NORGES HANDELSHØYSKOLE
Bergen, høsten 2007

Utredning i fordypnings-/spesialfagsområdet: Økonomisk styring
Veileder: Professor Steinar Ekern

Realopsjoner i olje og gass: Modellering og analyse av investeringer

av
Øivind Martin Hasle

Sammendrag
Denne oppgaven gir grunnlag for å kunne beregne investeringssituasjoner innefor olje og gass prosjekter. Nødvendig forståelse av investeringssituasjonen krever teorikunnskap, regne metoder, kunnskap om prosjekter og verdikjeden. Dette blir presentert slik at det skal være mulig å lese oppgaven og lære av den. Oppgaven gir kunnskaper om variert modellering av aktuelle problemstillinger og mulighet til å tolke komplekse situasjoner. Denne type kunnskap er typisk å bygge stein for stein kunnskap som gir allsidig innsikt. Man får innblikk i størrelser og modelleringsmetodenes egenskaper.

Innhold

1 Forord

Denne oppgaven vil komplettere min utdannelse på en bra måte. Det har vært en bra motivasjon for arbeidet. Denne avsluttende masteroppgaven om realopsjoner har vært en faglig innholdsrik periode. Modellering og analyse av realopsjoner har vært et variert arbeid. Fokus har hele tiden vært å prøve å sitte igjen med noe relevant og anvendelig til senere bruk. Arbeidet har vært preget av datasimulering, finansieringsteori, prosjekt fokus og oppgave strukturering.

Jeg vil med dette takke min veileder Steinar Ekern for rettledende kommentarer og gode råd.

2 Innledning

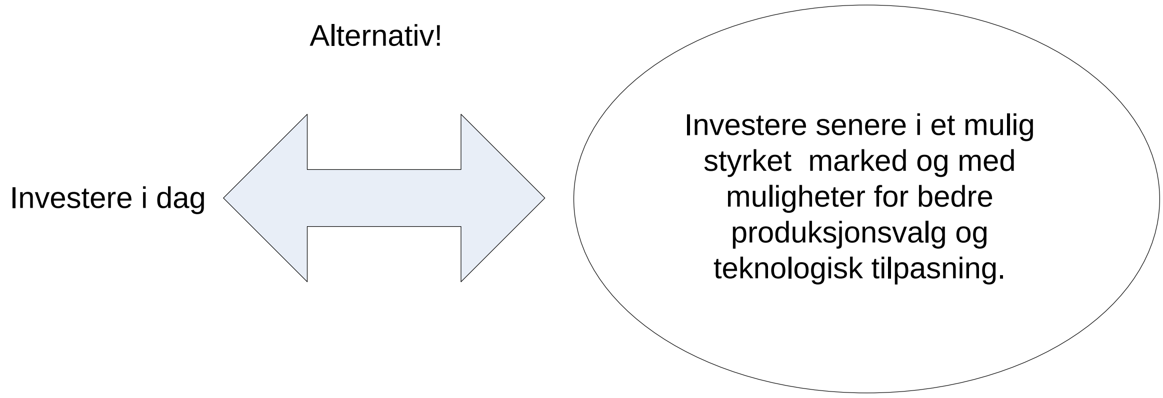
Realopsjonsanalyse hjelper til med å håndtere verdier riktig i investeringssammenheng. Kjernen i realopsjonsteorien er å prøve å sørge for effektiv bruk av ressursene. Realopsjoner dreier seg om verdien av å beholde muligheter, inkludere verdien av valgfriheter og verdien av å skape og utnytte muligheter.

Realopsjonsanalyse, sammenlignet med vanlig NPV[1], skiller seg ved at kontantstrømmen er opsjonsbasert. Det vil si at analysen tar hensyn til at kontantstrømmen kommer når forholdene ligger til rette for investeringen, mens vanlig NPV har forutbestemt tidspunktet for når kontantstrømmen kommer. ROA [2]analysen gir en bra modell på hvordan man bør beregne prosjekter. Realopsjoner er en videreutvikling av både nåverdimetoden og beslutningstrær. Den benytter muligheter i volatiliteten i markedet og ser fremover. Selve regneteknikkene er også interessante. Noen er meget fleksible og enkle å modellere, mens andre er avanserte å modellere.

[1] NPV, vanlig forkortelse for nåverdi metoden
[2] ROA, Realopsjons analyse

Sentrale temaer som blir betraktet er: Verdsettelse med hensyn til teori og praksis, investeringsmodeller, verdikjede- perspektiv og diskusjon av utvikling av olje og gass prosjekter.

Eksempel på en investerings opsjon:



2.1 Generelt om olje og gass produksjon

Olje og gassindustrien har i norsk sammenheng alltid hatt store utfordringer når det gjelder håndtering av risiko. Dette har vært både på teknologisiden og når det gjelder økonomiske hensyn. Det har vært satset mye på teknologi utvikling. Dette fordi byggingen har vært krevende og komplisert da produksjonen foregår offshore. I Østen er de største reservene onshore. I dag har Norge ledende teknologi på offshore markedet og er verdens største utbygger til havs.

Oljeprisen er sentral for utbyggingsaktiviteten. Oljeprisen er en sterk nøkkeldriver for muligheten til å drive felt. I dag er det høy oljepris men det er usikkerhet om hvordan dette vil utvikle seg. Det kan i noen grad brukes vanlige mikroøkonomiske betraktninger som tilbud og etterspørsel for å forklare markedsprisen på oljen. I dag forklarer man den høye oljeprisen blant annet på grunn av økende etterspørsel fra Østen, spesielt Kina har en enorm vekst. Det har historisk vist seg at det er problematisk å spå prisen med særlig presisjon. Drivere som kan trigge oljeprisen kan være politiske spenninger, krig, naturkatastrofer, terrorisme og teknologiske gjennombrudd. Markedet for olje preges av et stort kartell, OPEC, som har stor innvirkning på oljeproduksjon og dermed prisen. Da det er vanskelig å forutsi oljeprisen, kan man bruke statistiske prosesser til hjelp. Dette er statistiske prosesser som kalles stokastiske differensiallikninger. En vanlig modell på dette kalles geometrisk Brownsk bevegelse[3]. Disse tar utgangspunkt i historiske parametre som volatilitet og rente.

Det blir stadig vanskeligere å finne ressursene. Disse befinner seg i stadig mer vanskelige forhold for å kunne utvinne dem. For eksempel blir utbygginger gjort på stadig dypere vann og det må ofte store investeringer til. Man forventer at oljeproduksjonen i verden kommer til å synke fra 2011. Etter dette må man satse på nye energikilder og andre type olje mineraler, for eksempel oljesand.

Bransjens aktivitet bærer preg av svingninger med oljeprisen. Dette er hensiktsmessig i tråd med de resultater som blir gjort i denne oppgaven. Man skal investere når det er god lønnsomhet. På 90- tallet var det relativt lav oljepris og markedet var preget av kostnadskontroll og lave investeringer. Man var fokusert på å utnytte de eksisterende ressursene og ventet med å bygge ut. I dag er det historisk høy oljepris og høy aktivitet i markedet.

3 Verdsettelsesgrunnlag for opsjonsberegninger

3.1 Innledning til verdiberegning framover i tid med hensyn til volatilitet

Oppgaven ved verdiberegning av realopsjoner er å ta hensyn til muligheten for å reagere på forandringer i framtiden. Verdsettelse av framtidig verdier innebærer at man beregner hva ulike verdier er i framtiden er, når underliggende forhold er volatile. Verdsettelse med opsjonsanalysen innebærer å undersøke sannsynlig verdifordeling framover i tid og verdsette utfall av mulige handlinger på disse forandringene.

[3] Presenteres i avsnitt 3.1.1

Forskjellige framgangsmåter for å beregne verdier fram i tid og beregne opsjonsverdier blir forklart i flere avsnitt senere. I dette avsnittet blir elementære begreper presentert. Prinsipper for verdiberegninger tar utgangspunkt i sannsynlighet for et gitt verdiutfall. Når man modellerer bruker man stokastisk prosesser som beskriver en verdiutvikling. Verdiutviklingen kan være på en eller flere komponenter til kontantstrømmen på et prosjekt eller selskapsverdi.

Opsjonsproblemet kan man beskrive som å verdsette diskonterte kontantstrømmer på bakgrunn av optimal utøvelse på verdibevegelsene i framtiden. Finansproblemer på dette nivået krever innsikt i statistiske prosesser. Prosesser som er markedsbestemt kan bli modellert ut fra kjente risikojusterte prosesser. I realopsjoner regner man også på prosjektinterne usikkerheter som for eksempel reservoargjennomstrømning og komponenter i investeringskostnaden. Modellering av dette vil være avhengig og variere fra prosjekt til prosjekt.

3.1.1 Geometrisk Brownsk bevegelse og random walk

En vanlig form for en statistisk prosess er geometrisk Brownsk bevegelse, dette er en stokastisk differensiallikning. Disse er godt kjent i finans, science og analyse verden.

$$1) \qquad dS = \mu * S * dt + \sigma * S * dz$$

μ beskriver her en trend som blir multiplisert med verdien til S og et tidsdifferensial dt. Dette gir en komponent til en inkrementell økning i verdien på S. Den andre komponenten i likningen beskriver usikkerheten for utviklingen i S. σ som beskriver usikkerheten i prosessen, multipliseres med S og et usikkerhetsdifferensial dz, en $dz = \epsilon\sqrt{dt}$, hvor $\epsilon \sim N(0,1)$. Denne komponenten summeres sammen med komponenten med tidsleddet og man får en forandring dS på verdien av S.

Når dz er en uavhengig trekning, vil prosessen ha egenskapen at retningen på utfallet på S i framtiden ikke er bestemt av tidligere utfall.

Annualisert usikkerhet i avkastning,σ:

Denne størrelsen er definert som avkastingsusikkerhet pr tidsenhet framover i tiden. Den blir historisk bestemt ut i fra et sett observasjoner. Avkastning mellom to målinger er gitt av $u_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$, man har gitt n+1 observasjoner, S_i er markedskurs ved slutt av intervall i og τ tidsintervallet mellom hver observasjon. Estimatet på standardavviket blir da den vanlige formelen:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

Man kan anta m antall observasjoner i løpet av et år slik at $\tau = 1/m$, annualisert standardavvik blir da, $\sigma = \frac{s}{\sqrt{\frac{1}{m}}}$. Dette er beskrevet i (Hull 2003, side 286).

Man kan beskrive 1) på distribusjonsform:

2) $\quad \mathrm{S}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{i}} = S * e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma * \sqrt{T} * \mathrm{Z}_{\mathrm{i}}}$

Hvor Z_{i} er $\mathrm{Z}_{\mathrm{i}} \sim N(0,1)$ fordelt.

Et markedspriset aktivum har en sannsynlighetsfordeling for verdiutvikling og i følge teorien har en trend gitt ut fra rente og dividende rate, $(r - \delta)$[4]. Dette er en viktig forutsetning for prising av opsjoner. Denne prosessen gir da en fordeling for verdiutviklingen på et aktivum og benyttes til realopsjoner til foreksempel prising av oljepris.

Random walk:

Dette prinsippet er mye brukt i modellsammenheng. Gitt en modell hvor man har diskretisert et framtidig utfalls rom i tilstander med en gitt sannsynlighet og verdi. Prinsippet random walk sier da at utfallet på denne diskretiseringen er uavhengig av utfallet fra tidligere perioder. Dette er tilfelle for en binomisk prosess som har to utfall. Denne prosessen kan man si har Markov egenskap da neste utfall tar kun utgangspunkt i forrige og ikke historien til

[4] Med dividende menes for olje, conveniens yield som er forklart i avsnitt 4

forrige utfall. Prinsippet benyttes også i geometrisk Brownsk bevegelse da man trekker en random variabel uavhengig av tidligere utfall. Denne egenskapen kan lede til en lognormal fordeling for markedsprisede aktivum. For usikkerheter bestemt prosjektinternt blir denne prosessen ofte brukt.

Eksempel med Monte Carlo simulering av verdiutfall og risikonøytral diskontering:

Ved å trekke et stort antall normalfordelte tall med fordelingen N(0,1), simulerer man Z_i leddet i likning 2). Dette kalles Monte Carlo simulering når man simulerer store mengder statistiske tall. Hver trekning gir et verdiutfall/ prisbane. For en europeisk call, vil verdien ved forfall da kunne beskrives ved:

$\max(S_T^i - K, 0) = \max\left(S_0 * e^{\left(r-\delta-\frac{1}{2}*\sigma^2\right)*T+\sigma\sqrt{T}*Z_i} - K, 0\right)$, K er her en konstant strike. Her er S_T^i en risikojustert prisprosess hvor i er indeks for en simulering i. Gitt N simuleringer vil gjennomsnittet av simuleringene være et estimat på opsjonsutbetalingen og opsjonsprisen være utbetalingen diskontert med risikofri rente.

$$C = e^{-rT} * \frac{1}{N}\sum_1^N \max(S_T^i - K, 0)$$

Strike blir i oppgaven ofte simulert som en statistisk prosess, som også kan være korrelert med med verdien av kontantstrømmen. I senere avsnitt vises det hvordan Monte Carlo simulering gjøres på mer avanserte og aktuelle amerikanske opsjoner.

Verdsettelse med binomial metode, diskretisering med 1 og 2 usikkerhets kilder:

Binomisk prisingsmodell gjør en diskretisering på det underliggende aktivum. I hvert tidskritt framover i tid, endres verdien opp eller ned. Man bygger opp et tre som viser usikkerhet i mulig verdiutvikling. Når verdiutvikling mellom to perioder er en lognormal fordeling, blir oppgangs faktoren, $u = e^{\sigma*\sqrt{\Delta T}}$, og nedgangsfaktoren $d = \frac{1}{u}$. Ved å anta at investoren er risikonøytral kan man ved et subjektivt sannsynlighetsmål beregne opsjonsverdier. Man antar at verdiutviklingen på det underliggende aktivum i markedet er lik risikofri rente fratrukket convenience yield. Sannsynligheten for oppgang er gitt ved formelen:

$$3) \qquad p = \frac{exp\,(r-\delta)\Delta T - d}{u-d}$$

Utledning finnes i (Hull 2003 side 241) som selv referer til publikasjonen av Cox, Ross and Rubinstein 1979, dette er regnet som elementært stoff i opsjonsprising.

Verdien på å holde opsjonen i livet er summen av opsjonsverdiene i neste utfall multiplisert med risikojustert sannsynlighet i de to tilstandene, diskontert med risikofri rente.

$$C_t = \frac{p * C(u * S, K) + (1 - p) * C(d * S, K)}{\exp(r * \Delta t)}$$

Nodeverdien C, er den største verdien av faktisk utøvelse eller å holde opsjonen i live. For å få riktig pris må man undersøke om verdien av å utøve i hvert enkelt punkt er høyere enn om man lar opsjonen være i live.

Forutsetningen for at man skal kunne bruke denne metoden er at man må ha tilstrekkelig små tidsskritt. Man benytter en rekursiv metode for å løse opsjonsverdien, starter bakfra og nøster seg framover i tid. Metoden kan enkelt utvides og modelleres med flere type usikkerhetskilder. Dette blir forklart i modeller i avsnitt i del 5.

3.1.2 Metoder for verdivurdering av free cashflow

Verdsettelse innebærer budsjettering av kommende kontantstrømmer, man vet ikke sikkert hva som skjer i fremtiden. Hvordan man skal budsjettere kommer an på metoden som blir brukt. I oppgaven benyttes kun risikofri diskontering som beregningsmetode. Denne metoden tar utgangspunkt i teorien om hvordan man kan prise aktiva i framtiden med utgangspunkt i rentenivået. Dette fører til at man ikke budsjetterer ut fra markedsforventninger og markedsanalyser.

3.1.3 Risikofri diskontering

Her er det sikkerhetsekvivalent kontantstrøms element som diskonteres med risikofri rente. Man må skille mellom verdsettelse av komponenter til kontantstrømmen fra en markedssammenheng, og komponenter med opphav fra prosjektintern sammenheng utenfor markedssammenheng.

Budsjetteringen av sikkerhetsekvivalente elementer til kontantstrømmen som stammer fra en markedssammenheng, for eksempel oljepris eller gasspris. Innebærer at elementet som blir priset i markedet, utvikler seg med en verdi som er risikofri renten fratrukket eierfordel/ convenience yield som variabelen yter. Dette begrunnes ut fra arbitrasje argumenter.

Elementer som ikke er markedsbestemt, prosjektinterne usikkerheter, budsjetteres ut fra egne beregninger og prognoser. Dette er for eksempel gjennomstrømning og reservoarstørrelse.

3.1.4 Gjennomgang av diskontering i praksis, med eksempel

Kontantstrømselementene består i prosjekt sammenheng i hovedsak av inntekter, kostnader, investeringer og gjeldsbetalinger, hvis man ser bort fra forandringer i arbeidskapitalen. Realopsjonene blir i hele denne oppgaven løst ved å separere ut kostnadene, investeringene og betaling av gjeld, fra inntektene. På denne måten modellers en mulig investering på prosjektet med opsjonsstrukturen, $\max(F - K, 0)$.

Diskontering etter skatt utføres med avkastningskrav som er etter skatt. Dette kravet er skattesats *s*, multiplisert med den risikofrie renten, som gir det kontinuerlige avkastningskravet $\rho = (1 - s) * rf$. Netto oljeinntekter ilegges en ekstra særskatt på 50%, se avnitt 4.3.5. Man skal ikke bruke særskatten, *s1*, i tillegg i avkastningskravet

Inntekten:

Nåverdi av kontantstrømmen er: $F = \sum_{i=1}^{N} \frac{(1-(s+s1))*\widehat{X_i}}{\exp(\rho * i)}$, hvor $\widehat{X_i}$, her er den årlig diskret sikkerhetsekvivalent inntekt som diskonteres og summeres.

Strike:

Avskrivningen og lånerente gir fradrag ved skatteberegning. Kontantstrømmen fra driften som skal diskonteres er kostnader ved drift, C, (C er her symbol for kostnaden), lånerenter Cg, avskrivninger, A

Nåverdi på kontantstrømmens kostnader er: $KS(C, Cg, A) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(1-(s-s1))*(C+Cg+A)}{\exp(\rho*i)}$

Netto nåverdi av avskrivningene som trekkes fra i strike blir da, NPV($(s + s1) * A$).

Investeringsutgiften til byggingen må legges til i strike, dette er investert egenkapital, E og investering som er gjeldsfinansiert. Gjeldsfinansieringen kan illustreres på flere måter, mottatt beløp må betjenes etter rammevilkår fra utlåner. Betjeningen av gjelden består av renteinnbetaling og avdrag. Renteutgifter er lagt inn i kostnadene til kontantstrømmens drift. Nåverdien av avdrag, Ca legges da eksplisitt i strike. Nåverdien av avdraget er diskontert med etter skatt avkastningskrav. Disse komponentene gir uttrykk for strike:

$$K = (1 - (s + s1)) * NPV(C + Cg) - (s + s1) * NPV(A) + E + NPV(Ca)$$

Før skatt beregninger diskonteres med renten r, $\rho = r$. Det blir i oppgaven ikke utført beregninger før skatt da dette ikke er interessant til nøyaktige verdivurderinger, før skatt kan kalles grovanalyse.

Regneeksempel på verdi av kontantstrømmen og strike:

Gjør her en illustrativ verdsettelse av et oljefelt. Verdier fra dette eksempelt benyttes videre i oppgaven. For alle beregningene jeg gjør i oppgaven har jeg valgt kontinuerlig forrentning, *r*= 0,05 og vanlig skatt *s*=0.28 og særskatt *s1*=0.5. Dette innebærer et etter skatt avkastningskrav, $\rho = (1 - 0.28) * 0.05 = 0.036$.

Verdi på kontantstrøm:

Feltet har produksjon som varer i 10 år med M=30 000 fat produksjon om dagen. Dollarkurs mot NOK på 5.5 og dagens olje pris er P= 80$. Med kontinuerlig convenience yield rate på 0,02 er dette er nok informasjon til å beregne verdien. Verdien blir da proporsjonal med P og M, da man kan trekke disse parametrene ut av diskonteringsrekken.

Etter skatt verdi: $V(P = 80, M = 30000) = 10{,}3\ mrd$

Denne annuiteten kan her beregnes enkelt med kalkulator: $V = CF_1 \frac{1-(\frac{1+g}{1+k})^T}{k-g}$

$$V = 0.22 * 30000 * 1.0305 * 5.5 * 80 * 365 * \frac{1-(\frac{1+0.0305}{1+0.0367})^T}{0.0367 - 0.0305} = 10257130265 \approx 10{,}3 mrd$$

Det kontinuerlige avkastningskravet omregnes her til et diskret avkastningskrav, som benyttes i annuiteten, $e^{0.036} - 1 = 0.0367$. Tilsvarende for veksten $e^{0.03} - 1 = 0.0305$

Her gjøres det ingen forutsetninger om handel med termin kontrakter. Dette kunne ha ført til at prisene ble noe påvirket av lagerkostnader. Denne produksjonen er priset som om det skulle vært solgt kontinuerlig i spot markedet.

Beregning av strike:

Til denne verdsettelsen benyttes en kontinuerlig conveniens yield på produksjonskostnader på 0.02. Investering i en produksjonsinnretning kan for eksempel være en subsea innretning, inkludert engineering og bygging til en pris på I= 5 mdr NOK. Byggingen skjer ved å motta 2 mrd i gjeld som betales i et avdrag ved prosjektets slutt, Ca. Kontinuerlig lånerente rg =0.08 gir kostnad, Cg og egenkapital E= 3 mrd. Produksjons kostnad $25 pr fat gir driftskostnad C. Avskrivning utføres lineært over 6 år.

Strike blir nåverdier etter skatt av driftskostnader C, rentebetaling Cg, avdrag Ca, netto avskrivning A og egenkapitalutlegg E som i likning 2.2. Dette eksempelet tilsier at produksjonskostnadene blir dekket av kontantstrøm fra drift

$$K = 4{,}5\ mrd$$

Disse størrelsene kan man også regne ut med annuiteter, se appendiks avsnitt 8.2 Med mer avanserte kontantstrømmer benyttes regneark.

3.1.5 Parameterisering av verdsettelsen på kontantstrømmer og strike

Verdsettelsen i eksempelet over var en diskontering av kontantstrømmen i et bestemt tidspunkt, gitt ut i fra et bestemt nivå på inputparametrene, dette er en tradisjonell NPV analyse. Når oljeprisen beveger seg kan man uttrykke denne verdien, som en faktor av oljeprisen siden man kan trekke initialprisen P ut av summasjonsrekken. Denne verdien er da proporsjonal med oljeprisen. Proporsjonalitet er viktig i modellsammenheng, man slipper å gjøre verdsettelsen på ny hver gang man simulerer nytt utfall på usikkerhetskildene. Verdien på kontantstrømmen på prosjektet i et gitt tidspunkt er da en faktor multiplisert med en statistisk prosess, $F = k * S(t)$. Verdien av en prosess med olje og en prosess med gass er summen av de to prosessene.

Verdi på strike vil intuitivt kunne være en sum av flere statistiske komponenter. Man vet at usikkerhet i byggekostnaden ikke nødvendigvis vil være sterkt korrelert med produksjonskostnader. Men i mange realopsjonsmodeller beskriver man utvikling i strike som utspent av en usikkerhetskilde. Ut over i oppgaven vil det bli vist hvordan man løser denne type usikkerhetshåndtering.

3.1.6 Tidsperspektivet på budsjettering av kontantstrømmen

Verdsettelse gjøres som tidligere nevnt med framskrivning av en forventet inntekt. Når man gjør budsjettering i et evighetsperspektiv bruker man Gordons formel. Denne formen for beregninger tilsier at man forutsetter at driften holdes i gang på et evig bestemt nivå eller med en bestemt vekstrate.

Verdiberegninger hvor forutsetningene er gode for at kontantstrømmen varer i lang tid og at man kan benytte dette perspektivet, kan for eksempel være innenfor skog, vannkraft eller korn produksjon. Stikkord her er reproduserende egenskap.

Beregningsmessig vil langtids/evighets diskontering av kontantstrømmer ha mange likhetstrekk med prosjekter med en begrenset tidsramme på framskrivningen. Forskjellig er at man må ta hensyn til potensiell dividende som selskapet kunne levert ved beregninger når framskrivningen varer evig.

Jeg synes det er vanskelig av natur å bruke framskrivning i evighetsperspektiv med realopsjoner i olje og gas sammenheng. Til forskjell fra en skog eller et vannkraftverk vil et reservoar bli tømt. Man kan bygge en ny fabrikk og forvente produksjon i nesten evig tid. Gjør man det samme for olje, forutsetter man enten at oljekilden i prinsippet er uendelig stor eller at man med sikkerhet kan finne nok resurser framover. Jeg holder meg i oppgaven til endelige reservoar størrelser, men muligheten å ha en evig opsjon på reservoaret er fullt mulig. Dette blir sett på under analytiske løsninger avsnitt 5.7.

3.1.7 Kort om tradisjonelle WACC beregninger

Det vil ikke være konsistent å bruke de introduserte risikojustere prosessene som grunnlag for diskontering med WACC, dette gjelder både for binomisk metode og Monte Carlo simulering. Utgangspunktet for kontantstrømmen som er diskontert med WACC er forventet verdi og ikke på basis av risikojusterte priser. Forventet verdier på kontantstrømmen estimeres etter prinsippet beste skjønn, dette krever arbeid i prognoser om forventninger.

3.2 Strukturen for realopsjoner, karakteristika for modellene

Input faktorer for realopsjoner kan gjerne sammenliknes med den samme strukturen som finansielle opsjoner har. Som nevnt tidligere brukes oppdeling i verdi og strike, $\max(F - K, 0)$. Denne strukturen er den samme om opsjonen er put, call, europeisk eller amerikansk. Et særtrekk ved realopsjoner, er at en opsjon ofte kan bestå av portefølje av både flere call og put opsjoner som er avhengige av hverandre. Dette kommenteres ved avsnitt om sammensatte opsjoner.

Inputfaktorer kan da struktureres som:

- *Verdien av kontantstrømmen,* $S_{0,}$: Denne verdien så vi hvordan ble beregnet under avsnittet for risikofri diskontering. Det må beregnes en verdi på bakgrunn av en valgt modell. Man beregner en initialverdi $S_{0,}$ og lar usikkerhetskilder i modellen forandre verdien framover i tid.

- *Kontraktsprisen,* $K(t)$*:* For realopsjoner er kontraktsprisen generelt alle kostnadene ved å investere og drive prosjektet. Utregning av denne ble vist i avsnittet om risikofri diskontering. Denne er i mange tilfeller usikker og ikke kontraktfestet slik den er for finansielle opsjoner.

- *Risikofri rente,* rf*:* Opsjonen diskonteres med risikofri rente da usikkerhetskildene modelleres ut fra renten. Det er vanlig å bruke rentens terminstruktur som tilnærming til risikofri rente. I dag er denne helt flat framover i tid slik at man kan bruke konstant rente.

- *Volatilitet,* σ*:* For realopsjoner kan det være mange usikkerheter som påvirker et prosjekt. Dette kan gjøre beregningene kompliserte. Gjennom beregningseksempler blir det i oppgaven vist hvordan man implementerer usikkerheter inn i modellene. For å få implementert usikkerheter blir det i oppgaven benyttet Monte Carlo simuleringer og binomiske metoder med flere usikkerhetskilder.

- *Dividende, δ:* Dividenden eller convenience yield, er en viktig parameter som beskriver trendbevegelsen/ tidsleddet på prisprosesser. Denne parameteren medfører at amerikanske opsjoner blir optimale å utøve før forfall.

- *Tid før forfall, T***:** Dette er en viktig faktor for verdien på opsjonen. Når man har lang tid vil volatiliteten tilnærmet utvikle seg med kvadratroten av tiden for lognormale prosesser. Man får mer usikkerhet å velge i modellen og dermed større verdi.

Utgangspunktet for beregninger av opsjonsverdien, $C_{0,}$ kan da summeres opp med funksjonen:

$$C_0 = f(S_0, K(t), \delta, rf, \sigma, T, Call, Put)$$

4 Prosjekter i olje og gass

4.1 Verdikjeden for et oljeselskap

Verdikjeden forklarer hvordan produksjonen foregår. I praksis er det viktig å ha kjennskap til de forskjellige delene i kjeden, da realopsjoner fokuserer på muligheter. Dette medfører at et pågående prosjekt også vil kunne gi insentiver tidligere i kjeden til for eksempel å starte seismikk og prøveboring.

Verdikjeden for et oljeselskap kan omfatte prosjektering og planlegging i tidligfase og helt til avslutning av produksjonen.

- **Prospekter og lisenser**

Områder som kan inneholde petroleumsforekomster reguleres av nasjonale myndigheter. Lete blokker ut deles av myndigheter, på bakgrunn av søknader.

- **Seismikk delen:**

Vanligvis gjøres seismikken over store områder for å kunne gi bra bilde av utviklingsmulighetene. Seismikken analyseres for å komme fram til aktuelle lete områder som kan være interessante å bore etter forekomster på. Hvis man ikke finner interessante analyser, er seismikken å betrakte som en sunk cost. Suksess vil kunne føre til økt lete aktivitet i området.

- **Leteboring**

Prøveboring er den første fysiske kontakten man oppnår med et eventuelt funn, boresuksesser vil gi ytterligere insentiv til å videre utforske leteboringen og mulig gjøre mer seismikk.
Det må tas avgjørelser om hvor mange hull som skal bli testet hva og hva som er mulighetene for videre ekspansjon. Lete boringen kartlegger produksjonsmulighetene. Leteboring foregår med rigger offshore. Disse kan stå på bunnen ved grunt vann, såkalt jack-up rigg, eller flyte rigg når vanndypet er dypere.

- **Produksjon:**

Landbasert produksjon er i dag enkelt og relativt billig. Men mange forekomster befinner seg under vannoverflaten. Her finnes det mange type løsninger. Man kan produsere med undervannsproduksjon som kalles subsea, man har også mulighet til å ha en fast plattform ved utbygninger for moderate vanndyp. Det er vanlig at subsea tar over for fast plattform da denne dype løsning etter hvert har blitt billigere og teknologien på plass. Man kan også benytte seg av samme riggen som man bruker til leteboring. Det er blitt lagd en del boreskip og store flyterigger. Subsea anlegg har blitt knyttet opp til disse enhetene. Oppgaven her er å designe riktige løsninger slik at utnyttelse av resursene blir effektiv.

Etter at oljen kommer opp fra bakken, går den igjennom et prosessanlegg for å raffinere produktet. Subsea anlegg har til nå vært tilknyttet enten en flytende, fast produserende enhet eller et ledningsnett til terminal for videreforedling av produktet. Det finnes i dag teknologi slik at noe prosessanlegg også blir utført subsea. Oljen blir transportert med tankbåter eller ledningsnett gass blir transportert i ledningsnett til en prosess terminal. Noen prosjekter består kun av undervannsanlegg. Da blir oljen eller gassen transportert i ledninger til raffineringsterminaler/prosessanlegg. Når man transporterer olje og gass i samme rør kalles det et flerfase rør. Dette er ny teknologi.

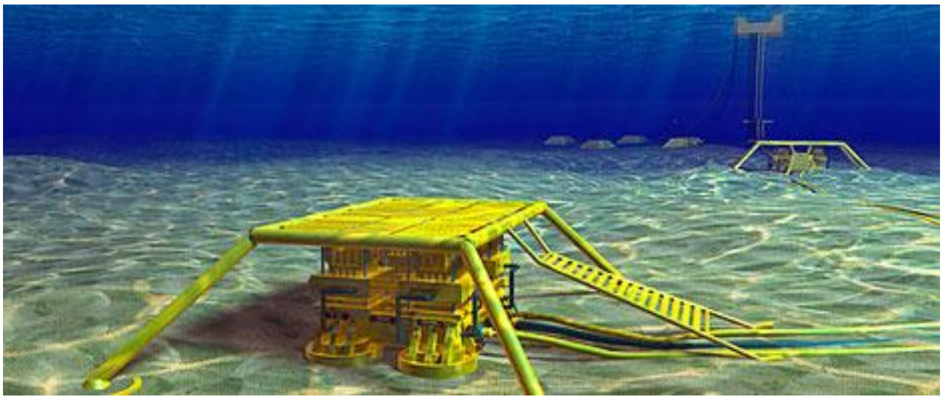
Muligheter for utvikling av felt er bestemt av egenskaper ved forekomster, teknologiløsninger, økonomi/marked. For å gjøre olje og gass investeringer gode, kreves det konsepter som er riktig tilpasset. Trenden er at nye funn skjer ofte på stadig dypere vann og utvinningen skjer med krevende undervanns anlegg og teknologi.

På grunt vann er fortsatt faste installasjoner som jackets og oppjekkbare rigger konkurransedyktige. På dypt vann er båter, bøyer og flytende plattformer brukt. Til disse installasjonene er ofte knyttet til undervannsanlegg. De flytende installasjonene har lagringskapasitet og prosessanlegg for olje.

Realopsjoner er interessant i sammenheng med satellitt feltutvikling på dypt vann. Man kan knytte opp nye anlegg til tidligere ledningsnett eller planlegge ledningsnett slik at man kan få lave kostnader på investeringene og stordriftsfordeler på kostnadssiden. Man har anledning til å ha et utstrakt nettverk, da man både kan bore på skrå og har mulighet for å spre anleggene i stor radius, gitt at bunnforhold ligger til rette for det.

Etter hvert som produksjonen er kommet i gang på feltet, er det mulig å injisere gass eller vann inn i reservoaret. Dette øker gjennomstrømningen og er spesielt verdifullt når reservoaret har produsert en stund og begynner å bli modent. Trykket faller under vanlig produksjon slik at oljen ikke like lett strømmer ut av reservoaret. Man injiserer et ekstra trykk inn i reservoaret for å få opp utnyttelsesgraden på feltet og gjennomstrømningshastigheten. Injisering er forbundet med kostnader og kan ses på som en investering i reservoaret.

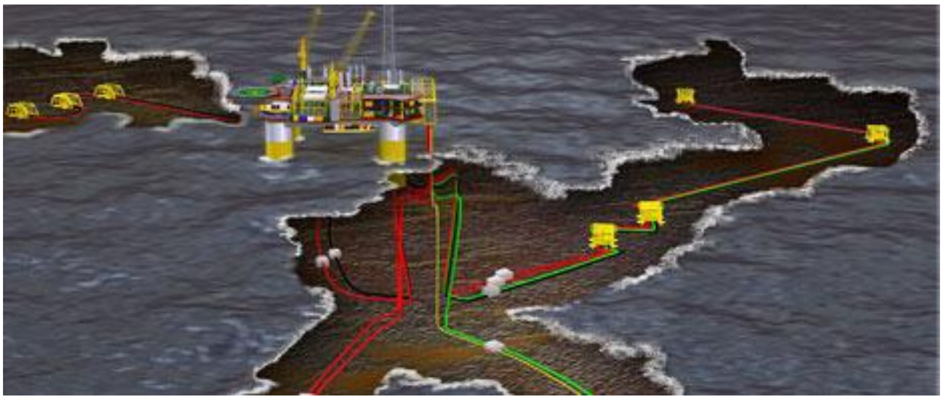
Noen eksempel på olje/gass prosjekter operert av StatoilHydro:



Fram : Bildet viser havbunnsanlegg på *Fram feltet* som er knyttet opp til en stigerørplattform. Produksjonen på feltet er 60000 fat pr dag, forventet å vare i 15 år. Investeringskostnaden var på 3,6 mrd.

Glitne: Dette feltet produserer 40000 fat olje i døgnet av produksjons og lagerskipet, Pertrojarl1, som er et innleid skip.

Gjøa : Her er det forventet at 80 millioner fat olje skal gå i ledning til Troll2 plattformen og 40 mrd kubikkmeter gass skal gå i britiske rørledninger.



- **Avslutnings fase:**

En oljebrønn kan selges videre til en annen aktør eller permanent avsluttes når den er tom. Stengning av store offshore installasjoner er forbundet med en del kostnader. Det kreves at installasjonene blir demontert.

4.2 Identifisering av realopsjonselementer i verdikjeden

Realopsjoner er en metode som kan være aktuell i mangfoldig sammenhenger. Verdivurdering av realopsjoner krever kunnskap om beregninger av opsjoner. For modellering av modellparametre et det viktig med innsikt i prosjektet og forhold rundt. Bruk av realopsjoner krever bransjekunnskap, da input til modellen er hentet fra en prosjektverden. Regneteknisk er det likheter med finansielle opsjoner.

4.2.1 Karakteristika for investeringsprosjekter

Prosjekt problemstillingen har mange generelle felles karakteristikker. Jeg beskriver kort 4 felles trekk for investeringsprosjekter. Senere i oppgaven blir det referert til disse egenskapene.

Usikkerhet i input data: Prosjekter har alle inputdata i modellen som er usikre, dette er selvfølgelig i varierende grad fra prosjekt til prosjekt. Eksempel på usikkerheter i lønnsomhets beregninger er: oljepris, dollarkurs, reserver, utbyggingskostnader, utbyggings tid, produksjonshastighet, rente og inflasjon. Disse vil gi kontantstrømmen en usikker framtidig verdi.

Sekvensiell informasjonstilgang: Man får mer informasjon om prosjektet etter hvert som tiden går. Et prosjekt har både ekstern og intern usikkerhet. Den eksterne usikkerheten kan man kalle makro faktorer og blir bestemt av markedet. Man vil få ny informasjon fra markedet uansett om prosjektet er igangsatt eller ikke. Prosjektintern usikkerhet er knyttet til prosjektutforming/utføring. Disse faktorene vil kunne bli avslørt under arbeid med prosjektet.

Fleksibilitet: Dette er et kjennetegn på muligheten til å kunne reagere på og tilpasse seg til endrede rammebetingelser for prosjektets drift. Man har potensial for å øke oppsiden og redusere nedsiden.

Begrenset reverserbarhet: Investeringer i prosjektsammenheng er preget av stor innslag av sunk cost, alternativverdien av en investering er ofte liten som for eksempel for en oljeinstallasjon eller spesialmaskin. Markedsverdi kan fort bli vesentlig lavere enn investeringskostnaden.

Karakteristikken fleksibilitet i prosjekter er utgangspunktet for realopsjoner. Denne muligheten bygger på prosjektusikkerheter som gir rom for å skape oppside eller redusere nedside. Dette er forutsatt at man får informasjon om disse usikkerhetene. Investeringsoppgaven er viktig å utføre til riktig timing da investeringene har begrenset reverserbarhet.

4.2.2 Illustrasjon av opsjonssituasjoner

Felles for alle opsjonene er at det er tidsdimensjonen som gir mulighet for at investeringen kan stige i verdi på grunn av endrede forhold ved investeringsmuligheten. Realopsjoner kan grupperes/struktureres ved hovedtyper. Det er mange type opsjoner på grunn av mange forskjellige usikkerhetsmomenter og problemstillinger. Dette er hensiktsmessig for å beskrive mer nyansert forretningssituasjonen. Referer her til boka (Trigeorgis, 1995)

Timing option: Utgangspunktet for denne opsjonen er å bestemme riktig tidspunkt for en investering. Man kan hevde at alle amerikanske opsjoner er timing options. Tidsverdien av å avvente blir her målt opp mot verdien av å utøve. Usikkerheter som kan bli avslørt kan være prosjektinterne eller eksterne forhold, for eksempel teknologi og utbyggingskostnader, kontantstrøm på grunn av markedsforhold.

Growth option: Dette er en opsjon som er forbundet med en førstegangsinvestering, hvor man senere venter en positiv kontantstrøm. Dette kan typisk være investering i seismikk.
Denne type opsjon kan være assosiert med første gang inn på et marked, en strategisk investering som kan gi vekst på sikt og kan gi kunnskap og konkurransefortrinn. I utgangspunktet kan denne type investering bli satt i gang selv uten positiv NPV på bakgrunn av strategiske hensyn.

Staging option: Situasjon der man stegvis kan investere seg inn i prosjektet. Dette er aktuelt for olje og gass situasjonen der man stegvis kan utvikle felt. Ved å få mer og mer innsikt/ informasjon om prosjekter vil man kunne tilpasse investerings tempoet og utvikle nye muligheter.

Expand option: Dette er vanlig generell betegnelse på en opsjon hvor man har mulighet til å utvide et prosjekt. For eksempel en investering på et satellitt felt eller investere i produksjonsfremmende installasjon ved gass injeksjon.

Exit/abandon option:
Disse opsjonene er nyttige hvis markedet går dårlig og man har mulighet til å stoppe virksomheten, for eksempel ved å selge en fabrikk og motta en sum i stedet for å slite med høye kostnader. Dette er en put opsjon. Denne opsjonen er ikke så utbredt innenfor olje, da alternativ verdi av en plattform ikke er stor, og når man først har begynt å pumpe, vil det være kostbart å avslutte produksjon. Noen selskaper kan velge å beskytte produksjonen ved å kjøpe opsjonsrettigheter til å selge olje til en kontraktet pris. Dette kalles future options. Man kan også velge å handle olje ved terminhandel, forward handel. På denne måten vil man kunne unngå å selge olje billig. Dette er noen ganger strategi for små selskaper som er i ekspansjon og vil eller er utsatt for oppkjøpsituasjoner.

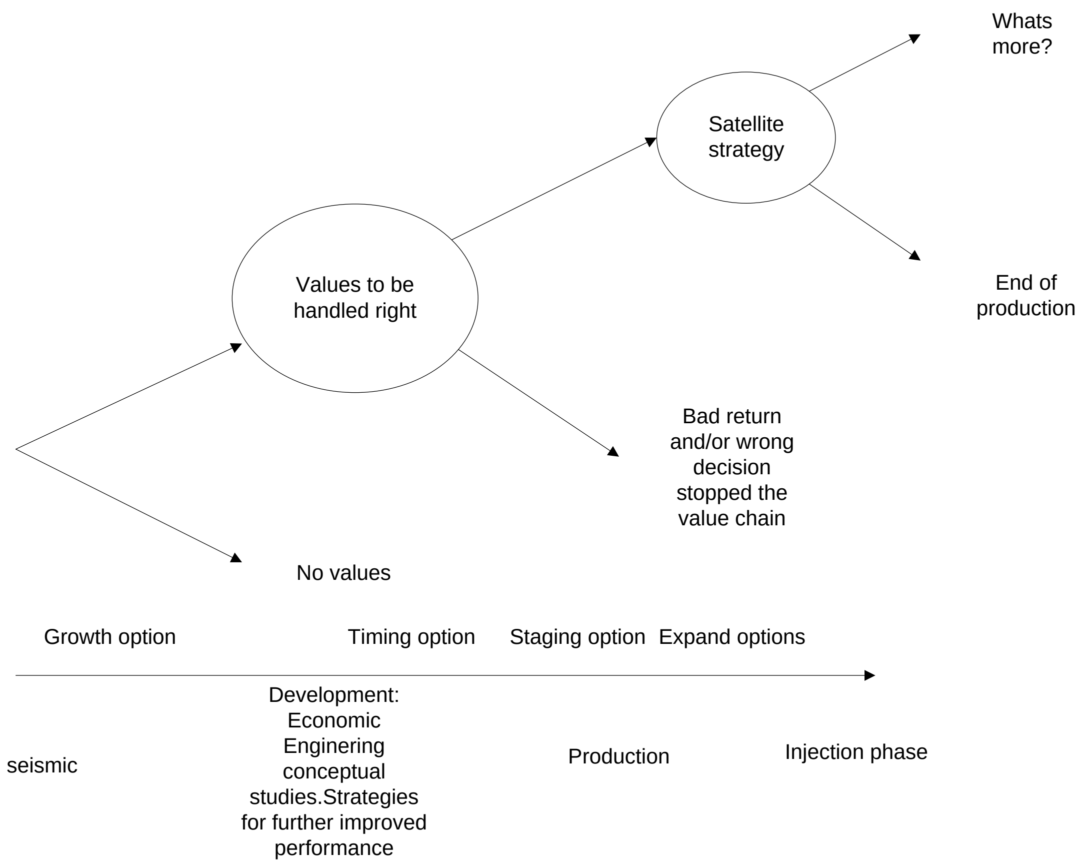
Contract options: Dette er en variant på en abandon opsjon hvor man reduserer deler av produksjonen mot en kompensasjon.

Compound/ embedded options: Dette er sammensatte opsjoner som kan for eksempel bestå av flere expand opsjoner som må utføres i en bestemt rekkefølge, eller det kan for eksempel være en blanding av expand, contract og exit muligheter. Opsjonen består da av både put og call elementer.

Operating/flexibility options: Med denne opsjonen har man mulighet til å reagere på markedet og man kan oppjustere/ nedjustere produksjon. Dette er en embedded option.

De nevnte opsjonene er ment for å kartlegge opsjonstankegangen på en strukturert måte og blir referert til underveis i oppgaven.

Skisse av opsjonene i verdikjeden:



4.2.3 Investeringer i olje og gass

Det er utbyggingsfasen av olje og gass felt som har stor fokus på norsk sokkel i investeringssammenheng. Når man først har bygget ut, er det sjelden at man stopper produksjonen. Forklaring på dette er store kostnader ved stengning og ofte liten alternativ verdi av produksjonsenhetene. Man må vurdere egenskaper ved konsepter og markedssituasjon. Et felt er ikke helt likt et annet og trenger et tilpasset design. Utnyttelse av markedssituasjonen er viktig for å forvalte ressursene. Realopsjoner er på norsk sokkel derfor knyttet til growt, expand, skalering og timing.

I utlandet hvor produksjonen foregår på land, vil man i prinsippet kunne stenge brønnen midlertidig. Dette er nærmest utelukket offshore. Denne type abandon opsjoner er mer aktuelt for fabrikker eller gruver. Subsea anlegg kan gi rom for mer fleksibelt produksjonsmønster, selv om dette ikke er utbredt.

Selskapets innvirkning på verdiene

Selskapets verdi avhenger av selskapets evne til å styre og skape sitt potensial riktig i forhold til ressursene. Forvaltning av muligheter på prosjekter innebærer at ledelsens har ansvar for å gjøre dette på en best mulig måte. Det er den arbeidende ledelse som har størst innvirkning på forvaltningen av fremtidige verdier. Her er det helt klart muligheter for forringelse av verdier. Valg av prosjekter kan gi tilgang til nye muligheter og må ses i sammenheng med selskapets strategi. Opsjonsanalyse vil hjelpe til med å kartlegge det strategiske bildet.

Realopsjon problemstillingen på flere arenaer

Realopsjoner kan komme på banen i flere problemstillinger:

- På nasjonalt nivå vil overordnede myndigheter ha mulighet til å avgjøre viktige ressursspørsmål. Dette gjelder for eksempel bestemmelse om tildeling og herunder levetid på en opsjon ved lisens tildeling. Dette er opsjoner over lang tid. Noen nasjoner sitter med store reserver, for eksempel i Saudi Arabia og Russland. Land som Angola, Nigeria, Venezuela har også store ressurser. Her er det nødvendig å avgjøre når og hvem som skal utvinne resursene. Norge dro nytte av utenlandsk kompetanse og har senere utviklet seg til en av de beste aktørene i verden. Denne ”idealmodellen” kan bli brukt som argument til å hjelpe til å få i gang hjulene i økonomien i svake land. Noen land er redd for å bli forbrukt og har selv problemer med teknologi og politiske forhold.

- På selskapsnivå vil selskapet som helhet kunne forme riktig utvikling på selskapet. Referer her til modellen som ble introdusert i avsnitt 4.2.2. Trenden i dag vil være å gjøre prosjekter som ikke er enorme i selskapssammenheng. Man deler risiko ved å ta andeler i prosjekter. Det vil fortsatt også være store prosjekter i selskapssammenheng som vil kunne prege og forandre et selskaps framtid.

- På prosjekterings nivå er problemstillingen å avgjøre viktige detaljer som for eksempel satellitt prosjekter. Dette blir modellert og beregnet i avsnittene 5 og 6 i oppgaven.

4.3 Modell forutsetninger og usikkerheter

Realopsjoner kan være komplekse regneoppgaver og i mange sammenhenger er det nødvendig, tilstrekkelig og anbefalt å holde det på et oversiktlig nivå for å trekke de riktige linjene. Beregningene i oppgaven bygger på modellering av modellparametre som tar utgangspunkt i framtidige antagelser. Jeg gjør her rede for disse ved å beskrive aktuelle modellparametre. Disse benytter jeg meg av i ulike kombinasjoner og følgelig forskjellig kompleksitet til modeller senere i oppgaven.

4.3.1 Investeringskostnaden

Investeringen kan være forbundet med stor usikkerhet. Det som er vanlig, er at man ikke kan vite hvor stor den blir før man er ferdig med byggingen. I realopsjonssammenheng er det interessant å se hvordan den kan utvikle seg framover i tid, før eventuelt investeringen skjer. Denne utviklingen kan gi svar på hvor lønnsom investeringen kan være. I en analytisk tilnærming vil man prøve å modellere med statistiske størrelser.

I oljeprosjekter vil investeringskostnaden være avhengig av markedstilpasning i stor eller noe grad. Noen prosjekter kan bli utført av sterkt vertikalt integrerte selskaper, hvor man kan forutsi kostnader bedre enn om man bare skulle predikere tjenester kjøpt i markedssammenheng. De største aktørene har ofte muligheten til å opptre godt vertikalt integrert.

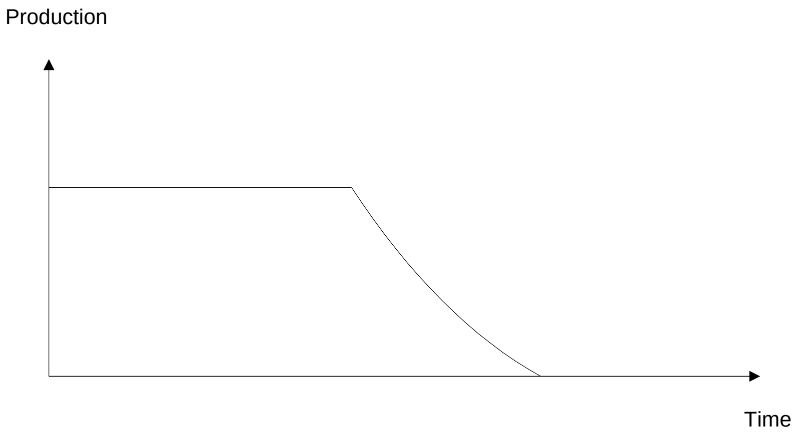
Markedsbestemte byggekostnader I, kan man velge å modellere med geometrisk Brownske bevegelse: $dI = (r - \delta_I) * I * dt + \sigma_I^2 * I * dz_I$. Referer her til (Dixit & Pindyc, 1994 side 207). Man kan også reflektere prosjektintern usikkerhet med denne type prosesser, man har da mulighet for å modellere trend leddet uten å ta hensyn til rentenivået.

Det er i dag vanelig at man kjøper mange operasjoner. Oljeservice er blitt til et stort marked, aktører blir spesialister på enkeltområder. Oljeselskaper kjøper tjenester fra disse. Eksempel på serviceaktører er rigg, ankerhåndtering, seismikk, engineering og rivingseksperter.

4.3.2 Reservoaret

Her er det petroleumsingeniører som vurderer de fysiske estimatene. De økonomiske modelleringsforutsetninger og usikkerhetene er størrelsen på reservoaret og gjennomstrømningsraten. Større gjennomstrømning gir mindre nødvendig diskontering, da verdiene kommer raskere og større volum gir mer verdier. Gjennomstrømningen vil man kunne teste før produksjonen virkelig er i gang, men det vil etter produksjonsstart fortsatt være usikkert hvordan den vil utvikle seg. Prediksjoner på reservene både under og før produksjon vil også kunne variere.

Gjennomstrømning og volum bestemmer levetiden på reservoaret, eksponentialfordeling på levetid er ofte vanlig. Et produksjons profil vil kunne ha mange mulige former. Et eksempel på en basis modell kan typisk ha jevn produksjon som man kaller et platånivå, før produksjonen avtar eksponentialt.
Sandkorn fra produksjonen fører til erosjon av produksjonsutstyr. Ved å senke gjennomstrømningen vil slitasjen bli betydelig redusert. Sandkorn kontroll fører ofte i praksis til at man bestemmer gjennomstrømningen i reservoaret.



Oljeprosjekter kan være små med et par tusen fat pr dag i produksjon til å ha gigantisk gjennomstrømning. Gullfaks hadde rekord på 605 956 fat i døgnet satt 7. oktober 1994 i Norge.

Prising av denne type usystematisk risiko krever ikke noe risikokompensasjon for en diversifisert investor. Prising tar utgangspunkt i et forventet estimat.

4.3.3 Oljeprisen

Som nevnt innledningsvis er oljeprisen en viktig parameter for investeringer.I denne oppgaven gjøres det ikke noen beregninger på å predikere oljepris på bakgrunn av metoder som tilbud og etterspørsel. Som tidligere nevnt vil terror, kriger, politiske hendelser og interne avgjørelser i OPEC samarbeidet kunne påvirke prisen mye. Dette er vanskelig å predikere med god presisjon.

I oppgaven benyttes det en modell som er vanlig benyttet i finansmarkedet. Dette er geometrisk Brownsk bevegelse. Man benytter historisk volatilitet, rentenivå og convenience yield som parametre til modellen.

Geometrisk Brownsk bevegelse for oljepris: dP= $(r-\delta)*P*dt+\sigma*P*dz$
Modellen kan også gjøres ved å gjøre volatilitetsleddet avhengig av prisnivået det er ofte observert at volatiliteten øker med prisnivået.

$$dP=(r-\delta)*P*dt+\sigma(P)*P*dz$$

4.3.3 Convenience yield

Dette er en viktig parameter for opsjonsanalyse. I oppgaven beregnes denne som en eksogent bestemt variabel. Den kan også modelleres som en geometrisk Brownsk bevegelse. Convenience yield er definert som den fysiske fordelen man har ved å holde aktivet, δ. Denne fordelen medfører at forventet verdiutviklingen for aktivet blir $(r-\delta)$ som er lavere enn renten, forutsatt her at $\delta>0$.

4.3.4 Valutausikkerhet

Prosjekter kan endre lønnsomheten på grunn av endringer i valuta. Situasjonen den siste tiden er høy oljepris men også lav dollar slik at noe av kaken forsvinner. Valutakurs kan modelleres med Brownsk bevegelse:

$$dV=(r-rf)*V*dt+\sigma*V*dz$$

I denne bevegelsen er r renten hjemme og rf renten i utland. rf kan fortolkes som convenience yield. Likningen blir diskretisert på samme måte som for oljepris med oppgang og nedgangsfaktorer, vist under binomial metode. Når man gjør beregninger med valuta må renten på handlet aktivum være den samme som den valutaen den blir handlet i, her *rf.*

4.3.5 Kostnader i produksjonen

Ut ifra verdikjeden vil kostnader være forårsaket av mange forskjellige operasjoner. Det er i realopsjoner en vanlig situasjon at man gjør analyser i deler i av verdikjeden, dette kan gjerne være et satellitt prosjekt i tilknytning til et annet prosjekt. Dette medfører at kostnadene i hver enkelt opsjonsanalyse kan i tilfeller være særegne. I oppgaven illustreres momenter/ elementer ved kostnadene slik at man skal kunne ha mulighet til modellere disse elementene.

Ulike type kostnader:

I hovedsak kan man si at kostnader er kapitalkostnader, avskrivninger, skatt og produksjonskostnader.

Kapitalkostnader: Dette er kostnader ved lån og egenkapital. Renten vil være avhengig av risiko ved prosjektet høy risiko høy rente, renten stiger også ved høy låneandel. Egenkapitalen blir i denne oppgaven diskontert ved risikofri rente.

*Avskrivninger***:** Avskrivninger er kostnader på grunn av en investering. På investeringer er det lov å avskrive lineært over 6 år, 16 2/3 % årlig. Det er fordel med rask avskrivning. Det er også lov å avskrive underveis i byggeperioden. Disse reglene gjelder for faste anlegg på sokkelen.

*Skatten***:** I Norge er skattesatsen på 28 % i tillegg er det en særskatt på 50 % på oljeproduksjon. I utlandet er denne lavere der har også andre regler for produksjons investeringer på felt.

Produksjonskostnader:

Administrasjon, drift og vedlikehold utført av entreprenør:

Noen prosjekter krever mye tilsyn og operativt mannskap mens andre løsninger som subsea anlegg er fjernstyrte og har lave service kostnader. Dette er kostnader som entreprenør selv har stor predikerbar kontroll over.

Servicekostnader kjøpt i marked:

Disse følger markedspriser og er typisk volatile. Dette kan være undervannsinspeksjon, rigger med tilhørende service båter. Disse kostnadene kan være sterkt korrelert med oljeprisen. Korrelasjonen får implikasjoner for modelleringen av opsjonene.

I shipping er det vanlig å bruke stokastiske prosesser som verdsettelses grunnlag på fraktrater. Det er mulig å gjøre dette for denne type kostnader men markedet er mer nisjepreget, slik at denne type teori har noe mindre anvendelse og tyngde i praksis.

Friinntekt: I tilknytning til investeringen er det også friinntekt i 6 år som ikke har særskatt. Dette er 5 % årlig av investeringen.

5 Presentasjon av beregningsmetoder

Amerikanske opsjoner er mer utfordrende å løse enn europeiske. Metoder som benyttes når det kreves fleksible modelleringer av opsjonsverdiene, er Binomial metode og Monte Carlo simulering med regresjon. Binomial metode er praktisk og lite komplisert å få til matematisk, modelleringsmessig er det enkelt å modellere med denne metoden. Monte Carlo simulering er en bra metode for å simulere flere usikkerheter med.

Her presenteres også "Closed form solutions", dette er analytiske løsninger som innebærer mer kompliserte regneoperasjoner. Mulighetene for variert modellering er mer begrenset, men man får nøyaktig pene svar og godt innblikk i teori og forståelse. Disse har vært nyttige tidligere, da man ikke hadde like stor regnekapasitet på maskinene.

5.1 Opsjonsmodell med separerte usikkerheter

Når man har flere usikkerheter inn i modellen, utvider man treet til flere mulige utfalls verdier. Det kan være usikkerhet knyttet til strike eller cashflow elementer, for eksempel volum, valuta eller kostnader. Man får et non- recombining tre som gjør at antallet noder øker.

Ct	u1u2
	u1d2
	d1u2
	d1d2

Modellen viser at C_t er avhengig av usikkerhetskildene 1 og 2 i neste tidskritt. Dette gir 4 utfallsnoder avhengig av utfallet av usikkerhetskildene 1 og 2 i neste tidskritt.

Beregningen av dette opsjonsproblemet løses på samme måte som for en usikkerhetskilde. Man trenger oppgang og nedgangsfaktorer for de ulike prosessene og risikojusterte sannsynligheter for de forskjellige verdiene. Når usikkerhetene ikke er korrelerte, blir sannsynlighetene bestemt etter formel 3) i avsnitt 3.1.1. Diversifiserbare usikkerheter i modellen skal ikke risikojustere sannsynlighetene.

Gitt ingen korrelasjon mellom usikkerhetene vil risikojusterte sannsynligheter bli:

$$p_{11} = p(u_1) * p(u_2),\ p_{12} = p(u_1) * p(d_2),\ p_{21} = p(d_1) * p(u_2),\quad p_{22} = p(d_1) * p(d_2)$$

Hvor p_{11}betegner oppgang i kilde 1 multiplisert med oppgang i kilde 2.

Beregningen av et verdiutfall i treet blir da:

$$C_t = \frac{(p_{11} * C_{11} + p_{12} * C_{12} + p_{21} * C_{21} + p_{22} * C_{22})}{\exp(r * \Delta T)}$$

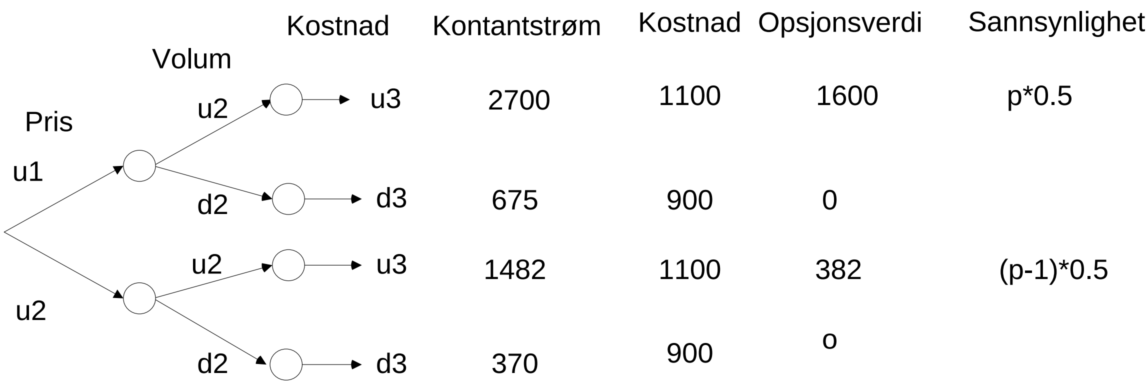
C_{11}, betegner verdi gitt oppgang i kilde 1 og oppgang i kilde 2, r er kontinuerlig diskonteringsrente og ΔT er et tidskritt.

Nodeverdiene C er den største verdien av faktisk utøvelse eller å holde opsjonen i live. Dette medfører at man må undersøke om verdien av å utøve i hvert enkelt punkt er høyere enn om man lar opsjonen være i live når man skal verdsette opsjonen. Dette ble presentert innledningsvis for en usikkerhet.

For amerikanske opsjoner må man løse dette problemet med mange tidsskritt og en rekursiv itererende metode hvor man må gjøre en avgjørelse om man skal vente eller utøve opsjonen i hvert verdiutfall. Dette er beskrevet tidligere og regnes som elementært stoff i beregning av amerikanske opsjoner.

Eksempel 1 Separerte usikkerheter i kvantum og verdi på kontantstrømmen.

Dette eksempelet er ment som en innføring av å behandle flere usikkerheter. Eksempelet viser en beregning i kun et tidskritt. Det er usikkerhet i volum og strike utvikler perfekt korrelert på grunn av volumøkningen. Dette er kostnad forårsaket av økt produksjon. Volumet øker med en faktorøkning på 2 eller senket med en faktor 0,5 med 50 % sannsynlighet for hvert av utfallene. Oppgangsfaktoren for volum blir da u2=2 og nedgangsfaktoren d2=0,5.
Oppgang for kostnad settes til u3=1,1 og d3=0,9, og har initialverdi 1000.
Risiko i verdien på underliggende aktivum utvikler seg binomisk ut ifra oppgang og nedgang faktorer bestemt fra vanlig metode beskrevet i innledningen. Med en tidsperiode på $\Delta T = 1$ og volatilitet på 0.3 gir dette oppgangsfaktor på u1=1,35 og nedgangsfaktor d1=0.74.
Risikojustert sannsynlighet for oppgang blir p=0.476 når renten er 0.05 og convenience yield rate på 0.02.Initialverdi på prosjektet er 1000.



Verdi av opsjon blir da:

$$V = \frac{(0.476 * 0.5 * 1600 + (1 - 0.476) * 0.5 * 382)}{\exp(0.05 * 1)} \approx 459$$

Kommentar til framgang: Eksempelet viser hvordan man hensiktsmessig kan løse et opsjonsproblem ved å legge alle kostnader inn i strike. Disse hadde her i eksempelt ingen markedselement slik at sannsynligheten og verdi ble bestemt ut ifra volumusikkerheten som er en diversifiserbar usikkerhet. Eksempelet er ment for å gi en gjennomgang av modellering av binomisk framgangsmåte. Denne måten er byggestein til å kunne diskretisere problemet og få nøyaktige svar.

5.1.1 Korrelerte usikkerheter

Kompliserende element er når usikre elementer er korrelerte for eksempel kostnader og oljepris. Boka brukt i ECO423 (Hull 2006, avsnitt 24.6 side 576) presenterer tre måter å løse dette på. Jeg benytter meg av Rubinsteins forslag på side 578.

Metoden tar utgangspunkt i 2 geometrisk Brownske bevegelser som er korrelerte. Denne type prosesser ble presentert i avsnitt 3.1.1.

Metoden styrer sannsynligheten for et definert utfall. Med lik risikojustert sannsynlighet 0.25 for de fire utfallene blir nodeverdiene:

$$\left(S_1 u_{1,}, S_2 A\right), (S_1 u_1, S_2 B), (S_1 d_1, S_2 C), (\ S_1 d_1, S_2 D)$$

Hvor: $u_1 = exp\left[\left(r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_1\sqrt{\Delta t}\right]$

$$d_1 = exp\left[\left(r - q_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)\Delta t - \sigma_1\sqrt{\Delta t}\right]$$

Og : $A = exp[\left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}\ (\rho + \sqrt{1-\rho^2}\ )]$

$$B = exp[\left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_2\sqrt{\Delta t}\ (\rho - \sqrt{1-\rho^2}\ )]$$

$$C = exp[\left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}\ (\rho - \sqrt{1-\rho^2}\ )]$$

$$D = exp[\left(r - q_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)\Delta t - \sigma_2\sqrt{\Delta t}\ (\rho + \sqrt{1-\rho^2}\ )]$$

Dette medfører at oppgang og nedgangsfaktorene blir annerledes enn for den vanlige oppgang og nedgangsfaktorene definert tidligere i avsnitt 3.1.1. Når man her styrer sannsynlighetene, styrer man først usikkerhet 1. Det er 0.5 sannsynlighet for oppgang, u_1. Man benytter seg av egenskapen til normalfordelt periodeavkastning, denne danner grunnlaget for den lognormale fordelingen. Oppgangsfaktoren er da gitt som faktorene over. Referer her til (forelesningsnotat i faget finansieringsteori ECO421: Binomial approximation, Høsten 2006). Når det gjelder faktorene A og B vil man her også styre sannsynlighetene slik at A og B blir bestemt ut fra samme type sammenheng som ble brukt for u_1 og d_1. Det er her kompliserende å kombinere korrelasjonen mellom de to variablene, referer her til avsnitt 5.5.2, i denne rapporten, som viser trekning mellom to korrelerte variable. Man vet at tendensen til begge faktorene er å bevege seg i samme eller motsatt retning som usikkerhet 1 da det er korrelasjon mellom variabel 1 og 2. Spredningen på fordelingen er gitt ved leddet $\sqrt{1-\rho^2}$. For faktorene C og D er det samme framgangsmåte.

5.1.2 Illustrasjon av beregning av nodeverdier

Gitt et prosjekt med initialverdi 9 mrd på kontantstrømmen og en investerings/konstruksjons kostnad avrundet til 6 mrd, disse representerer S_1 og S_2. Disse verdiene er i prinsippet representative tallstørrelser for prosjekter. I tillegg trenger man tallstørrelser på conveniens yield, rente og volatilitet på bevegelsene. Disse er de samme som tidligere og valgt som representative verdier for parametrene.

Kontinuerlig rente r= 0.05,
Volatilitet på kontantstrømmen: 0,30
Volatilitet på investeringen: 0,30
Conveniens yield på kontantstrøm, kontinuerlig: 0,02
Conveniens yield på investering, kontinuerlig: 0,02
Korrelasjon mellom investering og kontantstrøm: 0.6

Gitt et tidskritt Δt=1 blir:

$$A = \exp\left[\left(0.05 - 0.02 - \frac{0.3^2}{2}\right) * 1 + 0.3\sqrt{1}(0.6 + \sqrt{1 - 0.6^2})\right] = 1.499$$

$$u_1 = \exp\left[\left(0.05 - 0.02 - \frac{0.3^2}{2}\right) + 0.3\right] = 1.330$$

Det er da 0.25 sannsynlig med oppgang i verdi og oppgang i strike gitt ved noden: $(u_1 * S_1, u_2 * S_2) = (9 * 1{,}330{,}6 * 1{,}499) = (11.970,\ 8.994)$. Framgangsmåten er tilsvarende for de andre nodene.

Regneeksempel med inputparametre

Når man også definerer lengden på opsjonen er inputparametrene fra eksempelet over nok til å definere et opsjonsberegnings problem, $\max(S_1 - S_2, 0)$. Her er S_1 verdi av kontantstrømmen og S_2 , strike. Dette er en Call på kontantstrøm fratrukket konstruksjonskostnader. Jeg har lagd et dataprogram som beregner opsjonsverdien på denne type problem. Binomial metode er enkelt å implementere med macro i excell. Her får man et perspektiv på størrelsen av opsjonsverdiene.

Gitt opsjonslevetid på15 år, blir verdien av hele prosjektet: 3,91

Det vil si at opsjonsverdien utgjør avrundet, $4mrd - 3mrd = 1mrd$ av prosjektet som hadde initialverdi på 3mrd. Lønnsomheten øker med 33% når man kan bruke markedet og riktig timing til feltutviklingen.

Programmet klarer ikke å beregne mange tidskritt, kun 10, da det går tom for lagringsplass med tradisjonell matrise lagring. For å få høyere nøyaktighet i beregningen er det nødvendig med flere tidskritt. For å få til flere tidsskritt må man lage rutiner som ikke lagrer store mengder tall i matriser. Man kan benytte seg av at man ikke trenger å huske alle tall samtidig i binomisk metode. Man kan iterere seg fram i beregningen og glemme tidligere tall. Strukturen på denne type kode er lagt til appendix 8.6, men koden er ikke særlig selvforklarende for en leser.

Senere sammenlikner jeg denne beregningen opp mot Monte Carlo simulering på samme investeringssituasjon, se avsnitt 5.5.3. Jeg sammenlikner også samme opsjon, men med lengre tidshorisont med analytiske løsninger på evigvarende opsjoner i avsnitt 5.7.

5.1.5 Kopling av multiple usikkerheter

Man kan koble flere usikkerheter enn 2 og 3 som vist i modell eksemplene over.Det kan for eksempel være at kontantstrømmen er avhengig av valuta, volum og pris og Strike er avhengig av volum og kostnader. Pris og kostdnader har 4 utfall, hvis man også har valuta og volum blir dette 16 utfall pr node. Med antall usikkerhetsmomenter X, stiger antall nodeverdier etter n tidsskritt med formelen, 2^{xn}.

5.2 Sammensatte opsjoner med binomial metode

I mange situasjoner er det nødvendig å legge flere opsjoner inn i samme prosjekt. Det kan tenkes at man først etter å ha investert i en opsjon får mulighet til å utøve en annen opsjon. Den avhengige opsjonen blir først aktivert når dominerende opsjonen er utøvd.

En enkel en periodisk illustrasjon på et samspill problem:

	V-K	
option1	1000-1100	1250-1100
option2	1000-200	1250-800
		800-1100
		800-800

Tabellen over viser et sett valgte tall som skal hjelpe til med å forstå problemstillingen med avhengig opsjoner. Tallene er tilpasset til å være til illustrasjonsformål slik at man intuitivt kan forstå problemstillingen, bakgrunnen for tallene er altså ikke vesentlig her.

Notasjonen V, betyr verdi og K, betyr strike. Det er to opsjoner i tabellen, opsjon 1 og opsjon 2, hvor opsjon 1 er listet opp over opsjon 2, begge har her den samme usikkerhetskilden for V. Eksempelet viser at V er lik for begge opsjonene i begge perioder, men de har forskjellig strike. Hvis opsjon 2 avhenger av opsjon 1 vil man ikke kunne utøve opsjon 2 i første tidsskritt, man vil ikke utøve opsjon 1 på grunn av at strike er større enn V. Man ser at det isolert sett hadde vært optimalt å utøve opsjon 2 i første periode, da strike øker kraftig fra 200 til 800 i neste periode.

Med en finere tidsskrittoppdeling, vil optimale løsninger på dette investeringsproblemet vise at tidspunkt for strike 1 og 2 har forskjøvet seg til tidligere tidspunkter på grunn av fordeler med å utøve opsjon 2 tidlig. Dette er forutsatt at strike 2 viser samme karakteristikk av å være sterkt økende mellom tidskrittene. Samspill mellom de to opsjonene kan føre til at det blir mer aktuelt å utøve opsjon 1 før det var optimalt å utøve opsjonen med tanke på optimal beslutning isolert sett for opsjon 1. Opsjon 2 påvirker altså utøvelsen av opsjon 1.

Hvis det derimot er optimalt å utføre opsjon 2 samtidig eller etter opsjon 1, som tilfellet ville ha vært hvis strike i siste periode var konstant 100 eller lavere. Ville tidspunket for utøvelse av opsjon 1 være uforandret. Tall beregninger av denne type problem blir utført i avsnitt 5 og 6.

Utøvelse på bakgrunn av verdier i avhengig opsjon

Viser her tilfellet hvor opsjon 2 er mest verdifull i siste periode og opsjon to ikke har verdi. Strike 2 er i dette eksempelet forandret fra forrige eksempel fra 200 til 1000 i første periode mens strike 1 er økt til 1250 i siste periode, fra 1100 i forrige eksempel.

Opsjon 2 vil da kunne påvirke utøvelse av opsjon 1 i siste periode. Man går glipp av verdiene i opsjon 2 ved ikke å utøve opsjon 1. Utøvelse av opsjon 1 må ses i et samspill med at man får tilgang på verdiene i opsjon 2.

En periodisk illustrasjon hvor avhengig opsjon er verdifull:

	V-K	
option1	1000-1100	1250-1250
option2	1000-1000	1250-800
		800-1250
		800-800

Man ser at ved å utøve opsjon 1, som selv gir null verdi, får tilgang på å utøve verdien i opsjon 2 ved oppgang.

Man kan ha tilfeller der en verdifull opsjon 2 i utgangspunktet har lengre levetid enn en lite verdifull opsjon 1. Da vil verdien av å holde opsjon 2 kunne føre til utøvelse av opsjon 1 når denne opsjonen forfaller.

5.3 Sammensatte opsjoner i olje og gass

Funn av olje og gass skjer ofte i samme feltområde. Det kjente Troll feltet har både olje og gassproduksjon, mens andre steder er det mindre åpenbart at man kan satse på begge deler. På Snøhvitfeltet ble det bestemt å ikke satse på oljeproduksjon etter at gassinvesteringen var utført, selv om det er en del olje på feltet. Da man gjorde konseptstudier, var oljeprisen lav slik at man fokuserte mest på gassfeltet og ikke oljeutvinningen, som innebar kostbar utvinning fra kompliserte utvinningsteknikker. Når trykket i reservoaret senkes på grunn av gassutvinningen, blir utnyttelsesgraden på oljen lavere og det blir vanskeligere og mer kostbart å utvinne oljen.

Det er en viktig beslutning å bestemme hvordan man skal investere, hvis det er samspill mellom investeringene. Med dagens teknologi er det mulighet å bygge for eksempel flerfase rør, som transporterer både olje og gassen i samme rør. Produksjonen kan også tilrettelegges slik at det er synergier i produksjonen mellom olje og gass.

5.3.1 Gjennomgang av investeringssituasjoner og implementeringsmetodikk

Her defineres et noe mer komplisert investeringssamspill. Et nytt element fra den enkle enperiodiske illustrasjonen, er å ha muligheten til å velge mellom to type investeringsvalg. Man kan satse kun på et gasskonsept som vil ekskludere oljemuligheten, på grunn av at valgt produksjonskonsept ikke gir rom for oljeproduksjon. Det andre alternativet er å investere i et produksjonskonsept som produsere både olje og gass og mulighet til å produsere mer olje senere eller eventuelt umiddelbart samtidig med en prosjektstart for olje og gassinvesteringen.

Disse tre investeringskonseptene velger jeg å kalle: i1 for det ekskluderende alternativet, i2 for det inkluderende alternativ og i3 er tilleggsinvesteringen til det inkluderende alternativet. Det inkluderende alternativet innebærer altså to investeringer. Notasjonen som benyttes for investeringene betyr i verdisammenheng, verdien av kontantstrømmen fratrukket strike, altså netto verdien[5] på prosjektet. Samme notasjonen brukes også som over, til betegnelse på prosjektalternativ i konseptomtale sammenheng.

Usikkerheter i opsjonsproblemet spenner ut et utfalls tre med noder med bestemte verdier og sannsynligheter for hvert utfall. For verdiberegning av opsjonene må man finne beste verdialternativ i nodene. Hvis man skal invester i det ekskluderende alternativet i1, må verdien på investering i1 være større enn verdien av å holde i1 alternativet i livet, i1>KAi1. Med syntaksen KA menes å holde opsjonen i live, "kept alive". i1 må også være bedre enn i2+KAi3. Dette betyr å investere i i2 og holde kept alive verdien av i3. i1 må også være bedre enn i2+i3 og KAi23. Her brukes betegnelsen KAi23 for å holde både KAi2 og KAi3. i1 må også være bedre enn en KA- kombinasjon av KAi1 og KAi23 som noteres med f(KAi1,KAi23). Kombinasjonen KAi1 og KAi23 er et bidrag på grunn av at senere diskonterte noder inneholdt begge disse elementene. Det beste alternativet i en node er da Max(i1, KAi1, KAi23, (i2+KAi3), (i2+i3), f(KAi1, KAi23), 0). Beregningen av opsjonsproblemet kan illustreres ved modellen:

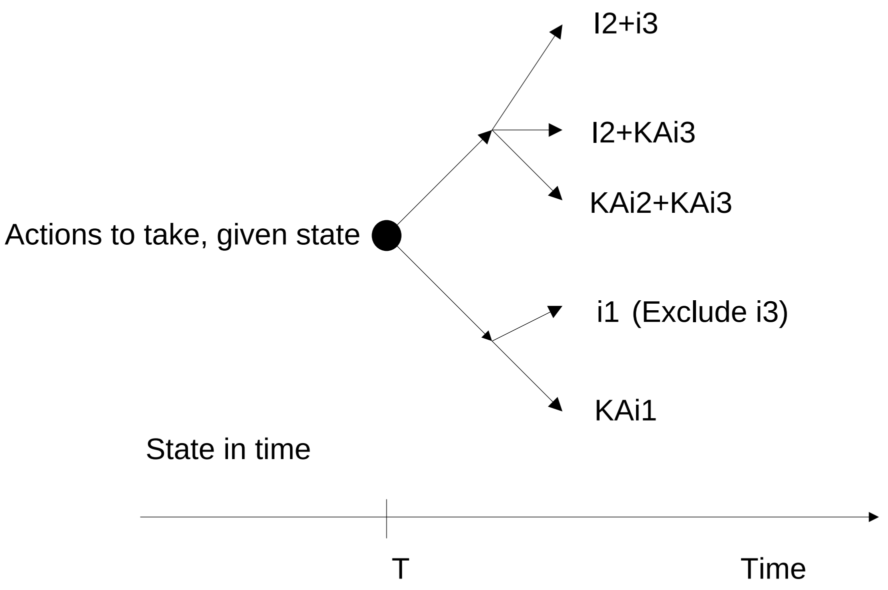
[5] Nettoverdi (F-K) er kontantstrømverdien, F, fratrukket strike, K..

Embedded option with separated uncertainties spanned from 2 uncertainties, binomial approach:

Kommentar:

To usikkerheter fra olje og gass pris gir 4 noder i neste tidsskritt som må verdimaksimeres og diskonteres tilbake til utgangsnoden. Meningen er å vise at metoden har en kraftfull egenskap da denne form for maksimering i nodene er enkelt å implementere. Ulempen er at med flere usikkerheter, for eksempel med strike og volum blir det fort mange noder å behandle

Valgsituasjonen i en node kan illustreres ved et beslutningstre:



For en gitt tilstand utspendt av usikkerheter i opsjonens levetid må man i dette eksempelet ta stilling til 5 valg, illustrert i modellen ved et tidspunkt T.

Videreføring av eksempelet:
Eksempelet kan videreføres slik at i1 istedenfor å ekskludere i3 investeringen, kunne medført at i3 ble dyrere hvis man valgte i1 løsningen. Man beholder investeringsmuligheten, men det er mindre gunstige synergier i konseptet. Ved å investere i i1 får man en mindre attraktiv investeringsmulighet i i3 som jeg velger å kalle i31, redusert til, i3-Δ31= i31. Dette fører til at leddet KAi13 består av å holde både Kai1 og KAi31. Man må også ta hensyn til (i1+KAi31) og (i1+i31) i beslutninger i en node.

Max(i1, KAi13, (i1+KAi31), (i1+i31), KAi23, (i2+KAi3), (i2+i3), f(KAi13, KAi23), 0)

Det siste eksempelet hvor i3 har blir mindre lønnsomt hvis man velger i1 kan relateres til utbygging av Goliat feltet som planlegges å bygges ut nært til Snøvit. Man kan kalle i3 et slags Goliat. Feltet ble først funnet i 2000, langt senere enn Snøvit som ble funnet på midten av 80 tallet. Hvis man hadde valgt å produsere olje på Snøvit kunne det helt klart vært produksjonsfordeler med Goliat produksjonen. Man hadde da valgt i12 og holdt KAi3. Valget ble i1 løsningen som medfører å ha mulighet på i31.

Man kunne brukt mer resurser på olje utvinnings fokus. Dette ville kunne ha økt sjansene for at man kunne fått en samproduksjon av begge feltene. Ved fokus på samkjøring kan man hevde at en noe senere gassproduksjon som ikke senker trykket i brønnen og reduserer oljeutvinningen ville vært positivt for total verdiene. Dette kan man bergrunne med at KA verdiene for olje og gassen er større enn å utøve kun gass og avvente olje, når volumet minskes ved initiering av gassproduksjon.

i3 kan føre til at investeringen i prosjekt i2 blir sett som fordelaktig i forhold til i1 slik at optimal prosjektstart for i3 kan bli senere enn ved å investere i i1.

Med dette for øye kan man si at det implisitt burde ligget til rette for en noe senere utvinning av Snøvit da Goliat ble funnet. Det har senere kommet gode nyheter fra Goliat om større reserver.

For å knytte opp modellen nærmere til den aktuelle sitasjonen som var før Snøvit utbyggingen, må i3 feltet i startfasen også kunne være uavhengig av i1 og i2 investeringen. Forklaringen er at modellen da gjør det mulig å kunne bygge ut Goliat før Snøvit. Jeg kaller denne investeringen i4. Denne er dyrere enn både i3 og i31. Innføringen av uavhengighet vil trolig ha små opsjonsverdier hvis i4 er betydelig større enn de avhengige investeringene.

Dette er en enkel sak å tilføre modellen. For at man skal velge i4, må man samtidig velge bort verdiene i muligheten på i3 og i31. Det blir 5 flere beslutningssituasjoner å ta hensyn til:

(i4+i1), (i4+KAi1), (i4+i2), (i4+KAi2), og kombinasjonsfunksjonen av KA verdier blir utvidet til også å ta hensyn til i4 alternativet, f (KAi41, KAi42, KAi13, KAi23).

Når nå oljeprisen i det siste har steget markert vil dette kunne føre til at sannsynligheten for ta Snøvit i betraktning igjen, øker med en eventuell utbygging av Goliat. Avgjørelsen om utbygging og konseptvalg for Goliat tas de nærmeste årene. Stortinget må godkjenne utbyggingen.

5.4 Bruk av Monte Carlo simulering og regresjon

De fleste realopsjoner er som kjent amerikanske og disse er mer avanserte å løse enn europeiske. Et godt kjent eksempel som løser opsjonen med Monte Carlo simulering er fra en artikkel til Francis A. Longstaff og Eduardo. S. Schwartz. Dette er utdelt pensum i ECO423, dessuten har læreboken i ECO423 komprimert notatet, refererer her til (Hull 2006, avsnitt 24.7 side 579). Her verdsettes en amerikansk put opsjon med strike K=1.1. I læreboken står det at metoden hensiktsmessig blir beskrevet med gjennomgang av et eksempel. Dette eksempelet var også gjennomgått i forelesning i ECO423. Jeg tar for meg samme eksempel men i en komprimert versjon med formål å vise hvordan metoden utføres. Metoden betegnes noen ganger i oppgaven som LSMC approach.

Metoden er rekursiv slik som binomial. Ved hjelp av en verdifunksjon som er blitt tilpasset ved regresjon, beskriver man tidsverdien på opsjonen som avgjør om man skal utøve opsjonen eller ikke. Man tar utgangspunkt i de stedene opsjonen er ”in the money”, og gjør en regresjon ved å beregne verdien av å fortsette i disse stedene på bakgrunn av diskonterte verdier av bakenforliggende utøvelser av opsjonen. Ut ifra denne verdilikningen vil det være riktig å utøve opsjonen hvis verdien av å utøve opsjonen er større enn verdien av å vente. Funksjonen er i eksempelet et annengrads polynom, men det kan i utgangspunktet brukes andre funksjoner som viser opsjonsverdien, men denne funksjonen gir tilstrekkelig gode svar.

$$V = a + b * S + c * S^2$$

Eksempelt har bare 8 simulerte risikojusterte prisbaner/paths og 3 mulige tidspunkter å utøve opsjonen på. Dette kalles en Bermuda opsjon da utøvelsespunktene er gitt til bestemte tidspunkt og ikke kontinuerlig. De få prisbanene gjør at verdifunksjonen får i et tilfelle negativ krumning, dette er umiddelbart annerledes enn hva man intuitivt vet den skal, nemlig positiv, da verdien øker med synkende aksjepris for put.

	Stock price paths			
Path	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

Tabell 24.3

Tabell 24.3 er her hentet fra artikkelen og viser trekningen av prisbanene. I første skritt i løsningsprosedyren trenger man ingen regresjon på hva som er tidsverdi da opsjonene utløper. Neste steg er å ta utgangspunkt et skritt tilbake i tidspunkt 2. I banene 1,3,4,6,7 ser man at opsjonen er ” in the money” og verdi skal sammenliknes opp mot en tidsverdifunksjon. Verdifunksjonen er en regresjon på kursverdi S i tidskrittet opp mot diskontert verdi av senere beregnete utøvelser i banene, V. I dette tidskrittet er det diskonterte verdier i etterfølgende banene 1,3,4,6,7. Konstantene a, b og c minimeres ved regresjonen.

$$\sum_{i=1}^{5} (V_i - a - bS_i - c\, S_i^2)^2$$

Likningen sier at man skal utøve i banene 4,6,7 da ”in the money” beløpet
$K - S_i > a + bS_i + cS_i^{\,2}$.

Neste skritt er å gjøre den samme vurderingen for de stedene opsjonen er ”in the money” i tidspunkt 1. Dette ser man fra tabellen er for tidskritt 1,4,6,7 og 8. Man finner det optimalt å utøve i 4,6,7 og 8. Tilslutt må man undersøke for tidspunkt 0.

Man kan ha en situasjon der den diskonterte kontantstrømmen er fra perioder senere enn akkurat den etterfølgende. Eksempelet viser ikke dette. Hvis det var optimalt å vente i perioden etter det tidspunkt man undersøker, skal man diskonterer fra perioden etter dette hvis det var optimalt å utøve her eller mulig enda senere. Det er også viktig å få med seg egenskapen at det kun er en utøvelse pr. bane. Det er utøvelse med tidligst utøvelse som gjelder som optimal utøvelse for en prisbane.

	Stopping rule		
Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Tabell 24.6

Tilslutt har man et sett av optimale beslutninger som sier hvor det for hver enkelt prisbane var optimalt og utøve opsjonen. Dette var beregnet på bakgrunn av verdi vurdering fra alle prisbanene. Tabell 24.6 viser hvor det var optimalt å utøve opsjonen.

I denne type beregninger vil opsjonen noen steder ikke bli utøvd da den ikke noen steder er ”in the money”, dette skjedde for bane 5 i eksempelet. Ingen utøvelse i banen kan også skje hvis beregningen tilsier at det er lønnsomt å vente, men opsjonen går etterfølgende ”out of money”, dette var tilfelle for bane 1.

Opsjonsverdien blir summen av alle de diskonterte utfallene på banene. Utbetalingen må diskonteres i forhold til tidspunktet for utøvelsespunktet. Summen blir tilslutt dividert på antall baner.

$$C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \max\{\mathrm{t} *= [1, \mathrm{T}]\}\,(K - S(t^*))e^{-r*t^*}$$

t^* er tidspunkt for første og optimale utøvelse i banen.

Ved å gjøre tilstrekkelig mange utøvelses punkter vil dette gi en modell av verdien til en amerikansk opsjon. Man kan bruke fordelingsfunksjonen fra avsnitt 2.1. Man trekker punkt for punkt framover i tid med tidsavstand ΔT. Startverdien for neste trekning er trukket verdi fra foregående trekning.

$$S_1 = S_0 * e^{((r-\delta)-\frac{\sigma^2}{2})\Delta T+\sigma*\sqrt{\Delta T}*Z_1}$$

$$S_2 = S_1 * e^{((r-\delta)-\frac{\sigma^2}{2})\Delta T+\sigma*\sqrt{\Delta T}*Z_2}$$

Man ser at S_1verdien er startverdien på trekningen for S_1.

5.5 Videre praktisk bruk av metoden

5.5.1 Regning med transformasjon av variable

Metoden kan benyttes på problemer med flere usikkerheter. Man må da bruke en riktig tilpasset verdifunksjon. Man løser beregningsproblemer med variasjon i strike og prosjektverdi ved å gjøre en transformasjon ved å dividere med K

$$\max(S - K, 0) = K * \max(\frac{S}{K} - 1{,}0)$$

Poenget med denne transformasjonen er å beregne maksimeringsproblemet på en state variabel, noe som forenkler regresjonsproblemet. Når man skal modellere, kan man multiplisere flere prosesser og kalle det en state variabel, dette kan for eksempel være valuta og pris. Denne egenskapen til metoden gjør at den er meget anvendelig for realopsjoner. I utgangspunktet er summen av to variable en lineærkombinasjon og har dermed kilde som to state variable, men ved å dividere med K blir variabelen som inngår i maksimeringsproblemet S/K, en state variabel.

Løsningen på å finne optimale utøvelsespunkter for variabelen S/K-1 funger på samme måte som beskrevet over i lærebok eksempelet, S/K er variabel mens 1 er strike.

Når man skal verdsette optimalt utøvelses skjema, multipliseres inn aktuell K(t) inn i hvert element hvor man utøvde opsjonen, K*(S/K-1). Dette elementet multipliseres inn etter maksimeringsproblemet for S/K er løst. Man diskonter gitt ut fra tidspunkt på utøvelsene og summen av utøvelsesbanene divideres på antall baner for å finne opsjonsverdien.

$$C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \max\{\mathrm{t} *= [1, \mathrm{T}]\}\, K(t^*)(\frac{S(t^*)}{K(t^*)} - 1)e^{-r*t^*}$$

5.5.2 Trekning av korrelerte variable

Når man bruker Monte Carlo simulering vil det være behov for å benytte korrelerte trekninger slik som det også var under binomisk. To korrelerte variable trekkes ved formel:

$$\epsilon_1 = x_1$$
$$\epsilon_2 = \rho x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

Referer til (Hull 2006, side 414). Hvor ϵ_1 og $\epsilon_2$er volatilitetsleddet i to korrelerte prosesser, på bakgrunn av prosessene x_1, x_2 og ρ korrelasjonen mellom dem. De nye volatilitetsleddene ϵ_1 og ϵ_2 er altså kombinasjoner av de ukorrelerte prosessene x_1, x_2 . De ukorrelerte prosessene er de vanlige beskrevet N(0,1) prosessene $Z_1 = x_1, Z_2 = x_2$. Mens de nye beregnede ϵ_1 og ϵ_2 volatilitetsleddene tar hensyn til korrelasjon mellom prosessene. Denne type trekning kan utvides til flere korrelerte variable.

For flere variable blir dette systemet utviklet slik:

$$\epsilon_1 = \alpha_{11}x_1$$
$$\epsilon_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$$
$$\epsilon_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

Referer til læreboken Hull(2003) side 414, hvordan koeffisienter α_{ij} blir bestemt.

5.5.3 Eksempelet i avsnitt 5.1.2 med Monte Carlo simulering

Programmering av rutiner for beregning med Monte Carlo simulering er mer utfordrende enn med binomial metode. Allikevel ble koden rimelig kort og grei å forstå. Her utføres den samme opsjonsberegningen som i 5.1.2. Det benyttes transformasjon og regresjon med en state variabel.

Resultatet av en beregning var prosjektverdi på 3,89, kjørt med 10000 prisbaner og 150 tidspunkter for utøvelse. Dette kan sies å være likt med binomisk som hadde 3,91.

Det er i appendiks 8.5, lagt ved kode som jeg har laget til denne type beregning. Denne koden er ikke ment for annet en dokumentasjon på at det er blitt kodet på denne måten.

5.1.1 Regning med flere state variable

Har man flere state variable, trenger man kurvetilpasning hvor hver variabel blir tilpasset med et polynom og tilpasning med kryssledd mellom variablene. En funksjon for to state variable, S og K kan være:

$$V = a + b * S + c * S^2 + d * K + e * K^2 + f * K * S$$

Dette er tilfelle hvis man har kombinert olje og gass prosjekt med felles investeringskostnad K. Man kan her dividere på K og få to state variable

$\max\left(\left(V_o + V_g\right) - K, 0\right) = K * \max((\frac{(V_o)}{K} + \frac{(V_g)}{K}) - 1, 0)$.

Optimering gjøres her ved hjelp av responsfunksjon med to variable parametre $\frac{V_o}{K}$ og $\frac{V_g}{K}$:

"In the money" betingelsen er her $\left(\frac{(V_o)}{K} + \frac{(V_g)}{K}\right) - 1 > 0$.

Når man skal modellere strike bestående av en sum komponenter som ikke utvikler seg korrelert, må man benytte flere state variable. Hvis strike modellers som en sum av en komponent styrt av investeringen og en annen av driften, blir beregningen,

$\max\left((V_o) - (K_I + K_P), 0\right) = K_P * \max((\frac{(V_o)}{K_P} + \frac{(K_I)}{K_P}) - 1, 0)$. Referer her til et eksempel i avsnitt 6.1.3.

Har man flere enn 3 state variable må man gjøre regresjonsfunksjon for 3 variable. For X, Y og Z blir regresjonsfunksjonen:

$$V = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 + \alpha_4 XY + \alpha_5 Y + \alpha_6 Y^2 + \alpha_7 YZ + \alpha_8 XZ + \alpha_9 Z + \alpha_{10} Z^2$$

Man ser at det er 3 kryssledd mellom variablene.

For beregning av regresjons koeffisienter se appendix 8.3, dette er enkelt.

5.6 Monte Carlo simulering og sammensatte opsjoner

Man så at med binomial kunne man sette sammen opsjoner ved enkle sammenlikninger i nodene, men mange usikkerheter i beregningene vil kreve mange noder. Beregninger av sammensatte opsjoner med LSMC approach gir muligheter til å dra nytte av denne metodens effektive måte å modellere flere usikkerheter inn i beregningene. Framgangsmetoden kan i utgangspunktet virke noe mer kompleks, men det er akkurat de samme verdivurderingene som utføres i hvert tidskritt som for binomial.

Eksempel 5.6, Investering på to avhengige prosjekter

Ser her på en opsjon med en dominerende førstegangs investering i2, med mulig påfølgende avhengig tilknytningsinvestering, i3. Den tilknyttede investeringen kan som forklart tidligere påvirke når førstegangsinvesteringen utføres, da gode forhold for investeringen i3 vil skape insentiv for å utøve i2 tidligere. Investeringene i modellen kan være kombinerte gass og olje investeringer. I dette eksempelet er første investering olje mens tilleggsinvesteringen er gass. Det er ofte tilfellet at man velger å pumpe gassen i bakken og bare satser på oljen, oljen trenger ingen dyr rørledning til transport.

Framgangsmåten er å ta utgangspunkt i de stedene opsjonen er ”in the money”. Til forskjell fra tidligere beregninger må man undersøke om opsjonen er ”in the money” for begge investeringene. ”In the money” betingelse for første opsjonen er $(V_o - K_o) \geq 0$. ”In the money” betingelse for betinget opsjon er at første er ”in the money” og at $(V_g - K_g) \geq 0$. ”In the money” betingelse for begge opsjonene er summen ”in the money” av hver enkelt opsjon.

I de stedene opsjonen er ”in the money” må man undersøke utøvelsesverdi mot tidsverdi av å vente. For opsjon i2 gjøres dette som i det elementære lærebok eksempelet, hvis strike ikke er usikker eller ved en transformasjon hvis strike er stokastisk. Deretter vurderes opsjon i3 hvis i2 ble utøvd, dette gjøres med samme teknikk som for i2. Videre må man sjekke om i3 kan eksitere i2, forutsetningen for at dette kan skje er at summen av i2 og i3 er ”in the money”. Dette gjøres mot en verdi funksjon som er avhengig av verdiene og strike til både investering i2 og i3. Dette kan da være en regresjon med tre state variable. Opsjon i3 vil kunne eksitere opsjon i2, slik at man finner det lønnsomt å utøve begge selv om vurderingen på opsjon i2 innebar isolert sett å vente. Den siste betingelsen hindrer også verdiforringelse av en god mulighet i i3. Det vil si at man gjør det mulig å utøve i2 selv om i2 ikke nødvendigvis selv er lønnsom for å hente verdi i i3.

Utøvelsesbetingelsene:

- $(V_o - K_o) > V = f_o(V_o, K_o)$, verdifunksjonen kan utføres med transformasjon til 1 variabel.
- $(V_g - K_g) > V = f_g(V_g, K_g)$, verdifunksjonen kan utføres med transformasjon til 1 variabel
- $(V_o - K_o) + (V_g - K_g) > V = f_{og}(V_o, K_o, V_g, K_g)$, verdifunksjonen må vurderes med en funksjon med 3 state variable.
  $V = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2 + \alpha_4 XY + \alpha_5 Y + \alpha_6 Y^2 + \alpha_7 YZ + \alpha_8 XZ + \alpha_9 Z + \alpha_{10} Z^2,$

Prisingen av opsjonen uføres på samme måte som tidligere forklart ved å summere diskonterte verdier fra optimale utøvelses punkter. Her vil en investeringsbane kunne bestå av diskonterte elementer fra både investering i2 og i3.

Eksempel på modellering med forskjellig levetid på opsjonene:

Hvis i3 har lengre levetid enn i2, må man hindre verdi forringelse av en god mulighet på i3. Det vil si at man må gjøre det mulig å utøve i2 selv om man ikke isolert sett hadde valgt dette. En ekstra ”In the money” betingelse i siste periode for i2 blir da:

- $(V_o - K_o) + f_g(V_g,\ K_g) > 0,\ f_g$ er verdien av KAi3

Man starter helt bakerst med i3 og når man kommer til slutten på i2 benytter man seg av betingelsene over. Hvis KAi3 her er større enn i2 skal men velge å utøve i2.

Videreføring av eksempelet

Utfører her tilsvarende eksempel som for sammensatt binomisk løsning med et investeringsalternativ som innebærer en investering i2 med en tilleggsinvestering i3 og en ekskluderende investering i1 som ikke har tilleggsmuligheten, men er rimeligere enn i2.

Investering 1 kan for eksempel være en jacket plattform, mens 2 er en noe mer kostbar undervannsløsning med flerfase rør som også kan ta sikte for å utvinne et gassfelt som ligger på dypere vann et stykke unna. Feltet vil ikke kunne bli bygd ut med plattformløsningen på grunn av dypere vann og transport løsningen.

Man må undersøke der opsjonen er ”in the money”, dette foregår på samme måten som beskrevet i eksempelet over. I tillegg til å undersøke for hvilket av alternativene av det inkluderende eller ekskluderende er best.

Nødvendige verdikomponenter til betingelser til utøving:

- $(V_o - K_2) > V = f(V_o, K_2) > 0$, dette vil si i2>KAi2.
- $(V_g - K_3) > V = f\left(V_g, K_3\right) > 0$, dette vil si i3>KAi3.
- $(V_o - K_2) + \left(V_g - K_3\right) > V = f\left(V_o, K_2, V_g, K_3\right) > 0$, dette vil si i2+i3>KAi23.
- $(V_0 - K_2) + f\left(V_g, K_3\right) > 0$, dette vil si i2+KAi3
- $(V_o - K_1) > V = f(V_o, K_1)$>0, dette betyr i1>KAi1.

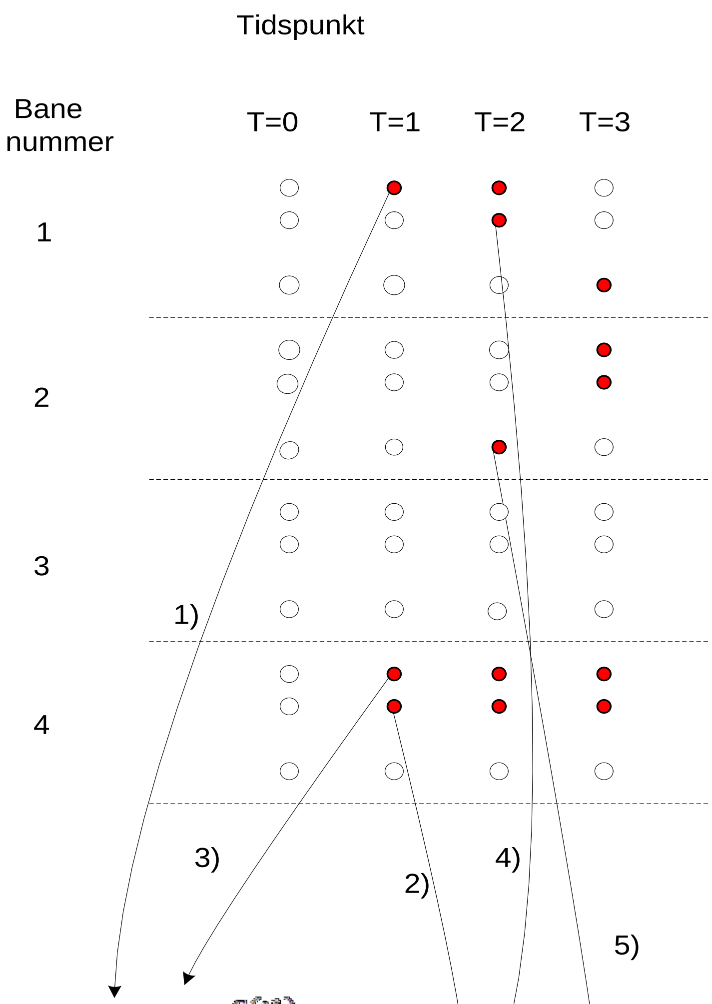
De 3 første betingelsene er identiske med betingelsene i eksempelet over, ”in the money” betingelsene blir ivaretatt av det bakerste krokodilletegnet. Betingelse nr 4 viser en verdi Komponent som viser utøvelse for den inkluderende investeringen+ å holde muligheten i gassfeltet. Siste betingelse er en den ekskluderende investeringen.

De to alternativene i2 og i1 er ekskluderende slik at utøvelse må enten være i1 eller i2. Dermed må det beste alternativet velges. Det vil si at utøvelsen må skje på bakgrunn av et valg om hva som er best av i1, KAi1, i2+i3, i2+KAi3 eller KAi23.

Skal i1 bli utøvd må i1 være lik $\mathrm{i1} = \max(\mathrm{i1}, \mathrm{KAi1}, (\mathrm{i2} + \mathrm{i3}), \mathrm{KAi23}, (\mathrm{i2} + \mathrm{KAi3})\ )$

Prisingen gjøres igjen på samme måte som beskrevet tidligere med å diskontere optimalt utøvelsesmønster for simulerte prosjektverdier. Mulige utfall for en prosjektbane vil da være enten i2 løsningen med en mulig tilleggsinvestering i3, i1 løsning eller ingen utøvelse.
i3 kan føre til at investeringen i prosjekt i2 blir sett som fordelaktig i forhold til, i1 slik at prosjektstart blir senere enn ved å investere i i1.

Modell som kan være nyttig for forståelse av metoden.



$$C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \max\{t_2^* = [1,T]\} K(t^*)\left(\frac{S(t_2^*)}{K(t_2^*)} - 1\right)e^{-rt_2^*}$$

$$+ \max\{t_3^* = [1,T]\} K(t_3^*)\left(\frac{S(t_3^*)}{K(t_3^*)} - 1\right)e^{-r*t_3^*}$$

eller $\max\{t_1^* = [1,T]\} K(t_1^*)\frac{S(t_1^*)}{K(t_1^*)} - 1)e^{-r*t_1^*}$

Modellen viser et eksempel på ulike utøvelser i rødt. Disse er valgt på bakgrunn for å beskrive metoden og stammer ikke fra simuleringer av tall og beregninger. 1) og 3) viser utøvelse av i2 i tidspunkt 1 for bane 1 og 4. I de samme banene blir i3 utøvd, 4) blir utøvd i tidspunkt 2 mens 2) viser utøvelse i tidspunkt 1. Man ser at i1 ikke kan bli utøvd hvis i2 blir utøvd og motsatt, dette er betingelsen å velge det beste alternativet. i1 blir utøvd i bane 2 i tidspunkt 2. I bane 3 er det ingen utøvelse. Pilen indikerer hvor elementene kommer inn i til prisingen av utøvelsene.

Billig og dyr variant på satellitten:
Trekker her fram muligheten at hvis man velger i1 og fortsatt vil kunne ha muligheten til å investere i i3, men da med en høyere strike. Velger å kalle verdien på denne investeringen for i31. Dette er tilsvarende som ble gjort for binomisk metode i avsnitt 5.3.1, under videreføring av eksempelet.

Beslutningssituasjonene må da ta hensyn til 3 ledd mer enn i eksempelet over:

- $(V_o - K_1) + (V_g - K_{31}) > V = f(V_o, K_1, V_g, K_{31}) > 0$, i1+i13>KAi13
- $(V_o - K_1) + f(V_g, K_{31}) > 0$, i1+KAi31, man kan velge i1 alternativet på bakgrunn av opsjonsverdi i KAi31 gir høyere verdi enn alternativet med i2 og i3.

Til bestemmelse av optimal utøvelse i et tidspunkt må man vurdere:
$\max((\mathrm{i1} + \mathrm{i31}),\ (\mathrm{KAi13}), (\mathrm{i1} + \mathrm{KAi31}), (\mathrm{i2} + \mathrm{i3}), \mathrm{KAi23}, (\mathrm{i2} + \mathrm{KAi3}))$

5.6.1 Monte Carlo simuleringer og variansreduserende teknikk

Det krever mange tall for å få ønsket nøyaktighet. Man kan bruke variansreduserende teknikker for å redusere regnearbeidet. Et eksempel er å beregne opsjonsverdi som en sum av to beregnede verdier på bakgrunn av å skifte fortegnet på de normalfordelte trekningene og dermed få to beregninger av en trekning, $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$. Referer her til (Hull 2006, side 417)

Denne verdien har vanligvis lavere varians på estimatet enn tilfellet med 2 trekninger.

5.7 Analytiske løsninger

Denne type beregninger tar utgangspunkt i håndberegninger hvor investeringsproblemet søkes løst med formeluttrykk og ikke numeriske beregninger fra datamaskin. Motivasjonen for denne type løsning er at parametrene som inngår i modellen blir enkle å diskutere og analysere. De er kjekke til å bestemme opsjonsverdier og er greie å betrakte for optimal utøvelse. Begrensningen for denne type modell beskrevet her er at opsjonen er evigvarende. Det er ikke mulig å beregne amerikanske opsjoner med bestemt levetid med denne type teknikk, men man kan få tilnærmede løsninger. Man kan benytte de etablerte differensiallikningene og løse dem numerisk med forskjellige differansemetoder.

Problemet formuleres ut fra at verdien av underliggende aktiva følger en statistisk prosess. Jeg benytter meg kun av geometrisk Brownsk bevegelse. Man konstruerer en differensiallikning for verdien på opsjonen. Når levetiden er uendelig, blir verdien på opsjonen uavhengig av tiden og verdien stasjonær i forhold til tidsdimensjonen. Dette gjør det enkelt/ intuitivt å bestemme randbetingelser til differensiallikningen.

For å løse problemer av denne typen må man benytte Ito's lemma (referer her til Hull 2006, side 273). Dette er et redskap for å manipulere stokastiske differensiallikninger.

5.7.1 Et eksempel med en usikker verdiutvikling

Ser her på en opsjon på en investeringsmulighet med verdiutvikling for ”asset in place”: $dP = (r - \delta) * P * dt + \sigma * P * dz$, geometrisk Brownsk bevegelse. NPV verdiutbetaling ved utøvelse blir: F= $P - I$, hvor I er investeringskostnaden. Når man vet bevegelsen til P kan man beskrive prisbevegelsen til verdien på opsjonen ved hjelp av Ito's lemma: $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial P}(r - \delta)P + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial P^2}\sigma^2 P^2\right) dt + \frac{\partial F}{\partial P}\sigma P dz$. Ved å holde en portefølje π, som består av å shorte en enhet av opsjonen og gå lang i P med en andel $\frac{\partial F}{\partial P}$, blir usikkerhets bevegelsen fjernet i porteføljen. Over et tidsintervall ΔT, blir verdiforandringen til porteføljen: $\Delta\pi = -\Delta f + \frac{\partial F}{\partial P}\Delta S = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial P^2}\sigma^2 P^2$, dette må være lik, $r\left(-f + \frac{\partial F}{\partial P}P\right)\Delta T - \frac{\partial F}{\partial P}\ \delta P$, det siste leddet $\frac{\partial F}{\partial P}\ \delta P$ er convenience yield rate. Samler man leddene vil dette bli den kjente Black-Scholes- Merton differensiallikning:

1) $\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + (r-\delta)PF'(P) - rF(P) = 0$

Løsningen av 1) har generelt formen: 2) $(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$, hvor β_1 og $\beta_2$er løsningen av den kvadratiske likningen: $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r = 0$. Løsning av denne likningen kan vise at den ene roten β_1 er større enn 1 mens den andre roten er negativ. Hvor:

$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{r-\delta_P}{\sigma^2} + \sqrt{(\frac{r-\delta_P}{\sigma^2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1$

Løsningen av 2) gjøres ved å betrakte randbetingelser. Når *P* nærmer seg null går opsjonsverdien mot null, $F(0) = 0$. Dette fører til at A_2 må være null da β_2 er negativ. Ved optimalutøvelse er $F(P^*) = P^* - I = A_1(P^*)^{\beta_1}$, dette er optimal verdi fratrukket investeringen, dette kalles ”Value matcing”. Den deriverte i utøvelsespunktet er $F'(P^*) = 1 = \beta_1 A_1 (P^*)^{\beta_1 - 1}$, dette forklares med at i optimalt utøvelsespunket er stigningen til payoff linjen1 og kalles ”Smooth pasting”. Dette fører til løsningen:

$$F(P) = \left(\frac{P}{P^*}\right)^{\beta_1}(P^* - I)$$

Hvor optimal verdi for utøvelse da *P* er: $P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$

Eksempel med bruk av formlene.

Jeg bruker samme tallene som i eksemplene fra avsnittene 5.5.3 og 5.1.2 på verdiutviklingen på feltet, initialverdi er 9 mrd. Strike settes konstant lik 6 mrd framover i tid.

Innsetting av tall: $\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{0.05-0.02}{0.3^2} + \sqrt{(\frac{0.05-0.02}{0.3^2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2*0.05}{0.3^2}} = 1.234$

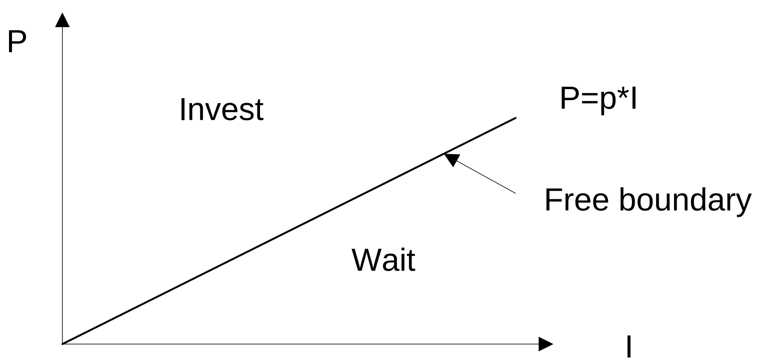
Optimal utøvings verdi: $P^* = \frac{1.234}{1.234-1} 6 = 31.637$

Dette gir verdi av opsjonen: $(P) = \left(\frac{9}{31.637}\right)^{1.234} (31.637 - 6) = 5.43$

Kontrollregning: Ved å sette lang levetid på opsjonen skal denne verdien være nærme den analytiske verdien. Med en usikkerhet har man ikke det samme lagringsproblemet som for to usikkerheter og man kan få nøyaktige svar i Excel. Når opsjonens levetid blir stor kreves det flere tidskritt. En beregning med 2000 tidskritt og 125 års levetid gav opsjonsverdi på 5,4328 Dette stemmer altså godt med analytisk løsning.

5.7.2 Eksempel med usikker investeringskostnad

Her illustreres et eksempel hvor investeringskostnaden beveger seg stokastisk med bevegelse $dI = \mu * I * dt + \sigma_I * I * dz_I$. Investeringen er korrelert med verdien på verdiutviklingen av feltet, P(t). Når man har både usikker investeringskostnad og verdiusikkerhet vil man kunne illustrere investeringssituasjonen i et område hvor det er optimalt å investere eller optimalt å vente. Denne oppdelingen er gitt mellom forholdet mellom verdi og investeringskostnad hvor forholdet er konstant, $p^* = \frac{P}{I}$. Boken Investment under Uncertainty har en grafisk illustrasjon på investeringssituasjonen, referer til (Dixit & Pindyck 1994, side 208),



Modellen er visuell da den forteller hvor man skal investere og hvor det lønner seg å vente. Man kan se at gode prosjekter som har et *P/I* forhold større en free boudary forholdet skal utføres men prosjekter med lavt *P/I* forhold skal man vente.

En opsjon bestående av to korrelerte usikkerhets kilder har prisbevegelse gitt ut fra Ito's lemma for flere usikkerheter. Man kan lage en portefølje som fjerner risiko bevegelsen ved å gå short i opsjonen og gå lang med en andel $\frac{\partial F}{\partial P}$ i P og en andel $\frac{\partial F}{\partial I}$ i I. På samme måte som i eksempelet over kan man ved å trekke fra conveniens yield, sammenligne verdiutviklingen med risikofri rente.

3) $\frac{1}{2}\left(F_{pp}\sigma_P^2 P^2 + 2\rho\sigma_P\sigma_I PIF_{PI} + \sigma_I^2 I^2 F_{II}\right) + (r-\delta_P)PF_P + (r-\delta_I)PF_I - rF = 0$

Denne likningen er identisk med likning 28 i (Dixit & Pindyck 1994, side 209).
Jeg gjør nesten det samme eksempelt, forskjellen er at jeg setter verdien på feltet lik P mens boka har verdien av en evig kontantstrøm, $\frac{P}{\delta_P}$. Utbetalingsstrukturen på opsjonen er her, $F(P,I) = P - I$, ved optimal utøvelse er $F_P(P,I) = 1$ og $F_I(P,I) = -1$. Løsningen på F er kun avhengig av forholdet mellom P og I, $p = P/I$, løsningen skal da kunne være på formen, $F(P,I) = If(p)$. For å løse ut $f(p)$, substituerer man inn uttrykk for F med uttrykk for $f(p)$ inn i likningen 5.7.3. $F_P = f^{'}(p)$, $F_{PP} = f^{''}(p)/I$, $F_I = f(p) - pf^{'}(p)$, $F_{II} = p^2 f^{''}(p)/I$, $F_{PI} = -pf^{''}(p)/I$. Dette gir en ny differensiallikning:

4) $\frac{1}{2}(\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2)p^2 f^{''}(p) + (\delta_I - \delta_P)pf^{'}(p) - \delta_I f(p) = 0$

Denne likningen har helt lik struktur som likningen for en usikkerhet, man kan løse ut røttene ut fra den samme type kvadratisk likning. Denne er lik likning 29 i (Dixit & Pindyck 1994, side 210). Løsningen har da formen $f(p) = A_1(p)^{\beta_1}$. Randbetingelser finnes ved å sette $F^* - I^* = I^* f(p^*)$, "value matcing", dette medfører at $(p^*) = p^* - 1$. Den deriverte blir $f'(p^*) = 1$, "smooth pasting". Ved innsetting blir da $f(p^*) = A_1(p^*)^{\beta_1} = p^* - 1$ og $f^{'}(P^*) = 1 = \beta_1 A_1 (p^*)^{\beta_1 - 1}$. Dette gir optimalt utøvingsforhold $p^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$, og utøvingsfunksjon, $f(p) = \frac{p^{\beta_1}}{\beta_1 p^{*(\beta_1 - 1)}} = (p^* - 1)(\frac{p}{p^*})^{\beta_1}$.

Dermed blir løsning på opsjonsverdien:

$$F(P,I) = If(p) = I\frac{p^{\beta_1}}{\beta_1 p^{*(\beta_1-1)}} = I(p^* - 1)(\frac{p}{p^*})^{\beta_1}$$

Hvor: $\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\delta_I - \delta_P}{\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2} + \sqrt{(\frac{\delta_I - \delta_P}{\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{2\delta_I}{\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I + \sigma_I^2}} > 1$

Innsetting av tall i formelen:

Bruker man samme input data som i 5.5.2 med feltverdi 9 mrd og konstruksjonskostnad 6 mrd, får man ved innsetting:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + \frac{2*0.02}{0.8*0.3^2}} = 1.3975 \qquad p^* = \frac{1.3975}{1.3975-1} = 3.516$$

Dette gir opsjonsverdi:

$$\mathrm{F}(P,I) = If(p) = 6 * (3.516 - 1)\left(\frac{\frac{9}{6}}{3.516}\right)^{1.3975} = 4.590\ mrd$$

Numerisk kontrollregning her gir unøyaktig svar. Når det stilles krav til lang levetid må man også ha mange tidskritt. Dette er problematisk i Excel for binomisk for flere usikkerheter og med matriselagring. For å få til numerisk løsning må man lage rutine som ikke lagrer tallene. LSMC gir også svake resultater da oppdelingen blir grov, her må man uansett lagre alle tall. Kvaliteten på LSMC vil være avhengig av hvor store mengder tall man kan simulere.

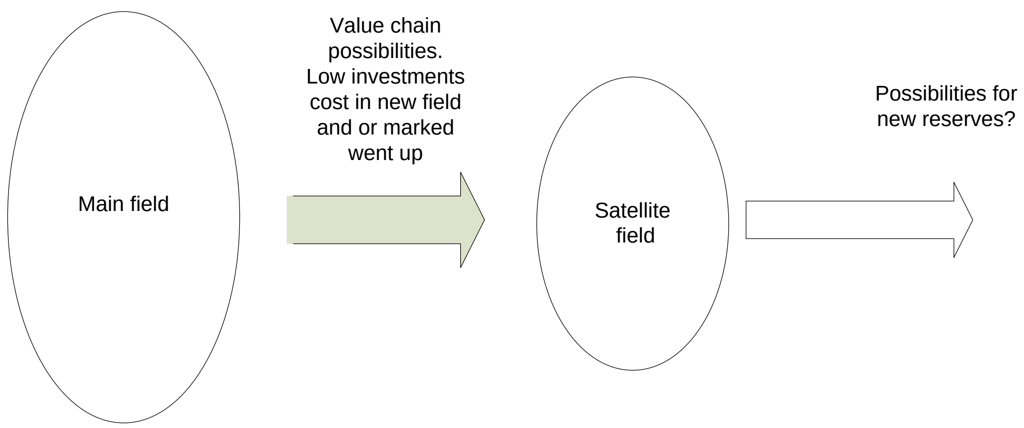
6 Modellering på prosjekter

I dette avsnittet blir det gjennomgått ulike temaer med fokus på prosjekt modelleringer. Under satellittberegninger blir betydningen av valuta vurdert, det blir også utført noen forskjellige strike modelleringer. Under beregninger av sammensatte opsjoner blir 2 tidligere modelleksempler beregnet med dataprogrammer.

6.1 Beregning på investeringsprosjekter

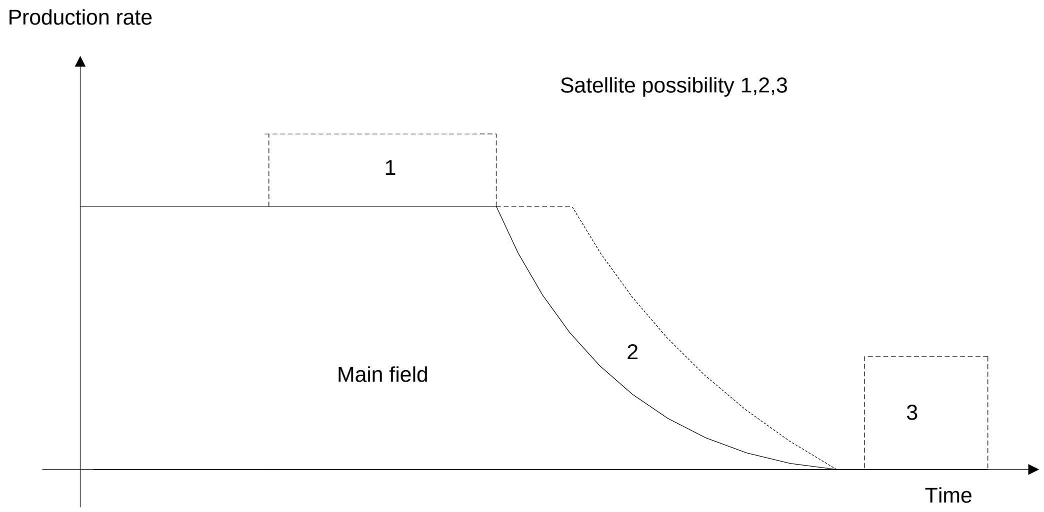
Satellitt felt situasjoner er meget aktuelle i subsea sammenheng. Denne teknologien gir mulighet for smarte felttilknytninger. Man kan oppnå gunstige kostnadssituasjoner ved muligheter til tilknytning til andre produksjonsenheter. Muligheten å bore på langs har gjort de tradisjonelle plattformene svært lønnsomme. Dette har ofte ført til at ny installasjon er unødvendig. Men med undervannsenheter vil muligheter for produksjon i enda større omkrets.

Bilde av prosjektsituasjon med satellitt mulighet:



Dette er en generell prosjekt problemstilling, som kan representer en del av verdikjeden, referer her til avsnitt 4.2.2.

Tidsdimensjonen på problemet:



I satellitt problemet må man ofte ta hensyn til opprinnelig produksjon. Figuren viser karakteristiske eksempler på valgmuligheter for når man kan produsere satellitt forekomsten. Man ser av figuren at mulighet 1 og 2 er knyttet til Main field produksjon. Man må her utføre produksjonen mens Main field er i aktivitet. Tilfelle 3 illustrerer at feltet kan utnyttes uavhengig av Main fields levetid. I området for 1 og 2 er denne modellen den samme som Ekerns modell i artikkelen: "An option pricing approach to evaluating petroleum projects" fra (BUS422 kompendium i investeringsanalyse). Det kan også være mulig å velge produksjon 1 i et senere tidspunkt slik at det blir en blanding av 1 og 2.

I tilfelle 1 er produksjonen lagt til som en midlertidig økt produksjonsrate for Main field. Mulighet 2 er et tillegg på haleproduksjonen for Main field. Mulighet 3 har høy rate og kort levetid. Man må som tidligere nevnt her følge en regel om å utnytte feltet etter tidsrammen på lisensen.

Faktorer som sandkontroll, kapasitet begrensninger for produksjonsinstallasjonen, lavere gjennomsnittlige kostnader ved å holde jevn produksjon over tid og opsjonsverdier, tilsier å velge alternativ 2.

Utvinning 1 kan typisk være bestemt av reservoarforhold. Utnyttelsesgraden kan for eksempel forringes av stadig lavere trykk i reservoaret slik at man ønsker å starte produksjonen. Dette er som tidligere nevnt tilfelle med Snøvit. Det kan også ved økonomisk analyse vise seg å være det beste alternativet. Det kan være et godt marked og man har en god produksjonsløsning.

6.1.1 Satellitt beregninger

Hvert enkelt oljefelt har sitt eget strømningsprofil og kostnadssituasjon. Utbyggingen av konsepter er å regne som standard til høyst kompliserte oppgaver. Jeg velger å beregne på et type prosjekt som kan betraktes som et helt vanlig enkelt produksjons prosjekt. Dette kan være representativt for en typisk satellitt. Jeg bruker fortsatt det introduserte feltet med 10 års produksjon av 30 000 fat om dagen, fra avsnittet 3.1.4. Denne kan bli bygd ut med subsea, jackup, jacket eller skip. Modellene som blir utformet har stor likhet med egenskaper på andre observerte reelle prosjekter.

Betydningen av valuta

Jeg ser her på betydningen av valuta usikkerhet for å tallfeste betydningen av denne risikoen. Lar strike være konstant 6 mrd og ser på en opsjon på feltet i 15 år. Man trenger da å sammenlingne kontinuerlig rente hjemme 0,05 og rente i USA 0,04. Annualisert volatilitet på valuta settes til 0,15, det er forenkelhetsskyld ingen korrelasjon med oljepris og valauta.
Jeg bruker renten i USA på som grunnlag for oljepris bevegelsen.

Beregning med LSMC gav prosjekt verdi 5,10, beregning uten volatilitet på valuta var 4,85 Altså betyr volatilitet i valuta i denne modellen en verdi på ca 0,25 mrd. I praksis vil mer en bare inntektene være utsatt for valutasvingninger.

Beregninger på forskjellige strike alternativer

Her har man i første omgang to ekskluderende valg på det introduserte oljefeltet.
Man må velge å knytte seg til et type konsept helt fra startfasen. Et alternativ er å bygge ut med en sikker investeringskostnad som også er den samme som før, 6 mrd. Dette er en investering uten volatilitet. Det andre alternativet er å bygge ut en initial investering på 6 mrd med en investering hvor andelen av investeringen er 40 % sikker som det første alternativet og 60 % av investeringsandelen er usikker. I begge alternativene beveger investeringskostnaden seg med renten r=0.05 fratrukket convenience yield rate 0.02, volatiliteten på den usikre investeringen er 0.3.

Hvilket alternativ som er best avhenger av korrelasjonen mellom investeringen og oljepris. Den sikre investeringen ble beregnet til å være 4,25 med en usikkerhetskilde mens med programmet for to usikkerhet gav en mer unøyaktig verdi på 4,11.

Den andre investeringen finnes enkelt ved binomial metode for to usikkerheter. Resultatene er oppsummert i tabell for forskjellig korrelasjoner.

korrelasjon	nåverdi
0	4,48
0,3	4,14
0,6	3,74
1	3,12

Sammensetting av mulighetene:
En annen problemstilling er å ha en sammensatt opsjon, hvor man har mulighet til å velge kontinuerlig mellom begge løsningene.

Dette gir en ny tilsvarende tabell for den sammensatte problemstillingen:

korrelasjon	Nåverdi
0	4,47
0,3	4,39
0,6	4,29
1	4,12

Man ser av tabellene at man ikke overraskende kommer gunstigere eller like godt ut, når man kan velge mellom begge alternativene.

Kommentar til modelleringer av strike

Når strike modelleres uten usikkerheter, har man god kontroll på kostnadsutviklingen. Dette kan være tilfelle når man har muligheter til egenproduksjon av produksjonsløsningen. Produksjonsløsningen må ikke by på store usikre byggetekniske utfordringer og innsatsfaktorene til produksjonen må ikke være sterkt påvirket av svingninger i markedet.

Ved leie av en produksjonsrigg vil man i dag oppleve høye rater som er korrelert med oljeprisen. Rater for oljeservice er volatile. Hvordan man velger å modellere strike er et vanskelig tema.

Teknologiforbedringer vil kunne utsette tidspunktet for optimal utøvelse. Ved forventet teknologiforbedring kan man få synkende strike og dermed, billigere og bedre løsninger. Den enorme Trollplattformen ville man ikke bygd i dag. I sammenheng med teknologi kan man også forbedre utnyttelsen på reservoaret.

6.1.3 Flere beregninger på sammensatte prosjekter

Her beregnes det på 2 forskjellige kombinerte olje og gass prosjekter:

- Det gjøres beregninger på et investeringskonsept som initierer produksjonen både olje og gass produksjon samtidig med en felles investeringskostnad. Dette er tilsvarende som i eksempelet i avsnitt 5.5.4.

- Det utføres også beregninger på et prosjekt med et valg mellom en inkluderende oljeinvestering med en tilknyttet gass mulighet eller et alternativ med investering i oljeutvinning som ekskluderer gassen. Dette er tilsvarende videreføringen av eksempelet i avsnitt 5.6.

Mulighet for å bygge ut både olje og gass med felles strike.

Introduserer et gassfelt som har initialverdi satt til 11 mrd. Dette kan beregnes på tilsvarende måte som for olje, refererer til avnitt 3.1.1. Gassen har annualisert volatilitet 0,25, Convenience yield rate 0,02 og korrelasjon med oljepris på 0,80. Jeg bruker det samme oljefeltet som tidligere. Opsjonstiden er 15 år. Investeringskostnaden er 13 mrd som utvikler med rente 0,05 fratrukket convenience yield 0,02.

Løsning med binomisk metode gav prosjektverdi på 19,86, ved bruk av 9 tidsskritt.

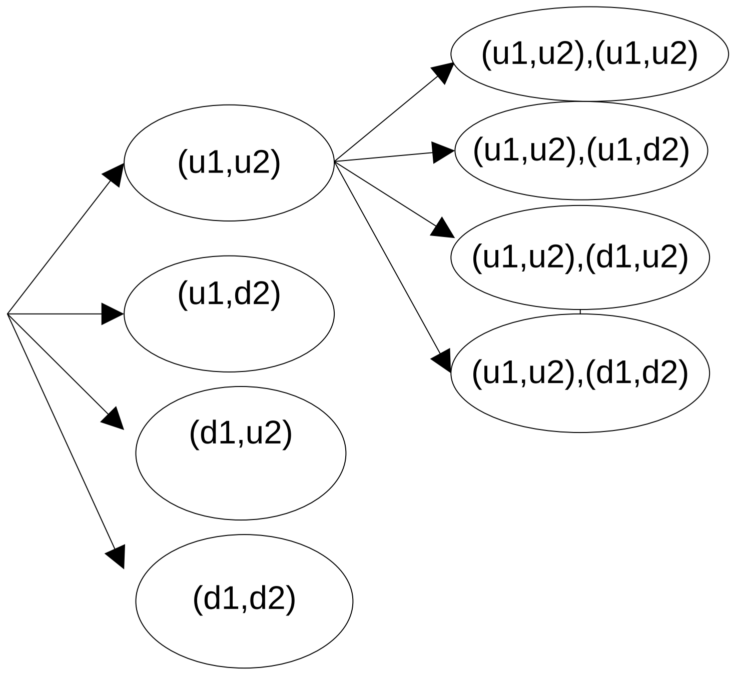
Mulighet for å investere i to ekskluderende alternativer.

Ser her på mulighet for å enten investere i et inkluderende oljeprosjekt, i2, som gir mulighet til en gass investering, i3, eller en mulighet til å investere i et oljeprosjekt, i1, som ekskluderer muligheten i3. Det er samme opsjonstid for begge opsjonene, 15 år.

Verdien på feltene er tilsvarende som i forrige eksempel, 9 mrd på oljen og 11 mrd på gassen. Strike på i1 er 6 mrd, strike på i2 er 8 mrd, strike på i3 er 9 mrd. Strike i modellen utvikler med rente 0,05 fratrukket convenience yield 0,02.

Skisse løsning:

Presenterer her først en skisse på hvordan problemløsningen fungerer, dette er også en repetisjon på gjennomgått teori. Figuren under viser nodeverdier i to tidsskritt hvor nodeverdiene i annet tidsskritt kun er beskrevet etter oppgang i begge usikkerhetskildene i første tidsskritt.



Given the state of the spanned uncertainties.

Beregning av opsjonsverdier i noden (u1,u2).

Innsetting med T= 15 gir $\Delta T = 7{,}5$ med bare 2 tidsskritt, for de andre faktorene nødvendig for utregningen se appendiks 8.4.

Slutt nodene bestemmes uten sammenlikning med å holde opsjonen da opsjonen naturlig nok avsluttes. For å finne nodeverdi i (u1, u2) må man se hva som er best av å utøve olje og gass eller vente eller eventuelt bare utøve olje og ha mulighet til å vente med gassen. Man må også undersøke det andre alternativet å utøve eller holde bare olje og miste gass muligheten**.** Under vises det beregnede verdier i en tabell over alternativene.

	Ekskluderende olje
vente med olje alternativet	**13,88**
utøve olje i tidspunkt 1	**10,78**

	Både olje og gass
vente med begge	**32,55**
utøve i tidspunkt 1	**25,41**
utøve olje og vente med gassen	**29,43**

Man ser at node (u1, u2) blir dominert av å holde olje og gass alternativet. Og er derfor utslagsgivende for den diskonterte verdien i initialtilstanden t=0.

Løsning fra Excel:

Løsning opsjonsproblemet med binomial metode ble NPV 7,47, det er da blitt brukt 9 tidsskritt. Til sammenlikning gir beregninger med to tidskritt NPV 6,79 som ble startet på med node beregningen for (u1,u2).

7 Konklusjoner

Ved hjelp av teknikker for finansielle markedsbetraktninger kan man formulere verdikonsistente modeller på prisprosesser. Oppgaven har vist hvordan man benytter seg av slike prisprosesser til å bestemme opsjonsverdier på bakgrunn av framtidig optimal utøvelse.

Modelleringen har innebært å studere usikkerheter internt i prosjekter og usikkerheter knyttet til markedet. Med opsjonsstrukturen $\max(F - K, 0)$, klarer man å formulere investeringsproblemene strukturert og systematisk, under ett og samme rammeverk. Det har vært fokus på modeller og analyse av prosjekter. Oppgaven har gitt en beskrivelse av verdikjeden. Forskjellige investerings situasjoner har blitt presentert og det har blitt sett på hva slags utfordringer dette vil innebære å modellere.

Ved hjelp av investeringsmodeller klarer man å simulere komplekse investeringssituasjoner. Det er i prinsippet regnekraft fra datamaskinene som er begrensende. Det aktuelle tema rundt utbyggingen av Snøvit og prosjekteringen av Goliat feltet, er blitt brukt som illustrerende analogi, eksempel og motivasjon. Man så at man kunne trekke konklusjoner ut av modellene som kunne hjelpe til å se det riktige bildet i investeringssituasjonen. Det er i oppgaven pekt på faktorer i Snøvit utbyggingen som tilsier at man kanskje skulle ha handlet annerledes. Men det er også kommentert hvordan en videre utvikling kan komme til å se ut når det har blitt valgt som det er gjort.

Jeg mener at realopsjoner er en riktig analysemetode og bra innfalsvinkel med tanke på samarbeid mellom ulike feltmuligheter. Realopsjoner er også viktig med tanke på samarbeid mellom ulike operatører på felt. Fokus på samproduksjon kan gi produksjonsfordeler. Hvis man prøver å påvirke til en feltutnyttelse som drar nytte av samarbeid, vil kaken kunne bli større enn om man opptrer for seg selv.

Binomisk løsning er en metode som er oversiktelig å modellere. Ved kombinasjon av mange usikkerheter blir det vanskelig å håndtere data mengdene. For å løse store binomiske problemer, kreves det at man bruker en løsningsteknikk som itererer seg gjennom treet uten at den lagrer store mengder tall. Dette gjør at implementeringen blir mer krevende og vesentlig mer kompleks enn ved lagring i vanlige matriser.

LSMC gir mulighet til å håndtere usikkerhetskilder på en anvendelig måte. Man kan enkelt multiplisere sammen prosesser uten at dette medfører noe vesentlig mer kompleksitet i beregningsproblemet. Beregningene krever matrise lagring som det kan være begrensende muligheter med i for eksempel i Excell.

"Closed form solutions" er en type løsninger for evigvarende opsjoner hvor løsninger på investeringsproblemet er uttrykt ved formeluttrykk. Denne type modeller gir god innsikt i finans og er matematisk krevende. Disse formlene er instruktive da de gir uttrykk for opsjonsverdien og beskriver når man bør investere eller vente.

Jeg mener realopsjoner er en spennende og allsidig modell på hvordan man kan planlegge, koordinere og betrakte investeringer.

8 Appendix

8.1 Kilder og referanser

Bøker:

- Dixit and Pindyck(1994). Investment under uncertainty. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Bus422N Investeringsanalyse (Juli 2005). Kompendium NHH
- Hull (2006).Options, Futures, and Other Derivatives. Prentice Hall
- Trigeorgis (1995). Real options in capital investment: models, strategies, and applications**.** Westport, Conn. : Praeger

Artikler og rapporter:

- Longstaff and Schwartz (2001). “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach”. Rev. Financial. Studies..2001; 14: 113-147

Forelseningsnotater fra:

- Finansieringsteori, ECO421
- Investeringsanalyse, BUS422

8.2 Håndregning av eksempelet for strike i avsnitt 3.1.4

Annuitet på $25 i produksjonskostnader, nettofaktor på grunn av skatt 0.22:

$$C = 0.22 * 30000 * 1.0305 * 5.5 * 25 * 365 * \frac{1 - \left(\frac{1 + 0.0305}{1 + 0.0367}\right)^T}{0.0367 - 0.0305} = 3.205$$

Nåverdi av netto avskrivninger som trekkes fra i strike: $A = \frac{(0.78 * 5)}{6} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0.0367}\right)^6}{0.0367} = 3.444$

Diskret årlig renter 0.083 pr år:

$$Cg = 0.22 * 2 * 0.083 \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + 0.0367}\right)^{10}}{0.0367} = 0.301$$

Nåverdi av en betalingsforpliktelsen på lånet:

$$Ca = \frac{2}{1.0367^{10}} = 1.395$$

Egenkapital: 3

Uttrykket for strike:

K=C+$E + Cg + Ca - A = 3.205 + 3 + 0.302 + 1.395 - 3.444 = \mathbf{4.458}$ ≈ 4.5 mrd

8.3 Beregning av regresjons koeffisienter til regresjoner, fra avsnitt 5.5.3

Dette er en enkel regneoppgave som består av å minimere funksjonen π:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + bx_i + cx_i^2)\right]^2 = \min.$$

Ved å derivere π med hensyn på a, b og c:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (a + bx_i + cx_i^2)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i\left[y_i - (a + bx_i + cx_i^2)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left[y_i - (a + bx_i + cx_i^2)\right] = 0 \end{cases}$$

Dermed finner man konstantene ved å løse det enkle lineære likningssystemet:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} 1 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{cases}$$

Tilsvarende framgangsmåte for funksjoner med flere konstanter å bestemme.

8.4 Beregninger av noder til eksempel 6.2.3

Ved innsetting tilsvarende som i avsnitt 5.1.1 får man oppgangsfaktorer for oljen u=2,03 og d=0393 tillhørende faktorer gassen blir A=2,583, B=0,393, C=0,864 og D=0.397

Inkluderende alternativer:

Vente med av å utøve gassen og oljen, KAi23 er:

$$\begin{aligned} \big((9 * 2{,}032 * 2{,}032 + 2{,}583 * 2{,}583 * 11 - 17exp(15 * 0.03)\big) * 0.25 \\ + \big(9 * 2{,}032 * 2{,}032 + 2{,}583 * 1{,}1360 * 11 - 17exp(15 * 0.03)\big) * 0.25 \\ + \big(9 * 2{,}032 * 0{,}393 + 2{,}583 * 0{,}864 * 11 - 17exp(15 * 0.03)\big)\big) \\ * exp(-0{,}05) = 32{,}55 \end{aligned}$$

Verdien av å vente med gassen, KAi3:

$$\Big(\big(2{,}583 * 2{,}583 * 11 - 9 * exp(15 * 0.03)\big) * 0.25 + \big(2{,}583 * 1{,}1360 * 11 - 17exp(15 * 0.03)\big) * 0.25 + \big(2{,}583 * 0{,}864 * 11 - 17exp(15 * 0.03)\big)\Big) * exp(-0{,}05) = 21{,}16$$

Verdien av å utøve oljen, i2:

$$9 * 2.032 - 8 * \exp(7{,}5 * 0{,}03) = 8{,}269$$

Tilsammen: $21{,}16 + 8{,}269 = 29{,}43$

Utøve gassen,i3 :

$$11 * 2.583 - 9 * \exp(7{,}5 * 0{,}03) = 17{,}142$$

Utøve gass og olje, i2+i3: $8{,}269 + \ 17{,}142 = 25{,}41$

Ekskluderende alternativ:

Vente med oljen, KAi1:

$$2 * \big(9 * 2{,}032 * 2{,}032 - 6 * exp(15 * 0{,}03)\big) * \frac{0.25}{\exp(7{,}5 * 0{,}05)} = 13{,}87$$

Utøve oljen, i1;

$$\big(9 * 2{,}032 - 6 * exp(7{,}5 * 0{,}03)\big) * 0{,}25 * 2 = 10{,}774$$

8.5 VBA kode på amerikansk opsjon

Koden er ikke selforklarende, den er ment som en kilde til dokumentasjon på beregninger, Den er helt klar til bruk, men man må invertere fra regresjonen i regnearket.

```
Sub LSM()
M = 150     'M antall utøvelse for opsjonen
n = 10000   'n antall prisbaner
q1 = 0.02   'q1 dividende på 1
```

```
q2 = 0.02   'q2 dividende på 2
r = 0.05      'r rente
s1 = 0.3      's1 volatilitet1
s2 = 0.3      's2volatilitet 2
tid = 15       'opsjonens levetid
ro = 0.6       'ro korrelasjon mellom 1 og 2
v1 = 9.0001 'v1 initialverdi på1  feltverdi
v2 = 6          'v2 initialverdi på2  konstruksjonskostdand
'end of innput''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''
Dim x(10000, 500)
Dim y(10000, 500)
Dim Z(10000, 500)
Dim h(10000, 500)
Dim a(10000, 2)
Dim j(10000)
Dim cash(10000)

For f = 1 To n
x(f, 1) = v1
y(f, 1) = v2
Z(f, 1) = (x(f, 1) / y(f, 1)) - 1
h(f, 1) = 0
Next f

For f = 1 To n
For t = 2 To M
Xc = Rnd
Xj = Rnd
Xy = Application.NormSInv(Xj)
Xz = Application.NormSInv(Xc)
'due to correlation
q = Application.Power((1 - ro ^ 2), 0.5)
Xzz = ro * Xy + q * Xz
Xy1 = Application.Power(tid / M, 0.5)
Xz1 = Application.Power(tid / M, 0.5)
x(f, t) = x(f, t - 1) * Exp((r - q1 - 0.5 * (s1 ^ 2)) * tid / M + (s1 * Xy1 * Xy))
y(f, t) = y(f, t - 1) * Exp((r - q2 - 0.5 * (s2 ^ 2)) * tid / M + (s2 * Xz1 * Xzz))
Z(f, t) = (x(f, t) / y(f, t)) - 1
h(f, t) = 0
Next t
Next f

For w = 1 To n
h(w, M) = Application.Max(Z(w, M), 0)
Next w
For e = 2 To M
f = M + 1 - e
```

```
g = 0
For d = 1 To n
t = d
If Z(t, f) > 0 Then
g = g + 1
j(g) = t
a(g, 1) = Z(t, f)
i = 1
GoTo Lable
Else
GoTo Lable21
End If
Lable:
If h(t, f + i) > 0 Then
a(g, 2) = h(t, f + i) / Exp(tid * i * r / (M - 1))
Else
If i < M - f Then
i = i + 1
GoTo Lable
Else
a(g, 2) = 0
End If
End If
Lable21:
Next d

Sumy = 0
Sumx = 0
sumyx = 0
Sumxx = 0
Sumxx2 = 0
Sumxxy = 0
Sumxxx = 0
If g = 0 Then
GoTo Lable34
End If
For i = 1 To g
Sumy = Sumy + a(i, 2)
Sumx = Sumx + (a(i, 1) + 1)
Sumxx2 = Sumxx2 + ((a(i, 1) + 1) ^ 4)
Sumxxx = Sumxxx + ((a(i, 1) + 1) ^ 3)
sumyx = sumyx + a(i, 2) * (a(i, 1) + 1)
Sumxxy = Sumxxy + a(i, 2) * ((a(i, 1) + 1) ^ 2)
Sumxx = Sumxx + ((a(i, 1) + 1) ^ 2)
Next i

Dim b(3, 3)
```

```
Dim c(3, 3)

b(1, 1) = 1
b(1, 2) = Sumx / g
b(1, 3) = Sumxx / g
b(2, 2) = Sumxx / g
b(2, 3) = Sumxxx / g
b(3, 3) = Sumxx2 / g
'symmetrisk
b(2, 1) = b(1, 2)
b(3, 1) = b(1, 3)
b(3, 2) = b(2, 3)

Cells(1 + 2, 1) = b(1, 1)
Cells(1 + 2, 2) = b(1, 2)
Cells(1 + 2, 3) = b(1, 3)
Cells(2 + 2, 1) = b(2, 1)
Cells(2 + 2, 2) = b(2, 2)
Cells(2 + 2, 3) = b(2, 3)
Cells(3 + 2, 1) = b(3, 1)
Cells(3 + 2, 2) = b(3, 2)
Cells(3 + 2, 3) = b(3, 3)

c(1, 1) = Range("a7")   'inverterer en matrise i regnearket
c(1, 2) = Range("b7")
c(1, 3) = Range("c7")
c(2, 1) = Range("a8")
c(2, 2) = Range("b8")
c(2, 3) = Range("c8")
c(3, 1) = Range("a9")
c(3, 2) = Range("b9")
c(3, 3) = Range("c9")

Dim k(3, 1)
Dim r1(3, 1)
r1(1, 1) = Sumy / g
r1(2, 1) = sumyx / g
r1(3, 1) = Sumxxy / g

k(1, 1) = c(1, 1) * r1(1, 1) + c(1, 2) * r1(2, 1) + c(1, 3) * r1(3, 1)
k(2, 1) = c(2, 1) * r1(1, 1) + c(2, 2) * r1(2, 1) + c(2, 3) * r1(3, 1)
k(3, 1) = c(3, 1) * r1(1, 1) + c(3, 2) * r1(2, 1) + c(3, 3) * r1(3, 1)

For i = 1 To g
If a(i, 1) > (k(1, 1) + k(2, 1) * (Z(j(i), f) + 1) + k(3, 1) * (Z(j(i), f) + 1) ^ 2) Then
h(j(i), f) = a(i, 1)
Else
```

```
End If
Next i
Lable34:
Next e

For f = 1 To n
i = 1
Lable12:
If h(f, i) > 0 Then
cash(f) = y(f, i) * h(f, i) / (Exp(tid * (i - 1) * r / (M - 1)))
Else
If i < M Then
i = i + 1
GoTo Lable12
Else
cash(f) = 0
End If
End If
Next f
verdi = 0
For f = 1 To n
verdi = verdi + cash(f)
Next f
verdi = verdi / n
Cells(1, 1) = verdi
End Sub
```

8.6 Kode for binomisk metode 2 usikkerheter

Koden beskriver hvordan man kan løse denne type problem.

```
Sub Macro3()
Worksheets("sheet1").Activate
n = Range("b1").Value
s1 = Range("b2").Value
p0 = Range("b3").Value
s2 = Range("b4").Value
fi = Range("b5").Value
sc = 1

r = 0.05
t = 15
ro = 0.75
s1 = 0.3
s2 = 0.25
q1 = 0.02
q2 = 0.02
```

```
rt = (t / (n - 1))
e = WorksheetFunction.Power(rt, 0.5)
ro1 = WorksheetFunction.Power((1 - ro ^ 2), 0.5)
f3 = WorksheetFunction.Power(2.7183, 0.05 * rt)
'sannsynligheter
pq1 = 0.5
pq2 = 0.5
p1 = 0.5
p2 = 0.5

'korrelerte variable
u = Exp((r - q1 - 0.5 * (s1 ^ 2)) * rt + s1 * e)
D = Exp((r - q1 - 0.5 * (s1 ^ 2)) * rt - s1 * e)
A = Exp((r - q2 - 0.5 * (s2 ^ 2)) * rt + s2 * e * (ro + ro1))
B = Exp((r - q2 - 0.5 * (s2 ^ 2)) * rt + s2 * e * (ro - ro1))
C = Exp((r - q2 - 0.5 * (s2 ^ 2)) * rt - s2 * e * (ro - ro1))
D1 = Exp((r - q2 - 0.5 * (s2 ^ 2)) * rt - s2 * e * (ro + ro1))
Worksheets("sheet6").Activate
Dim h(1000000, 15)
Dim o(1000000, 15)
Dim m(1000000, 15)
Dim v(1000000, 15)
Dim w(1000000, 15)
Dim tt(1000000, 15)
h(1, 1) = p0
o(1, 1) = fi
sc = 1
Worksheets("sheet2").Activate
Dim p(100, 100)
Dim ka(1000000, 15)
p(1, 1) = p0
For t = 2 To n
For s = 1 To 4 ^ (t - 2)
h(4 * s - 3, t) = h(s, t - 1) * u
h(4 * s - 2, t) = h(s, t - 1) * u
h(4 * s - 1, t) = h(s, t - 1) * D
h(4 * s, t) = h(s, t - 1) * D
o(4 * s - 3, t) = o(s, t - 1) * A
o(4 * s - 2, t) = o(s, t - 1) * B
o(4 * s - 1, t) = o(s, t - 1) * C
o(4 * s, t) = o(s, t - 1) * D1
m(4 * s - 3, t) = sc * h(4 * s - 3, t) + o(4 * s - 3, t) - 13 * Exp(0.03 * rt * (t - 1))
m(4 * s - 2, t) = sc * h(4 * s - 2, t) + o(4 * s - 2, t) - 13 * Exp(0.03 * rt * (t - 1))
m(4 * s - 1, t) = sc * h(4 * s - 1, t) + o(4 * s - 1, t) - 13 * Exp(0.03 * rt * (t - 1))
m(4 * s, t) = sc * h(4 * s, t) + o(4 * s, t) - 13 * Exp(0.03 * rt * (t - 1))
Next s
```

```
Next t
For k = 1 To 4 ^ (n - 1)
ka(k, n) = 0
Next k
p11 = pq1 * p1
p12 = pq2 * p1
p21 = pq1 * p2
p22 = pq2 * p2
For t = 2 To n
f = n + 2 - t
For l = 1 To 4 ^ (f - 1)
v(l, f) = WorksheetFunction.Max(m(l, f), ka(l, f), 0)
Next l
For X = 1 To 4 ^ (f - 2)
ka(X, f - 1) = (p11 * (v(4 * X - 3, f)) + p12 * (v(4 * X - 2, f)) + p21 * (v(4 * X - 1, f)) + p22 *
(v(4 * X, f))) / f3
Next X
Next t
Cells(1, 1) = WorksheetFunction.Max(m(1, 1), ka(1, 1))
End Sub
```