell differensialligning (Partial differential equation/PDE), og var forholdsvis enkel å komme frem til. Den inneholdt ikke forskjellen mellom forventet avkastning fra markedsporteføljen og risikofri rente, og heller ikke beta til underliggende aksje. Det som bød på vanskeligheter var hvordan den skulle løses. Løsningen av ligningen avhenger av hvilke grensebetingelser som benyttes. For en europeisk kjøpsopsjon eller warrant som Black fokuserte på er denne grensebetingelsen

c_T = max(S_T – X, 0), der T er forfallstidspunkt.

Black var rimelig sikker på at dersom han kunne finne en løsning, så var det mulig å bestemme verdien til en warrant for enhver aksjekurs. Tilfeldigheten ville det slik at han mottok en telefon fra Myron Scholes i 1968 som hadde fått i råd å kontakte Black. De møttes, og det var ingen tvil om at de fra første stund utfylte hverandre i hvordan de arbeidet. Et konsulentoppdrag for Wells Fargo Bank gjorde at de fikk muligheten til å samarbeide mer formelt. Dette oppdraget gikk i hovedsak ut på å teste ut ny finansteori i praksis. I løpet av denne perioden kom de inn på hvordan man best kunne finne riktig pris på warranter og opsjoner.

Fischer Black hadde i mange måneder forsøkt å løse differensialligningen han var kommet frem til, uten å lykkes. Det var særlig det faktum at prisen på warranten ikke så ut som om den var avhengig av forventet avkastning til underliggende aksje som forundret Black. Scholes hadde vært veileder for en masterstudent som skrev en avhandling om opsjonspriser. Dette hadde gjort at han ble kjent med bidraget til Case Sprenkle, omtalt i avsnitt 3.3. Også Scholes mente at det var et gunstig utgangspunkt å se hvordan en kunne benytte kapitalverdimodellen til verdsettingen av derivater.

Scholes hadde i sin analyse av problemstillingen valgt å fokusere på hvordan det var mulig å verdsette warranter ut fra et arbitrasjeargument. Det var ingen tvil om at verdien til underliggende aksje og warrant beveget seg i samme retning. Dermed burde det være mulig å konstruere en portefølje av underliggende aksje og warrant, slik at den sikrede posisjonen ikke hadde noe markedsrisiko. Ved å innta en lang posisjon i warranten, og en kort posisjon i underliggende aksje kunne man med den rette sikringen få en tilnærmet risikofri posisjon. Denne porteføljen burde ha en beta lik null, noe som betyr at korrelasjonen med markedet er lik null. Dette skulle dermed tilsi at posisjonen i underliggende aksje og warrant ville gi avkastning lik risikofri rente. Problemet til Scholes var å finne det rette sikringsforholdet, og det var nettopp det Fischer Black hadde funnet fram til.

På hver sin måte klarte de å resonnere seg frem til ligningen Fischer Black hadde endt opp med. Problemet var at ingen av dem så løsningen på denne ligningen. Hadde de vært mer kjent med fysikk som fagfelt, hadde de sett at ligningen var en variant av «varmeligningen», og kunne dermed benyttet en kjent løsning for denne. Dersom de hadde vært enda mer kjent med matematisk teori, hadde de sett at det var mulig å løse ved alternative metoder.

Samarbeidet om å finne riktig warrantpris startet for fullt sommeren 1969, og det var en løsning på differensialligningen som stod øverst på listen over oppgaver som måtte løses. De bestemte seg for at løsningen måtte avhenge av volatiliteten til underliggende aksje, ikke forventet avkastning til aksjen. Utgangspunktet til formelen for verdsetting av warranter er flere, og det ble antatt ideelle forhold i markedet for aksjen og opsjonen (Black og Scholes, 1973, s. 640). Betingelser som ble benyttet ved utledning av Black-Scholes-formel er følgende:

- Den kortsiktige renten er kjent, og konstant gjennom hele tidsforløpet.
- Aksjepris følger en random walk-prosess i kontinuerlig tid, og det kan vises at aksjekursen har en lognormal fordeling, mens prosentvis endring er normalfordelt. Variansraten til avkastningen er konstant.
- Aksjen utbetaler ikke dividende.
- Opsjonen er av europeisk type, og kan dermed bare innløses ved forfall.
- Det er ingen transaksjonskostnader forbundet med kjøp og salg av aksjen eller opsjonen.

- Det er mulig å låne enhver brøkdel av prisen på verdipapiret for å kjøpe eller holde det, til risikofri rente.
- Det er ingen straff for short salg. En selger som ikke eier verdipapiret vil ganske enkelt akseptere prisen på verdipapiret fra eieren, og vil gjøre opp med kjøper ved en fremtidig dato ved å betale ham et beløp tilsvarende prisen på verdipapiret ved den datoen.

Ved å anta at forventet avkastning til aksjen var lik risikofri rente, kunne de oppnå at beta var lik null. De valgte å la renten være konstant. Dette betydde at all risiko kunne diversifiseres bort. Videre visste de at aksjekursen ved forfall, der dividendeutbetalinger hele tiden ble reinvestert, ville følge lognormalfordelingen. Når de videre antok at volatiliteten uttrykt i prosent var konstant, kunne de finne sannsynligheten for enhver aksjekurs ved opsjonens forfall. Denne tankegangen førte dem like langt som Case Sprenkle hadde kommet, med den forskjell at Black og Scholes benyttet risikofri rente og ikke forventet avkastning til aksjen. Dermed hadde de funnet frem til forventet fremtidig verdi av warranten, men det var nåverdien av opsjonen som var av interesse.

Etter seks måneder med intenst arbeid kom de frem til at løsningen var veldig enkel. Dersom man benyttet risikofri rente i forhold til aksjen, så måtte det være mulig å gjøre det samme for å finne nåverdien til warranten. Ettersom all risiko ved aksjen kunne diversifiseres bort, så skulle det samme være tilfellet for warranten. (Black, 1989). Med dette resonnementet, og risikofri rente som forventet avkastning på aksjen kom de frem til følgende formel for dagens verdi av en warrant eller europeisk kjøpsopsjon;

$$w = c = S_0 N(d_1) - e^{-r_f T} X N(d_2)$$

$$d_1 = \left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right]$$

$$d_2 = \left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right] = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Fischer Black og Myron Scholes konfererte etter hvert hyppig sammen med Robert Merton om en modell for å verdsette opsjoner. Merton bidrog med å vise til at det var mulig å lage en risikofri posisjon med bruk av derivat og underliggende aktivum. Også denne fremgangsmåten ble presentert i artikkelen fra Black og Scholes som kom ut i 1973. Med denne utledningen kom de frem til samme differensialligning som tidligere. Innenfor denne formuleringen vil $N(d_1)$ være delta til posisjonen, og dette forteller den rette sikringen man bør ha dersom en har en lang eller kort posisjon i en kjøpsopsjon. Dersom en har en lang posisjon i en opsjon må man ha en kort posisjon i $N(d_1)$ aksjer for at posisjonen skal være sikret. Skulle man ha en kort posisjon i opsjonen, må man kjøpe $N(d_1)$ aksjer. $N(d_2)$ er sannsynligheten for at opsjonen vil bli innløst i en risikofri verden.

Ettersom risikopreferanser ikke inngår i differensialligningen, kan heller ikke slike preferansene påvirke løsningen. I en verden hvor investorene er risikonøytrale, vil de ikke kreve en risikopremie for å påta seg risiko. Dermed kan risikofri rente brukes ved neddiskontering av fremtidige kontantstrømmer. Løsningen man kommer frem til i en risikonøytral verden er også den rette i en verden der investorene er risikoaverse. Dette kommer av at forholdet mellom forventet vekstrate i aksjekursen endres like mye som diskonteringsraten en må bruke for å verdsette utbetalinger fra opsjonen.

Det ble i avsnittet om Robert C. Merton nevnt at han hadde et kort konsulentoppdrag i 1969, og tilfeldighetene ville det slik at dette oppdraget gikk ut på å prise warranter. Her utledet Merton en ad hoc modell som under de rette omstendighetene kunne blitt til den samme formelen som Black og Scholes utledet. Men så fremsynt var ikke Merton den gang. Det var flere prosjekter som Merton kunne forske på, men utfordringen med å finne en opsjonsprisingsmodell var tiltalende. I 1970 møttes Scholes og Merton for første gang under en konferanse der Scholes presenterte hovedpoengene fra arbeidet til ham selv og Fischer Black. Merton, som skulle holde et foredrag om foretaks valg av kapitalstruktur, forsov seg til Scholes presentasjon, og spurte ham ut om dette i etterkant.

Scholes forklarte ham hva de mente var en korrekt måte å verdsette warranter på, men Merton ble ikke overbevist. Han hadde vanskeligheter med å godta at modellen satte i stor grad satte sin lit til kapitalverdimodellen. Merton var også tilhenger av å bytte ut en - periode modeller med modeller i kontinuerlig tid. I forhold til Mertons økonomiske syn var kapitalverdimodellen en spesiell modell for verdsetting av aktiva i en statisk en – periode verden, og resultatene kunne derfor ikke generaliseres. Når Merton så skulle se på problematikken rundt warrantpriser igjen, så måtte han lære seg hvordan man foretok stokastiske beregninger. Dette var ikke vanlig på denne tiden, men på 40 – tallet var det kommet et bidrag fra Kiyosi Itô om hvordan en kunne håndtere stokastiske differensialligninger. Itôs lemma viser hvordan en variabel som er en funksjon av en underliggende variabel og tiden utvikler seg under en Itô prosess. Variabelen x følger en Itô-prosess

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

der dz er en Wiener-prosess. a og b er funksjoner av x og t. Dette betyr at variabelen x har en driftrate lik a, og en variansrate lik b^2. Itôs lemma forteller at en funksjon G(x,t) følger prosessen

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

der dz igjen er en Wiener-prosess som ovenfor. Dette betyr at G følger en Itô-prosess, der første parentes er driftraten, og variansraten er lik $\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$. Fra aksjeprisprosessen presentert i avsnitt 3.5, $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$, følger det at en funksjon G(S,t) blir

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

Fra denne prosessen er det mulig å se at både S og G blir påvirket av den samme underliggende usikkerheten fra Wiener prosessen.

Det var ingen tvil om at Merton var av den oppfatning at Fischer Black og Myron Scholes hadde kommet frem til et gjennombrudd, men det var bedre å forholde seg til en utledning som ikke var avhengig av kapitalverdimodellen. Siden det var mulig å replikere avkastningen fra en opsjon ved bruk av instrumenter viss pris var kjent, kunne en finne prisen til warranten som ville være lik prisen på porteføljen. Det Robert Merton fant når han benyttet seg av dynamisk handel kontinuerlig, var at all risiko forsvant og dermed kunne man bare forvente risikofri avkastning fra porteføljen (Merton, 1973). Robert Merton kunne altså vise at man fikk den samme differensialligningen som Black ved bruk av instrumenter omsatt i markedet.

Enhver grensebetingelse av S og t som var løsning til denne ligningen måtte være den teoretiske prisen på et derivat omsatt i markedet. Dersom prisen på derivatet ikke samsvarte med prisen på den replikerende porteføljen, så ville det være arbitrasjemuligheter. På denne måten kom Merton fram til samme formel som Black og Scholes, men han gjorde det ut fra et arbitrasjeargument, og ikke ut fra kapitalverdimodellen.

4.7 Put-call paritet

Differensialligningen som Black og Scholes kom frem til, og som ble vist i forrige avsnitt har mange løsninger, avhengig av grensebetingelser. Dette har sammenheng med at aksjen kan være underliggende for en rekke derivater. Til nå er det blitt fokusert på kjøpsopsjoner og warranter, men ligningen kan også brukes til å prise salgsopsjoner. Når Black og Scholes hadde sjekket at de hadde funnet løsningen for en warrant, skulle det ikke store endringer til før de også hadde en formel for salgsopsjoner. Derivatet man oppnår som følge av å løse ligningen avhenger av grensene som blir brukt. For en europeisk kjøpsopsjon er dette c_T = max (S_T – X, 0), når tiden t = T, der T er opsjonen forfallstidspunkt. For en europeisk salgsopsjon er grensen p_T = (X – S_T, 0), når tiden t = T, der T er opsjonens forfallstidspunkt.

Verdien til en europeisk salgsopsjon er ifølge Black, Scholes og Merton,

$$p = e^{-r_f T} XN(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

der d_1 og d_2 er definert på samme måte som ovenfor.

For å se sammenhengen mellom en salgsopsjon og en kjøpsopsjon, kan det vurderes to forskjellige porteføljer:

Portefølje 1 består av: 1 europeisk salgsopsjon + 1 aksje

Portefølje 2 består av: 1 europeisk kjøpsopsjon + ett beløp lik Xe^{-rT}

Begge disse porteføljene vil ha en verdi lik max (S_T, X) ved opsjonenes bortfallsdag.

Ettersom porteføljene vil ha lik verdi i fremtiden, må dette også være tilfellet i dag. Dette betyr at man får følgende sammenheng:

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0$$

Denne sammenhengen viser at verdien av en europeisk kjøpsopsjon med gitt innløsningskurs og tid til forfall kan utledes fra verdien av en tilsvarende salgsopsjon. Følgelig kan samme operasjon gjøres motsatt vei. Dersom put-call pariteten ikke holder, finnes det arbitrasjemuligheter som kan gi anledning til risikofri gevinst.

4.8 Oppsummering

Dette kapittelet har tatt for seg hvordan Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton utviklet en god modell for verdsetting av europeiske opsjoner. Jeg har lagt vekt på hvordan disse personene fattet interesse for opsjoner og warrants, samt hvilken bakgrunn de hadde som gjorde dem egnede til å finne en opsjonsprisingsformel. Behovet for en opsjonsprisingsmodell viser også at arbeidet hadde betydning for flere problemstillinger innenfor finans. Modellen til Fischer Black og Myron Scholes tar i sin originale form for seg europeiske kjøpsopsjoner og salgsopsjoner. Derfor er det også vist hvordan verdien til opsjonene kan finnes ved bruk av put-call pariteten.

Det neste kapittelet vil ta for seg veien frem mot publisering av artiklene til Black, Scholes og Merton. Videre vil jeg se på hvordan modellen presterte den første tiden i forhold til markedsprisene, og hva som skjer når variablene i modellen endres. Jeg vil også beskrive nærmere problematikken knyttet til amerikanske opsjoner og volatilitet.

Kapittel 5: Mer om Black-Scholes-Merton-modellen

5.1 Innledning

I dette kapittelet går jeg i dybden på modellen til Black, Scholes og Merton. Kapittel 4 viste hvordan disse personene utviklet det som i dag regnes som et av de fremste verktøyene innen finansiell analyse. Dette er et viktig bidrag for å kunne ta fatt i hvilken betydning modellen til Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton har hatt.

Dette kapittelet vil handle om hvordan modellen ble mottatt av aktørene i derivatmarkedet, og en nærmere beskrivelse av variablene som inngår i modellen. Det vil også bli vist hvilke svakheter modellen står overfor. Avslutningsvis vil jeg se på amerikanske opsjoner, og gå nærmere inn på hvordan man forholder seg til volatilitet i bruk av Black-Scholes-Merton-modellen.

Men før jeg ser på modellen i detalj, er det på sin plass med en beskrivelse av veien frem mot publisering av modellen. Dette vil gi et innblikk i hvorfor modellen er blitt såpass godt mottatt, og hvorfor den kan brukes i analysen av andre instrumenter enn bare opsjoner som er omsatt på børs.

5.2 Veien mot publisering

Fra forrige kapittel kan man se at det tok lang tid før Black, Scholes og Merton kom frem til en modell som de var tilfreds med, og som de trodde kunne være et gjennombrudd i måten opsjoner og warranter ble priset. Det skulle også gå flere år fra modellen ble utledet, til den først ble publisert i 1973. Som det ble nevnt i avsnitt 4.6 var det sommeren 1969 samarbeidet mellom Fischer Black og Myron Scholes tok fatt på å finne en riktig måte å verdsette warranter.

Allerede i 1970 hadde de kommet frem til en modell som de mente var et nytt bidrag til debatten som verserte omkring opsjonsprising. I utkastet fra 1970, «A Theoretical Valuation Formula for Options, Warrants, and Other Securities» ble formelen presentert og forsøkt utgitt i *the Journal of Political Economy*. Men dette tidsskriftet mente at denne typen artikkel var for spesialisert innen finans til at den kunne ha noen nytteverdi for andre interessenter. De ansvarlige foreslo at artikkelen ville komme til sin rett i et tidsskrift som var mer fokusert på finansielle emner, deriblant *the Journal of Finance*. Dermed ble ikke artikkelen sendt ut til vurdering av et panel med kunnskap om problemstillingen.

Ved Harvard gav de ut *the Review of Economics and Statistics*, og Fischer Black øynet en mulighet for at artikkelen til ham selv og Myron Scholes kunne komme på trykk der. Men også her var de lite villige til å publisere modellen som senere er blitt et av de viktigste bidragene innen finans. Avslaget var kontant, og artikkelen ble ikke sendt ut til vurdering. Problemet med å få artikkelen på trykk var sammensatt. Artikkelen var fokusert på spesielle finansielle instrumenter, og hadde ingen opplagt nytteverdi utover dette. Samtidig var Myron Scholes en lite kjent person innen det akademiske miljø. Fischer Black var som kjent konsulent, og hadde derfor ikke den nødvendige tilknytningen til de akademiske institusjonene som var nødvendig for å bli tatt seriøst av tidsskriftene.

Avslagene overrasket begge forfatterne, ettersom de var sikre på at deres bidrag var en vesentlig forbedring av de artiklene som allerede hadde tatt opp temaet. Derfor ble de ikke nedstemt av avslagene, men foretok en empirisk undersøkelse av resultatene de fikk som følge av bruk av modellen. Denne undersøkelsen viste at modellen underpriset opsjoner som hadde aksjer med lav volatilitet som underliggende aktiva, og overpriset opsjoner som hadde aksjer med høy volatilitet som underliggende aktiva.

Volatiliteten ble beregnet ved bruk av historiske data for underliggende aksjes avkastning. Black og Scholes (1972) mente at dersom volatilitetsestimatet stemte, så ville modellen deres gi gode resultater. Men de var også tydelige på at det var nødvendig med mer kunnskap om hvordan man beregnet et godt volatilitetsestimat med informasjonen som var tilgjengelig. De fant videre at markedsaktørene overvurderte verdien av opsjoner som hadde aksjer med lav volatilitet som underliggende aktiva, og at de overvurderte opsjoner som hadde aksjer med høy volatilitet som underliggende aktiva.

Dersom de tok høyde for transaksjonskostnadene ble forskjellen mellom modell og praksis mindre. Artikkelen som var skrevet på bakgrunn av disse resultatene ble utgitt i mai 1972 i *the Journal of Finance*. Dette betyr at de empiriske resultatene fra bruk av modellen forelå nærmere ett år før selve modellen ble utgitt.

Ettersom den opprinnelige artikkelen som inneholdt opsjonsprisingsformelen ikke ble utgitt den første tiden, var det klart for Black og Scholes at de måtte omskrive artikkelen. De valgte derfor å fokusere på hvordan modellen kunne anvendes på mer generelle problemstillinger innen økonomifaget. Det nye utkastet ble ferdig i januar 1971, og tok høyde for å fange interessen til alminnelige økonomer, og ikke bare de som fokuserte på finans. Dette utkastet bar navnet «Capital Market Equilibrium and the Pricing of Corporate Liabilities».

Samtidig skulle det vise seg at flere personer var interessert i at artikkelen kom på trykk (Black, 1989). Professorene Eugene Fama og Merton Miller fra Chicago hadde gitt dem verdifulle kommentarer gjennom omskivingsfasen av artikkelen, og fulgte prosessen frem mot publisering. De overtalte redaktørene hos *the Journal of Political Economy* om at Fischer Black og Myron Scholes var inne på noe, og at dette burde overveies nøye. Denne gangen ble artikkelen betraktet, og etter flere innspill fra de som skulle godkjenne innholdet i artikkelen kom den på trykk i mai/juni 1973 under navnet «The Pricing of Options and Corporate Liabilities».

Robert Merton hadde selv arbeidet med å finne en opsjonsprisingsformel, og hadde sin egen artikkel han ønsket å publisere. Denne artikkelen gikk under navnet «The Theory of Rational Option Pricing», og han hadde forsøkt å fokusere både på opsjonsprising og verdsettelse av foretak. I 1971 var denne artikkelen ferdig, men ettersom den var en forlengelse av det som Fischer Black og Myron Scholes hadde skrevet lot publiseringen vente på seg. Merton hadde på denne tiden blitt kontaktet av redaktøren av *Bell Journal of Economics and Management Science* som var et nytt tidsskrift, om en mulig publisering der. Det var etter Mertons mening på sin plass at hans artikkel kom ut i samme tidsrom som «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», og han fikk derfor utsatt publiseringen av sin egen artikkel til våren 1973.

5.3 Mottakelsen av modellen i markedet

Formelen til Black, Scholes og Merton var banebrytende, men også forut for sin tid. Det kom frem i avsnitt 2.2 at CBOE ble opprettet i 1973 som en følge av handelen ved CBT. Men i tiden før denne børsen ble opprettet var det ulik oppfatning om opsjoner skulle spille en sentral rolle i kapitalmarkedet i USA. Opsjoner var forbundet med mye av det som gikk galt i økonomien på 1920 – tallet, og særlig markedsmanipulasjon. Det var på den andre siden de som mente at opsjoner gav investorer flere strategier som kunne benyttes, og dermed var et nyttig bidrag til mer effisiente markeder (MacKenzie & Millo, 2003).

Market makerne, som er de som tilbyr kontrakter til kjøpere og selgere av opsjoner, kunne utnytte feilprisingen mellom kjøpsopsjoner og salgsopsjoner. De visste at put-call pariteten måtte holde, og slike muligheter måtte forsvinne etter en stund (Stoll, 1969). Problemet den første tiden var at machokulturen rådet, og de som valgte å bruke teoretiske hjelpemidler ble nærmest sett på som annenrangs meglere.

Mange satte sin lit til tommelfingerregler og ad hoc løsninger. Opsjoner ble ofte verdsatt til forward prisen, som er dagens verdi av underliggende aktiva justert i henhold til renteeffekter. Dette indikerer at formelen ikke var en suksess fra første stund. Videre, som det ble nevnt i forrige avsnitt, kunne man se at prisene som ble regnet ut ved å bruke Black-Scholes-Merton-formelen ikke helt stemte overens med de prisene som kunne observeres i markedet. Det var også et poeng at prisprediksjonen fra Black-Scholes ikke samsvarte med virkeligheten på grunn av de strenge restriksjonene som lå til grunn. Det viste seg at det var mulig å oppnå ekstraordinær profitt som følge av at markedet ikke var effisient, noe som Black, Scholes og Merton forutsatte (Galai, 1977).

Formelen ble også utviklet åtte år før den første IBM PC-en ble født, og ikke alle meglere var like komfortable med å regne ut prisen for opsjoner for hånd

(Hardy, 1996). Teoretiske beregninger kunne være langtekkelige, og meglere kunne oppleve at gevinstmulighetene forsvant før utregningene var klare.

CBOE åpnet for handel en måned før artikkelen til Black og Scholes ble publisert i 1973. I den anledning ble Myron Scholes og Robert Merton hyret inn for å bistå et meglerhus for å finne teoretiske priser for opsjonene som skulle omsettes på markedet (Morgenson og Weinstein, 1998). Prisene samsvarte ikke med markedsprisene. Grunnen til dette var at det til tider finnes informasjon i markedet som det ikke tas hensyn til i en matematisk formel. Dette kan blant annet være informasjon om overtakelser, fusjoner og fisjoner. Denne informasjon ble ikke nødvendigvis reflektert i de inputvariablene som ble brukt i formelen, og feilprisingen var et faktum. Kostnaden ved opsjoner økte når markedet var aktivt, ettersom det er mer sannsynlig at opsjonen vil utbetale store gevinster dersom opsjonen forfaller i et marked som har beveget seg mye. Dette var viktig fordi det var lettere å oppnå høye gevinster i et marked som var aktivt, samtidig som det potensielle tapet var begrenset (James, 2001).

26 april 1973 var den første handelsdagen for opsjoner ved CBOE, og var ikke særlig begivenhetsrik. Bare 911 kontrakter ble inngått på 16 underliggende aksjer (www.cboe.com). Etter kort tid tok imidlertid handelsvolum og antall underliggende aksjer seg betraktelig opp. Bodie (1999) viser til at noen måneder etter publiseringen av den teoretiske modellen, så produserte Texas Instruments en kalkulator som håndterte Black-Scholes-formelen. Fischer Black startet en tjeneste der han estimerte volatiliteten til underliggende aktiva, og solgte disse estimatene til meglerne på handelsgulvet. Dette gjorde at aktørene i opsjonsmarkedet fikk anledning til å bruke en teoretisk verdsetting på kontraktene, og markedsprisene samsvarte etter hvert mer og mer med de teoretiske prisene. De aktørene som valgte å sette sin lit til den gamle måten å verdsette opsjoner på ble raskt taperne i markedet.

Det ble etter kort tid nødvendig å være kjent med begreper som stokastiske differensialligninger, sikringsstrategier og mye mer som ble benyttet i bruken av Black-Scholes-Merton-modellen. Det er flere årsaker til dette, og det kan nevnes at markedet begynte å se på de forutsetningene som lå til grunn, og tok disse med i prisningsprosessen. På denne måten ble de antakelsene som Black, Scholes og Merton gjorde en del av virkeligheten, og nøyaktigheten på prisprediksjonen steg betraktelig.

Arbeidet til Black, Scholes og Merton var også med på å gi legitimitet til opsjonshandelen. Fra tidlig begynnelse var det lite systematisk tankegang bak opsjonsprisene som florerte, og opsjonshandel kunne på enkelte områder sammenlignes med gambling. Merton, sammen med Black og Scholes kunne dermed gi meglerne en mer effektiv måte å verdsette opsjoner på, og opsjoner ble dermed et viktig bidrag i verdipapirhandelen.

5.4 Variablene i Black-Scholes-Merton-modellen

Det er naivt å tro at forholdene i den globale økonomien vil holde seg konstante over tid. Dette gjør at endringer i markedet vil få konsekvenser for verdien på opsjoner. Når teoretiske modeller benyttes, er det en risiko for at de inputvariablene som inngår i modellen kan endre seg. Altså vil dette føre til endringer i opsjonsprisene. I modellen til Black, Scholes og Merton var det opprinnelig 5 faktorer (S,X,T,r,σ) som påvirket opsjonsverdien. Dette ble senere utvidet til å ta hensyn til dividende.

- Dagens aksjekurs og innløsningskurs

For salgsopsjoner vil gevinsten ved forfall være beløpet som innløsningskursen overgår aksjeprisen. En slik opsjon vil bli mindre verdt etter hvert som aksjekursen stiger, og mer verdt etter hvert som innløsningskursen stiger. Dersom en kjøpsopsjon blir utøvd i fremtiden, vil gevinsten være det beløpet som aksjekursen overgår innløsningskursen med. En slik opsjon vil altså bli mer verdt etter hvert som aksjeprisen stiger, og motsatt etter hvert som innløsningskursen stiger. Kjøpsopsjoner endrer seg altså omvendt av hva en salgsopsjon gjør.

- Tid til forfall

Europeiske kjøp- og salgsopsjoner blir som regel mer verdt dersom tid til forfall øker. Dette fordi sannsynligheten for at opsjonen vil ende in-the-money, eller out-of-the-money øker med tid til forfall. Men det er ikke alltid slik. Dividendeutbetalinger kan gjøre sitt til at opsjoner med kort levetid er mer verdt enn opsjoner med lang levetid. Amerikanske opsjoner blir drøftet nedenfor, men både kjøp- og salgsopsjoner vil bli mer verdt jo lenger tid det er til forfall.

- Volatilitet

Volatiliteten til en aksje er et mål på hvor usikker man er angående prisbevegelsene til aksjen i fremtiden. Etter hvert som volatiliteten øker, økes sjansene for at aksjen vil gjøre det enten veldig bra eller veldig dårlig i tiden fremover. Denne faktoren vil bli drøftet mer grundig i avsnitt 5.5.7 og 5.7, for å kunne fastslå hvordan volatilitet beregnes i praksis.

- Renten

Konstant risikofri rente er en bekvem forutsetning, men ikke nødvendigvis virkelighetsnær. Renten innvirker på nåverdien av kostnadene ved innløsning av opsjoner, som fører til at prisen på kjøpsopsjoner vil stige når renten stiger. Prisen på salgsopsjoner vil falle når renten stiger.

- Dividende

Black og Scholes antok som tidligere nevnt i avsnitt 4.6, at modellen de utviklet ikke tar for seg aksjer som utbetaler dividende. En slik forutsetning er ikke realistisk i praksis. Dividende reduserer prisen på aksjene, noe som vil få innvirkning på opsjonsholderne. For kjøpsopsjonen vil det bety at verdien faller, noe som er uheldig, mens det for salgsopsjonen betyr at verdien stiger, noe som er en fordel. Effekten av dividende blir studert nærmere i avsnitt 5.5.3.

Tabell 5.1	**Endringer i markedsforhold og effekten på opsjonspris**	
Variabel:	Verdien på kjøpsopsjoner:	Verdien på salgsopsjoner:
Dagens aksjekurs	+	-
Innløsningskurs	-	+
Tid til forfall	+*	+*
Volatilitet	+	+
Renten	+	-
Dividende	-	+
* For europeiske opsjoner er forholdet usikkert		

Tabellen viser hvilken effekt økningen av en variabel har, mens de andre holdes konstant.

5.5 Begrensinger ved Black-Scholes-Merton-modellen

I det foregående avsnittet kunne en få et inntrykk av hvordan de ulike variablene som inngår i Black-Scholes-Merton-modellen påvirker verdien på derivatet. Dermed er det naturlig å se nærmere på hvorfor det til tider kan være forskjell mellom den teoretisk beregnede verdien og prisen man ser i markedet. Den mest opplagte grunnen til at det kan være forskjell mellom verdi og pris for en opsjon, er feilberegninger. Dette kan være bruk av aksjekurser som er rapport unøyaktig, feil tidsperiode, eller bruke volatilitet beregnet fra en annen aksje enn den som er aktuell. Dersom alle inputvariablene er korrekte, vil det fremdeles være mulig å oppleve at det ikke er samsvar mellom teoretisk riktig verdi, og markedspris. Det kan være tilfelle at markedsprisen ikke er korrekt, men at den teoretiske verdien er rett. Samtidig kan man ha brukt feil output fra formelen, eller formelen kan rett og slett være gal.

Det ble i avsnitt 4.6 listet opp en rekke forutsetninger som Fischer Black og Myron Scholes måtte anta før de kunne utlede opsjonsprisingsformelen. Disse vil nå bli diskutert nærmere.

5.5.1 Begrensinger i forhold til rentenivået

Noe av det første Black og Scholes forutsatte var at renten holdt seg konstant frem mot forfall. Dette er ikke realistisk, ettersom avkastningen fra obligasjoner med ulik forfallstidspunkt viser at markedet forventer at renten endrer seg. Antagelsen om konstant rente blir vanskeligere å rettferdiggjøre når opsjonene har lang løpetid (Lauterbach og Schultz, 1990). Robert Merton (1973) antok at dersom volatiliteten var kjent, kunne avkastningen fra nullkupongobligasjoner brukes for å finne renten man burde bruke i modellen. Skulle det være tilfellet at renteendringene er kjent, kan man benytte avkastningen fra en nullkupongobligasjon med forfall lik opsjonen som renteinput. På denne måten slipper man å være urolig for endringer i kort-renten og de lange rentene.

Renteendringer vil i liten grad påvirke opsjonsverdier, men i sammenheng med endringer i volatiliteten kan det få større betydning på de beregnede verdiene. Aktører med en klar formening om hvilken retning renten vil bevege seg, kan utnytte dette ved bruk av renteinstrumenter.

5.5.2 Begrensinger i forhold til utlånsrente

Renten som brukes når en investor skal låne et beløp er i praksis ikke den samme renten som investor mottar når han plasserer et beløp risikofritt. I et realistisk kapitalmarked vil renten som betales når man låner et beløp ofte være betydelig høyere enn det man mottar ved plassering av samme beløp (Bergman, 1995). Videre kan banken sette krav som medfører en restriksjon i forhold til lånebehovet. Det samme kan skje dersom banken krever marginer som gjør at investor ikke kan fullfinansiere investeringene sine. Slike begrensinger gjør at kjøpsopsjonsverdien øker, ettersom opsjoner har en gearing-effekt som kan medføre et substitutt i forhold til det å måtte låne. Dette gjør at investorer som står overfor restriksjoner med hensyn til lånerente vil ønske å kjøpe opsjoner. De investorene som får låne til en rente som er nesten lik innskuddsrenten vil ønske å låne.

5.5.3 Begrensinger i forhold til en lognormal prisprosess

Det har som det er vist i både kapittel 3 og kapittel 4 vært vanlig å anta at aksjekursen er lognormalfordelt. Empiri viser at dette nødvendigvis ikke er tilfellet, og at den faktiske fordelingen har annerledes form enn lognormalfordelingen. Faktisk prisdata tyder på at halene til fordelingen er tykkere (tynnere) enn hva som er tilfellet for lognormalfordelingen (Marsh og Kobayashi, 2000). Dermed kan opsjonsverdiene beregnet med bruk av Black-Scholes-Merton-modellen bli verdsatt for lavt (høyt).

Lognormalfordelingen som ble brukt av Black og Scholes gjorde at aksjekursen ikke kunne bevege seg kraftig enten oppover eller nedover. En stor og overraskende nyhet kan gi store utslag på aksjeprisen, og i noen tilfeller vil handelen i aksjen bli stoppet for en periode. Sannsynligheten for at kursen vil stige eller falle kraftig vil derfor påvirke verdien til opsjonen. Forklaringer til slike observasjoner tar hovedsaklig utgangspunkt i den stokastiske prosessen som beskriver aksjeprisutviklingen (Franke *m.fl.*, 1999).

Kontinuerlige endringer i prisen på underliggende aktivum er en forutsetning som gjør det nødvendig å hele tiden kunne handle med dette aktivumet for at det skal være mulig med kontinuerlig rebalansering, for å opprettholde en risikofri portefølje. I praksis vil dette være vanskelig å oppnå (Derman og Taleb, 2005). Oppkjøp og fusjoner gjør at antagelsen om kontinuerlig handel kan brytes i enkelte tilfeller. I hvilken grad opsjonsverdier blir påvirket av slike hendelser avgjøres av sannsynligheten for at hendelsen skal forekomme. Verdien på opsjoner vil påvirkes på forskjellig måte. Noen opsjoner vil øke i verdi, mens andre vil falle.

5.5.4 Begrensinger i forhold til konstant volatilitet

Volatiliteten som blir benyttet av Black og Scholes antas å være konstant. Slik er det ikke i den virkelige verden. Dette gjør at verdiene man får som et resultat av å bruke modellen ikke vil være korrekte. Skal verdiene reflektere at volatiliteten endres over tid, må dette tas med i modellen. Verdien til opsjonen vil avhenge av volatiliteten i hele opsjonens levetid, og usikkerheten omkring hva volatiliteten vil være ved ethvert fremtidig tidspunkt. Prisene og volatiliteten i markedet har ikke samsvart med Black-Scholes-Merton-modellen (Ayache *m.fl.*, 2004). Man må altså ta høyde for dagens volatilitet, og forventet fremtidige nivåer for volatilieten. Ettersom volatiliteten er den eneste ukjente variabelen i modellen til Black, Scholes og Merton, vil denne bli drøftet nærmere i avsnitt 5.7.

5.5.5 Begrensinger i forhold til dividendeutbetalinger

De fleste foretakene som har aksjer som omsettes på børs utbetaler dividende i forhold til en overordnet utbetalingsplan. Dette vil derfor få innvirkning på verdien av opsjonene til disse foretakenes aksjer (Haug *m.fl.*, 2003). Dermed er det også naturlig å vurdere opsjoner i forhold til dividendeutbetalende aksjer. Robert Merton (1973) så at den originale modellen til Black og Scholes måtte ta hensyn til underliggende aktiva som utbetalte dividende, og utvidet modellen. Opsjoner der dividende er en faktor kan verdsettes på forskjellige måter. Det er mulig å enten benytte seg av en dividenderate (δ), eller beregne nåverdien av fremtidige dividendeutbetalinger og justere aksjeprisen deretter. Dersom aksjen har diskrete dividendeutbetalinger, er det vanlig å justere dagens aksjekurs for fremtidig dividende på følgende måte;

$$S_0^{justert} = S_0 - NV_{0,T}(Div)$$

Med den justerte aksjekursen er det mulig å benytte Black og Scholes formel på vanlig måte.

Put-call pariteten vil også gjelde i de tilfellene opsjoner har underliggende aktiva som utbetaler dividende. Det som er utfordringen i forhold til dividendeutbetalig er at fremtidige utbetalinger er usikre. Utbetalinger av dividende kan være påvirket av de andre variablene som inngår i formelen, og det er derfor nødvendig med en grundig analyse av hva som påvirker aksjekursen, og i hvilken grad den blir påvirket.

5.5.6 Begrensinger i forhold til innløsningstidspunkt

Opsjonen Black og Scholes verdsatte i artikkelen fra 1973 var av europeisk type. For opsjoner av amerikansk type kan man ikke benytte modellen, med mindre helt spesielle forutsetninger tas. Amerikanske opsjoner blir drøftet nærmere i avsnitt 5.6. Ettersom modellen bare gjelder for europeiske opsjoner, vil mange av de opsjonene investorer ønsker å benytte seg av ikke kunne verdsettes analytisk. Vanskeligheten med å finne løsninger for de amerikanske opsjonene stammer fra det faktum at man må få en løsning som tar hensyn til tidlig utøvelse. Derfor er fokus lagt til numeriske metoder og approksimasjoner (Kim, 1990). Ofte brukes binomisk verdsetting eller simulering.

5.5.7 Begrensinger i forhold til transaksjonskostnader og skatter

Investorer må vanligvis betale noe for å benytte seg av tjenestene finansinstitusjonene tilbyr, og finansinstitusjonene må betale for å kunne være aktive på børsen. Slike kostnader kan ofte overgå gevinsten ved å utnytte feilprising i markedet. Transaksjonskostnadene er også en naturlig hindring mot at man hele tiden kan rebalansere en portefølje, for dermed å ha en sikret posisjon (Edirsinghe, 1993).

Skatt er også et område som påvirker hvordan opsjoner verdsettes. Ulike investorer står overfor forskjellige skattesatser, og det kan være forskjell på hvordan gevinst og tap fra investeringer beskattes. Skatteregler kan være kompliserte, og kan avhengig av om man har tjent eller tapt på en posisjon (Cohen, 2005). Dette gjør at investorer bruker opsjoner på en bestemt måte, som igjen kan gjøre at opsjonene verdsettes forskjellig fra den opprinnelige formelen til Black og Scholes.

5.5.8 Begrensinger i forhold til short-salg

Short-salg av aksjer er i teorien en effektiv måte å sikre seg gevinster i et fallende marked. I praksis kan det være noe vanskelig å innta en kort posisjon, fordi det må finnes en motpart, samt at det er sikkerhets- og marginkrav. Marginkrav kan ha stor innvirkning på mulige strategier som er tilgjengelig for investor ved kontinuerlig handel (Heath og Jarrow, 1987)

Når det gjelder korte posisjoner i opsjoner, så vil kostnadene forbundet med dette være lavere enn hva som er tilfellet for aksjer. Kostnader ved short-salg som gjelder for alle investorer vil også påvirke opsjonsverdiene, fordi opsjonsverdien må reflektere vanskelighetene ved å selge et aktivum short. Dette har innvirkning på sikringsstrategien som velges. Sikringsstrategien skal replikere opsjonen fullt ut, og verdien av denne strategien og opsjonen må være lik. Men når det er begrensinger i markedet som gjør at dette ikke er mulig, kan prisene være forskjellige (Karatzas og Kou, 1996). Dersom en investor har vanskeligheter med å selge en aksje short, kan det være aktuelt i innta en kort posisjon i kjøpsopsjoner eller kjøpe salgsopsjoner. Dette vil indirekte være det samme som å shorte aksjen.

5.6 Amerikanske opsjoner

Amerikanske opsjoner har den egenskap at de kan innløses når som helst frem til og med forfall. Dette forutsetter selvfølgelig at det er mulig å oppnå gevinst ved tidlig utøvelse av opsjonen. En amerikansk opsjon gir innehaveren større fleksibilitet, noe som også skulle tilsi større verdi. For matematikere er det de amerikanske opsjonene som gir størst glede, på grunn av det vanskelige spørsmålet om når det er best å utøve opsjonen. Verdsettelsen av amerikanske opsjoner er altså mer komplisert, ettersom man må bestemme opsjonens verdi, samt om den skal utøves tidlig (Wilmott *m.fl.*, 1995).

I det standardiserte opsjonsmarkedet i Norge er det bare opsjoner på OBX-indeksen som er av europeisk type. For de andre noterte opsjonene er det mulig med tidlig innløsing, og disse er derfor amerikanske opsjoner. Dermed vil ikke modellen til Black, Scholes og Merton gi eksakte verdier for slike opsjoner (Geske og Roll, 1984). Fordelen med Black-Scholes-Merton-modellen er at forutsetningene bak modellen er enkle og intuitive å forstå. Modellen vil aldri være perfekt, men vil kunne fungere som en tilnærming. Dette vil gjelde for alle opsjoner man benytter modellen til å verdsette, uansett type. På denne måten er det mulig å forstå at modellen har forholdt seg populær, ettersom den er enkel i bruk og lett å forstå. Amerikanske opsjoner kan verdsettes på mange forskjellige måter, med utgangspunkt i teorien til Black, Scholes og Merton. Som tidligere nevnt i avsnitt 5.5.7, finnes det bare eksakte løsninger for amerikanske opsjoner når man tar helt spesielle forutsetninger. Når opsjonene har uendelig lang tid til forfall, er det mulig å benytte seg av Black-Scholes-Merton-analysen.

Robert Merton (1973) fant at dersom amerikanske kjøpsopsjoner og salgsopsjoner aldri bortfaller, vil det være mulig å finne en analytisk verdi for opsjonene. Tankegangen bak dette er at slike opsjoner alltid har samme tid til forfall, den konstante uendelighet. På denne måten er det mulig å finne den pris som gjør det fordelaktig å utøve tidlig, og denne prisen er også konstant. For å finne denne prisen er det nødvendig å fastsette en grenseverdi for når det er optimalt å utøve opsjonene. Når aksjekursen for første gang stiger over denne grenseverdien, er det ideelt å innløse opsjonene. McDonald (2003) benytter seg av en barriere (H) som grenseverdi for å vurdere nåverdien av 1 krone utbetalt når dagens aksjekurs (S_t) når barrieren.

$$\text{Verdien av 1 krone mottatt dersom } \mathrm{S_t} \text{ først når H nedenfra} = \left(\frac{\mathrm{S_t}}{H}\right)^{h_1}$$

der

$$h_1 = \frac{1}{2} - \frac{r_f - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r_f - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r_f}{\sigma^2}}$$

og

$\mathrm{S_t}$ *er aksjekursen ved tidspunkt t.*

$$\text{Verdien av 1 krone mottatt dersom } \mathrm{S_t} \text{ først når H ovenfra} = \left(\frac{\mathrm{S_t}}{H}\right)^{h_2}$$

der

$$h_2 = \frac{1}{2} - \frac{r_f - \delta}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{r_f - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r_f}{\sigma^2}}$$

Disse utrykkene kan således benyttes for å verdsette amerikanske kjøpsopsjoner og salgsopsjoner. Dette er vist nedenfor.

5.6.1 Amerikansk kjøpsopsjon

En rasjonell investor vil ikke utøve en amerikansk kjøpsopsjon som ikke utbetaler dividende før forfall. Dette vil være fordi opsjonen utgjør en forsikring mot at aksjekursen faller under innløsningskursen. Det vil også være slik at jo lenger tid det går før innløsningskursen må betales, jo bedre er det for opsjonsinnehaveren. Når det er ventet at et selskap skal utbetale dividende, blir bildet noe mer komplisert. Det vil ikke være slik at det er automatisk best å vente med å utøve opsjonen, fordi det kan være optimalt å utøve rett før utbetalingen finner sted. Grunnen til dette er at dividenden vil gjøre aksjen så vel som opsjonen mindre verdt. Fischer Black (1975) var av den oppfatning at man i et slikt tilfelle burde verdsette to europeiske opsjoner for å finne en tilnærmet verdi på den amerikanske kjøpsopsjonen. Ved å vurdere en europeisk opsjon som forfaller samtidig med den amerikanske opsjonen, og en som forfaller rett før dividenden utbetales, kan man få en nesten nøyaktig verdi for den amerikanske opsjonen. Prisen på den amerikanske opsjonen bør settes lik den høyeste prisen av de to europeiske opsjonene. En slik kjøpsopsjon vil kalles «pseudo-American». Opsjoner av denne typen vil nok ikke bli verdsatt helt korrekt, ettersom Blacks metode undervurderer den faktiske verdien.

Fleksibiliteten som er forbundet med en amerikansk kjøpsopsjon gjør at den vil være mer verdt enn den forenklede fremgangsmåten beskrevet ovenfor tilsier. Forskjellen kan være både stor og liten, men er uansett verdt å legge merke til.

For amerikanske kjøpsopsjoner med uendelig tid til forfall er det nødvendig å bestemme optimal innløsningsbarriere. Denne barrieren må være slik at verdien på kjøpsopsjonen blir høyest mulig. Dersom aksjekursen når barrieren vil en amerikansk kjøpsopsjon av denne typen ha utbetaling lik differansen mellom barrieren og innløsningskursen X. Verdien av dette vil være

$$(H - X) \times \left(\frac{S_t}{H} \right)^{h_1}$$

Det optimale nivå for H = H* finnes ved å differensiere uttrykket med hensyn til H og løse ut slik at

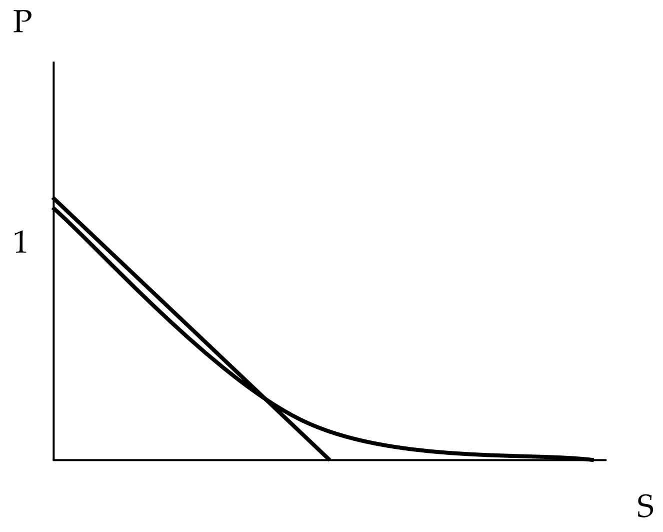
$$H^* = X \times \left(\frac{h_1}{h_1 - 1} \right)$$

h1 vil være større enn 1, noe som igjen betyr at optimalt barrierenivå vil være høyere enn innløsningskursen. Dette medfører at

$$\text{Prisen på uendelig kjøpsopsjon} = \frac{X}{h_1 - 1} \times \left(\frac{h_1 - 1}{h_1} \frac{S_t}{X} \right)^{h_1}$$

5.6.2 Amerikansk salgsopsjon

For amerikanske salgsopsjoner på en aksje som ikke utbetaler dividende kan det være fordelaktig å utøve tidlig. Det vil være riktig til enhver tid å vurdere om opsjonen bør utøves tidlig dersom aksjeprisen er merkbart lavere enn innløsningskursen.



Figur 5.1: Amerikansk salgsopsjon

Figuren 5.1 viser at det før forfall vil være et stort område for aksjeverdier S, der verdien på en europeisk salgsopsjon er lavere enn dens indre verdi. Dersom en antar at S ligger i dette området, vil salgsopsjonen som funksjon av verdien på underliggende og tid (P(S,t)), være mindre enn det en maksimalt kan oppnå når innløsningskurs er mindre enn verdien på underliggende (max(X-S,0)). Dette vil i så fall utgjøre et problem, ettersom en da kan kjøpe underliggende i markedet for S, samtidig som en kjøper opsjonen for P. Videre snur en seg helt rundt, og gjør seg bruk av rettigheten til å selge umiddelbart til X. Dermed har man oppnådd en risikofri gevinst (X-P-S), og dette er et klassisk eksempel på arbitrasje. Dessverre har slike muligheter et kort tidsintervall, fordi verdien på opsjonen vil stige i henhold til etterspørselen fra arbitrasjehandlere.

Amerikanske og europeiske salgsopsjoner har ulik verdi, ettersom det er nødvendig å innføre begrensingen: V(S,T) ≥ max(S-X,0). Verdien på en amerikansk salgsopsjon vil være større enn verdien på en europeisk salgsopsjon, av den enkle grunn at det kan være fordelaktig å utøve opsjonen før forfall når det er mulig. Skulle det forekomme at aksjeprisen nesten synker til null, og det er lite sannsynlig at kursen vil hente seg inn igjen, vil det være lønnsomt å utøve opsjonen. Da vil investoren tjene renten i den perioden man ellers ville hatt beløpet bundet fast i opsjonen.

For amerikanske salgsopsjoner med uendelig tid til forfall er det også nødvendig å bestemme optimal innløsningsbarriere. Dersom aksjekursen når barrieren vil en amerikansk salgsopsjon av denne typen ha utbetaling lik differansen mellom innløsningskursen X og barrieren. Verdien av dette vil være

$$(X - H) \times \left(\frac{S_t}{H} \right)^{h_2}$$

Det optimale nivå for H finnes ved å differensiere uttrykket med hensyn til H og løse ut slik at

$$H^* = X \times \left(\frac{h_2}{h_2 - 1} \right)$$

Dette medfører at

$$\text{Prisen på uendelig salgsopsjon} = \frac{X}{1 - h_2} \times \left(\frac{h_2 - 1}{h_2} \frac{S_t}{X} \right)^{h_2}$$

5.6.3 Put-call paritet

Pariteten for kjøpopsjoner og salgsopsjoner diskutert i avsnitt 4.7 gjelder bare for opsjoner av europeisk type. For amerikanske opsjoner er det ingen eksakt sammenheng. Dette kommer av at det kan være optimalt å innløse en amerikansk salgsopsjon der underliggende aktivum ikke utbetaler dividende, mens dette ikke er tilfellet for en amerikansk kjøpsopsjon. Skulle underliggende aktivum utbetale dividende blir det enda mer komplisert. Men det finnes sammenhenger også for amerikanske opsjoner både når det ikke utbetales dividende, og når dividende utbetales (Cox og Rubinstein, 1985).

Uten dividende:

$$P + S_0 - e^{-r_f T} X \geq C \geq P + S_0 - X$$
$$C + X - S_0 \geq P \geq C + e^{-r_f T} X - S_0$$

Med dividende:

$$P + S_0 - e^{-r_f T} X \geq C \geq P + S_0 - X - e^{-r_f T} Div$$
$$C + X + e^{-r_f T} Div - S_0 \geq P \geq C + e^{-r_f T} X - S_0$$

Det er vanlig å betegne verdien av europeiske opsjoner med små bokstaver (c og p), og vanlige amerikanske opsjoner med store bokstaver (C og P).

5.7 Volatilitet

Som vist i avsnitt 5.5 var det knyttet mest usikkerhet til parameteren volatilitet. Det ble vist at man trenger et godt estimat for volatilitet, som er helt nødvendig for at Black-Scholes-Mertons prisprediksjon skal gi mening.

Oslo Børs beskriver volatilitet som «*kursbevegelser i underliggende verdipapir uttrykt i prosent. Høy volatilitet øker sjansen for at opsjonen skal gå in-the-money noe som øker verdien på opsjonen. Volatilitet kan være estimert, historisk eller implisitt.*» Med andre ord kan det sies at volatilitet, σ, er standardavviket til avkastningen etter 1 år med kontinuerlig diskontering. Volatilitet er en viktig faktor, særlig dersom man er involvert i derivathandel.

I Black-Scholes-Merton-modellen blir volatiliteten behandlet som en konstant, noe som gjør at opsjonsverdien øker når volatiliteten øker. Konstant volatilitet er hensiktsmessig i teoretiske fremstillinger, men kan komme til kort i den virkelige verden. Både megler i det underliggende verdipapir og derivat er interessert i hvilken retning markedet går, men opsjonsmegleren er mye mer følsom for hastigheten i markedet. Kjøp og salg av opsjonsporteføljer som er sensitive for volatilitet er vanlig blant meglere, og kan innebære vesentlig risiko. Særlig to forhold er viktige, nemlig prisen på den underliggende varen, og volatiliteten som er forventet frem til opsjonens forfall. Poenget er at man gjør seg mer avhengig av volatilitet fremfor prisen på underliggende, for å oppnå gevinst (Nandi og Waggoner, 2001).

Maheu og McCurdy (2000) fastslår at modeller som har konstant volatilitet, som for eksempel Black-Scholes, ikke gir mer upresis verdsetting enn modeller med volatilitet som varierer i tid. Modeller med permanent volatilitet over opsjonens levetid er en konsis metode å prise med, når modellen er korrekt spesifisert.

Enkelte ser for seg at tilfeldig tilskudd av ny informasjon om fremtidig avkastning er grunnen til volatilitet. Andre mener at endringer i handelsvolum, handlemåter og handelsmønster er grunnen til volatilitet. Ifølge Hull (2002) har volatilitet vist seg størst på de dagene da markedet faktisk er åpent, noe som igjen fører til at en beregner volatilitet ved å måle tid i handelsdager, og ikke kalenderdager. Dette fordi tilgangen til informasjon er størst når børsene er åpne, og volatiliteten vil på den måten genereres av markedet selv. Meglere innen finansverdenen har ifølge Farrell, Jr. (1997) sett at volatilitet gjerne forsterkes av seg selv. Med dette menes det at høy volatilitet etterfølges av høy volatilitet, og lav volatilitet etterfølges gjerne av lav volatilitet – før den stiger igjen. Videre har volatilitet en tendens til å gå tilbake til en langsiktig trend. Gjennom porteføljeforsikring kan volatilitet endre seg dersom denne formen for handel er av vesentlig størrelse. Dette på grunn av at de som styrer en portefølje, velger å selge aksjer i et fallende marked. Dette kan fremheve fallet i aksjemarkedet, samtidig som individuelle investorer også velger å selge i et marked som faller.

Volatiliteten spiller en sentral rolle i verdsettingen av opsjoner, noe som gjør at en kan betegne opsjonshandlere som volatilitetshandlere (Bergh red., 2000, s. 254). På mange måter kan det være enklere å bare forholde seg til volatilitet i handelen med opsjoner, enn å uroe seg over hvilken retning markedet er på vei mot. Strategier som baserer seg på volatilitet kan være svært lønnsomme, samtidig som det er en praktisk måte å håndtere risiko på.

Den fremtidige volatiliteten er den volatiliteten som man skulle ønske man hadde kunnskap om. Volatilitet kan derfor tolkes som en funksjon av innløsningskurs og løpetid. Dessverre må alle forholde seg til det faktum at fremtiden er ukjent, og man må basere seg på estimater som historisk og implisitt volatilitet. Historisk volatilitet tar for seg volatiliteten for historiske perioder. Implisitt volatilitet er den volatiliteten som samsvarer med opsjonsprisen i markedet.

Disse estimatene medfører ikke en sikker gevinst, og er ikke like risikofrie som man initialt kunne tenkt seg.

5.7.1 Historisk volatilitet

Ved å bruke historiske data er det mulig å estimere volatiliteten til et aktivum. For å gjennomføre denne metoden, observeres aksjekursen i tidsintervaller, og volatiliteten kalkuleres på følgende måte:

$$\textit{Daglig avkastning}: u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

$$n+1: \text{Antall observasjoner}$$

$$S_i: \quad \text{Aksjepris ved slutten av } ite \text{ intervall } (i = 0,1,\ldots,n)$$

$$\tau: \quad \text{Tidslengde intervall, } \textit{målt i år}$$

Dermed får man at et estimat, s, av standardavviket til den daglige avkastningen, u_i er gitt ved:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \bar{u}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

$$\textit{hvor } \bar{u} \textit{ er gjennomsnittet av } u_i$$

Standardavviket til u_i er $\sigma\sqrt{\tau}$. Variabelen s er dermed et estimat av $\sigma\sqrt{\tau}$. σ kan da estimeres som $\hat{\sigma}$, der $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$. Standardfeilen for dette estimatet er omtrent $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}$

Det er blitt foreslått at *n* blir satt til det antall dager som volatiliteten skal bli anvendt. Andre forslag er mellom 90 og 180 dager, men mer enn 180 dager inn i en historisk periode vil kunne gi upålitelige verdier. Det er estimatet for μ,σ, til en kontinuerlig forrentet gevinst som er relevant, og derfor bør intervallene for målingen være så små som mulig. I praksis betyr dette daglige data (Danthine og Donaldson, 2001).

Dividendeutbetalinger er også av betydning. Utbyttet utgjør godtgjørelsen til eierne for at de har stilt kapital til disposisjon (Tellefsen og Langli, 2000, s. 104). Med utbytte må en endre utregningen slik at dette blir tatt hensyn til. For et slikt tidsintervall må beløpet som utbetales tas med, slik at $u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$.

Parkinson så i 1980 at det var mulig å forbedre prosessen ved å bruke høyeste og laveste aksjekurs hver dag for å beregne historisk volatilitet. Volatilitet pr. år beregnes som tidligere $\sigma\sqrt{\tau}$, og $Høy_i$ og Lav_i er høyeste og laveste aksjekurs hver dag. Dette gir at

$$\sigma = \frac{1}{2n\sqrt{\ln(2)}} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{Høy_i}{Lav_i}\right)$$

Metoden har vist seg å være mer effektiv statistisk sett enn metoden som bruker standardavviket til sluttkursen, ved at antall observasjoner for utregning av konfidensintervall er forskjellig fra sluttkursmetoden. Det er allikevel verdt å nevne at metoden kan undervurdere den *sanne volatiliteten* fordi det forutsettes kontinuerlig handel. Det må også være mulig å observere korrekt høyeste og laveste kurs, noe som ikke alltids er tilfellet (Haug, 1998).

Garman og Klass (1980) så at det var mulig å kombinere høy/lav tankegangen med bruken av sluttkurser for å finne et volatilitetsestimat. Dette gir følgende formel:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{Høy_i}{Lav_i}\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2\ln(2)-1\right]\left[\ln\left(\frac{Sluttkurs_i}{Sluttkurs_{i-1}}\right)\right]^2}$$

Det er mulig å modellere volatilitet ved å bruke hypotetiske prisendringer fra dag til dag, og gjennom handelsdagen. Avstanden fra laveste til høyeste verdi for estimering av volatilitet har betydd mye, og kan fungere som en stedfortreder til *sann volatilitet* sammen med sluttkursen for aksjer. En benytter seg av hele spekteret for observerbare kurser, noe som gjør metodene attraktive og effektive (Brandt og Diebold, 2003). Etter Hersougs (1993) mening er det den forventete volatiliteten i opsjonens løpetid som er det avgjørende. Som estimat på forventet volatilitet kan et veiet gjennomsnitt brukes, der de nyeste observasjonene vektlegges mer enn de som er observert i tidligere tid.

Historisk simulering kan forbedres ved at det tas hensyn til volatilitetsendringer i perioden som ligger til grunn for de historiske dataene. Dette betyr at dersom den nåværende volatiliteten til en markedsvariabel er 1,5 % per dag, og at den for to måneder siden bare var 1 %, vil dataene som ble observert for to måneder siden angi for lav volatilitet i forhold til endringene som kan ventes nå. Skulle det vise seg at det for 2 måneder siden var 2 % volatilitet, ville det være motsatt (Hull og White, 1998).

Historisk volatilitet måler hvor mye den underliggende aksjen faktisk har svingt før, og enkelte, blant dem Osterland (1999), mener at en har begrenset nytte av å se på historiske prisbevegelser for å beregne fremtidig volatilitet. Baken og Nandi (1996) poengterer at «*the future volatility is unobservable and may differ from the historical volatility.*»

5.7.2 Implisitt volatilitet

Ettersom volatilitet kan endre seg, er det en mulighet for at opsjonsprisen som en kommer frem til ved å bruke Black-Scholes, ikke er korrekt. Dette fører til at de som spekulerer i opsjoner ofte vedder på både fremtidig volatilitet og opsjonspris. Volatiliteten er den eneste inputparameteren i Black-Scholes som det ikke er mulig å observere direkte, noe som gjør arbeidet med å verdsette opsjoner til en spennende oppgave. Aksjeopsjoner har blitt mer og mer vanlige, og i den sammenheng mener Gleckman (2002) at en angående volatilitet må stille spørsmålet: «How much will the underlying stock price fluctuate over the next decade? It's the most important assumption to make--and the toughest to forecast».

Volatilitet beregnet fra historiske data kan være misvisende, og aktørene ser derfor også på implisitt volatilitet. Implisitt volatilitet er den volatilitet som gjør Black-Scholes-Mertons prisprediksjon lik markedspris, og er lik for europeiske put- og call opsjoner med samme innløsningskurs og bortfallsdato. Tilnærmingsvis vil det samme gjelde for amerikanske opsjoner. Det er dessverre ikke mulig å løse en ligning som gjør at en får σ som en funksjon av de resterende parametrene i Black-Scholes-formelen. Dersom en har oppgitt opsjonsverdien kan man finne den implisitte volatiliteten ved å prøve to ulike verdier for σ, en som gir for lav opsjonspris, og en som gir for høy. Fortsetter man slik, får man volatiliteten som gir opsjonspris lik Black-Scholes-Mertons prisprediksjon. Newton-Raphson-metoden og Bisection-metoden er matematiske metoder som beregner implisitt volatilitet. I praksis kan dette være tungvint å bruke slike interpoleringsmetoder, og derfor finnes det dataprogrammer som tar seg av denne jobben.

Markedets formening angående volatiliteten til en bestemt aksje, kan overvåkes ved å bruke implisitt volatilitet. Aktører kan til tider kalkulere den implisitte volatiliteten til en opsjon som handles hyppig, for så å bruke dette til å finne prisen på en opsjon som ikke handles like ofte, for den samme aksjen (Hull, 2002). Sharpe *m.fl.* (1999) bygger videre på denne tankegangen, og mener at det er mulig å se på en aksje der en har ulik innløsningskurs, men lik tid til forfall. Videre mener de at det er mulig å bruke gjennomsnittet av estimatene for volatilitet ved flere forskjellige forfallsdatoer. Også ved å se på gjennomsnittet for flere opsjoner med ulik innløsningskurs og forskjellig forfallstidspunkt, kan man få et estimat for volatilitet. Den implisitte volatiliteten i markedet vil hele tiden endre seg, ettersom opsjonspriser og forutsetningene i markedet vil forandre seg, og tilbudssiden og etterspørselssiden vil møtes. Det som kan fortone seg noe merkelig, er at implisitt volatilitet ikke er fast bestemt over flere innløsningskurser. Videre har det vært tendenser til at kjøpsopsjoner og salgsopsjoner har noe ulik implisitt volatilitet. På mange måter kan det være vel så nyttig å vurdere prisen på opsjonen med hensyn til implisitt volatilitet, som å se på kroner og ører.

Prisen på opsjoner som er deep-in-the-money og deep-out-of-the-money er som regel ikke spesielt sensitive med hensyn til volatilitet. Dermed gjør en klokt i å ta den implisitte volatiliteten som er kalkulert for disse opsjonene med en klype salt. Kontrakter kan bli priset for høyt eller for lavt, og dårlige sikringsstrategier kan forekomme. Dersom modellen er dårlig spesifisert, implementert på feil måte eller parametrene som inngår er ukorrekt estimert, vil dette føre til at modellen ikke i tilstrekkelig grad gir de resultatene som kan forventes. Skulle man gå over til en annen modell enn Black-Scholes-Merton for å verdsette opsjoner, vil man se en endring i parametrene for volatilitet. Men brukes den alternative modellen til å se på relative priser på samme måte som ved Black-Scholes-Merton, er det ingenting som skulle tilsi at prisene ville endre seg (Hull og Suo, 2002).

5.7.3 Stokastisk volatilitet

Modeller som antar at stokastisk volatilitet kan også benyttes, og gir i enkelte tilfeller et mer korrekt bilde av volatilitet. Volatilitet kan følge uendelig mange retninger i løpet av en opsjons levetid. Noen vil derfor helt enkelt se på volatilitet som tilfeldighetenes spill, og anta at det ikke er mulig å beregne en fornuftig og nøyaktig verdi for volatilitet. Modeller for stokastisk volatilitet gjør det enda mer komplisert å beregne opsjonspris, og blir av den grunn ikke brukt i like stor utstrekning som den originale Black-Scholes-Merton-modellen. Stokastisk volatilitetsmodeller tillater en tilfeldig komponent, og kan forklare hvorfor store endringer kan etterfølge stabile perioder (Knight *m.fl.*, 2002). Fordi det kan være vanskelig å sikre den tilfeldige volatilitetskomponenten, mister man muligheten til enkel risikonøytral verdsetting (Javaheri, 2005). Når volatilitet er tilfeldig er det ikke mulig å konstruere en perfekt sikker posisjon ved å bare bruke aktiva. I prinsippet er det mulig å bruke andre opsjoner, men dette blir utenfor denne oppgavens sfære.

Hull og White (1987) tar for seg en europeisk kjøpsopsjon på en aksje med stokastisk volatilitet. Deres funn tyder på at dersom man tar hensyn til stokastisk volatilitet, vil opsjonspris være lavere enn Black-Scholes-Mertons prisprediksjon når opsjonen er nær ved å være at-the-money. Når opsjonen er deep-in-the-money eller deep-out-of-the-money vil opsjonsprisen være høyere enn det som er resultatet med Black-Scholes-Merton. Overprisingen for innløsningskursen som forekommer ligger rundt 10 % av prisen på verdipapiret. Dette er et område som vil inneholde mye av opsjonshandelen, og det er derfor grunn til å tro at Black-Scholes-Merton overpriser opsjoner. Når det er positiv korrelasjon mellom aksjen og dens volatilitet, vil Black-Scholes-formelen føre til at out-of-the-money opsjoner blir priset for lavt. Når kovariansen er negativ, vil effekten bli motsatt. I de tilfeller Black-Scholes-Merton blir brukt til å bestemme implisitt volatilitet for en opsjon som er near-the-money som har lang tid til forfall, vil implisitt volatilitet bli lavere.

5.7.4 Blacks volatilitet

Fischer Black (Cox og Rubinstein, 1985) mente at å predikere volatilitet enten ved bruk av historisk eller implisitt volatilitet kunne utelukke gode poenger. En kombinasjon av de to, samtidig som empirisk kunnskap om hvordan volatilitet endrer seg over tid ble brukt, kunne gi et godt volatilitetsestimat. Ved å se på estimater for historisk volatilitet, samtidig som det tas høyde for fire observasjoner, kan man få en nyttig tilnærming til volatilitet.

Den første observasjonen sier at volatiliteten til forskjellige aksjer har en tendens til å endre seg i samme retning, noe som impliserer at det er en markedseffekt på aksjevolatiliteten.

Den andre observasjonen sier at endringer i volatilitet ofte er midlertidige, altså at etter oppgang eller nedgang så vil volatiliteten stabilisere seg på samme nivå som tidligere. Dette betyr at volatiliteten vil tilbakevende til sitt gjennomsnitt, noe som igjen betyr at forskjellige volatiliteter kan knyttes til opsjoner på aksjer med forskjellige forfallsdatoer.

Den tredje observasjonen sier at endringer i aksjekurs som ikke henger sammen med splitting av aksjen eller dividende, er motsatt relatert til endringer i volatilitet. Dette betyr at aksjer som nylig har steget i verdi vil oppleve et fall i volatilitet, og motsatt der verdien på aksjen har sunket.

Den fjerde og siste observasjonen sier at en opsjons implisitte volatilitet inneholder nyttig informasjon om hvordan man kan anslå sann volatilitet, noe som betyr at det er klokt å lytte til de signalene som kan hentes fra markedet ettersom det kan være informasjon som er kjent i markedet, men ikke for alle. Denne informasjonen vil være reflektert i opsjonsprisen.

5.8 Oppsummering

Dette kapittelet handlet om hvordan Black, Scholes og Merton fikk publisert sine artikler om opsjonsprising. Det er beskrevet hvordan dette førte til at modellen kunne anvendes på et bredt spekter av økonomiske problemstillinger. Det er også vist hvordan teori og praksis innen opsjonsprising tilnærmet seg hverandre. Modellen har en rekke variabler som spiller inn på den endelig opsjonsverdien. Disse er gjennomgått for å se hvordan opsjonsverdien påvirkes, og hvilke begrensinger modellen står overfor angående disse variablene. Forhold rundt amerikanske opsjoner og beregning av volatilitet er også drøftet.

Det neste kapittelet viser hvordan ulike opsjoner verdsettes med modellapparatet som er gjennomgått. Det vil også bli gjennomgått hvordan modellen til Black, Scholes og Merton brukes til risikostyring. Videre vil jeg se på hvilken betydning modellen har hatt, både teoretisk og praktisk.

Kapittel 6: Betydningen av B-S-M-modellen

6.1 Innledning

Det har i de foregående kapitlene blitt gjort rede for hvordan Black-Scholes-Merton-modellen ble utviklet, fra Bachelier og fremover mot publiseringen av «The Pricing of Options and Corporate Liabilities» og «The Theory of Rational Option Pricing». Det er vist i avsnitt 4.5 at det var et klart behov for en god opsjonsprisingsmodell, og at Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton så en mulighet til å studere flere sider ved finans gjennom teoretisk verdsetting av opsjoner. I kapittel 5 ble det redegjort for hvordan ulike variabler ved opsjonene påvirker verdien, og hvilke begrensinger man står overfor ved bruk av Black-Scholes-Merton-modellen.

Med denne kunnskapen er det nå på tide å se på hvilken nytte man har hatt av opsjonsprisingsmodellen både til prising og risikostyring. Når det gjelder betydningen av Black-Scholes-Mertons opsjonsprisingsmodell i praksis vil jeg se på hvordan modellen har utviklet seg i forhold til begrensingene nevnt i kapittel 5.

I dette kapittelet vil jeg også ta for meg betydningen av arbeidet deres med denne modellen på opsjonsteori, og teori innen andre økonomiske fagfelt. Jeg vil også se på viktigheten av sikringsporteføljen som benyttes, og hvordan finans i kontinuerlig tid fikk betydning for økonomisk teori. Samtidig vil jeg ta for meg hvordan modellen brukes av praktikere med tilknytning til derivatmarkedene.

Artiklene til Robert Merton, Myron Scholes og Fischer Black viste hvordan man kunne verdsette opsjonskontrakter, men modellen hadde også andre bruksområder. Tankegangen gjorde seg gjeldende for verdsetting av foretakets forpliktelser, fleksibilitet i prosjekter og nye finansielle instrumenter. I forhold til den analytiske Black-Scholes-Merton-modellen finner man at modellen er både generalisert og videreutviklet (Smithson, 1991). Dette vil bli presentert nedenfor.

6.2 Opsjonsprising med Black-Scholes-Merton-modellen

Den originale opsjonsprisingsutledningen til Fischer Black og Myron Scholes fokuserte på en kjøpsopsjon der underliggende aksje ikke utbetalte dividende. Dette resulterte i formelen som er beskrevet i avsnitt 4.6. De variablene som inngår i formelen beskriver ulike forhold ved opsjonskontrakten og underliggende aktivum. Innløsningskursen og tid til forfall er karakteristika ved den spesifikke opsjonskontrakten. Aksjekurs og volatilitet beskriver den spesifikke underliggende aksjen. Volatilitet ble inngående gjennomgått i avsnitt 5.7. Renten brukes som avkastningskrav på en risikofri investering. De fleste variablene uttrykkes per enhet tid, og da som regel per år.

6.2.1 Verdien av europeiske opsjoner uten dividende

For å se hvordan opsjonsverdier beregnes, kan man sette inn tall i formelen. Anta at aksjekursen i dag er 50 kroner, og at volatiliteten er 25 %. Videre forutsettes det inntil videre at det ikke utbetales dividende. Kontrakten spesifiserer at innløsningskursen er 60 kroner, og at forfall er om 6 måneder. Videre er risikofri rente i perioden lik 5 %. Dette gir følgende input, S_0 = 50, σ = 0,25, X = 60, T = 0,5 (6/12), r_f = 0,05. Dette gir følgende verdi på en europeisk kjøpsopsjon:

$$c = S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$c = 50 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{50}{60}\right) + \left(0{,}05 + \frac{0{,}25^2}{2}\right)0{,}5}{0{,}25\sqrt{0{,}5}}\right] - e^{-0{,}05\times 0{,}5} 60 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{50}{60}\right) + \left(0{,}05 - \frac{0{,}25^2}{2}\right)0{,}5}{0{,}25\sqrt{0{,}5}}\right]$$

$$c = 0{,}9758$$

Verdien av en salgsopsjon med samme input blir:

$$p = e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$p = e^{-0{,}05\times 0{,}5} 60 \times N\left[-\frac{\ln\left(\frac{50}{60}\right) + \left(0{,}05 - \frac{0{,}25^2}{2}\right)0{,}5}{0{,}25\sqrt{0{,}5}}\right] - 50 \times N\left[-\frac{\ln\left(\frac{50}{60}\right) + \left(0{,}05 + \frac{0{,}25^2}{2}\right)0{,}5}{0{,}25\sqrt{0{,}5}}\right]$$

$$p = 9{,}4944$$

Med verdien fra den ene opsjonen er det mulig å beregne verdien av den andre opsjonen ved bruk av put-call paritet. Dette vil gi samme opsjonsverdi som den direkte beregningen.

6.2.2 Verdien av en europeisk kjøpsopsjon med dividende

Ettersom det er urealistisk å anta at det ikke utbetales dividende på den underliggende aksjen, så ble det gjort nødvendige endringer av Merton i hans artikkel fra 1973. Dermed benyttet han artikkelen «The Theory of Rational Option Pricing» til å vurdere flere av de strenge forutsetningene i artikkelen til Black og Scholes. I avsnitt 5.5.3 ble det antydet at det var to forskjellige måter å håndtere dividendeutbetalinger på.

Man kunne for det første benytte en konstant dividenderate, og innlemme dette i den originale formelen vist ovenfor. Ved å anta 2 % årlig dividende, kontinuerlig forrentet, (δ = 0,02), resulterer dette i følgende formel og resultat for en europeisk kjøpsopsjon;

$$c = e^{-\partial T} S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \partial + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \partial - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$c = e^{-0,02\times 0,5} 50 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{50}{60}\right) + \left(0,05 - 0,02 + \frac{0,25^2}{2}\right)0,5}{0,25\sqrt{0,5}}\right]$$

$$- e^{-0,05\times 0,5} 60 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{50}{60}\right) + \left(0,05 - 0,02 - \frac{0,25^2}{2}\right)0,5}{0,25\sqrt{0,5}}\right]$$

$$c = 0,8747$$

Verdien på en europeisk salgsopsjon på samme underliggende aktivum kan enten beregnes direkte ved å ta hensyn til dividenderaten i formelen for en salgsopsjon, eller ved put-call paritet.

$$p = c + Xe^{-rT} - Se^{-\partial T}$$

$$p = 9,8908$$

Den andre metoden tok for seg dividendeutbetalinger i diskret tid. Her fant man nåverdien av de fremtidige dividendeutbetalingene, og justerte aksjekursen for dette. I forhold til tabell 5.1 er disse resultatene som ventet. Kjøpsopsjonen faller i verdi, og salgsopsjonen øker i verdi som følge av dividenden.

6.2.3 Verdien av en europeisk kjøpsopsjon med varierende rente

Robert Merton var fokusert på hvordan det var mulig å forbedre opsjonsprisingsmodellen ytterligere. I artikkelen fra 1973 vurderte han også hva som ville skje dersom den risikofrie renten ikke var konstant. Merton tar her for seg P(T), prisen på en risikofri obligasjon (med hensyn til mislighold). Denne obligasjonen vil ha forfall som sammenfaller med tid til forfall for opsjonen. Avkastningsdynamikken beskrives som $\frac{dP}{P} = \mu(T)dt + \sigma(T)dz(t:T)$.

Her vil μ være forventet avkastning, σ^2 er variansen for en standard Wiener-prosess mot forfall t = T. Dette endrer formelen for en standard europeisk kjøpsopsjon ved at man får et nytt volatilitetsmål ($\hat{\sigma}$) som også inneholder variasjonen i renteutviklingen.

$$c = S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) - \ln P(T) + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right] - P(T)X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) - \ln P(T) + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right]$$

I tilfellet der renten ikke er stokastisk, og konstant over tid, så vil variansen til dP være 0. Dermed vil μ være lik r_f, og $P(T) = e^{-r_f T}$.

6.2.4 Verdien av en europeisk kjøpsopsjon med aksjeprishopp

En av de første forutsetningene Black og Scholes benyttet seg av var som nevnt i avsnitt 4.6 at handelen foregikk kontinuerlig, uten store endringer i markedet. Dette betyr at prisene beveger seg kontinuerlig fra et punkt til et annet, og man får en aksjekursfordeling som er lognormal. Det kan i virkeligheten forekomme hopp i aksjekursen, og Cox, Ross og Rubinstein benyttet dette til å utvikle en binomisk modell for verdsettelse av opsjoner. Denne vil jeg diskutere nærmere i avsnitt 6.4. Merton (1976) studerte også denne problematikken. Den totale aksjeprisendringer kommer fra normale prisvariasjoner, og unormale prisvariasjoner som følge av ny informasjon. Denne nye informasjonen ser dagens lys ved diskrete tidspunkter. Etter at kursen får et hopp som følge av den nye informasjonen, forutsettes det at aksjekursen igjen beveger seg som i det kontinuerlige tilfellet. Risikoen som er forbundet med hoppet i aksjekursen forutsettes å være diversifiserbar. Hoppet karakteriseres ved en Poisson prosess, som betyr at en slik hendelse vil forekomme sjeldent, tilfeldig og være uavhengig fordelt (Keller og Warrack, 2003).

To spesialtilfeller blir studert i Mertons artikkel, som gir løsninger i henhold til den originale formelen til Black, Scholes og Merton. Det ene tilfellet er når det er umiddelbar mulighet for konkurs. Dette vil føre til den samme formelen som beskrevet i avsnitt 4.6. Den eneste forskjellen vil være at renten (r) nå vil være sammensatt av risikofri rente (r_f), og gjennomsnittlig antall hopp per år (λ). Det andre tilfellet er når størrelsen på hoppene er lognormalfordelt. Dette gjør at man får en modifisert opsjonsprisingsformel for en europeisk kjøpsopsjon.

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1+k)T}\left[\lambda(1+k)T\right]^n}{n!} \times \left[S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\hat{\hat{\sigma}}^2}{2}\right)T}{\hat{\hat{\sigma}}\sqrt{T}} \right] - e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \frac{\hat{\hat{\sigma}}^2}{2}\right)T}{\hat{\hat{\sigma}}\sqrt{T}} \right] \right]$$

der

$$r = r_f - \lambda k + \frac{n\left[\ln(1+k)\right]}{T}$$

$$\hat{\hat{\sigma}} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\sigma_j^2}{T}}$$

Her vil σ_j^2 være variansen i hoppfordelingen, og k er gjennomsnittlig størrelse på hoppet målt som prosent av prisen på underliggende aktivum.

6.2.5 Verdien av en europeisk kjøpsopsjon med skatt

Den ideelle verden som Fischer Black og Myron Scholes antok de befant seg i da de utledet opsjonsprisingsformelen, var en verden uten skatter og transaksjonskostnader. Lenger bort fra den virkelige verden er det nesten ikke mulig å komme. På samme måten som det var naturlig for Merton å innlemme dividenderaten i opsjonsprisingsformelen, var det naturlig for Ingersoll (1976) å vurdere skatt på denne dividenden. Aksjegevinstskatten forutsettes å være lik 0. Med 25 % skatt ($\tau = 0{,}25$) blir altså verdien til en europeisk kjøpsopsjon beregnet ved;

$$c = e^{-\partial(1-\tau)T} S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left((r_f - \partial)(1-\tau) + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-r_f(1-\tau)T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left((r_f - \partial)(1-\tau) - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Scholes (1976) fant samtidig at opsjonsverdier under disse forutsetningene vil gi systematisk lavere verdi enn i tilfellet uten skatt. Videre blir sikringsforholdet endret som følge av skatt blir tatt med i beregningen.

6.2.6 Verdien av en europeisk kjøpsopsjon med straff for short salg

Thorp (1973) var raskt ute med å se på forutsetningen om hvordan short-salg virket inn på opsjonsverdien. Dette er av betydning i forhold til hvordan formelen brukes til sikring. Meglerforetaket som låner aktiva vil ofte beholde salgssummen, og short-selgeren mister muligheten til å bruke pengene. For at det skulle være mulig å oppnå den risikofrie avkastningen ved å selge opsjonen og kjøpe underliggende, måtte opsjonsprisen justeres. Dette gir følgende formel for en europeisk kjøpsopsjon;

$$\bar{c} = e^{r_f T} \times c(S,t) = e^{r_f T} S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Dette finnes enten på vanlig måte som i den originale Black-Scholes-Merton-modellen, eller ved å anta at siden salgssummen ikke er tilgjengelig før forfall, så vil forventet nåverdien av den justerte opsjonen være lik den ujusterte opsjonsprisen.

Den andre sikringsstrategien, der aksjen selges short og opsjonen kjøpes, gir at opsjonsverdien $\underline{c} = c\left(e^{-r_f T} S, t\right)$. Disse opsjonsverdiene gir kurver i (S,c)-planet, der den vanlige Black-Scholes-Merton verdien vil ligge mellom de to andre.

6.2.7 Verdien av en europeisk kjøpsopsjon uten lognormale aksjekurser

Etter Bacheliers teoretiske opsjonsprisingsforsøk med normalfordelte aksjekurser ble det vanlig å anta at en lognormal aksjeprisfordeling. Dette var nødvendig for å beskrive egenskapene ved aksjekursutviklingen. I empiriske undersøkelser fant man at dette ikke var en dekkende beskrivelse, og Jarrow og Rudd (1982) gikk nærmere inn på hvordan opsjoner kan prises uten antagelsen om lognormal prisfordeling.

De undersøkte hvordan den underliggende fordelingen påvirket opsjonsprisen ved å se på fordelingens varians, skjevhet og kurtosis. Skjevheten beskriver asymmetrien, og kurtosis karakteriserer formen (spiss eller flat) på fordelingen. Dette resulterte i en opsjonsprisingsformel som korrigerte for avvikene mellom den lognormale fordelingen, og den underliggende fordelingen. Formelen beskriver de ulike momentene til fordelingene F (underliggende) og A (lognormal), der K_2, K_3 og K_4 er mål på henholdsvis varians, skjevhet og kurtosis.

$$c = S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$+ e^{-r_f T} \frac{\left(K_2(F) - K_2(A)\right)}{2!} a(K)$$

$$- e^{-r_f T} \frac{\left(K_3(F) - K_3(A)\right)}{3!} \frac{da(K)}{dS}$$

$$+ e^{-r_f T} \frac{\left[\left(K_4(F) - K_4(A)\right) + 3(K_2(F) - K_2(A))^2\right]}{4!} \frac{d^2 a(K)}{dS^2}$$

$$+ \varepsilon(K)$$

Den første delen av dette uttrykket er den velkjente formelen beskrevet i avsnitt 4.6. Resten av formelen er korreksjoner som vil resultere i opsjonsverdier nærmere faktiske opsjonspriser i markedet. Den første korreksjonen tar for seg forskjellen i varians mellom den underliggende fordelingen og den lognormale fordelingen. Den andre korreksjonen tar for seg forskjellen i skjevhet mellom fordelingene, mens den tredje tar for seg differansen mellom kurtosisen mellom fordelingene. Til slutt kommer det et feilledd, som antas å ha en lav verdi.

6.2.8 Verdien av en europeisk kjøpsopsjon med stokastisk volatilitet

Det ble i avsnitt 5.7 vist til hvordan volatilitet kunne beregnes på ulike måter. Ettersom volatiliteten ikke er konstant, fant Hull og White (1987) hvordan det var mulig å ta høyde for varierende volatilitet i beregning av opsjonsverdier. Aksjeprisprosessen beskrives som $dS = rSdt + \sigma Sdz$, og variansprosessen som $d\sigma^2 = \alpha\sigma^2 dt + \xi\sigma^2 dw$. Wienerprosessene dz og dw er uavhengige, og α og ξ er konstanter uavhengige av S. Dermed blir verdien til en europeisk kjøpsopsjon;

$$c = S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right)+\left(r_f+\frac{\overline{\sigma}^2}{2}\right)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}}\right] - e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right)+\left(r_f-\frac{\overline{\sigma}^2}{2}\right)T}{\overline{\sigma}\sqrt{T}}\right]$$

Denne formelen er lik den originale formelen til Black, Scholes og Merton, med det unntak at volatiliteten har en noe annerledes fortolkning. Her vil $\overline{\sigma}^2$ være gjennomsnittlig varians over opsjonens løpetid.

6.2.9 Verdien av en europeisk futureskjøpsopsjon

I kapittel 2 ble terminkontrakter gjennomgått. Opsjoner på slike futures- og forwardkontrakter kunne etter Fischer Blacks arbeid i 1976 verdsettes med samme tankegang som den opprinnelige opsjonsprisingsformelen. Antagelsen han gjorde var at futuresprisen har de samme lognormale egenskapene som underliggende aktivum. Dette resulterte i følgende formel for en europeisk kjøpsopsjon, der F_0 er terminprisen og σ er volatiliteten til futuresprisen;

$$c = e^{-r_f T} F_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{F_0}{X}\right)+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{F_0}{X}\right)+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Denne modellen forutsetter ikke at opsjonskontrakten og futureskontrakten forfaller ved samme tidspunkt(Hull, 2006).

6.2.10 Verdien av en europeisk valutakjøpsopsjon

I 1983 fikk man flere mulige måter å verdsette europeiske valutaopsjoner. Den ene modellen benyttet seg av samme tankegang som Fischer Black hadde gjort i analysen av futuresopsjoner. Prisen på en obligasjon med valuta fra hjemlandet, P(T), ble brukt til neddiskontering. F_0 er forwardprisen på utenlandsk valuta, og σ_F ble bestemt av variansen til den utenlandske valutaen (Grabbe, 1983). Dette gir følgende kjøpsopsjonspris;

$$c = P(T)F_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{F_0}{X}\right) + \frac{\sigma_F^{\ 2}}{2}T}{\sigma_F\sqrt{T}}\right] - P(T)X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{F_0}{X}\right) + \frac{\sigma_F^{\ 2}}{2}T}{\sigma_F\sqrt{T}}\right]$$

En annen modell tok utgangspunkt i Mertons opsjonsprisingsmodell med dividende, der dividenden ble byttet ut med renten i utenlandsk valuta (Garman og Kohlhagen, 1983).

$$c = e^{-r_U T} S_0 \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_H - r_U + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-r_f T} X \times N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_H - r_U - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Her vil r_H og r_U være renten i henholdsvis hjemlandets valuta og utenlandsk valuta.

6.2.11 Verdien til eksotiske opsjoner

For mange av de eksotiske opsjonene nevnt i avsnitt 2.4 finnes det analytiske løsninger som alle benytter seg av kunnskapen fra den originale utledningen til Black, Scholes og Merton (Se for eksempel Roll (1977), Geske (1979), Whaley (1981), Magrabe (1978), Stulz(1982), Haug(1998)). Det som skiller dem fra formlene for vanlige europeiske opsjoner er at de er mye mer kompliserte. Derfor har mange praktikere funnet det hensiktsmessig å bruke binomiske trær eller analytiske approksimasjoner for å verdsette slike opsjoner (Hull, 2006).

6.3 Risikostyring med Black-Scholes-Merton-modellen

Det vil alltid være risiko forbundet med opsjonshandel. Men det er også mange måter tilgjengelig for å styre den risikoen. De institusjonene som handler med derivater, enten i egen regi eller for en kunde, kan bruke derivatmarkedet for å nøytralisere mye av risikoen de står overfor. Standard opsjoner er helt klart de enkleste å styre risikoen til, ettersom det vil være enkelt å finne et passende derivat i markedet. Når det gjelder skreddersydde kontrakter, vil det være vanskeligere å risikostyre slike posisjoner.

Risikostyring er nært knyttet opp mot analysen Black, Scholes og Merton foretok for å finne en modell for opsjonsverdier på europeiske opsjoner. For hver av variablene (S, T, r_f, σ) som inngikk i den originale Black-Scholes-formelen er det mulige mål for risikoen i en opsjonsposisjon. Man måler endring i opsjonsverdien som føle av en endring i en av variablene, og hvert av disse målene er benevnt med en gresk bokstav.

For aktørene i opsjonsmarkedet er det viktig å kunne opprettholde et akseptabelt nivå på risiko, og dette kan oppnås ved å styre såkalte «grekere». Foruten de greske bokstavene kan aktørene i opsjonsmarkedet benytte nakne og dekkete posisjoner, og stop-loss strategier for å oppnå ønsket risikoeksponering. Med en naken posisjon menes det at man ikke gjør noe for å styre risikoen, men tar risikoen ved å gå på et tap ved opsjonens forfall. En dekket posisjon betyr å kjøpe underliggende aktiva i samme kvantum som opsjonen er skrevet på, med en gang opsjonskontrakten inngås. Med en stop-loss strategi menes det at man kjøper underliggende aktiva når aksjeprisen beveger seg over innløsningskursen, og selger når aksjeprisen faller under innløsningskursen. I praksis vil ingen av disse strategiene være gode alternativer i forhold til å bruke de greske bokstavene for å styre risiko. Dette kommer av at kostnadene ved dem ofte vil bli store. De greske bokstavene kan brukes på enkle opsjoner, eller porteføljer av opsjoner.

6.3.1 Delta

En opsjons delta (Δ) ble introdusert i avsnitt 4.6 som det kvantumet av underliggende man må ha for å sikre en lang eller kort posisjon i en kjøpsopsjon. Delta måler endringen i opsjonspris med hensyn til endringer i prisen på underliggende aktivum. Dersom delta til en kjøpsopsjon er 0,6, betyr dette at for hver liten endring i prisen på underliggende aktivum, så vil opsjonsprisen endres med 60 % av dette beløpet. For en europeisk kjøpsopsjon vil delta være gitt ved

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

der d_1 er definert som i avsnitt 4.6. Dersom man vil sikre en kjøpt kjøpsopsjon må det shortes Δ_c aksjer ved ethvert tidspunkt. Dersom man vil sikre en solgt kjøpsopsjon må det kjøpes Δ_c aksjer ved ethvert tidspunkt. For en europeisk salgsopsjon er delta gitt ved

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

Dersom man vil sikre en kjøpt salgsopsjon må det kjøpes Δ_p aksjer ved ethvert tidspunkt. Dersom man vil sikre en solgt salgsopsjon må det selges Δ_p aksjer ved ethvert tidspunkt. Delta vil endre seg etter hvert som opsjonene beveger seg mot forfall, og det vil derfor være nødvendig med rebalansering for å holde en posisjon deltanøytral ($\Delta = 0$). Delta til en portefølje av opsjoner (Π) er gitt ved delta til hver enkelt opsjon slik at

$$\Delta_\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial S} = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$$

der Δ_i er delta for opsjon i.

Når det gjelder delta for en amerikansk opsjon, så vil det ikke være korrekt å benytte disse sammenhengene så sant det er optimalt å utøve den amerikanske opsjonen før forfall. Dersom det ikke er fordelaktig å utøve opsjonen, vil man kunne finne delta på samme måte som for europeiske opsjoner.

6.3.2 Theta

Med en opsjons theta (Θ) måles endring i opsjonspris med hensyn til endringer i tiden. Alle andre variabler forutsettes konstante. I forhold til Black-Scholes-Merton vil theta til en kjøpopsjon være gitt ved

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rXe^{-rT} N(d_2)$$

der d_1 og d_2 er som definert i avsnitt 4.6, og

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

For en salgsopsjon er theta lik

$$\Theta_p = \frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rXe^{-rT} N(-d_2)$$

Theta er normalt negativ, ettersom når opsjonen beveger seg mot forfall så vil opsjonen bli mindre verdt. Theta benyttes mer som en deskriptivt mål for en portefølje av opsjoner, enn som et risikostyringsverktøy. Dette kommer av at det ikke er noen usikkerhet knyttet til tiden mot forfall.

6.3.3 Gamma

Med en opsjons gamma (Γ) måles endringen i delta med hensyn til endringer i prisen på underliggende aktivum. I forhold til Black-Scholes-Merton vil gamma til en kjøpopsjon og salgsopsjon være gitt ved

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Dersom gamma er liten, så vil delta endre seg sakte. Dermed er det ikke nødvendig med hyppig deltanøytralisering. Skulle gamma være høy, betyr dette at man gjør klokt i å deltanøytralisere posisjonen ofte.

6.3.4 Rho

Med opsjonens rho (ρ) menes opsjonsverdiens sensitivitet til endringer i rentenivået. I forhold til Black-Scholes-Merton vil rho til en kjøpopsjon være gitt ved

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = XTe^{-rT} N(d_2)$$

For en salgsopsjon vil rho være gitt ved

$$\rho_p = \frac{\partial p}{\partial r} = -XTe^{-rT} N(-d_2)$$

6.3.5 Vega

Med vega (ν) menes det hvordan opsjonsverdien endrer seg som følge av endringer i volatiliteten. Ettersom volatiliteten var antatt å være konstant i Black-Scholes-Merton-modellen, burde man strengt tatt vurdert vega i forhold til en modell der volatiliteten endrer seg. I praksis vil forskjellen være liten mellom bruk av en modell med konstant eller varierende volatilitet. I forhold til Black-Scholes-Merton vil vega til en kjøpopsjon og salgsopsjon være gitt ved

$$\nu = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

Vega vil alltid være positiv for vanlige opsjoner, enten de er av europeisk eller amerikansk type.

6.3.6 Risikostyring ved bruk av de greske bokstavene

De fleste investorer og forvaltere har porteføljer bestående av ulike investeringer. Ideelt sett burde det vært mulig å rebalansere derivatporteføljer kontinuerlig, etter hvert som markedene endret seg. I praksis vil aktørene som har en portefølje av opsjoner på et bestemt underliggende aktivum rebalansere porteføljen sjeldnere enn hva som hadde vært teoretisk riktig. For en aktør vil det være nærmest umulig å hele tiden opprettholde nøytrale posisjoner ved hjelp av«grekerne». Derfor vil man ofte sørge for at posisjonen man har i opsjoner hver dag er deltanøytral, mens de andre greske bokstavene overvåkes. Dersom disse beveger seg sterkt, kan det være på sin plass å foreta risikostyring i henhold til om endringene er positive eller negative.

6.4 Teoretisk betydning av tankegangen til Black, Scholes og Merton

I artikkelen til Black og Scholes viste de to måter å komme frem til opsjonsprisingsformelen på. Det er særlig sikringsstrategien mellom opsjon og underliggende aktivum som har visst seg å ha innflytelse på opsjonsteorien. Det har vist seg at verdien til opsjoner i forhold til underliggende aktivum ikke avhenger av hvilken holdning til risiko investor har. Dette betyr igjen at man ikke vil finne forventet avkastning til underliggende aktivum i prisingsformelen, men bare risikofri rente. Ved å sette sammen en portefølje av underliggende aktivum og derivat vil fravær av arbitrasjemuligheter sørge for at avkastningen på en slik portefølje er lik den risikofrie renten. Selv om opsjoner er risikable investeringer, trenger man ikke ta hensyn til faktorer som ikke er observerbare i markedet. Dette fører til Black-Scholes-Merton differensialligning.

Etter at både Black, Scholes og Merton hadde sett på den dynamiske sikringsstrategien i sine artikler, begynte andre å se på betydningen av risikonøytral verdsetting. John C. Cox og Stephen A. Ross (1976) viste hvordan en opsjon verdsettes dersom avkastningen til opsjonen og underliggende aktivum er konsistent med hverandre og faktisk pris på underliggende aktivum. Ettersom differensialligningen ikke inneholdt noe krav om forventet avkastning fra underliggende aktivum, kunne risikonøytrale investorer være fornøyd uten noen som helst risikopremie på underliggende aktivum og opsjonen. Uttrykket de kommer frem til for verdsetting av en europeisk kjøpsopsjon blir dermed

$$c = e^{-r_f T}\hat{E}\left(\max\left[S_T - X, 0\right]\right)$$

Her vil $\hat{E}(\bullet)$ være forventningen med hensyn til den risikonøytrale sannsynlighetsfordelingen til S_T. Denne fordelingen har samme volatilitet som den objektive sannsynlighetsfordelingen. Samtidig vil den risikonøytrale fordelingen være justert på en slik måte at gjennomsnittlig forventet avkastning er lik risikofri avkastning. Dette betyr at opsjonsverdien finnes ved at man vurderer forventet verdi ved forfall på bakgrunn av at forventet avkastning er lik den risikofrie renten, samtidig som man neddiskonterer denne verdien med den samme risikofrie renten.

En noe mer generell differensialligning som i all hovedsak er lik differensialligningen til Black, Scholes og Merton har vist seg å gi samme resultat som er vist tidligere. Ligninger av denne typen brukes ofte når man studerer verdsetting av ulike finansielle derivater (Björk, 1998).

$$\frac{1}{2}c_{11}(x,t)x^2\sigma^2(x,t)+c_1(x,t)xr(x,t)+c_2(x,t)-C(x,t)\rho(x,t)=0$$

Her vil c_1, c_{11} og c_2 være partiellderiverte av funksjonen c. Ligningen har samme form som den som Black. Scholes og Merton kom frem til, og ved å evaluere den i forhold til aksjekurs, tid til forfall, risikofri rente og volatilitet, vil den gi samme resultat.

Løsningen til denne ligningen med grensebetingelse $c(x,T)=g(x)$, er kjent som Feynmann-Kac-formelen. Løsningen vil være gitt ved

$$c=E\left[e^{-\int_t^T \rho(Z_s s)ds}g(Z_T)\right]$$

Her vil den stokastiske prosessen Z være løsningen til den stokastiske differensialligningen

$$dZ_s=Z_s r(Z_s,s)ds+Z_s\sigma(Z_s,s)dW_s$$

Dette betyr at verdien til en europeisk kjøpsopsjon er gitt ved

$$c=e^{-r(T-t)}E[\max(Z_T-X,0)]$$

der den stokastiske prosessen Z vil være løsningen til den stokastiske differensialligningen

$$\begin{aligned}&dZ_s=Z_s rds+Z_s\sigma dW_s\\&der\ Z_t=x_t\end{aligned}$$

På denne måten er det mulig å se at ved å benytte en ren matematisk fremstilling, så kommer man fram til den samme løsningen som Cox og Ross. Dette betyr altså at verdsetting i en risikonøytral verden løser det matematiske problemet man har med differensialligningen. (Schaefer, 1998).

På slutten av 70 – tallet ble argumentet om ingen arbitrasjemuligheter gjort til en sentral del av finans. Flere viktige artikler, deriblant fra Harrison og Kreps (1979), tok for seg et generelt rammeverk som gjorde det mulig med en systematisk studie av ulike modeller for finansielle markeder. Black-Scholes-Merton-modellen var en av disse modellene som fikk plass innenfor den generelle teorien. Det som ble vist på denne tiden var hvor nær sammenhengen var mellom arbitrasjeargumentet og martingale teorien. Med et martingale menes en stokastisk prosess med den egenskap at forventningen til prosessens verdi i enhver fremtid er prosessens verdi i dag. Sammenhengen er grunnlag for det som i dag kalles *Fundamental Theorem of Asset Pricing*. Dette teoremet forteller oss at en matematisk modell for et finansielt marked er fri for arbitrasje, hvis og bare hvis, modellen er en martingale under et likeverdig sannsynlighetsmål. (Delbaen og Schachermayer, 2006). Denne teorien har fått stor innvirkning på hvordan man håndterer instrumenter med betingede krav, og har sitt utspring i Black-Scholes-Merton-analysen.

Teoremet har også blitt en del av teorien omkring optimalt porteføljevalg, og dette kommer av replikeringen som Merton først benyttet for å verdsette betingede krav med instrumenter som var omsatt i markedet. Med bruk av teoriene som kom fra blant annet Cox, Ross, Harrison og Kreps var det mulig å studere porteføljevalg nærmere ved bruk av en lineær differensialligning i et dynamisk perspektiv (Duffie, 1998). Istedenfor å benytte en komplisert dynamisk budsjettbetingelse brukes en statisk betingelse der man benytter risikofri rente. Dette forenkler porteføljeanalysen for en økonomisk agent som dynamisk må håndtere en portefølje, og bruke av porteføljen for å maksimere forventet nytte av konsumet (Cox og Huang, 1987).

Etter utgivelsene fra Black, Scholes og Merton begynte teoretikere å se på hvordan mer eksotiske instrumenter kunne settes sammen ved bruk av flere enkle instrumenter. Et av de viktigste bidragene fra den felles opsjonsprisingsteorien var hvordan man under visse omstendigheter kunne bruke instrumenter for å skape nye investeringsmuligheter. Disse investeringsmulighetene kom som en følge av «financial engineering», der komplekse finansielle instrumenter ble syntetisk replikert av sofistikerte handlestrategier av betydelig enklere instrumenter (Ho, 1999). Dette betyr at mange av de handlestrategiene som er omtalt i kapittel 2 ble utviklet som en følge av at man satte sammen flere enkle instrumenter for å oppnå en ønsket utbetalingsprofil og risikoeksponering.

I forhold til Black-Scholes-Merton-modellen er det hovedsaklig rene finansielle opsjoner som blir diskutert. Men modellen gjorde det også klart at det var en lang rekke allerede kjente instrumenter innen finans som kunne verdsettes med denne modellen. Dette er som oftest gjeld og egenkapital i forhold til et foretaks totalverdi. Briys *m.fl.* (1998) ser på utviklingen fra Black, Scholes og Merton innen obligasjonsfeltet. Flere bidrag blir presentert i forhold til hvordan foretakets forpliktelser kan modelleres i forhold til opsjonsteori. Opsjonsteori er utstrakt brukt for å verdsette kompliserte obligasjoner som callable bonds og konvertibler, og er et nyttig rammeverk for å studere foretakenes misligholdsrisiko.

Ved å utvide opsjonsbegrepet til å også ta med instrumenter som har delvise opsjoner i seg, har det blitt mulig å benytte seg av verdsettelse med bruk av Black-Scholes-Merton-modellen. Samtidig har det blitt vanlig å benytte modellen på instrumenter og prosjekter som er innbefattet med fleksibilitet. Dette har gjort at man nå har flere verktøy for å vurdere komplekse alternativer. Opsjonsteori har gjort seg gjeldende i investeringsmuligheter innen eiendom, fabrikker, utstyr og mange andre realinvesteringer. Slike investeringer har valgmuligheter forbundet med seg, enten det gjelder opsjoner i forhold til å avslutte et prosjekt, utvide et prosjekt, kontraktsmuligheter eller utsette investeringer. Slike muligheter kan modelleres som både europeiske og amerikanske opsjoner. (Howell *m.fl.*, 2001). Realopsjonsterminologien gir altså muligheter for å verdsette realinvesteringer innenfor et risikonøytralt verdsettingsapparat. Poenget er at man enten bruker modeller som ligger nært opp mot Black-Scholes-Merton-modellen, eller modeller som er langt mer kompliserte, men som fremdeles har sitt fundament i arbeidet til Black, Scholes og Merton.

Matematikken ovenfor er noe av det mer kompliserte man kan møte på innen finans. Derfor gjorde Sharpe i 1978 et forøk på å forenkle analysen, samtidig som ideen om prising gjennom replikering, og risikonøytral verdsetting ble beholdt. Dette resulterte i en enkel binomisk modell. Dette ble deretter utvidet, og gjort anvendelig av Cox, Ross og Rubinstein (1979).

Det som er viktig med en binomisk modell er at aksjeprisen bare kan gå opp eller ned med bestemte prosentandeler for hver tidsperiode. Dette resultere i et tre for aksjeprisutviklingen. Dette gjør det igjen mulig å replikere utbetalingen fra en opsjon skrevet på denne aksjen ved hver tidsperiode. Ved å handle i aksjen og risikofritt aktivum finner man opsjonsverdien i hver node av treet. Etter hvert som hver tidsperiode i treet blir kortere, så vil opsjonsverdien beregnet med et binomisk tre gå mot opsjonsverdien beregnet med Black-Scholes-Merton-modellen. Fordelen med den binomiske modellen er at det er mulig å verdsette flere derivater, deriblant amerikanske opsjoner.

Ettersom modellene til Black, Scholes, Merton og Cox, Ross, Rubinstein er konsistente, har dette hatt mye å si for forståelsen av opsjonsprisingsmodeller. Det har også gjort det mulig å se sammenhenger på tvers av modeller, som igjen har fått betydning for hvordan opsjonsprisingsmodeller kan brukes for å studere en rekke økonomiske problemstillinger.

6.5 Praktisk betydning av opsjonsprisingsformel og differensialligning

Black-Scholes-Merton-modellen brukes i utstrakt grad i finansverdenen på tross av de begrensingene som ble omtalt i kapittel 5. Dette tyder på at aktørene i finansmarkedet ser store fordeler ved modellen, og de mulighetene den gir. Derivathandel står som nevnt i avsnitt 2.7 for betydelige summer, og det er vist til mange instrumenter og handlestrategier som er tilgjengelige for investorene og foretakene over hele verden. I perioden etter Black-Scholes-Merton-modellen ble introdusert, utviklet derivatmarkedene seg i stort tempo over hele verden. Det er nå mulig å kjøpe opsjoner der underliggende aktivum er alt fra aksjeindekser, råvarer, valuta og obligasjoner. Ingen av disse markedene var utviklet da modellen ble utledet, og den er derfor utvilsomt en betydelig bidragsyter i forhold til veksten i derivathandelen.

Opsjonsprisingsmodellen til Black, Scholes og Merton anvendes både i forhold til prising og risikostyring. For opsjonshandlere er det helt essensielt å ha inngående kjennskap til hvordan modellen fungerer, og hva resultatene man får faktisk betyr. En opsjonsmegler om forstår hvordan Black-Scholes-Merton-modellen fungerer i praktiske handlestrategier, kan ofte gjøre det bedre enn meglere som benytter langt mer kompliserte modeller. Det hele går ut på at det er viktig å være fortrolig med modellen, og vite hvilke slutninger man skal trekke som følge av det modellen forteller (Haug, 2003).

Aktørene i finansbransjen har de siste tiårene måtte forholde seg til krav om økt matematisk kunnskap. Finans har blitt en veldig kompleks disiplin, der doktorgradene florerer som følge av behovet for nye metoder for verdsettelse. Modellen til Black, Scholes og Merton fungerer bra i praksis, men er ikke perfekt. Dette har ført til at praktikere finner bøtemidler som kan ta hånd om de tilfellene der modellen ikke strekker til. I kombinasjon med økonomisk forskning vil dette resultere i modeller som tar utgangspunkt i for eksempel Black-Scholes-Merton-modellen, for så å tilfredsstille behovene til aktørene i markedet (Wilmott, 2001).

Den perfekte sikringsstrategien som man kan benytte seg av, der man har en lang posisjon i en opsjon og en kort posisjon i underliggende aktivum, definerer den arbitrasjefrie prisen på derivatet. Dette kommer som en følge av at denne posisjonen bare kan gi risikofri rente i avkastning som er en observerbar størrelse. Denne restriksjonen bestemmer differensialligningen, der Black-Scholes-formelen er løsning. Innsikten der man kan danne en portefølje som er risikofri, er viktigere enn selve formelen, fordi den gir muligheter for å danne syntetiske instrumenter (Jarrow, 1999). Den binomiske opsjonsprisingsmodellen har også hatt innvirkning på den praktiske betydningen av opsjonsprisingsmodellen til Black, Scholes og Merton. Den binomiske tankegangen hjalp til med å gjøre det klart hvordan replikering og prising med risikonøytrale sannsynligheter kunne benyttes i den virkelige verden.

I en perfekt verden uten transaksjonskostnader, skatter og andre hindringer, vil man være indifferent mellom å være eier av en opsjon, eller en portefølje som replikerer opsjonen. Men i praksis er ikke verden slik, og transaksjonskostnader kan gjøre det mer fordelaktig å innta den ene posisjonen fremfor den andre.

Teoretisk opsjonsprising er som oftest forbundet med friksjonsfrie markeder, men i den virkelige verden må man forholde seg til ulike kostnader som kan gjøre at teorien ikke lenger holder stand. Men det vil være mulig å finne et bånd som opsjonsprisen må være innenfor ved arbitrasjefravær. Videre er det slik at når en investor kjøper aksjer eller sikrer opsjonsposisjoner i diskret tid vil denne investoren påta seg noe risiko (Whalley og Wilmott, 1994). Derfor er det overraskende at Black-Scholes-Merton-modellen brukes så aktivt av markedsaktørene med tanke på de mange begrensingene. Men modellen baserer seg på størrelser som stort sett er observerbare, og modellen har en intuitiv tolkning, og er derfor mye brukt (Arnold *m.fl.*, 2003). Det har også vært mulig å bruke modellen, og differensialligningen spesielt, til å se på mange forskjellige typer derivater, med ulik utbetalingsprofil.

Det finnes som kjent en lang rekke opsjoner med karakteristika som er ulike de europeiske opsjonene som man fant eksakte formler for på begynnelsen av 1970 – tallet. Det som skiller dem fra hverandre går i hovedsak ut på innløsningsverdi, forfallstidspunkt og antall underliggende aktiva. Dette vil også medføre endringer i differensialligningen som originalt ble utledet av Fischer Black. Når en opsjonsmegler finner en differensialligning som representerer utviklingen av derivatprisen over tid, er det to mulige måter å finne denne verdien i praksis. Det er mulig å enten finne en løsning på lukket form, eller en numerisk løsning for differensialligningen. Den første metoden går ut på den samme fremgangsmåten som Black, Scholes og Merton benyttet, mens den andre metoden går ut på å finne en numerisk løsning direkte uten en løsning på lukket form (Neftci, 2000).

Det ble i avsnitt 5.8.6 beskrevet kort hvordan aktørene benyttet de greske bokstavene til å styre risikoen i sine posisjoner. De formlene som er beskrevet i kapittel 5 kommer som en direkte følge av hvordan man bruker Black-Scholes-Merton-modellen. Det at man kan bruke en handlestrategi for å replikere utbetalingsprofiler, gjør at det er mulig å sikre utbetalinger som omhandles både på børs, og de som ikke omsettes direkte i et marked. Både når det gjelder porteføljeforsikring, og bankers bruk av derivater for å sikre seg mot risikoen i enkeltprodukter de selger til kunden, finner man at det er en mye brukt strategi å dynamisk sikre posisjoner i forhold til Black-Scholes-Merton-tankegangen. Det har altså blitt økt fokus på hvordan risiko styres, både ved hjelp av enkle risikomål som de greske bokstavene eller andre mål som Value at Risk. For spekulanter vil ofte replikeringsargumentet være mindre viktig. Disse aktørene har allerede en subjektiv mening om opsjonenes verdi, og bruker Black-Scholes-Mertons prisprediskjon som et sammenligningsgrunnlag (Korn og Wilmott, 1998).

6.6 Oppsummering

Bakgrunnen for denne oppgaven var å se nærmere på utviklingen av teoretisk opsjonsprising, og hvilken betydning dette har hatt. I dette kapittelet er det vist hvordan man kan prise ulike opsjoner med Black-Scholes-Merton-modellen. Flere av begrensingene som ble omtalt i kapittel 5 viser seg å ha blitt vurdert etter utgivelsen av den opprinnelige opsjonsprisingsmodellen. Dette har resultert i en lang rekke formler for opsjoner som ikke kunne verdsettes med den originale Black-Scholes-formelen. Det er også beskrevet hvordan man kan bruke Black-Scholes-Merton-modellen til risikostyring med de greske bokstavene.

Teoretikere og praktikere forsøker hele tiden å forbedre den tidlige utgaven av opsjonsprisingsmodellen, og nytten av dette er beskrevet. Det er særlig vektlagt hvilken teoretisk betydning man har hatt av tankegangen til Black, Scholes og Merton, og hvordan dette viser seg igjen i praktisk opsjonshandel.

Siste kapittel vil oppsummere utviklingen av Black-Scholes-Merton-modellen, og hvilken betydning den har hatt, både innenfor finans og innen andre fagfelt.

Kapittel 7: Konklusjon

Konklusjonen jeg kan trekke fra denne studien omkring utviklingen og betydningen av Black-Scholes-Merton-modellen, er at arbeidet deres har fått stor innvirkning på finans, både i forhold til teori og praksis.

Temaet for utredningen var å se på teoretisk opsjonsprising, for å kunne svare på følgende spørsmål: Hva var foranledningen for arbeidet til Black-Scholes-Merton, og hvilken betydning har den utviklede modellen hatt? Problemstillingen var dermed å fortelle den delen av historien som ofte blir forbigått i en vanlig presentasjon av Black-Scholes-Merton-modellen.

I kapittel 2 har jeg sett på noen av de mest sentrale temaene innen derivater og opsjoner. Det er beskrevet hvordan markedene for derivater har utviklet seg. Det påpekes at det ikke er konsensus blant aktørene omkring finansielle instrumenter og rollen disse spiller. Det er vist at dette er en organisert måte å oppnå profitt og styre risiko på i finansmarkedet, gjennom forskjellige handelsstrategier som kan benyttes. På bakgrunn av dette hevdes det at opsjonsmarkedet er av verdi for samfunnet, ettersom det er mulig å fordele risiko mellom aktører og kapitalmarkedet blir mer effektivt.

Utviklingen av opsjonsprisingsmodeller før Black-Scholes-Mertons-modell ble presentert i kapittel 3. Bacheliers banebrytende arbeid ble gjenoppdaget på 1960 – tallet, og da særlig hans resultater om Wiener-prosessen. Noen mangler var det dog, og disse ble rettet opp i av de som fattet interesse for prising av opsjoner, deriblant Sprenkle, Boness, Samuelson og Thorp. Flere av forsøkene har forskjellig utgangspunkt, men det er mulig å se likhetstrekk ved de ulike modellene. Forhold rundt risikoholdning, avkastningskrav på underliggende aktivum og opsjon, samt empiri ble forsøkt inkorporert i en modell for opsjonsprising.

Kapittel 4 handlet om hvordan Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton utledet modellen for prising av opsjoner. Disse personene hadde noe ulik bakgrunn, men alle fattet interesse for opsjonsprisingsspørsmålet. Markedet for opsjoner vokste frem på denne tiden, samtidig som det var behov for en modell som kunne svare på spørsmål rundt foretakenes kapitalstruktur, fleksibilitet i prosjekter og andre problemstillinger innen finans. Black, Scholes og Merton hadde noe ulikt utgangspunkt for hvordan de kom frem til modellen, fra Blacks kapitalverdimodell til Mertons finans i kontinuerlig tid. Det som var det banebrytende resultatet var at man kunne benytte risikofri verdsetting på opsjonene. Kapittelet ble avsluttet med en beskrivelse av put-call pariteten, som er en viktig sammenheng i finans.

Det femte kapittelet viste hvordan modellen ble publisert, og at dette gjorde sitt til at modellen kunne anvendes på mange finansielle problemstillinger. De teoretiske prisene funnet ved bruk av modellen, og faktiske prisdata samsvarte mer og mer etter hvert som tiden gikk. Modellen til Black, Scholes og Merton har flere variabler og begrensinger, og da særlig i forhold til innløsningstidspunkt og volatilitet. Særlig hvordan man behandler volatilitet viser seg å være av betydning for opsjonsprising.

Kapittel 6 tok for seg hvordan man verdsetter opsjoner ved å ta høyde for begrensingene i den opprinnelige utledningen. Samtidig ble det vist at modellen hadde stor anvendelse i forhold til risikostyring av opsjonsposisjoner. Den teoretiske betydningen av risikofri verdsetting og dynamisk sikringsstrategi viser seg å være utstrakt i finansteorien. Anvendelse av komplisert matematikk har også gjort seg gjeldende, men også nyere finansteori tar utgangspunkt i Black-Scholes-Merton-modellen. I praksis brukes gjerne Black-Scholes-Merton opsjonsprisingsmodell fordi den er enkel og har en intuitiv tolkning. Dette gjør det mulig å oppnå gode resultater ved bruk av modellen, på tross av begrensingene. Differensialligningen har også gjort det mulig å vurdere flere instrumenter med forskjellig utbetalingsprofil.

Denne utredningen viser at utviklingen av en opsjonsprisingsmodell antok flere retninger. Black, Scholes og Merton fant en løsning fikk betydning for finans som fagfelt, og for praktikere i markedet. Samtidig har det kommet nye opsjonsprisingsmodeller, og dette gir grobunn for videre undersøkelser om verdsettelse av opsjoner.

Litteraturliste

Aristoteles, T. A. Sinclair (oversetter) og Trevor J. Saunders (presenterer) (1992): *The Politics*, London: Penguin

Arnold, T., T.D. Nixon & R.L. Shockley (2003): «Intuitive Black-Scholes Option Pricing with a Simple Table», *Journal of Applied Finance*, Vol. 13 (1)

Ayache, E., P. Henrotte, S. Nassar & X. Wang (2004): «Can anyone solve the smile problem», *Wilmott Magazine*, (January 2004)

Baken, Peter A. & Saikat Nandi (1996): «Options and Volatility», *Economic Review* (Federal Reserve Bank of Atlanta), Dec96, Vol. 81, Issue 3—6

Barton, Jan (2001): «Does the Use of Financial Derivatives Affect Earnings Management Decisions?», *The Accounting Review*, Vol. 76 (1)

Bergh, Finn Øystein red. (2000): *Aksjeskolen: Det elementære – det vanskelige – de gode rådene*, Oslo: Hegnar Media As

Bergman, Y.Z. (1995): «Option pricing with differential interest rates», *Review of Financial Studies*, Vol. 8 (2)

Bernstein, Peter L. (1992): *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*, New York: The Free Press

Bishop, Matthew (1996): «A Brief History of Derivatives», *Economist*, 2/10/96, Vol. 338, Issue 7952

Björk, Tomas (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford: Oxford University Press

Black, Fischer (1976): «The pricing of commodity contracts», *Journal of Financial Economics*, Vol. 3.

Black, Fischer (1989): «How We Came Up with the Option Formula», *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 15, pp. 4—8.

Black, Fischer & Myron Scholes (1973): «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», *Journal of Political Economy,* 81 (May 1973), s. 637—54

Black, Fischer & Myron Scholes (1972): «The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency», *Journal of Finance,* 2 (May 1972), s. 399—417

Bodie, Zvi (1999): «Investment Management and Technology: Past, Present and Future» (I: Brookings-Wharton Papers on Financial Services, Washington DC: Brookings Institution Press)

Boness, A. J. (1964): «Elements of a Theory of Stock-Option Value», (I: The Random Character of Stock Market Prices. Red.: P. H. Cootner, MIT Press, 1964)

Brandt, Michael W. & Francis X. Diebold (2003): «A No-Arbitrage Approach to Range-Based Estimation of Return Covariances and Correlations», *Working Paper, University of Pennsylvania og NBER*, Working Paper No. w9664

Briys, Eric, Mondher Bellalah, Iuu Minh Mai & FranVois De Varenne (1998): *Options, Futures and Exotic Derivatives*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

Calamos, Nick P. (2003): *Convertible Arbitrage: Insights and Techniques for Successful Hedging*, Chichester: John Wiley & Sons

Callahan, Gene, Greg Kaza & Rob Bradley (2004): «In Defence of Derivatives», *Reason*, Feb04, Vol. 35 Issue 9, p32

Cohen, Guy (2005): *The Bible of Options Strategies*, New Jersey: Prentice Hall

Cootner, Paul H. (1964): *The Random Character of Stock Market Prices*, Massachusetts: The MIT Press

Courtault Jean Michel, Yuri Kabanov, Bernard Bru, Pierre Crépel, Isabelle Lebon, Arnaud Le Marchand (2000): «Louis Bachelier on the Centenary of Théorie de la Spéculation», *Mathematical Finance*, Volume 10, Number 3, July 2000, pp. 341-353

Creswell, Julie (2003): «A Dangerous Offer», *Fortune*, 6/16/2003, Vol. 147, Issue 12

Cox, J.C. & C.F. Huang (1987): «Optimal consumption and portfolio policies when assets prices follow a diffusion process», *Journal of Economic Theory*, Vol.49. (1987)

Cox, J. C. & M. Rubinstein (1985): *Options Markets*, New Jersey, Prentice-Hall

Cox, J.C., & S.A. Ross (1976): «The valuation of options for alternative stochastic processes», *Journal of Financial Economics*, Vol.3. (1976)

Cox, J.C., S.A. Ross & M. Rubinstein (1979): «Option pricing: a simple approach», *Journal of Financial Economics*, (1979)

DaDalt, P., G.D. Gay & J. Nam (2002): «Asymmetric Information and Corporate Derivatives Use», *Journal of Futures Markets*, Vol.22, No. 3

Danthine, Jean-Pierre & John B. Donaldson (2001): *Intermediate Financial Theory*, New Jersey: Prentice Hall

Davis, Mark (2001): «Mathematics of financial markets», *Mathematics Unlimited,* 2001

Delbaen, Freddy & Walter Schachermayer (2006): *The Mathematics of Arbitrage*, New York: Springer

Derman, E.I. & N.N.I. Taleb (2005): «The illusions of dynamic replication», *Quantitative Finance*, 2005

Dimson, Elroy & Massoud Mussavian (1999): «Three centuries of asset pricing», *Journal of Banking and Finance*, Vol. 23.

Duffie, Darrel (1998): «Black, Merton and Scholes – Their Central Contribution to Economics», *Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 100 (2).

Edirsinghe, E., V. Naik & R. Uppal (1993): «Optimal Replication of Options with Transactions Costs and Trading Restrictions», *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28

Emery, Gary W. (1998): *Corporate Finance: Principles and Practice*, New York: Addison-Wesley

Farrell Jr., James L. (1997): *Portfolio Management: Theory & Applications*, New York: McGraw-Hill

Franke, G., R.C. Stapleton & M.G. Subrahmanyam (1999): «When are Options Overpriced? The Black–Scholes Model and Alternative Characterisations of the Pricing Kernel», *European Finance Review*, 3

French, Dan W. (1983): «Black-Scholes vs. Kassouf Option Pricing: An Empirical Comparison», *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 10, No. 3 (1983)

French, Graig W. (2003): «The Treynor Capital Asset Pricing Model», *Journal of Investment Management*, Vol. 1, No. 2 (2003)

Galai, Dan (1977): «Tests of Market Efficiency of the Chicago Board Options Exchange», *Journal of Business*, Vol. 50, p. 167 – 97

Galai, Dan (1978): «On the Boness and Black-Scholes Models for Valuation of Call Options», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, No. 1

Garman, Mark B. & Steven W. Kohlhagen (1983): «Foreign Currency Option Values», *Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, Desember 1983

Geske R. (1979): «The Valuation of Compound Options» Journal of Financial Economics

Geske, Robert. & Richard Roll (1984): «On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula», *The Journal of Finance*, Vol. 39, No. 2, June 1984

Garman, Mark B. & Michael J. Klass (1980): «On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data», *Journal of Business*, Vol. 53(1), University of California, Berkeley, (Jan., 1980)

Gleckman, Howard (2002): «The Imperfect Science of Valuing Options», *Business Week*, 10/28/2002, Issue 3805

Guay, W. & S. P. Kothari (2003): «How Much do Firms Hedge with Derivatives», *Journal of Financial Economics,* 70, s. 423-461

Grabbe, J.O. (1983): «The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange», *Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, Desember 1983

Grant, Kevin & Andrew P. Marshall (1997): «Large UK Companies and Derivatives», *European Financial Management*, Vol. 3, pp 191 - 208

Hamori, Shigeyuki, Naoko Hamori & David A. Anderson, (2001): «An Empirical Analysis of the Efficiency of the Osaka Rice Market During Japan's Tokugawa Era», *Journal of Futures Markets*, Sep2001, Vol. 21 Issue 9

Hardy, Eric S. (1996): «Option Math Made Simple (Sort Of)», *Forbes*, 6/17/96, Vol. 157, Issue 12

Harrison, Paul (1997): «A History of an Intellectual Arbitrage: The Evolution of Financial Economics»; (I: New Economics and Its History. Red.: John B. Davis, Duke University Press, s. 172-187)

Harrison, J.M & D. Kreps (1979): «Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets», *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, pp. 381 – 408 (1979)

Haug, Espen Gaarder (2003): «Know Your Weapon - Part 1», *Wilmott Magazine*, May 2005

Haug, Espen Gaarder (1998): *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, New York: McGraw-Hill

Haug, Espen Gaarder, Jørgen Haug & Alan Lewis (2003): «Back to Basics: A new approach to the discrete dividend problem», *Wilmott Magazine*, 9

Heath, David C. & Robert A. Jarrow (1987): «Arbitrage, Continuous Trading, and Margin Requirements», *The Journal of Finance*, Vol. 42, No. 5 (December 1987)

Hersoug, Tor (1993): *Kapitalmarkedet*, Oslo: Ad Notam Gyldendal

Ho, Andrew W. (1999): «The Three P's of Total Risk Management», *Financial Analysts Journal*, Vol.55, Jan/Feb 1999

Howell, Sydney, Andrew Stark, David Newton, Dean Paxon, Mustafa Cavus, Jose Pereira & Kanak Patel (2001): *Real Options*, London: Prentice Hall.

Hull, John C. (2006): *Options, Futures and Other Derivatives*, New Jersey: Prentice Hall

Hull, John C. (2002): *Fundamentals of Futures and Options Markets*, New Jersey: Prentice Hall

Hull, John & Wulin Suo (2002): «A Methodology for Assessing Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 37, No. 2, (June 2002)

Hull, John & Alan White (1987): «The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities», *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, June 1987, s. 281—300

Hull, John & Alan White (1998): «Incorporating Volatility Updating into Value at Risk Calculations», *Journal of Derivatives*, Vol. 6, No. 1, (Fall 1998)

Ingersoll, Jonathan E. (1976): «A theoretical and empirical investigation of the dual purpose funds: An application of contingent-claims analysis», *Journal of Financial Economics*, Volume 3, Issues 1-2, January-March 1976

James, Jessica (2001): «Physics in Finance», *Contemporary Physics*, Jul2001, Vol. 42 Issue 4

Jarrow, Robert (1999): «In Honor of the Nobel Laureates Robert C. Merton and Myron S Scholes: A Partial Differential Equation That Changed the World», *Journal of Economic Perspectives*, Vol.13, No. 4, 1999

Jarrow, Robert & Philip Protter (2004): «A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880–1970», *IMS Lecture Notes,* 45 pp. 75-91 (2004).

Jarrow, Robert & A. Rudd (1982): «A Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes», *Journal of Financial Economics*, 1982

Javaheri, Alireza (2005): *Inside Volatility Arbitrage: The Secrets of Skewness*, New Jersey: John Wiley & Sons

Kac, Mark (1947): «Random Walk and the Theory of Brownian Motion», *The American Mathematical Monthly*, Vol. 54, No. 7, Part 1. (Aug. - Sep., 1947)

Karatzas, I. & S.G. Kou (1996): «On the Pricing of Contingent Claims under Constraints», *The Annals of Applied Probability*, Vol. 6

Kasper, Hirschel, Edward J. Sullivan & Timothy M. Weithers (1991): «Louis Bachelier: the Father of Modern Option Pricing Theory», *Journal of Economic Education*, Vol. 22, 1991

Keller, Gerald & Brian Warrack (2003): *Statistics for management and economics*, Pacific Grove, Calif.: Thomson/Brooks/Cole

Kim, In Joon (1990): «The Analytic Valuation of American Options», *Review of Financial Studies*, Vol. 14

Knight, John L., Stephen E. Satchell & Jun Yu (2002): «Estimation of the Stochastic Volatility Model by the Empirical Characteristic Function Method», *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, Sep2002, Vol. 45 Issue 4, September 1990

Korn, Ralf & Paul Wilmott (1998): «A General Framework for Hedging and Speculating with Options», *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 1, No. 4

Kruizenga, R. J. (1956): «Introduction to the Option Contract», (I: The Random Character of Stock Market Prices. Red.: P. H. Cootner, MIT Press, 1964)

Lauterbach, B. & P. Schultz (1990): «Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives», *The Journal of Finance*, Vol. 45, No. 4

Leeson, Nick (1996): *Børs-svindleren: Mannen som veltet Barings Bank*, Oslo: Cappelen

Lowe, Janet (1997): *Warren Buffet Speaks*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Lynch Koski, Jennifer & Jeffrey Pontiff (1999): «How Are Derivatives Used? Evidence from the Mutual Fund Industry», *The Journal of Finance*, Vol. Liv, No 2, April 1999

MacKenzie, Doanld (2003): «An Equation and its Worlds: Bricolage, Exemplars, Disunity and Performativity in Financial Economics», *Social Studies of Science*, Vol. 33, No. 6, 831-868 (2003)

MacKenzie, Donald & Yuval Millo (2003): «Constructing a Market, Performing Theory: The Historical Sociology of a Financial Derivatives Exchange», *American Journal of Sociology*, Volume 109 Number 1 (July 2003): 107—45

Magrabe W. (1978): «The Value of an Option to Exchange One Asset for Another» Journal of Finance

Maheu, John M. & Thomas H. McCurdy (2000): «Volatility Dynamics under Duration-Dependent Mixing», *Journal of Empirical Finance*, Volume 7, Issues 3—4, November 2000

Marsh, Terry & Takao Kobayashi (2000): «The Contributions of Professors Fischer Black, Robert Merton and Myron Scholes to the Financial Services Industry», *International Review of Finance*, Volume 1, Desember 2000

Merhling, Perry (2005): *Fischer Black and the Revolutionary Idea of Finance*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Merton, Robert C. (1973): «Theory of rational option pricing», *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, s. 141—183, Spring 1973

Merton, Robert C. (1976): «Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinous», *Journal of Financial Economics*, 3, Jan-March 1976

Merton, Robert C. (1997): «Applications of Option-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later», *Nobel Prize Lecture*, 9 Desember 1997

Merton, Robert C. (1998a): «Robert C. Merton», (I: Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 1997 Red.: Tore Frängsmyr, Nobel Foundation, 1998)

Merton, Robert C. (1998b): «Banquete Speech», (I: Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 1997 Red.: Tore Frängsmyr, Nobel Foundation, 1998)

Modigliani, F & M. Miller (1958): «The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment», *American Economic Review*, 48, s. 261-297

Morgenson, Gretchen & Michael M. Weinstein (1998): «When Theory Met Reality: A special report; Teachings of Two Nobelists Also Proved Their Undoing», *New York Times*, Nov. 14, 1998

Nandi, Saikat & Daniel F. Waggoner (2000): «Issues in Hedging Options Positions», *Economic Review* (Federal Reserve Bank of Atlanta), 2000 1st Quarter, Vol. 85, Issue 1

Neftci, Salih N. (2000): *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, New York: Academic Press

Osterland, Andrew, (1999): «It's Up. It's Down. It's O.K.», *Business Week*, 12/28/98—01/04/99, Issue 3610

Parkinson, Michael (1980): « The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return», *The Journal of Business*, Vol. 53, No. 1. (Jan., 1980), pp. 61-65.

Preda, Alex (2004): «Informative Prices, Rational Investors: The Emergence of the Random Walk Hypothesis and the Nineteenth-Century "Science of Financial Investments"», *History of Political Economy*, Vol 36, No 4, Winter 2004, pp. 773-775

Punch, Maurice (1996): *Dirty Business: Exploring Corporate Misconduct*, London: SAGE Publications

Roll R. (1977): «An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends» Journal of Financial Economics

Salomon Jr., R.S. (1994): «Option Strategies», *Forbes*, 9/26/94, Vol. 154, Issue 7

Samuelson, Paul A. (1965a): «Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly», Industrial Management Review, Vol. 6, Spring, pp. 41-50, (I: Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson, Vol 3, kapittel 198, Cambridge, MA: MIT Press)

Samuelson, Paul A. (1965b): «Rational Theory of Warrant Pricing», *Industrial Management Review*, Vol. 6, pp. 13-31

Samuelson, Paul A. (1973): «Mathematics of Speculative Price», *SIAM Review*, Vol. 15, No. 1 (Jan., 1973), pp. 1-42

Samuelson, Paul A. & Robert C. Merton (1969): «A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility», *Industrial Management Review*, Winter 1969

Schachermayer, W. & J. Teichmann, (2006): «How close are the Option Pricing Formulas of Bachelier and Black-Merton-Scholes?», Preprint, to appear in *Mathematical Finance* (2006).

Schaefer, S.M. (1998): «Robert Merton, Myron Scholes and the Development of Derivative Pricing», *Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 100, No. 2, June 1998, pp. 425-445(21)

Scholes, Myron S. (1997): «Taxes and the Pricing of Options», *The Journal of Finance*, Vol. 31, No. 2, Papers and Proceedings of the Thirty-Fourth Annual Meeting of the American Finance Association Dallas, Texas December 28-30, 1975

Scholes, Myron S. (1997): «Derivatives in a Dynamic Environment», *Nobel Prize Lecture*, 9 Desember 1997

Scholes, Myron S. (2001): «Merton H. Miller: Memories of a Great Mentor and Leader», *The Journal of Finance*, Vol 56, No. 4, 2001

Scholes, Myron S. (2004): Myron S. Scholes, (I: Lives of the Laureates. Red.: William Breit & Barry T. Hirsch, MIT Press, 2004)

Sharpe, William., Gordon J. Alexander & Jeffery V. Bailey (1999): *Investments*, 6. ed. New Jersey: Prentice Hall

Smith, Clifford W. Jr. (1976): «Option Pricing: A Review», *The Journal of Financial Economics*, Vol. 3

Smithson, Charles (1991): «Wonderful Life», *Risk Magazine*, Vol. 4, No. 9 (October 1991)

Sprenkle, Case M. (1961): «Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences», Yale Economic Essays, Vol. 1, No. 2 (1961) (I: The Random Character of Stock Market Prices. Red.: P. H. Cootner, MIT Press, 1964)

Stoll, Hans R. (1969): «The Relationship Between Put and Call Option Prices», *Journal of Finance*, Vol. 24, p. 801 - 824

Stone, Bernell K. (1975): «The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson», *The Journal of Finance*, Vol. 30, No. 3.

Stulz R.M. (1982): « Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications» Journal of Financial Economics2

Stulz, Rene M. (2004): «Should We Fear Derivatives», *Journal of Economic Perspectives*, 18 (3), 173-192

Taqqu, Murad S. (2001): «Bachelier and his times: A conversation with Bernard Bru», *Finance and Stochastics*, Volume 5, Issue 1, Jan 2001,

Tellefsen, Jan Terje og Langli, John Christian (2000): *Årsregnskapet*, Gyldendal: Oslo

Thorp, Edward O. (2003a): «A Perspective on Quantitative Finance: Models for beating the market», (I: The Best of Wilmott: Incorporating the Quantitative Finance Review, Wiley)

Thorp, Edward O. (2003b): «What I Knew and When I Knew It Part 1 - 3», Wilmott Magazine, 2003 - 2004

Thorp, Edward O. (1973): «Extensions of the Black-Scholes option model», *39th Session of the International Statistical Institute* (Vienna, Austria) August 1973, s. 522-529

Waring, Alan & A. Ian Glendon (1998): *Managing Risk*, London: Thomson Learning

Whaley R. (1981): «On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends» Journal of Financial Economics

Whalley, E. & P. Wilmott (1994): «Hedge with an Edge», *Risk Magazine*, 7, p. 82-85

Wilmott, Paul, Sam Howison & Jeff Dewynne (1995): *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge: Cambridge University Press

Wilmott, Paul (2001): «The Use, Misuse and Abuse of Mathematics in Finance», *Mathematical Institute*, Oxford, UK, 2001

Zűhlsdorff, Christian (2001): «The Pricing of Derivatives on Assets with Quadratic Volatility», *Applied Mathematical Finance*, 8, p. 235-262

Lov om verdipapirhandel, 1997 nr. 79, § 1—2 annet ledd nr. 4—7 (Internett), Tilgjengelig fra: http://www.lovdata.no/all/nl-19970619-079.html (18.02.06)

Opsjoner på egenhånd, Oslo Børs og Opsjoner.com

www.bis.org
www.dn.no
www.fishpool.eu
www.imarex.com
www.lovdata.no
www.nobel.se
www.nordpool.no
www.norgesbank.no
www.nos.no
www.omxgroup.com
www.opsjoner.com
www.oslobors.no
www.rotman.utoronto.ca
www.statnett.no
www.vps.no

Vedlegg

Vedlegg 1: Ordforklaring

Ord	Forklaring
Aksjeindeks	Volum, kapitalveiet sammensetning av en gitt gruppe aksjer.
Aksjeindeksopsjon	Opsjon hvor underliggende instrument er en aksjeindeks og hvor avregning/oppgjør foretas på grunnlag av endringer i indeksverdien for en gruppe aksjer.
Amerikansk opsjon	Opsjon som kan innløses ved hvilket som helst tidspunkt i perioden, frem til og med forfallsdagen.
Analytisk løsning	Løsning der svaret kommer i form av en ligning.
Arbitrasje	Strategi som utnytter to eller flere derivater som er feilpriset i forhold til hverandre.
Arbitrasjehandler	Person som er involvert i arbitrasje.
At-the-money	Opsjonens innløsningskurs er tilnærmet lik underliggende markedspris, og opsjonens realverdi er tilnærmet lik null.
Avkastningskurve	Figur som viser en posisjons tap eller gevinst som en funksjon av aksjekurs. Alt. Avkastningsprofil eller pay-off kurve.
Avregning	Forskjellen mellom innløsningskursen til opsjonen og markedsverdien på underliggende instrument ved innløsning av opsjonen.
Bearmarked	Nedgang i markedet.
Bearspread	Strategi som innebærer at man foretar salg av salgsopsjon med lavere innløsningskurs, og kjøp av salgsopsjon med høyere innløsningskurs samtidig. Strategien kan også dannes med kjøpsopsjoner. Strategien vil gi gevinst i et fallende marked.
Binomisk modell	Modell hvor prisen på et aktiva følges over suksessivt korte tidsperioder. For hver periode antas det at bare to prisbevegelser er mulig.
Black-Scholes-Merton modellen	Modellen som ble utviklet av Fischer Black og Myron Scholes, sammen med Robert Merton for å bestemme en opsjons teoretiske verdi, og som ble utgitt i 1973. Scholes ble sammen med Merton tildelt Nobelprisen i økonomi i 1997 for arbeidet med

	modellen som den dag i dag benyttes av investorer i finansmarkedet. Opprinnelig ble modellen utviklet for europeiske opsjoner, men den har siden blitt videreutviklet til å håndtere en lang rekke finansielle instrumenter.
Bortfall	Tidspunktet for opphør av rettigheter og plikter som følge av at rettighetene etter en opsjon ikke benyttes.
Bortfallsdag	Den dag en fastsatt opsjonsserie opphører.
Bullmarked	Oppgang i markedet.
Bullspread	Strategi som innebærer at man foretar salg av kjøpsopsjon med høyere innløsningskurs, og kjøp av kjøpsopsjon med lavere innløsningskurs samtidig. Strategien kan også dannes med salgsopsjoner. Strategien vil gi gevinst i et stigende marked.
Butterfly spread	Strategi som innebærer at man kjøper en kjøpsopsjon med lav innløsningskurs, og en kjøpsopsjon med høy innløsningskurs. Dernest selger man to kjøpsopsjoner med innløsningskurs midt mellom de andre opsjonene. Strategien kan også dannes med salgsopsjoner. Strategien gir gevinst i et relativt nøytralt marked.
Call	Kjøpsopsjon
Clearing	Oppgjør mellom partene i en handel. Clearingsentralen er mellomleddet i handelen i henhold til lover og forskrifter, og sørger for at handelen blir gjort opp. Clearingsentralen er ansvarlig for oppgjør og avregning av alle handler. Sentralen vil fungere som motpart i alle handler, og fungerer som mellommann og garantist for markedsaktørene.
Delta	Sensitivitetsvariabel som uttrykker den forventede endringen i opsjonsprisen ved en markedskursendring på en kursenhet i underliggende instrument. For kjøpsopsjoner er delta positiv og for salgsopsjoner er den negativ. Delta er størst på in-the-money-opsjoner.
Depotkonto	Konto i depotbank som investoren setter inn kontanter som sikkerhet for handel med opsjoner og futures.
Derivatinstrument	Verdipapir som er utledet av andre finansielle instrumenter, og hvor kursutviklingen bestemmes av utviklingen i et eller flere underliggende instrumenter. (Opsjoner, futures)

Dividende	Kontantutbetaling til eierne av aksjene.
Empiri	Kunnskap som er bygd på erfaring.
Europeisk opsjon	Opsjon som bare kan innløses på bortfallsdagen.
Finansielle instrumenter	Verdipapir med en målbar pris eller en annen målbar størrelse. Opsjoner og futures er i seg selv finansielle instrumenter med finansielle instrumenter som underliggende instrument.
Forfallsdato	Den siste dagen i en opsjons liv.
Forwards	Avtale mellom to parter om kjøp eller salg av underliggende verdipapir til en bestemt pris på et bestemt tidspunkt i fremtiden. Oppgjør på bortfallsdagen.
Futures	En avtale mellom to parter om kjøp og salg av underliggende verdipapir. Dette gjøres ved et bestemt tidspunkt i fremtiden og til en bestemt pris. Daglige markedsoppgjør.
Gearing	Refererer til avkastningen på opsjoner i forhold til aksjer. For et gitt investeringsbeløp kan en opsjonsinvestor få mangedoblet avkastning i forhold til tilsvarende aksjeinvestering.
Generalisert Wiener prosess	En stokastisk prosess der endringen til en variabel over en kort tidsperiode er normalfordelt.
Geometrisk Brownsk bevegelse	En stokastisk prosess for aktivums prisbevegelser, der logaritmen til den underliggende variabelen følger en generalisert Wiener prosess.
Gevinst	Kontantene som blir realisert av eieren av opsjoner eller andre derivater ved periodens slutt.
Greske bokstaver	Sikringsparametre som delta,gamma, theta, rho og vega.
Hedging	Uttrykk som betyr å sikre investeringer mot tap. Opprinnelig et engelsk uttrykk, og teknikken brukes i utstrakt grad til å sikre mot kursendringer på aksjer, valuta og varer som er utsatt for renteendringer.
Historisk volatilitet	Volatilitet estimert av historiske data.
Ikke arbitrasjemulighets antagelsen	Antagelsen om at det ikke er arbitrasjemuligheter for markedsprisene.
Implisitt fordeling	En fordeling for fremtidige aktiva priser implisert av opsjonspriser.
Implisitt volatilitet	Volatilitet som gjør at Black-Scholes prisprediksjon blir lik markedspris. Prosentvis størrelse for markedets forventning til fremtidige bevegelser i

	underliggende verdi målt på årsbasis. Lav implisitt volatilitet gjør det mindre sannsynlig at opsjonen går in-the-money eller mer in-the-money. Dette gjør opsjonen billigere. Motsatt ved høy implisitt volatilitet.
Indeksopsjon	Opsjon på en underliggende indeks.
In-the-money	En opsjon med realverdi, som betyr en kjøpsopsjon med lavere innløsningskurs enn markedskurs på underliggende, og en salgsopsjon med høyere innløsningskurs enn markedskurs på underliggende.
Innehatt opsjon	Kjøpt opsjon. (Long)
Innløsning	Benytte seg av retten til å kjøpe eller selge underliggende.
Innløsningskurs	Prisen som innehaver av en kjøpsopsjon skal betale for underliggende verdipapir, og prisen som innehaver av en salgsopsjon skal selge det underliggende verdipapir for, dersom opsjonen innløses.
Itos Lemma	Resultat som muliggjør at den stokastiske prosessen for en funksjon av en variabel kan kalkuleres fra den stokastiske prosessen til variabelen.
Kjøpsopsjon	Se under opsjon.
Kombinasjon	Strategi inne derivathandel som innebærer at investoren kjøper og/eller selger flere opsjoner eller futures samtidig.
Kontinuerlig forrenting	Renten tillegges i fortløpende tempo, der intervallene blir mindre og mindre.
Kontrakt	Avtale. 1 kontrakt utgjør 100 underliggende aksjer.
Leveranse	Ved innløsning har selger (utsteder) plikt til å levere eller gi fra seg underliggende verdi i henhold til kontraktens innløsningskurs. Mottaker får eller mister dermed eiendomsretten til underliggende verdi.
Likviditet	Markedet er likvid når forskjellen mellom kjøps- og salgskursene er liten, og det omsettes store mengder med forholdsmessig liten innvirkning på kursene.
Lognormal fordeling	En variabel har en lognormal fordeling når logaritmen til variabelen er normalfordelt.
Market maker	Foretak eller privatperson som mot lavere transaksjonskostnader er forpliktet til å stille både kjøps- og salgskurs i bestemte opsjons- eller futuresserier med en maksimal forskjell mellom

	kjøps- og salgskurs. Market makere handler alltid for egen regning.
Nakne opsjoner	Opsjoner som ikke er sikret mot kursendringer. (Åpne eller rene posisjoner)
Normal fordeling	Standard klokkeformet fordeling for statistikk.
NOS	NOS ASA står for clearing av alle handler med opsjoner og futures på Oslo Børs.
OBX-opsjon	Indeksopsjon hvor underliggende er OBX indeksen.
Opsjon	Avtale mellom to parter som gir kjøper retten til å kjøpe (selge) og selger (utsteder) plikt til å selge (kjøpe) et underliggende verdipapir innen en bestemt tidsperiode til en på forhånd bestemt pris eller innløsningskurs. En kjøpsopsjon gir retten til å kjøpe underliggende verdi, og en salgsopsjon gir retten til å selge underliggende verdi.
Opsjonsinnehaver	Kjøper av opsjon.
Opsjonstype	Amerikansk eller europeisk opsjon.
Opsjonsutsteder	Selger av opsjon.
OTC derivater	OTC derivater (over the counter) er ikke-børsnoterte derivater. De er bilaterale avtaler som aktørene inngår seg imellom utenfor børs.
Out-of-the-money	En opsjon uten realverdi, som betyr at en kjøpsopsjon med høyere innløsningskurs enn markedskurs på underliggende, og en salgsopsjon med lavere innløsningskurs enn markedskurs på underliggende.
Over-the-counter markedet	Et marked hvor meglere handler over telefon. Meglerne tilhører som regel finansinstitusjoner, bedrifter og fondsforvaltere.
Porteføljeforsikring	Inngåelse av handler som sikrer at verdien på porteføljen ikke faller under et visst nivå.
Premie	Prisen på opsjonen, som betyr det beløpet kjøper av opsjonen må betale til utsteder for å oppnå opsjonens rettigheter. Premien betales når opsjonen kjøpes, eller mottas når opsjonen utstedes. Oppgjør skjer ved stengning av posisjon.
Pseudo	Uekte eller oppdiktet.
Put	Salgsopsjon.
Risikofri rente	Renten som kan inntjenes ved at ingen risiko påløper.
Risikonøytral verdsetting	Verdsetting av instrumenter der man antar at verden er risikonøytral. Gir korrekt pris i alle verdener.

Salgsopsjon	Se under opsjon.
Short salg	Salg av lånte aksjer. Låner forplikter seg til å levere tilbake aksjene til utlåner inne et visst tidsrom.
Sikkerhetskrav	Opsjonssentralens krav til sikkerhetstillatelse ved salg/utstedelse av opsjoner, samt kjøp og salg av forwards og futures.
Stengning	En stengningshandel foretas ved at man kjøper tilbake en opsjon eller future hvis man har solgt, eller ved at man selger en opsjon eller future hvis man har kjøpt. Den opprinnelige posisjonen blir dermed oppveiet. (Lukking eller utligning)
Stokastisk variabel	En variabel hvis fremtidige verdi er ukjent.
Syntetisk instrument	Kombinasjon av derivater eller underliggende instrumenter og derivater som kopierer et derivat. For eksempel er en kjøpt kjøpsopsjon og en solgt salgsopsjon det samme som en kjøpt forward, mens kjøpt underliggende og kjøpt salgsopsjon er det samme som kjøpt kjøpsopsjon.
Termin	En avtale vedrørende handel på et fremtidig tidspunkt av en spesifisert mengde av et angitt underliggende til en forhåndsavtalt pris. Terminer er en fellesbetegnelse på forwards og futures.
Tidlig utøvelse	Utøvelse av opsjonens rettigheter før forfallsdatoen.
Underliggende instrument	Verdipapir eller gruppe av verdipapir (indeks) som opsjonen omfatter. Den underliggende verdien kan være renter, aksjer, indekser, kornpriser, oljepriser og ellers alt som er mulig å kvantifisere. Det underliggende instrument for en opsjon er det verdipapir som innehaver har rett til å kjøpe eller selge hvis opsjonen innløses. (Underliggende verdi)
Volatilitet	Kursbevegelser i underliggende verdipapir uttrykt i prosent. Høy volatilitet øker sjansene for at opsjonen skal gå in-the-money, som igjen øker verdien på opsjonen. Volatilitet kan være estimert, historisk eller implisitt.
VPS	Verdipapirsentralen hvor alle verdipapirhandler registreres på den enkelte investors konto.

Vedlegg 2: Normalfordelingstabell

Tabell for N(x) når x ≤ 0

Ved interpolering N(-0,1234) = N(-0,12) – 0,34 [N(-0,12) – N(-0,13)]

= 0,4522 – 0,34 × (0,4522 – 0,4483) = <u>0,4509</u>

x	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-4,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Formel i MS-Excel

	A	B	C	D
1	x	0,00	0,01	0,02
2	0,0	=NORMDIST($A2;0+B$1;1;TRUE)	=NORMDIST($A2;0+C$1;1;TRUE)	=NORMDIST($A2;0+D$1;1;TRUE)

Forts. vedlegg 2

Tabell for N(x) når x ≥ 0

Ved interpolering $N(0{,}6278) = N(0{,}62) + 0{,}78\ [N(0{,}63) - N(0{,}62)]$

$= 0{,}7324 + 0{,}78 \times (0{,}7357 - 0{,}7324) = \underline{0{,}7350}$

x	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Formel i MS-Excel

	A	B	C	D
1	x	0,00	0,01	0,02
2	0,0	=NORMDIST($A2;0-B$1;1;TRUE)	=NORMDIST($A2;0-C$1;1;TRUE)	=NORMDIST($A2;0-D$1;1;TRUE)

Vedlegg 3: Black-Scholes-Merton i Excel

B-S-M

Inndata =	
Spotpris, S_0 (kr):	50
Innløsningskurs, X (kr):	60
Tid til forfall, T (år):	=6/12
Rente, r:	0.05
Volatilitet, σ:	0.25
Dividende, δ:	0.02

d_1 =	=(LN(C4/C5)+((C7-C9+((C8^2)/2))*C6))/(C8*SQRT(C6))
d_2 =	=C12-(C8*SQRT(C6))
$N(d_1)$ =	=NORMSDIST(C12)
$N(d_2)$ =	=NORMSDIST(C13)

Premie kjøpsopsjon, c (kr):	=(C4*EXP(-C9*C6)*C14)-(C5*EXP(-C7*C6)*C15)

$N(-d_1)$ =	=NORMSDIST(-C12)
$N(-d_2)$ =	=NORMSDIST(-C13)

Premie salgsopsjon, p (kr):	=(C5*EXP(-C7*C6)*C24)-(C4*EXP(-C9*C6)*C23)

Put-call paritet

put =	=C19+(C5*EXP(-C7*C6))-(C4*EXP(-C9*C6))
call =	=C26-(C5*EXP(-C7*C6))+(C4*EXP(-C9*C6))