NORGES HANDELSHØYSKOLE
Bergen, våren 2006

# Prising av renteopsjoner

*- med fokus på Hull-White modellen -*

**Mari Bolling Hasven**

**Veileder: Professor Kristian Miltersen**

Utredning i fordypningsområdet Finansiell økonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Denne utredningen er gjennomført som et ledd i masterstudiet i økonomisk-administrative fag ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at høyskolen innestår for de metoder som er anvendt, de resultater som er fremkommet eller de konklusjoner som er trukket i arbeidet.

# Sammendrag

Denne utredningen tar for seg prisingen av renteopsjoner fra generell opsjonsteori til implementering av rentemodell ved simulering. Spesielt fokuseres det på Hull-White-modellen og hvordan denne brukes for å prise opsjonsprodukter tilknyttet boliglån.

Utredningen starter med å ta for seg grunnleggende opsjonsteori og opsjonsprisning. Videre snevres oppgavens fokus inn til *rente*opsjoner og problematikken rund prisingen av disse. Et utvalg modeller for å beskrive *renteprosessen* presenteres og blant disse velges *Hull-White modellen* for videre arbeid. Det redegjøres så for hvordan modellen kan implementeres både *analytisk* og ved *simulering*.

Den presenterte teorien illustreres så ved bruk av to case: prising av *rentetak* og prising av *retten til forsert nedbetaling av fastrentelån til pari kurs*. Her vises fremgangsmåten for prising ved bruk av Blacks formel, Hull-White modellen med analytisk løsning og Hull-White modellen med simulering.

# Forord

Denne utredningen er skrevet som et siste ledd i mastergraden i finansiell økonomi ved Norges Handelshøyskole, våren 2006. Det har vært en krevende prosess, som jeg har lært mye av. Jeg har fått god innsikt i opsjonsprising, blitt en kløpper i Excel og fått nyttige erfaringer om det å jobbe selvstendig på et langvarig prosjekt.

Da jeg startet arbeidet med utredningen hadde jeg et ønske om å skrive om opsjonsprising, etter å ha hatt stor glede av kursene *Derivater og Risikostyring* og *Finansmarkeder* ved NHH. Jeg ble oppfordret av veileder til å se på renteopsjoner, ettersom prising av denne typen opsjoner er mer komplisert enn ”vanlige” opsjoner, og således danner et spennende grunnlag for utredningen. I denne perioden rullet postbankens reklame for boliglån med rentetak over TV-skjermene, og slik ble ideen til denne oppgaven født.

Jeg vil gjerne takke min veileder, Professor Kristian Miltersen, for god veiledning og konstruktive innspill. Jeg vil også gjerne takke mine medstudiner ved NHH, for selskap på biblioteket og presist og trofast oppmøte til vår daglige lunsjsamling. Uten disse flotte jentene å dele opp- og nedturer med hadde semesteret vært så mye, mye kjedeligere. Til slutt vil jeg takke samboeren min Jørgen Heer som kontinuerlig har trøstet, motivert og oppmuntret gjennom hele semesteret.

Bergen, juni 2006

Mari Bolling Hasven

# Innholdsfortegnelse

**SAMMENDRAG** ..... **I**

**FORORD** ..... **II**

**INNHOLDSFORTEGNELSE** ..... **III**

**1. INNLEDNING** ..... **1**

1.1 BAKGRUNN ..... 1

1.2 FORMÅL OG AVGRENSNING ..... 3

1.3 STRUKTUR ..... 4

**2. OPSJONSTEORI** ..... **5**

2.1 HVA ER EN OPSJON? ..... 5

2.2 PRISING AV OPSJONER ..... 6

*2.2.1 Replikering og fravær av arbitrasjemuligheter* ..... *7*

*2.2.2 Risikonøytral verdsetting* ..... *7*

*2.2.3 Binomisk prising* ..... *8*

*2.2.4 Black-Scholes opsjonsprisningsformel* ..... *10*

*2.2.5 Put-Call paritet* ..... *12*

**3. RENTEOPSJONER** ..... **13**

3.1 RENTEBEGREPET ..... 13

*3.1.1 Renter i praksis* ..... *13*

*3.1.2 Renter i teorien* ..... *15*

3.2 NOEN VANLIGE RENTEOPSJONER ..... 18

*3.2.1 Opsjoner på obligasjoner* ..... *18*

*3.2.2 Rentetak – Cap* ..... *19*

*3.2.3 Rentegulv – Floor* ..... *20*

*3.2.4 Swap-opsjon* ..... *20*

3.3 UTFORDRINGER VED PRISING AV RENTEOPSJONER ..... 22

**4. RENTEMODELLER ...... 25**
4.1 GENERELT OM RENTEMODELLER ...... 25
4.2 LIKEVEKTSMODELLER ...... 27
*4.2.1 Rendleman og Bartter ...... 27*
*4.2.2 Vasicek ...... 28*
*Cox, Ingersoll og Ross (CIR) ...... 29*
4.3 ARBITRASJEFRIE MODELLER ...... 29
*4.3.1 Ho-Lee ...... 30*
*4.3.2 Black, Derman og Toy (BDT) ...... 31*
*4.3.3 Hull-White ...... 31*
*4.3.4 Andre modeller ...... 33*
**5. METODE ...... 35**
5.1 PRISING VED BRUK AV RENTEMODELL ...... 36
*5.1.1 Valg av modell ...... 36*
*5.1.2 Implementering av Hull-White modellen ...... 38*
5.2 DATAGRUNNLAG ...... 42
*5.2.1 Dagens rentekurve ...... 42*
*5.2.2 Estimering av modellparametre ...... 45*
5.3 FORDELER OG ULEMPER VED METODEN ...... 47
**6. ANALYSE ...... 48**
6.1 CASE 1: RENTETAK ...... 48
*6.1.1 Postbankens førstehjemslån ...... 49*
*6.1.2 Prising ved bruk av Blacks modell ...... 50*
*6.1.3 Prising med Hull-White modellen: analytisk løsning ...... 52*
*6.1.4 Prising med Hull-White modellen: Monte Carlo simulering ...... 53*
*6.1.5 Sammenligning av resultater for case 1 ...... 55*
*6.1.6 Sensitivitetsanalyse ...... 57*
*6.1.7 Oppsummering case 1 ...... 60*

6.2 CASE 2: FASTRENTELÅN MED RETT TIL FORSERT NEDBETALING....61

*6.2.1 Produktet som skal prises ....62*

*6.2.2 Monte Carlo simulering og amerikanske opsjoner....63*

*6.2.3 Hovedtrekk i Longstaff of Schwartz metode....64*

*6.2.4 Prising med Hull-White modellen og Least Square Monte Carlo simulering ....65*

*6.2.5 Resultater og oppsummering case 2 ....68*

**7. AVSLUTNING ....69**

**LITTERATURLISTE ....71**

**APPENDIKSER....73**

*Appendiks 1: Terminstrukturen ....73*

*Appendiks 2: Prising av rentetak med Blacks modell ....75*

*Appendiks 3: Prising rentetak med Hull-White modellen - analytisk....76*

*Appendiks 4: Prising rentetak med Hull-White modellen - simulering....78*

*Appendiks 5: Prising av amerikansk opsjon ....80*

# 1. Innledning

Denne utredningen tar for seg oppbygningen og prisingen renteopsjoner og fokuserer spesielt på prising med Hull-White modellen. Jeg vil først presentere den grunnleggende teorien og deretter anvende denne på to case: boliglån med rentetak og retten til forsert nedbetaling av fastrentelån til pari kurs. På denne måten ønsker jeg å belyse teorien og samtidig sette fokus på utfordringene ved prising av denne typen produkter, som det tilbys stadig mer av. I dette kapittelet vil jeg først ta for meg bakgrunnen for valg av tema. Deretter vil jeg definere utredningens formål og kort beskrive de avgrensningene jeg har funnet nødvendige. Til slutt i dette kapittelet presenteres oppgavens struktur.

## 1.1 Bakgrunn

I 2005 introduserte flere banker ”lån med rentetak”, et produkt der lånetaker betaler flytende rente så lenge denne ikke er høyere enn et forhåndsdefinert ”tak”. Dersom den flytende renten overstiger ”taket” betaler lånetaker kun den fastsatte renten. Lånetaker kan på denne måten sikre seg mot sterk økning i rentekostnadene. Dette produktet har blitt meget populært ifølge DnBNORs årsrapport for 2005:

> *”Markedet krever stadig nye produkter og løsninger. Personmarked lanserte i 2005 førstehjemslån med rentetak uten pristillegg, og Postbanken har etter lanseringen oppnådd 40 prosent økning i salg av førstehjemslån.”*
> *(DnBNOR, 2005:66)*

Denne suksessen tatt i betraktning gjør det rimelig å anta en vekst i produkter som gir nye former for rentesikring. Slike produkter er spesielt aktuelle i Norge, ettersom meget få velger fastrente på sine boliglån. Lånetagere vegrer seg gjerne for å binde renten fordi man da går glipp av gevinsten ved en eventuell rentenedgang. I enkelte land kan man imidlertid binde renten og samtidig beholde retten til å betale tilbake lånet til pari kurs (lånets hovedstol) uten å betale full overkurs. Slik kan man komme seg ut av en ugunstig fastrenteavtale og refinansiere boligen til gjeldene markedsvilkår. I for eksempel Danmark er det vanlig praksis å ha en slik konverteringsrett knyttet opp mot boliglånet. Felles for disse to produktene er at de gir en form for *rentesikring* ved å inkludere *opsjonselementer* i låneavtalen. Dermed kan opsjonsteori anvendes for å analysere og verdsette disse låneproduktene.

Opsjonsteorien gir et solid rammeverk for prising av aksjeopsjoner basert på binomisk verdsetting og Black, Scholes og Mertons banebrytende arbeid på 70-tallet. Enhver bok om derivater gjør grundig rede for disse fremgangsmåtene på tilnærmet likt vis. Forutsetningen om at aksjekursene følger en Markov prosess og er lognormalt fordelt har langt på vei blitt et paradigme innen opsjonsprising. Når det gjelder renten finnes det derimot ingen konsensus om hvilken prosess denne følger. På slutten av 70-tallet viste Black at så lenge det forutsettes at forwardprisen til underliggende aktivum (enten det er renten eller en obligasjon) følger en lognormal fordeling ved opsjonens forfall kan ulike versjoner av Blacks formel bruke til å prise europeiske renteopsjoner. Blacks modell har imidlertid måttet tåle hard kritikk og flere alternative tilnærminger basert på modellering av renteprosessen har blitt foreslått.

En rentemodell kan presenteres i diskret tid ved bruk av rentetrær eller i kontinuerlig tid med utgangspunkt i en Itô-prosess. Fra slutten av syttitallet og frem til i dag har det blitt foreslått mange rentemodeller og forskjellen mellom dem ligger i hovedsak i hvordan forfatterene spesifiserer parametrene. Lærebøker fremhever forskjellige modeller og gir ingen konklusjon på hvilken som er best, men gir generelt støtte til bruk *arbitrasjefrie* modeller ved prising av opsjoner (det vil si modeller som gir en eksakt tilpasning til dagens terminstruktur).

Diskusjonen om hvilken tilnærming til prising av renteopsjoner som er mest korrekt pågår den dag i dag. Samtidig er markedet for denne typen produkter i vekst, og behovet for et enighet om prisningsmetodikken er derfor økende. Prising av renteopsjoner er et spennende fagfelt i utvikling, med direkte relevans for dagens norske finansmarkeder og således et utmerket tema for utredningsarbeidet.

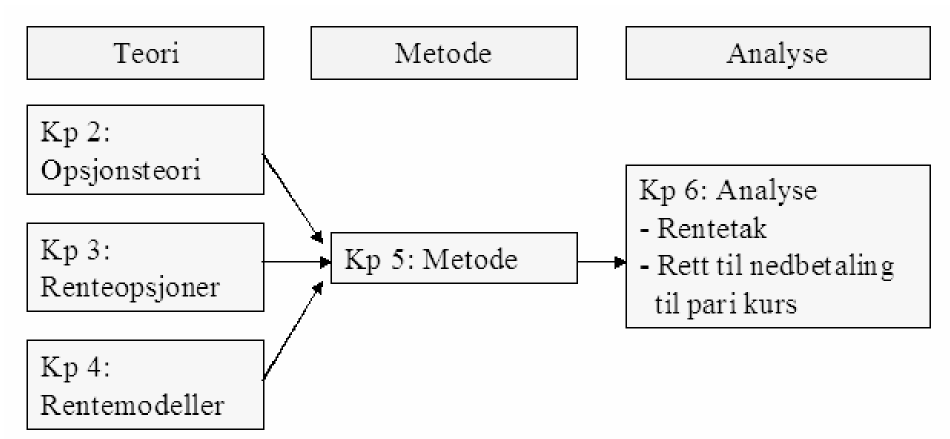
## 1.2 Formål og avgrensning

Formålet med denne utredningen er å gi en redegjørelse for hvordan renteopsjoner prises for deretter å belyse denne teorien med to case. Jeg ønsker å eksemplifisere hvordan teorien kan anvendes på praktiske, dagsaktuelle eksempler som også personer utenfor finansmiljøet kan relatere seg til, og har således valgt produkter tilknyttet boliglån som utgangspunkt for prising.

Å prise renteopsjoner er relativt komplisert. Grunnet tidsmessig og ressursmessige begrensninger har jeg derfor blitt nødt til å ta en del avgrensninger og forutsetninger. For det første gir denne utredningen på ingen måte en uttømmende beskrivelse av tilnærminger til prising av renteopsjoner. Den viser imidlertid de metodene som det oftest refereres til i lærebøkene og som etter mitt syn representerer kjernen i relevant teori. For å begrense omfanget av analysen har jeg estimert dagens rentekurve relativt naivt og hentet inn modellparametrene eksogent. Som en følge av dette er mine verdiestimater lite anvendbare for å ytre påstander om hva som er ”riktig pris” på disse produktene i et reelt marked. Mine forenklinger forringer imidlertid ikke oppfyllelsen av utredningens formål som er å illustrere *fremgangsmåten* for prising av renteopsjoner, og belyse den underliggende teorien med to praktiske casestudier.

## 1.3 Struktur

Utredningen kan deles i tre hoveddeler: teori, metode og analyse. Teoridelen består av tre kapitler: kapittel 2 følger rett etter denne innledningen og tar for seg definisjonen på og prisingen av opsjoner på et generelt nivå. I kapittel 3 fokuserer jeg på renteopsjoner: herunder rentebegrepet i teori og praksis. Kapittel 4 presenter intuisjonen bak modellering av rentebaner og et utvalg navngitte rentemodeller. Med bakgrunn i disse tre kapitlene følger et metodekapittel som tar for seg min innfallsvinkel for å anvende teorien på to case. Kapittel 5: "Metode", fungerer dermed som et bindeledd mellom teoridelen og analysen i kapittel 6. I analysen anvendes teorien for å prise opsjonselementene tilknyttet to typer låneprodukter: boliglån med rentetak og fastrentelån med rett til forsert nedbetaling til pari kurs. Oppbygningen av utredningen er illustrert i Figur 1.1:




*Figur 1.1: Utredningens struktur*

Utredningen avrundes med kapittel 7: "Avslutning". Her oppsummer jeg hovedtrekkene i oppgaven og trekke noen konklusjoner på bakgrunn av den gjennomgåtte teorien og analysen. Jeg sier også noen ord om spørsmål/tema det kunne vært interessant å sett på for kommende studenter.

# 2. Opsjonsteori

For å forstå hvordan renteopsjoner brukes og prises er det nødvendig å ha en viss kunnskap om hva en opsjon er og hvordan de verdsettes. Det finnes mange lærebøker på området og for en mer utførlig redegjørelse henviser jeg leseren til disse[1]. Dette kapittelet bygger i hovedsak på forelesningsnotater fra faget ”Derivater og risikostyring” undervist av Jøril Mæland vårsemesteret 2005 ved Norges Handelshøyskole (som igjen tar utgangspunkt i McDonald (2003)). Kapittelet har til hensikt å gi en kortfattet introduksjon til generell opsjonsteori før jeg i kapittel 3 vil se nærmere på renteopsjoner. Jeg vil starte med å forklare hva en opsjon er, før jeg tar for meg noen av prinsippene som ligger til grunn for prising av opsjoner og to viktige fremgangsmåter: binomisk prising og Black-Scholes opsjonsprisningsformel.

## 2.1 Hva er en opsjon?

Navnet opsjon kommer av det engelske ordet ”option”, hvilket kan oversettes til *mulighet* eller *valg*. Intuisjonen er ganske enkel: en opsjon tilbyr en valgmulighet i fremtiden. En klassisk definisjon lyder som følger: ”Innehaver av en opsjonskontrakt har rett, men ikke plikt til å kjøpe (selge) et underliggende aktivum på eller innen et bestemt tidspunkt til en avtalt kontraktspris” (Sættem, 2004). En opsjon kan altså enten innebære en rett til å kjøpe underliggende aktivum (kjøpsopsjon/call) eller rett til å selge underliggende aktivum (salgsopsjon/put) til avtalt pris på eller før et avtalt tidspunkt i fremtiden. En opsjon er en type *derivat* - et ”finansinstrument hvis pris avhenger av prisen på ’noe annet’/et underliggende aktivum” (Mæland, 2005).

[1] Se for eksempel Hull (2006) eller McDonald (2003)

En opsjonen kan være av europeisk eller amerikansk type, hvilket sier noe om *når* opsjonen kan utøves. En europeisk opsjon kan kun utøves *på* et gitt tidspunkt, mens en amerikansk opsjon må utøves *innen* et bestemt tidspunkt. I tillegg til disse enkle opsjonene har eksotiske opsjoner med kompliserte strukturer (som for eksempel bermudaopsjoner, asiatiske opsjoner, og barriereopsjoner) vokst frem de siste tiårene. Foruten å fungere som spekulasjon- og investeringsobjekt er opsjoner essensielt i risikostyring, da man kan sikre muligheten til å komme ut av uhensiktsmessige posisjoner og følgelig låse inn minimumsavkastning eller begrense tap.

Når det snakkes om opsjoner refereres det oftest til aksjer som underliggende aktivum. Det finnes imidlertid opsjoner på en rekke andre instrumenter, herunder renter. De fleste tilnærminger til prising av opsjoner tar imidlertid utgangspunkt i aksjer som underliggende aktivum, og disse modellene danner et godt utgangspunkt for å senere sette fokus på prising av renteopsjoner.

## 2.2 Prising av opsjoner

Eieren av en opsjon vil kun utøve opsjonen dersom dette gir gevinst (eventuelt begrenser tap). Det er dermed forståelig at prisen på en opsjon vil avhenge av sannsynlighet for utøvelse og hvor stor gevinsten da blir. For å kunne si noe mer om opsjonsprisen må det taes forutsetninger om hvordan prisen på den underliggende aksjen utvikler seg og en tilhørende sannsynlighetsfordeling. Ulike forutsetninger har gitt ulike tilnærminger til prisingen av opsjoner; jeg vil presentere de to vanligste metodene: binomisk verdsetting og Black-Scholes opsjonsprisningsformel. Først vil jeg imidlertid introdusere begrepene arbitrasjefravær og replikering og konseptet risikonøytral verdsetting, som er sentrale for forståelsen av opsjonsprising.

I det følgende forutsettes at underliggende aktivum er en aksje som ikke betaler dividende, og jeg vil bruke notasjonen som presentert i Tabell 2.1.

*Tabell 2.1*: Notasjon ved opsjonsprising

| Notasjon | Betydning |
|---|---|
| $S_0$ | Pris på aksjen i dag |
| $S_T$ | Pris på aksjen ved forfall |
| $T$ | Tid til forfall |
| $C_0$ | Verdien av en kjøpsopsjon (call) i dag |
| $P_0$ | Verdien av en salgsopsjon (put) i dag |
| $K$ | Utøvelsespris |
| $r$ | Risikonøytral rente |
| $h$ | Tidsintervall per periode |
| $\sigma$ | Volatilitet uttrykt ved standardavvik |

### 2.2.1 Replikering og fravær av arbitrasjemuligheter

En sentral forutsetning for prising av finansielle instrumenter er fravær av arbitrasjemuligheter. Investeringer som ”uansett hva som skjer i fremtiden” gir lik utbetaling skal koste det samme. Hvis dette ikke er oppfylt vil aktørene i markedet kjøpe det ”billige” instrumentet og selge det ”dyre” helt til markedskreftene fører til at prisene er like. Etter samme argument kan ikke en nettoinvestering på kroner null gi positiv avkastning for alle fremtidige mulige utfall.

Dersom en portefølje gir samme kontantstrøm som en opsjon for ethvert fremtidig utfall og på ethvert tidspunkt kan denne *syntetiske opsjonen* brukes til å prise den vanlige opsjon. Dette kalles replikering, og er sentralt ved opsjonsprising.

### 2.2.2 Risikonøytral verdsetting

For å prise opsjoner beregnes forventningen til kontantstrømmen ved forfall neddiskontert til i dag. For å beregne nåverdier av usikre kontantstrømmer taes det som regel hensyn til risiko ved å oppjustere diskonteringssatsen. I opsjonsprising neddiskonterer vi imidlertid forventet utbetaling med risikonøytral rente. Dette er mulig fordi opsjonen prises *som om* vi befinner oss i en *risikonøytral verden.* I en risikonøytral verden er alle aktører indifferent til risiko.

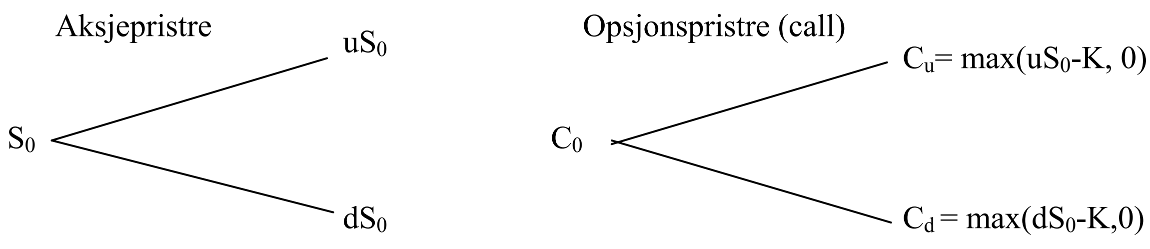
Investorer krever ingen kompensasjon for risiko, og forventet avkastning for alle investeringspapirer er dermed risikonøytral rente. Verdien av en opsjon er som sagt den *forventede verdien* av en neddiskontert fremtidig opsjonsutbetaling. Når risikonøytral verdsetting benytter brukes forventningen under risikonøytralitet, notert med $E^Q$ (og ikke $E^P$ som henviser til forventning under ”sanne sannsynligheter”). Dette er konsistent med å neddiskontere til risikonøytral rente:

$$opsjonsverdi = E^Q\,[e^{-rT}(opsjonsutbetaling)] \qquad (2.1)$$

Kanskje litt overraskende er prisene ved risikonøytral verdsetting korrekte ikke bare i en risikonøytral verden, men også i ”alle andre verdener” (Hull, 2006: 245). Det er viktig å forstå at med risikonøytral verdsetting menes ikke at aktørene faktisk *er* risikonøytrale, men at å prise opsjoner *som om* investorene er risikonøytrale letter arbeidet og er korrekt selv om investorene i realiteten er risikoaverse. Det kan vises at ethvert konsistent par av forventet avkastning på aksjen ($\alpha$) og diskonteringsrate for opsjonen ($\gamma$) vil gi samme resultat som å bruke risikonøytral verdsetting (der $\alpha=r$), hvilket er mye enklere å jobbe med (McDonald, 2003: 338).

### 2.2.3 Binomisk prising

En av de enkleste måtene å tilnærme seg opsjonsprising er via en binomisk modell. I denne modellen antas det at prisen på det underliggende aktivum er binomisk fordelt. Dette betyr at aktivumet kun har to mulige verdier i neste periode (derav *bi*nomisk): prisen kan enten gå opp eller ned med spesifiserte faktorer, henholdsvis *u* og *d.* Utbetalingen fra en europeisk kjøpsopsjon vil ved forfall være den daværende aksjeprisen minus utøvelsesprisen dersom opsjonen utøves (aksjepris > utøvelsespris) eller null dersom opsjonen ikke utøves (aksjepris < utøvelsespris). Dette kan illustreres ved bruk av pristrær:




*Figur 2.1: Aksjepristre og opsjonspristre i binomisk modell (Mæland, 2005)*

I Figur 2.1 er prisen på opsjonen, $C_0$, den eneste ukjente (dagens aksjepris, $S_0$ opp- og nedgangsfaktorene $u$ og $d$ og utøvelsesprisen $K$ er kjente). Opsjonsprisen beregnes ved å replikere kontantstrømmene fra opsjonen. Utgangspunktet er en portefølje bestående av $\Delta$ aksjer og beløpet $B$ forrentet med risikonøytral rente. $\Delta$ og $B$ velges så slik at porteføljen replikerer opsjonen (det vil si: gir samme utbetaling som opsjonen både hvis aksjen går opp eller ned). Siden kontantstrømmen for opsjonen og porteføljen er like for ethvert utfall må de også koste det samme i dag: $C_0 = \Delta S_0 + B$ (prisen på opsjonen er lik verdien av $\Delta$ antall aksjer + $B$ kroner). Hvis dette ikke stemmer kan arbitrasjegevinst oppnås ved å selge (kjøpe) en overpriset (underpriset) kjøpsopsjon og sikre posisjonen ved å innta motsatt posisjon i aksjer og risikofri plassering (den syntetiske opsjonen). Ved å sette opp alle kontantstrømmene finnes uttrykk for både $\Delta$ og $B$, hvilket gir følgende uttrykk for opsjonsprisen:

$$C_0 = e^{-rh}\left(\frac{e^{rh}-d}{u-d}C_u + \frac{u-e^{rh}}{u-d}C_d\right) \quad (2.2)$$

[2]

denne formelen kan "fortolkes som å være avledet av sannsynligheter" (Mæland, 2005) og kan således forenkels slik:

$$C_0 = e^{-rh}[p^*C_u + (1-p^*)C_d] \quad (2.3)$$

der

$$p^* = \frac{e^{rh}-d}{u-d} \quad (2.4)$$

Prisingen foregår i en risikonøytral verden (jamfør forrige avsnitt) og $p^*$ er således den *risikonøytrale* sannsynligheten for at aksjeprisen går opp, og må ikke forveksles med den sanne sannsynligheten. $p^*$ er den sannsynligheten som medfører at "et aktivums forventede avkastning er lik risikofri rente"[3], og når denne brukes justeres sannsynligheten for oppgang og nedgang i aksjeprisen slik at fremtidige, forventede kontantstrømmer kan neddiskonteres

[2] Betingelse for fravær av arbitrasje er $u > e^{(r-\delta)h} > d$.

[3] Med risikofri rente menes her renten i en risikonøytral verden, dvs. risikonøytral rente

med en risikonøytral rentesats (Mæland, 2005). Under risikonøytral vedsetting er den forventede aksjeprisen neste periode i en binomisk modell gitt ved:

$$E_0^Q[S_h] = p^* uS_0 + (1-p^*)dS_0 = \underbrace{e^{rh}S_0}_{\text{Aksjens forwardpris}} \tag{2.5}$$

Forventningen er et veid snitt av de to mulige verdiene aksjen kan ta i neste periode. Ved å sette inn uttrykket for $p^*$ i (3.4) får vi bekreftet at aksjeprisens forventede vekst er gitt ved risikonøytral rente, og aksjeprisens forventede verdi er dermed aksjens forwardpris[4].

Et binomisk tre kan utvides ved å dele opsjonens løpetid inn mindre deler slik at treet får flere grener. Jo kortere tidsperiode per steg (*h*), jo mindre blir opp- og nedgangsfaktorene, *u* og *d*. Ettersom det binomiske treet deles opp i mindre og mindre deler (*h* går mot null), går den binomske fordelingen mot en normalfordeling.

### 2.2.4 Black-Scholes opsjonsprisningsformel

Ved å la antall perioder i det binomiske treet gå mot uendelig vil den binomiske opsjonsprisningsformelen gå mot den velkjente Black-Scholes opsjonsprisningsformelen, utviklet av Black, Scholes og Merton på begynnelsen av 70-tallet (Hull, 2006: 281). Dette kommer av at den binomiske fordelingen går mot en normalfordeling når lengden på tidsperiodene, *h,* går mot null. Black-Scholes opsjonsprisingsformelen antar at *avkastningen* til underliggende aktivum er normalfordelt hvilket medfører at aksjekursen følger en lognormal fordeling[5].

Ved å skifte fra en binomisk til en lognormal fordeling, og fra diskret til kontinuerlig tid (når *h* går mot null går antall steg i pristreet mot uendelig og endringer skjer kontinuerlig), brukes ikke lenger den risikojusterte sannsynligheten $p^*$, men funksjonen til den kumulative sannsynlighetsfordelingen til en standardisert normalfordel variabel, N(•), for å fange opp

---

[4] Forwardprisen til en aksje er den prisen som avtales i dag for kontraktsfestet kjøp på et gitt tidspunkt i fremtiden. I motsetning til en opsjon *forpliktes* du til å kjøpe/selge aksjen ved å inngå en forwardavtale.

[5] Dersom x er normalfordelt og x = ln(y) (y = $e^x$) er y lognormalfordelt. Den kontinuerlige forrentede avkastningen til en variabel uttrykkes ved den naturlige logaritmen til variabelen, ergo er aksjeprisen lognormalfordelt dersom avkastningen er normalfordelt.

sannsynligheten for utøvelse. Black-Scholes gir dermed følgende uttrykk for prisen på en europeisk kjøpsopsjon:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{2.6}$$

der

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{2.7}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}} \tag{2.8}$$

Med denne formelen kan europeiske opsjoner prises med stor nøyaktighet så lenge visse forutsetninger er oppfylt. Foruten kontinuerlige, lognormalt fordelte aksjepriser forutsettes det at både risikonøytral rente og volatiliteten til avkastningen er kjente og konstante, og det sees bort fra transaksjonskostnader og skatter.

### *Blacks formel*

Blacks formel (også kalt Black '76) er en utvidelse av BS-opsjonsprisningsformelen og forutsetter at underliggende aktivum er en forwardkontrakt. Forwardpriser forutsettes å være lognormalt fordelt på samme måte som aksjepriser i BS-modellen. Verdien av en europeisk kjøpsopsjon er i Blacks modell gitt ved:

$$C_t = P(t,T)[F_{t,T} N(d_1) - KN(d_2)] \tag{2.9}$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_{t,T} / K) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T - t)}{\sigma\sqrt{\mathrm{T} - t}} \tag{2.10}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T} - t} \tag{2.11}$$

*P(t,T)* er en diskonteringsfaktor, det vil si nåverdien på tidspunkt $t$ av en nullkupongobligasjon som gir utbetaling på 1 ved tidspunkt $T$. $F_{t,T}$ er prisen på en forwardkontrakt inngått på tidspunkt $t$ med forfall på tidspunkt $T$. $\sigma$ er her forwardprisens volatilitet, og den øvrige notasjonen er som tidligere. Å bruke forwardprisen og ikke spotprisen som underliggende aktivum medfører at Blacks formel kan anvendes i visse tilfeller der Black-Scholes formelen kommer til kort, hvilket gjelder obligasjon- og renteopsjoner. Dersom forwardkontrakten og opsjonen har samme forfallsdato vil forwardprisen være lik spotprisen ved slutten av opsjonens løpetid. Dette betyr at modellen gir verdien av en opsjon på spot så vel som på forwards.

Med utgangspunkt i Blacks formel kan en del rentederivater prises relativt enkelt, men det er viktig å huske på at modellen bygger på urealistiske forutsetninger og heller ikke kan anvendes på alle typer rentederivater. Jeg vil komme tilbake til dette i neste kapittel.

### 2.2.5 Put-Call paritet

Ved hjelp av arbitrasjeargumenter kan et viktig paritetsforhold for europeiske opsjoner utledes. Dersom portefølje A inneholder en europisk call og et bankinnskudd på $Ke^{-rT}$, mens portefølje B inneholder en europeisk put og en aksje kan det vises at når puten og callen har samme forfallsdato vil begge porteføljene være verdt $\{max\ (S_T,K)\}$ ved forfall. Siden porteføljene gir samme utbetaling på forfallsdato må de være verdt det samme i dag. Put-Call-paritet er dermed gitt ved:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \qquad (2.12)$$

# 3. Renteopsjoner

En renteopsjon er en opsjon hvis utbetaling avhenger av utviklingen i rentenivået. Holm (1995: 86) hevder at "med renteopsjoner mener man først og fremst opsjoner på et rentepapir, for eksempel en obligasjon". Renteopsjoner kan imidlertid også å være direkte knyttet opp mot låne/innskuddsrenter, jamfør DnBNORs definisjon:

> *"En renteopsjon gir kjøperen rett, men ingen plikt, til (å akseptere) en på forhånd avtalt rente på lån og innskudd. Det betyr at kjøperen kan bestemme seg for å velge markedsrente eller opsjonsrente avhengig av hva som er mest fordelaktig. " (DnBNOR, 2005)*

Med utgangspunkt i overnevnte definisjoner vil jeg starte med å presentere rentebegrepet, slik det møtes i markedet og slik det behandles teorien. Deretter vil jeg presentere et utvalg renteopsjoner. Til slutt i dette kapittelet vil jeg belyse noen av utfordringene vedrørende prising av renteopsjoner.

## 3.1 Rentebegrepet

I daglig tale snakkes det ofte om renten som om det kun finnes en rente. Innen økonomien er det imidlertid nødvendig å nyansere begrepet da det i virkeligheten er snakk om et utall renter avhengig av typen lån eller innskudd. Renten vil også variere med tid til forfall, hyppigheten på rentetilskriving, hvilken periode renten oppgis for og tidspunktet renten bestemmes på. Jeg vil her først ta for meg noen av de rentene som kan observeres i markedet før jeg vil presentere begreper og renteberegninger som brukes for å prise opsjoner.

### 3.1.1 Renter i praksis

#### *Styringsrenten*

I Norge er det Norges Bank som styrer det generelle rentenivået ved å sette styringsrenten, renten på bankenes innskudd i Norges Bank, til ønsket nivå avhengig av konjunktur- og inflasjonsutsikter. Styringsrenten fastsettes ved rentemøter til kjente tider, normalt hver 6. uke (Norges Bank, 2005).

### Statsobligasjonsrenter

Statsobligasjonsrenten er den renten en stat betaler for å låne i egen valuta. Siden en stat ikke kan misligholde et lån i sin egen valuta (de kan alltids trykke mer penger), er statsobligasjoner (i teorien) uten risiko (Hull, 2006: 75). Den norske stat er regnet som en svært sikker lånetager og har ”den høyeste kredittvurderingen hos internasjonale kredittvurderingsbyråer” (Finansdepartementet, 2006). For papirer med løpetid under ett år brukes betegnelsen statskasseveksler.

### LIBOR og NIBOR

I praksis brukes ofte LIBOR - London Interbank Offer Rate- som en tilnærming til risikofri rente. LIBOR er (noe unøyaktig) den renten som gjør at store internasjonale banker er villig til å låne bort penger til andre banker (gitt at begge parter har høy kredittverdighet). LIBOR-renter oppgis for 1, 3, 6 og 12 måneder i alle store valutaer. LIBOR er ikke kontrollert av en enkelt stat og endres kontinuerlig som en følge av tilbud og etterspørsel. Det finnes også en norsk ekvivalent, NIBOR -Norwegian Interbank Offer Rate – som er ”den renten norske banker er villig til å låne til hverandre penger for over en spesifisert periode” (DnBNOR, 2006)[6].

### Bankenes innskudd- og utlånsrente

Bankene setter sine innskudd og lånerente på bakgrunn av styringsrenten og tilbud og etterspørsel i markedet. Disse kan variere mye fra bank til bank, med beløpets størrelse, og fra kunde til kunde avhengig av kredittverdighet. Det er disse rentene vanlige husholdninger stort sett møter i hverdagen.

### Rente på obligasjoner utstedt av foretak

For å hente inn kapital fra markedet kan større foretak utstede omsettbare obligasjoner. Kvaliteten på slike obligasjoner vil variere sterkt avhengig av utsteders kredittrisiko og konkursrisiko. Den renten som kan utledes fra prisene på denne typen obligasjoner vil således variere stort på grunn av variasjoner i risikotillegget investorene krever på sine utlån.

---

[6] Fordi det norske markedet er illikvid brukes implisitte renter som offisielle NIBOR. NIBOR-renten baseres derfor på USD-renten og korrigeres for rentedifferansen mellom NOK og USD (DnBNOR, 2006)

Det finnes flere aktører som evaluerer foretakenes kredittverdighet og gir "ratinger" på bakgrunn av dette.

### *Swaprenten*

Det finnes i dag et stort marked for swap-avtaler. En swap er en kontrakt mellom to parter om å bytte fremtidige kontantstrømmer knyttet til renten på en fiktiv eller ekte hovedstol. Den ene part forplikter seg til å betale fastrente mens den andre betaler som regel en kort pengemarkedsrente, ofte LIBOR (eller NIBOR). Vanligvis konstrueres en swap slik at den har null verdi for begge parter idet avtalen opprettes. Swaprenten er dermed den fastrenten som medfører at swaps har verdi lik null ved inngåelse.

## 3.1.2 Renter i teorien

For å prise renteopsjoner er det nødvendig å gjøre en del beregninger med den informasjonen som innhentes fra markedsobservasjoner av de overnevnte rentene. Jeg vil her ta for meg noen av de beregningene og begrepene det er behov for.

### *Diskret og kontinuerlig forrentning*

Dersom den årlige renten, $R$, godskrives et innskudd $m$ ganger per år i $n$ antall år er sluttbeløpet lik investert beløp multiplisert med:

$$\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} \qquad (3.1)$$

Når $m$ går mot uendelig brukes kontinuerlig forrentning og investert beløp må ganges med:

$$e^{Rn} \qquad (3.2)$$

En årlig rente som forrentes $m$ ganger i året, $R_m$, kan konverteres til en kontinuerlig forrentet rente, $R_c$ ved å bruke følgende formel (finnes ved å sette (3.1) og (3.2) lik hverandre):

$$R_c = m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right) \qquad (3.3)$$

### Spotrenter for ulike løpetider

Dagens renter for ulike løpetider kalles *spotrenter* og avledes fra markedsprisene på obligasjoner. Prisen i dag, $V_{0T}$, på en nullkupongobligasjon pålydende $B_T$ med løpetid $T$ finnes ved å neddiskontere verdien av pålydende med spotrenten for perioden fra *0* til *T*:

$$V_{0T} = B_T e^{-Tr_{0,T}} \qquad (3.4)$$

$r_{o,T}$ er dermed den årlige kontinuerlige renten som låses inn ved å kjøpe obligasjonen og holde den fra i dag til $T$. Omformulering av (3.4) gir følgende uttrykk for spotrenten:

$$r_{0,T} = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{B_T}{V_{0T}}\right) \qquad (3.5)$$

Formel (3.5) kan brukes til å beregne spotrenter med ulik løpetid ut fra markedsprisene på nullkupongobligasjoner.

### Forwardrenter

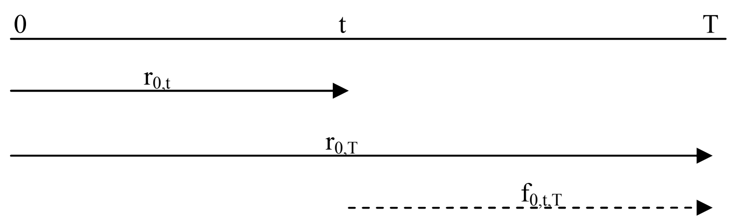
Forwardrenten er den avkastningen som kan oppnås for en plassering fra tidspunkt *t* til *T*, gitt den informasjon som er tilgjengelig i dag, tidspunkt *0*. Forwardrenten kan utledes fra likning (3.4) ved å dele perioden *T* inn i flere deler:

$$V_{0T} = B_T (e^{-r_{0,T}})^T = B_T (e^{-r_{0,t}})^t (e^{-f_{0,t,T}})^{T-t} \qquad (3.6)$$

I denne likningen er $r_{0,t}$ og $r_{0,T}$ spotrenter for løpetid *t* og *T*, mens $f_{0,t,T}$ er forwardrenten for perioden fra tidspunkt *t* til *T* observert på tidspunkt *0*. Omarrangering av likning (3.6) gir følgende uttrykk for $f_{0,t,T}$:

$$f_{0,t,T} = \frac{Tr_{0,T} - tr_{0,t}}{T - t} \qquad (3.7)$$

Vi ser at forwardrenten uttrykkes implisitt av dagens spotrenter, som illustrert i Figur 3.1.




*Figur 3.1 Spotrenter og forwardrente*

### *Rentens terminstruktur - rentekurven*

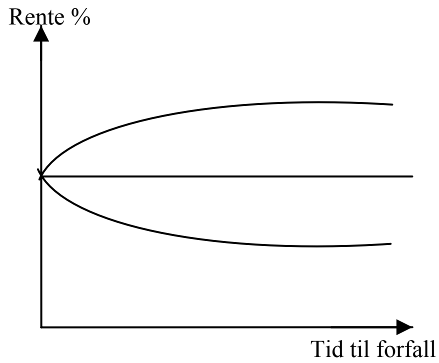
Dersom (3.5) brukes til å utlede dagens renter vil det for papirer med ulike løpetider tilknyttes ulike renter. Serien av spotrenter kalles rentekurven (eller yieldkurven), og viser rentens terminstruktur, det vil si: forholdet mellom renter og tilhørende horisonter.

Som illustrert i Figur 3.1 kan den lange spotrenten fra i dag til tidspunkt *T* uttrykkes som et veid snitt av den korte spotrenten og forwardrenten for resten av perioden. Dette kan uttrykkes mattematisk slik (jamfør formel (3.7)):

$$r_{0,T} = \frac{t}{T} r_{0,t} + \left(1 - \frac{t}{T}\right) f_{0,t,T} \qquad (3.8)$$

Med utgangspunkt i (3.8), der *T* deles inn i to perioder, kan rentekurven ha tre ulike fasonger for $0<t<T$:

- $r_{0,t} < r_{0,T} < f_{0,t,T}$ → stigende rentekurve
- $r_{0,t} = r_{0,T} = f_{0,t,T}$ → flat rentekurve
- $r_{0,t} > r_{0,T} > f_{0,t,T}$ → synkende rentekurve




*Figur 3.2 Helninger på rentekurven*

Ettersom perioden fra *0* til *T* deles inn i flere perioder får uttrykket i (3.8) flere ledd og rentekurven vil kunne skifte mellom å være stigende og synkende i perioder. Det vanligste er imidlertid en form for stigende rentekurve, jamfør *likviditetspreferanseteorien*[7].

[7] Det finnes i hovedsak tre teorier om hvordan rentekurven formes: *Forventningshypotesen* sier at lange renter reflekterer forventede fremtidige korte renter. Ifølge *markedssegementeringshypotesen* er det ikke nødvendigvis noe forhold mellom lange og korte renter, men at disse bare reflekterer etterspørselen i markedene for lange og korte obligasjoner. Til sist har vi *likviditetspreferanseteorien* som tilsier at investorer preferer korte plasseringer fordi disse er mer likvide, mens låntagere ønsker lang løpetid og fast rente. For å matche innlån og utlån kreves dermed en relativ økning i lange renter. (Hull, 2006: 94)

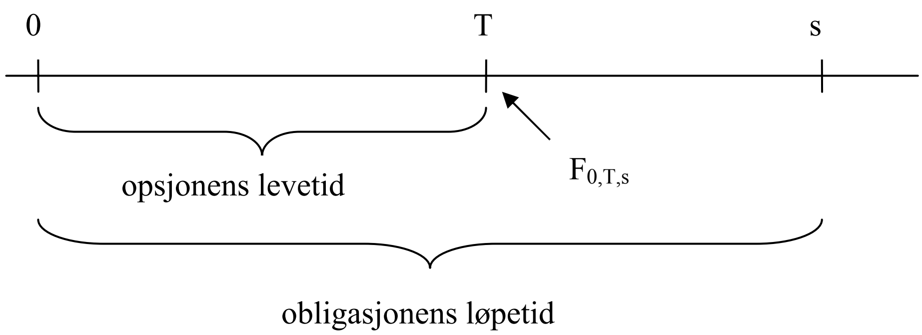
# 3.2 Noen vanlige renteopsjoner[8]

## 3.2.1 Opsjoner på obligasjoner

En opsjon kan gi retten til å kjøpe en obligasjon (call) eller retten til å selge en obligasjon (put) til en avtalt pris på/før et avtalt tidspunkt på samme måte som med aksjer. I tillegg kan obligasjoner ha innebygde opsjonselementer (for eksempel ”callable/puttable bonds”) og vanlige låne- og plasseringsinstrumenter kan ha valgmuligheter som kan tolkes som obligasjonsopsjoner.

Dersom det antas at forwardprisen til en obligasjon er lognormalfordelt ved opsjonens forfall og har konstant volatilitet, $\sigma$, kan Blacks formel (se formel (2.9)) brukes til å prise europeiske obligasjonsopsjoner. Obligasjonens forwardpris ved opsjonens forfall, $T$, observert på tidspunkt $0$ for en obligasjon med løpetid $s$ kan enten finnes ved å summere nåverdien av pålydende ($B_s$) og alle kupongutbetaliner fra $T$ til $s$, eller ved å ta utgangspunkt i markedsprisen på obligasjonen og trekke fra de kupongene en ”går glipp av” ved å kjøpe obligasjonen forward og ikke spot:

$$F_{0,T,s} = NV(B_s + \text{kuponger fra } T \text{ til } s) = \text{Markedspris} - NV(\text{kuponger fra } 0 \text{ til } T) \quad (3.9)$$




*Figur 3.3 Opsjon på obligasjon, ulike løpetider*

[8] Kapittelet bygger på Hull, 2006: kp 26

## 3.2.2 Rentetak – Cap

Et rentetak/ en cap setter en øvre grense på den renten en lånetaker kan betale (eventuelt en investor kan motta). Opsjonseier får således en forsikring i en avtalt periode mot at den flytende renten skal gå over en gitt maksrente også kalt caprenten, notert ved $R_K$. En cap tilsvarer en portefølje av kjøpsopsjoner på den flytende spotrenten og hver slik kjøpsopsjon kalles en caplet.

For en cap med pålydende verdi $L$ og levetid $T$, finner oppgjør sted på tidspunkt $t_1, t_2, \ldots, t_n$ slik at $t_{n+1}=T$. Perioden fra $t_k$ til $t_{k+1}$ representeres ved $\delta_k$ og renten for denne perioden observeres på tidspunkt $t_k$. ”Utøvelsesprisen” her er caprenten, $R_K$, og utbetalingen[9] fra en caplet på tidspunkt $t_{k+1}$ blir da:

$$L\,\delta_k \max(R_k - R_K, 0) \tag{3.10}$$

En cap består av en rekke caplets; verdien på tidspunkt 0 av utbetalingene fra en rentecap er dermed summen av verdien av alle caplets:

$$\sum_{k=1}^{n} L\delta_k \max(R_k - R_K, 0) P(0, t_{k+1}) \tag{3.11}$$

Dersom den flytende renten $R_k$ antas å være lognormalfordelt med konstant volatilitet $\sigma_k$ kan Blacks formel (se formel (2.9)) brukes til å utlede en formel for prisen på en caplet der forwardrenten for perioden $t_k$ til $t_{k+1}$ ( $= F_k$) brukes for $F_{t,T}$:

$$caplet = L\delta_k P(0, t_{k+1})[F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \tag{3.12}$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_k / R_K) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} \tag{3.13}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k} \tag{3.14}$$

[9] I praksis vil det ikke være snakk om noen utbetaling, men en redusert rentebetaling. Matematisk sett er dette imidlertid likt som å betale flytende rente og få utbetalt differansen mellom flytende rente og caprenten.

Alternativt kan en caplet tolkes om en salgsopsjon på en obligasjon. Utbetalingen som finner sted på tidspunkt $t_{k+1}$ fastsettes på tidspunkt $t_k$. For å finne verdien av denne utbetalingen på tidspunkt $t_k$ må utbetalingen neddiskonteres en periode. Verdien av utbetalingen på tidspunkt $t_k$ blir dermed:

$$\frac{L\delta_k}{1+R_k\delta_k}\max(R_k - R_K, 0) \tag{3.15}$$

Dette uttrykket kan omformuleres til:

$$\max\left(L - \frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}, 0\right) \tag{3.16}$$

Av (3.16) fremgår det at en caplet kan sees på som utbetalingen fra en salgsopsjon med forfall $t_k$ på en nullkupongobligasjon pålydende $L(1+R_K\delta_k)$ med forfall $t_{k+1}$, der utøvelsesprisen er $L$. Følgelig kan en cap kan tolkes som en portefølje av europeiske salgsopsjoner på nullkupongobligasjoner.

### 3.2.3 Rentegulv – Floor

Et rentegulv er en forsikring mot at renten faller under et gitt nivå, $R_K$. Dette er følgelig aktuelt dersom en ønsker å sikre en minimumsavkastning på et innskudd. Analogt til oppbygningen av et rentetak består et rentegulv, eller floor, av en sum floorlets. Hver floorlet har en kontantstrøm på:

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0) \tag{3.17}$$

I likhet med verdsettingen av en caplet kan en floorlet prises ved hjelp av Blacks formel når forwardrenten fortutsettes lognormalfordelt, og også tolkes som en kjøpsopsjon på en nullkupongobligasjon.

### 3.2.4 Swap-opsjon

En swap-opsjon (også kalt renteswaption) er en opsjon på en renteswap og gir således holderen rett (men ikke plikt) til å gå inn i en renteswap på et bestemt tidspunkt i fremtiden. Som jeg tidligere har vært inne på (se side 15) kan en renteswap sees som en avtale om å bytte en fastrenteobligasjon mot en obligasjon med flytende rente. Ved inngåelse av en swap er verdien av obligasjonen med flytende rente alltid lik pari kurs, hvilket er swapens hovedstol. En swap-opsjon kan derfor anses som en opsjon til å bytte en fastrenteobligasjon mot hovedstolen (Hull, 2006: 626).

Anta at en swap-opsjon inngått på tidspunk *0* gir rett til å inngå en swap på tidspunkt *T*. Swappen innebærer å betale $s_X$ (fastrente) mot å motta NIBOR fra og med tidspunkt *T* til og med tidspunkt *T+n* på en prinsipal *L*. Swappen gjøres opp *m* ganger i året, dermed blir betalingen på fastrenteobligasjonen $s_x$* *L/m*. Realisert n-årlig swaprente på tidspunkt *T* er gitt ved $s_T$. Betalingen på fastrenteobligasjonen dersom man inngår en swap på tidspunkt *T* er dermed $s_T$*L/m*. Ved å sammenligne kontantstrømmene fra en swap med fastrente $s_T$ med kontantstrømmene fra en swap med fastrente $s_X$ finnes utbetalingen fra swap-opsjonen:

$$\frac{L}{m}\max(s_T - s_X, 0) \tag{3.18}$$

Denne kontantstrømmen inntreffer *m* ganger i året de *n* årene swapen eksisterer. Følgelig har vi en rekke utbetalingstidspunkter: $t_1$, $t_2$, ...., $t_{mn}$. Hver utbetaling er en kjøpsopsjon på $s_T$ med utøvelsespris $s_X$. Dersom den underliggende swaprenten forutsettes lognormalt fordelt ved opsjonens forfall kan disse kjøpsopsjonene prises med Blacks formel. Dagens verdi av kontantstrømmen mottatt på tidspunkt $t_i$ blir da:

$$\frac{L}{m}P(0,t_i)[s_0 N(d_1) - s_X N(d_2)] \tag{3.19}$$

I uttrykket er $s_0$ er forward swaprente på tidspunkt *0* og $\sigma$ er volatiliteten til forward swaprente. $d_1$ og $d_2$ beregnes analogt til formlene vist på side 11. Den totale verdien av swap-opsjonen er dermed gitt ved:

$$\sum_{i=1}^{mn}\frac{L}{m}P(0,t_i)[s_0 N(d_1) - s_X N(d_2)] \tag{3.20}$$

Dersom vi definerer: $A = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn} P(0,t_i)$, kan verdien av en swap-opsjon utrykkes som:

$$LA[s_0 N(d_1) - s_X N(d_2)] \tag{3.21}$$

Dersom swap-opsjonen gir rett til å *motta* fastrenten, $s_x$, er utbetalingene gitt ved

$$\frac{L}{m}\max(s_X - s_T, 0) \qquad (3.22)$$

Dette er en salgsopsjon på swaprenten $s_T$, og verdien blir:

$$LA[s_X N(-d_2) - s_0 N(-d_1)] \qquad (3.23)$$

# 3.3 Utfordringer ved prising av renteopsjoner

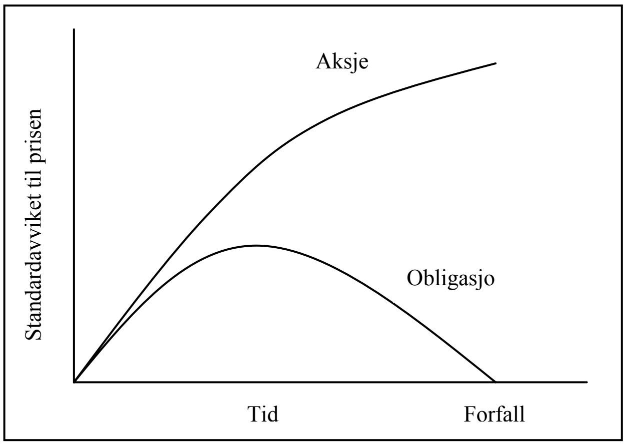
Utviklingen av modeller for prising av opsjoner har i hovedsak hatt som utgangspunkt at underliggende aktivum er en aksje. Modeller som opprinnelig er beregnet for prising av opsjoner på aksjer har blitt forsøkt tilpasset opsjoner på renter og obligasjoner med mer eller mindre hell. Den mest anerkjente og brukte er Blacks, presentert i kapittel 2, men dessverre kan ikke denne alltid brukes. Rentederivater er vanskeligere å verdsette enn aksje- og valutaderivater (blant annet) på grunn av tre momenter jeg vil ta for meg her: egenskaper ved rentens oppførsel, varierende volatilitet langs rentekurven og behovet for å modellere hele rentekurven.

**1) Oppførselen til en enkelt rente er mer komplisert enn en aksje/valuta**

Renten er ikke et omsettbart papir, og det finnes ingen markedspris på renten. Renten avhenger av en langt mer komplisert prosess. Ifølge Bjerksund og Stensland (1995) analyseres fremtidig rente ”med utgangspunkt i tilbud og etterspørsel - eller for å være mer presis – som et resultat av preferanser, investeringsmuligheter samt politiske og internasjonale rammebetingelser”. Det hersker dermed ingen enighet om hvordan renteprosessen best beskrives.

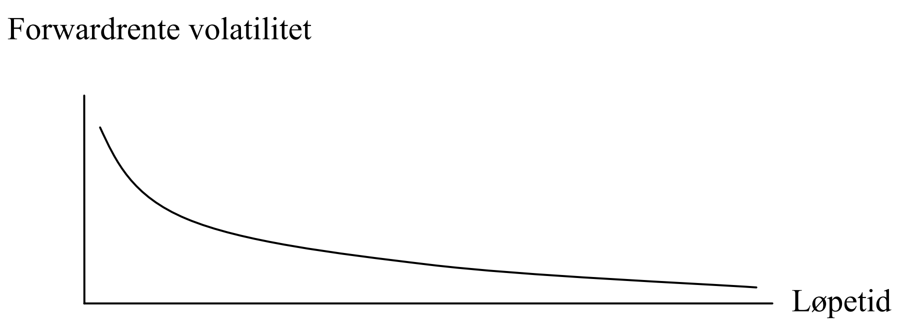
**2) Volatiliteten ved ulike punkter på rentekurven varierer.**

Mens man uten særlig problemer kan anta konstant volatilitet for aksjeavkastningen er volatiliteten kilde til mye hodebry ved prising av renteopsjoner. Når det snakkes om volatilitet i sammenheng med rentesensitive papirer kan det enten menes prisvolatilitet eller ’yield’-volatilitet. Prisvolatilitet henspeiler på usikkerheten angående prisen på en obligasjon. I motsetning til en aksje har en obligasjon en forfallsdato der prisen vil konvergere pålydende verdi (’pull-to-par’-effekten). Prisvolatiliteten for en obligasjon vil derfor naturlig minske etter hvert som forfall nærmer seg. I motsetning til aksjepriser som blir stadig mer usikre jo lenger frem i tid man ser, finnes det ingen usikkerhet om en obligasjons verdi ved løpetidens slutt. Dette er illustrert i Figur 3.4, der det tydeliggjøres at forskjellen mellom utviklingen i volatiliteten for en aksje og en obligasjon blir større etter hvert som tiden går. Å bruke formler beregnet på aksjeopsjoner for å prise renteopsjoner vil følgelig kun fungere som en rimelig tilnærming for opsjoner med relativ kort løpetid i forhold til underliggende obligasjon (Sulebak, 1996: 8).




*Figur 3.4: Utvikling i usikkerhet for aksje- og obligasjonspriser (Hull og White, 1993: 50)*

Å uttrykke usikkerhet i form av 'yield'-volatilitet (= avkastningsvolatilitet, standardavviket til renten) reduserer 'pull-to-par'–problemet, men er dessverre heller ikke problemfritt ettersom 'yield'-volatiliteten tenderer til å øke når obligasjonen nærmer seg forfall (Hull og White, 1993: 51). Denne egenskapen gjelder også om en bruker forwardrenten og volatiliteten til denne (jamfør Blacks formel), som illustrert i Figur 3.5.




*Figur 3.5: Forwardrentens volatilitet (Sulebak, 1996: 9)*

Det essensielle er at uansett hvordan volatiliteten uttrykkes så varierer denne med ulike horisonter. Opsjonspriser er i stor grad avhengig av volatiliteten til det underliggende aktivum, derfor er det ønskelig at prisningsmodeller tar hensyn til de spesielle egenskapene ved rentens volatilitet.

**3) For å kunne verdsette mange produkter er det nødvendig å utvikle en modell som beskriver hele rentekurven.**

Egenskapene presentert ovenfor medfører at opsjonsprisningsformler for å verdsette rentederivater ikke kan brukes blindt. Dersom forutsetningene modellen bygger på ikke stemmer med virkeligheten vil heller ikke svarene være pålitelige.

Ifølge Hull (2006: 629, min oversettelse) er ”essensen av Blacks modell at verdien av underliggende aktivum er lognormalfordelt ved opsjonens forfall”. Dette betyr at for en europeisk opsjon på en obligasjon forutsetter Blacks modell at obligasjonsprisen er lognormalfordelt ved forfall, for en cap forutsetter modellen at renten som er underliggende hver at de konstituerende capletsene er lognormalt fordelt. Problemet er at hver av disse modellene er internt konsistente, men de ulike versjonene av modellen er ikke konsistent seg i mellom: når forwardprisene på obligasjoner er lognormale, er ikke fremtidige spotrenter og swaprenter lognormale; når fremtidige spotrenter er lognormale er ikke forwardpriser på obligasjoner og swaprenter lognormale (ibid: kp26). Å bruke ulike modeller i ulike situasjoner har mange ulemper: parametrene for volatiliteten blir ikke konsistente mellom de ulike versjonene og det blir også vanskelig å bestemme total eksponering aggregert over ulike renteavhengige instrumenter (Hull og White, 1996: 225).

Ifølge Hull (2006: 631, min oversettelse) er fremgangsmåten ved bruk av Blacks modell ”korrekt for enkle utgaver av renteopsjoner, men kan ikke anvendes i alle situasjoner”. Videre viser ikke disse modellene hvordan renten utvikler seg over tid, og kan derfor ikke brukes til å verdsette amerikanske opsjoner. For å verdsette renteopsjoner som er mer kompliserte eller av amerikansk type trengs en modell som sier noe om utviklingen i spotrenten over tid. Med en slik *rentemodell* kan renteavhengige instrumenter prises på en konsistent måte (Hull og White, 1996: 225). Dette er tema for neste kapittel, der jeg skal se nærmere på ulike tilnærminger for modellering av rentebaner.

# 4. Rentemodeller

Som presisert i forrige kapittel er det mye som taler for å modellere hele rentekurven når en priser renteopsjoner. Det finnes flere tilnærminger for å beskrive renteprosessen og jeg vil i dette kapittelet presentere et utvalg. Den renten som skal modelleres er den korte spotrenten, *r*, det vil si: avkastningen på en obligasjon med "kortest mulig" tid til forfall (Wilmott, 2000: 557). Fra denne renten kan obligasjonspriser for alle mulige forfall utledes og således også renter for alle løpetider. Når renteopsjoner prises ved bruk av en rentemodell gjelder fortsatt prinsippet om risikonøytralitet, jamfør avsnitt 2.2.2. Opsjonsprisen avhenger følgelig kun av prosessen *r* følger i en risikonøytral verden; hvordan *r* uvikler seg i den virkelige verden er irrelevant (Hull, 2006: 649).

Rentemodellene kan deles inn to forskjellige typer: likevektsmodeller og arbitrasjefrie modeller. I dette kapittelet vil jeg forklare kjennetegnene ved disse to modelltypene og ta for meg et par eksempler innen hver gruppe. Først vil jeg imidlertid forsøke å presentere logikken og forutsetningene som ligger til grunn for rentemodellering på et generelt nivå. Notasjonen varier mellom ulike lærebøker og artikler; for å sikre konsistent bruk holder jeg meg i hovedsak til den notasjonen som er å finne i kapittel 28 i "Options, Futures and other Derivatives" av John C. Hull (2006).

## 4.1 Generelt om rentemodeller

Når en modellerer renter er det ønskelig å kunne si noe om både korte og lange renter, for å danne et bilde av hele terminstrukturen. For å forenkle arbeidet antas det imidlertid ofte at det kun finnes én kilde til usikkerhet, nemlig den korte spotrenten, *r*. I slike *én-faktor* modeller (kun én faktor er stokastisk) forutsettes den korte spotrenten å inneholde all relevant informasjon om rentemarkedet. Det modelleres en bane for renten, *r*, som tilhører en kort periode, *t*. I en risikonøytral verden vil investorer over en periode *t* til $t + \Delta t$ i gjennomsnitt tjene $r(t)\ \Delta t$ (Hull, 2006: 649). Følgelig kan verdien av en nullkupongobligasjon som utbetaler 1 ved forfall uttrykkes som:

$$P_{tT} = E^{Q}[e^{-\bar{r}(T-t)}] \tag{4.1}$$

Der $E^Q$ fortsatt betegner forventet verdi i en risikonøytral verden (jamfør avsnitt 2.2.2). Neddiskonteringen er i kontinuerlig tid til $\bar{r}$ som er gjennomsnittet av *r* for perioden fra t til T (forfall). Dersom $R_{tT}$ er den fremtidige (realiserte) spotrenten i denne perioden vil verdien av den samme nullkupongobligasjonen kunne skrives som utbetalingen på 1 neddiskontert til denne renten:

$$P_{tT} = e^{-R_{tT}(T-t)} \qquad (4.2)$$

Å sette de to uttrykkene i (5.1) og (5.2) lik hverandre gir at:

$$R_{tT} = -\frac{1}{T-t} \ln E^Q[e^{-\bar{r}(T-t)}] \qquad (4.3)$$

Likningen viser at rentens terminstruktur på ethvert tidspunkt kun avhenger av t og T (som er kjent) og verdien på *r*. Av dette følger at ved å definere den risikonøytrale prosessen for *r* defineres også alt om dagens rentekurve og hvordan den endres over tid (Hull, 2006: 650). Dette muliggjør at vi kan estimere rentens terminstruktur ved hjelp av en risikonøytral prosess for spotrenten *r*.

Et utgangspunkt for å beskrive utviklingen i *r* er å anta at denne stokastiske prosessen kan beskrives som en generalisert wienerprosess[10]:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \qquad (4.4)$$

Likning (4.4) forteller oss at endringer i den korte spotrenten *(dr)* er gitt ved et driftsledd (*m(r)dt*) og et variansledd (*s(r)dz*). Både *m* og *s* er her funksjoner av renten og uavhengige av tiden, men disse egenskapene vil imidlertid variere fra modell til modell. *dz* er en wienerprosess[11] og bringer således inn det 'tilfeldige' elementet i modellen. Forskjellen mellom rentemodellene jeg nå skal se på ligger først og fremst i hvordan *m* og *s* defineres.

[10] Wilmott (1998) redegjør relativt grundig for de tekniske detaljene i kp 34.

[11] Definisjon ifølge Hull (2006, 759, min oversettelse). "*En Wienerprosess er en stokastisk prosess der endringer i en variabel over en kort periode Δt følger en normalfordeling med forventning 0 og varians lik Δt*"

## 4.2 Likevektsmodeller

Likevektsmodeller tar utgangspunkt i økonomiske variabler som antas å påvirke den korte spotrenten, *r*, og definerer en prosess for *r* ut fra forutsetninger om disse. Først når prosessen er definert kan det sies noe om hva denne impliserer for obligasjonspriser og opsjonspriser (Hull, 2006: 650). En ulempe med likevektsmodeller er dermed at de ikke automatisk passer dagens terminstruktur. Selv om man etterstreber å fremskaffe parametere som gjør at modellen relativt godt gjenspeiler markedsdata, kan avvik fra markedsobservasjoner oppstå.

Arbeidet med rentemodellering startet i form av likevektsmodeller og skjøt fart i slutten av 70-tallet, og det finnes i dag langt flere modeller en det er rom for her. Jeg vil presentere tre av de viktigste modellene, utviklet av henholdsvis Rendleman og Bartter, Vasicek og Cox, Ingersoll og Ross (*CIR*).

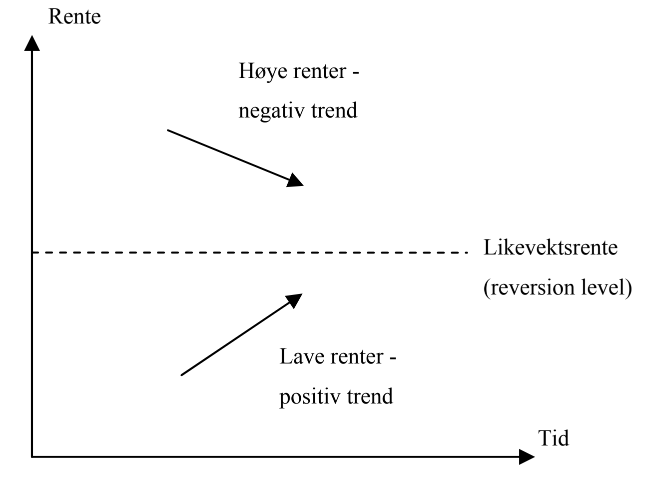
### 4.2.1 Rendleman og Bartter

I modellen til Rendleman og Bartter beskrives prosessen for *r* ved:

$$dr = \mu r\,dt + \sigma r\,dz \quad \text{, der } \mu \text{ og } \sigma \text{ er konstanter.} \qquad (4.5)$$

Den korte spotrenten *r* følger her geometrisk Brownsk bevegelse[12], med forventet drift $\mu$ og standardavvik $\sigma$. Her er modellen presentert i kontinuerlig tid; den opprinnelige versjonen er en diskret utgave av aksjekursprosessen i Black-Scholes modellen (dvs renten følger en lognormal fordeling, jamfør avsnitt 2.2.4). Forutsetningen om at renten oppfører seg som en aksjekurs medfører at renten over tid ikke returnerer til et likevektsnivå. På godt norsk: prosessen er ikke 'mean reverting'. Dette er uheldig da det finnes gode økonomiske argumenter for at høye renter gir negativ drift (renten går ned), og lave renter gir positiv drift (renten øker) (Hull, 2006: 651), se Figur 4.1.

[12] definisjon ifølge Hull (2006: 750 og 758, min oversettelse): *En stokastisk prosess ofte forutsatt for 'asset prices' der logaritmen til den underliggende variabelen følger en generalisert Wienerprosess.*




*Figur 4.1: Mean reversion – likevektsrente (Hull, 2006: 651)*

### 4.2.2 Vasicek

I Vasiceks modell er prosessen for *r* en Ornstein-Uhlenbeck-prosess[13] av følgende form (McDonald, 2003: 732):

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\ dz \quad \text{, der a, b og } \sigma \text{ er konstanter} \qquad (4.6)$$

Leddet *a(b-r) dt* innebærer at renten over tid trekkes mot et langsiktig likevektsnivå *b* med en rate *a*. Dette betyr at modellen har 'mean reversion', jamfør Figur 4.1. Når *a*, *b* og *σ* er fastsatt kan hele terminstrukturen bestemmes som en funksjon av *r(t)* (Hull, 2005: 652). Modellens største svakhet er følgene av at variansleddet (*σ dz*) er uavhengig av *r,* dermed er variasjonen i *r* uavhengig av rentenivået og negative nominelle renter kan oppstå (McDonald, 2003: 733).

[13] En Ornstein-Uhlenbeck-prosess er en aritmetisk Brownsk bevegelse modifisert for å inkludere "mean reversion" (McDonald, 2003: 635)

### Cox, Ingersoll og Ross (CIR)

CIR beskriver den korte spotrentens prosess i kontinuerlig tid slik:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}\ dz \qquad (4.7)$$

Modellen har de samme 'mean reversion' -egenskapene som Vasicek-modellen, men CIR antar at spotrenten følger en kvadratrotsprosess. Som følge av at det stokastiske leddet er proporsjonalt med kvadratroten av renten unngås negative renter og rentens variabilitet øker når rentenivået øker.

## 4.3 Arbitrasjefrie modeller

Som tidligere nevnt er svakheten med likevektsmodellene at de ikke automatisk passer dagens terminstruktur. Selv om parametrene kan velges for å gi en god tilpasning, kan det likevel hevdes at det er vanskelig å ha tillitt til opsjonspriser utledet fra en modell som ikke med sikkerhet angir dagens terminstruktur korrekt. Arbitrasjefrie modeller er i motsetning designet for å være fullt ut konsistente med dagens terminstruktur. Hull (2006: 654, min oversettelse) forklarer forskjellen slik: "I likevektsmodellene er dagens terminstruktur en output, mens i denne typen modell er de en input".

Arbitrasjefrie modeller tar utgangspunkt i den observerbare terminstrukturen og beskriver en bevegelse for rentekurven som er konsistent med denne. For å tilpasse en rentemodell til terminstrukturen, må renteprosessens driftsledd spesifiseres som en ukjent funksjon av tiden. Med andre ord, tidsavhengig drift innføres (dvs. koeffisienten til *dt* er nå en funksjon av *t*). Følgelig kan likevektsmodeller i mange tilfeller gjøres om til arbitrasjefrie modeller ved å inkludere en tidsfunksjon i driften.

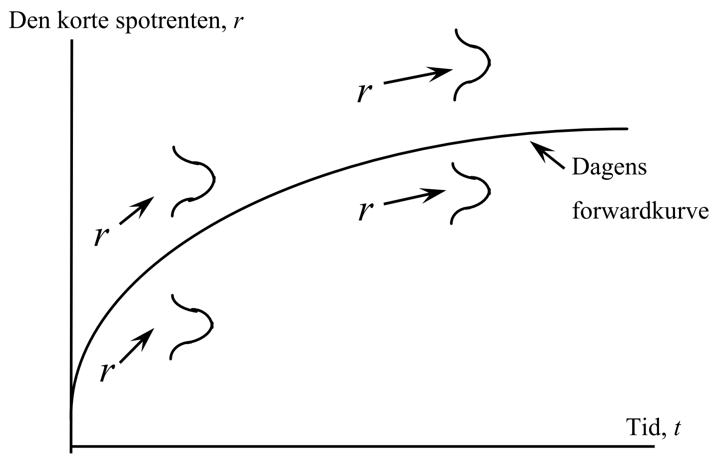
Jeg vil her ta for meg Ho-Lee modellen, en modell utviklet av Black, Derman og Toy og en av modellene presentert av Hull og White. Avsluttende vil jeg til slutt si noen ord om modeller som tilbyr en rikere volatilitetsstruktur enn de overnevnte: to-faktor modellen til Hull og White, den omfattende modellen til Heath, Jarrow og Morton og den relativt nyutviklede LIBOR-markedsmodellen.

### 4.3.1 Ho-Lee

Ho og Lee var først ute med å introdusere en arbitrasjefri rentemodell i en artikkel i 1986 (Hull, 2006: 654). Obligasjonspriser modelleres ved hjelp av et binomisk tre med to parametere: den korte rentens standardavvik og markedsprisen på den korte rentens risiko (hvilket senere, i tråd med opsjonsteori, har vist seg å være irrelevant ved prising av rentederivater, jamfør avsnitt 2.2.2). I kontinuerlig tid kan modellen uttrykkes som:

$dr = \theta(t)dt + \sigma\, dz$ *, der* σ *er konstant og* θ(t) *er en tidsfunksjon* *(4.8)*

Driftsleddet, *θ(t),* velges slik at modellen passer dagens terminstruktur, og definerer således den gjennomsnittelige retningen *r* beveger seg i på tidspunkt *t*. *θ(t)* kan kalkuleres analytisk slik: $\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t$ der $F_t(0,t)$ er den partielle deriverte forwardrenten med hensyn på tiden. Retningen renten beveger seg i er uavhengig av nivået på *r,* ergo har modellen ikke 'mean reversion'. Fraværet av 'mean reversion' er illustrert i Figur 4.2 og kan forklares ved følgende resonnement: som en tilnærming er *θ(t)* lik $F_t(0,t)$, hvilket betyr at den gjennomsnittelige retningen den korte spotrenten beveger seg i (på ethvert fremtidig tidspunkt) bestemmes av helningen på forwardkurven, uavhengig om *r* ligger over eller under forwardkurven (Hull, 2006: 654-655).




*Figur 4.2: Ho-Lee modellen (Kilde: Hull (2005:655))*

### 4.3.2 Black, Derman og Toy (BDT)

Opprinnelig presenteres utviklingen den korte spotrenten i BDT-modellen ved et binomiske tre (jamfør avsnitt 2.2.3), som oppfyller kravet om arbitrasjefravær ved at dagens terminstruktur og volatilitetsstruktur brukes som input ved konstruksjon av treet. BDT-modellen forutsetter at *r* er lognormal fordelt (McDonald, 2003: 743), og renteprosessen kan ifølge Wilmott (2000: 575) uttrykkes i kontinuerlig tid slik:

$$d(\ln\ r) = [\theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln(r)]dt + \sigma(t)dz \qquad (4.9)$$

Modellen har mange gode egenskaper som 'mean reversion', tilpasning til dagens markedsdata, kun positive renter og tidsavhengig volatilitet. Modellen er imidlertid lite analyserbar og er i følge Wilmott (1998: 487) i hovedsak konstruert nettopp for å lett kunne tilpasses markedsdata.

### 4.3.3 Hull-White

Hull og White har presentert flere rentemodeller, deriblant en modell som kan tolkes som, og ofte omtales som, Vasicek-modellen med tidsavhengig drift (Hull og White, 1996: 219). Jeg vil gjennomgående referere til denne modellen som Hull-White modellen. Den risikonøytrale spotrenten forutsettes å følge en normalfordelt stokastisk prosess av følgende form:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \text{ ,der a og σ er konstanter.} \qquad (4.10)$$

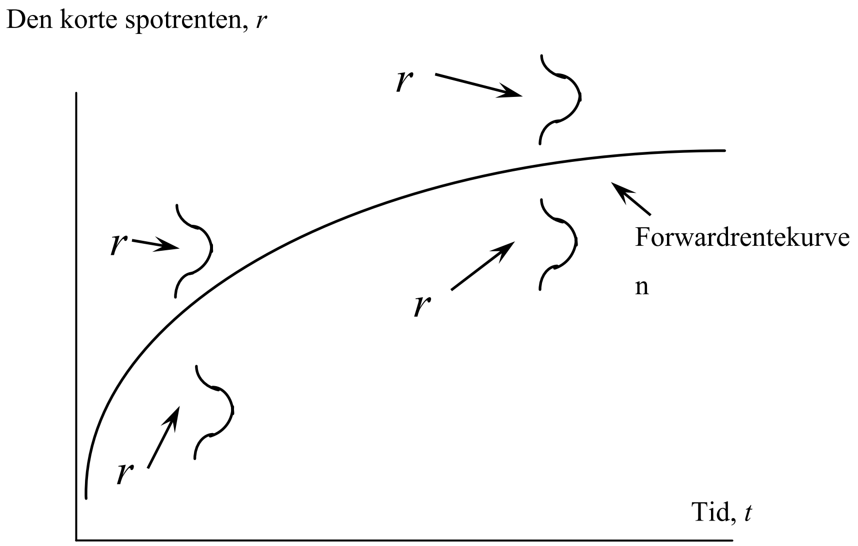
den samme prosessen kan også skrives som:

$$dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz \qquad (4.11)$$

Også her er *θ(t)* en tidsavhengig driftsrate og velges slik at modellen eksakt passer dagens terminstruktur. *a* angir graden av mean reversion: på tidspunkt *t* vil renten reversere til *θ(t)/a* med raten a. Denne reversjonsraten angir forholdet mellom korte og lange renters volatilitet: når a øker blir lange renter mindre volatile. Dersom vi setter *a*=0 (dvs: alle renter er like variable) korresponderer modellen med Ho-Lee-modellen. Tilsvarende som i Ho-Lee-modellen kan *θ(t)* beregnes fra dagens terminstruktur:

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \qquad (4.12)$$

Ifølge Hull (2006: 656) er det siste leddet vanligvis meget lite. Dersom det ignoreres blir driften for $r$ på tidspunkt $t$: $F_t(0,t) + a[F(0,t) - r]$. Denne likningen viser rett og slett at $r$ i snitt følger helningen på forwardkurven og når den avviker fra denne vil den reversere tilbake med en rate $a$. Dette er illustrert i Figur 4.3.




*Figur 4.3 Hull-White modellen (Kilde: Hull (2006: 656)*

Merk at her, i motsetning til i Ho-Lee modellen, er retningen $r$ trekkes mot avhengig av om $r$ i utgangspunktet ligger over eller under forwardrentekurven. Dette gjenspeiler 'mean-reversion', der høye renter har negativ trend og lave renter har positiv trend, jamfør Figur 4.1.

### 4.3.4 Andre modeller

De rentemodellene jeg nå har beskrevet er gode verktøy for prising av rentederivater. De har imidlertid svakheter som mer sofistikerte modeller har søkt å forbedre. Ifølge Hull (2006: 679) er de to viktigste begrensningene at modellene kun har èn kilde til usikkerhet og at de ikke gir brukeren total frihet til å velge volatilitetsstruktur. Jeg vil her ta for meg tre modeller som søker å overkomme disse beskrankningene: Hull og Whites to-faktor modell, Heath, Jarrow og Morton–modellen (HJM) og LIBOR-markedsmodellen. Disse modellene gir større fleksibilitet, men er til gjengjeld noe mer kompliserte. Jeg har av den grunn valgt å utelate de tekniske detaljene for disse modellene.

#### *Hull-White to-faktor modell*

En to-faktor modell tar, som navnet impliserer, hensyn til to kilder til usikkerhet ved modellering av renten. Hull og White har utviklet en arbitrasjefri to-faktor modell der prosessen for den korte renten reverserer til den lange renten, som igjen følger en stokastisk prosess:

$$d\,f(r) = \left[\theta(t) + u - a\,f(r)\right]dt + \sigma_1\ dz_1 \tag{4.13}$$

der $u$ i utgangspunktet har en verdi lik null og følger prosessen:

$$du = -bu\ dt + \sigma_2 dz_2 \tag{4.14}$$

$a$, $b$, $\sigma_1$ og $\sigma_2$ er konstanter og $z_1$ og $z_2$ er wienerprosesser. $\theta(t)$ velges også her slik at modellen er konsistent med dagens rentekurve. $u$ er med å bestemme reversjonsnivået til $r$ og reverserer selv tilbake til null med en rate $b$. Når man tar hensyn til to faktorer kan det produseres et rikere mønster av bevegelser i terminstrukturen og volatiliteten enn ved de enklere én-faktor modellene (Hull, 2006: 653 og 657). Under gitte forutsetninger om $f(r)$ gir modellen analytiske prisningsformler, men disse er langt mer kompliserte enn for èn-faktor versjonen (for utledning av prisningsformler se Hull 2006: technical note 14, tilgjengelig på forfatterens hjemmeside).

### *Heath, Jarrow og Morton (HJM)*

HJM-modellen gir et meget generelt rammeverk for hvordan forwardrenten kan modelleres på en arbitrasjefri måte, og mange rentemodeller kan følgelig tolkes som en spesifisert HJM-modell (Cairns, 1994:91). HJM-modellen tar utgangspunkt i forwardkurven og finner et utrykk for den risikonøytrale prosessen til den instantane forwardrenten $f$ som kun er avhengig av volatiliteten til obligasjonspriser. Denne volatiliteten $v$ kan på sin side være avhengig av både tidligere og nåværende renter og obligasjonspriser, og prosessen blir dermed stiavhengig (dvs: ikke Markov) (Wilmott, 2000: 647).

Ifølge Hull (2006: 681) er nøkkelfunnet til HJM en link mellom driften og standardavviket til den korte forwardrenten. Arbitrasjefraværsrestriksjoner krever at utviklingen av forwardrenter avhenger på en spesiell måte av volatiliteten til obligasjonspriser. Resultatet er at ved å bruke en spesifikk volatilitetsmodell brukes implisitt en spesifikk modell for utviklingen av forwardrenten (McDonald, 2003: 754). HJM-modellen gir viktig teoretisk innsikt, men er tidkrevende å jobbe med. I tillegg uttrykkes modellen ved den instantane forwardrenter som ikke er direkte observerbar i markedet, og kan derfor være forholdsvis vanskelig å kalibrere til observerte markedspriser (Hull og White, 1996: 226).

### *LIBOR-markedsmodellen (LMM)*

Brace, Gatarek og Musiela, Jamshidian, og Miltersen, Sandmann og Sondermann har utviklet en modell som uttrykkes ved bruk av forwardrenten slik aktørene i markedet er vant til å bruke dem (Hull, 2006: 682). Modellen er basert på de forwardrentene som bestemmer prisene på caps er derfor relativt enkel å kalibrere til dagens markedspriser (ibid: 694). LMM finner et utrykk for prosessen til forwardrenten i en ”rolling forward risk-neutral world” og kan utvides til å inkludere flere uavhengige faktorer.

I likhet med HJM-modellen finnes det ikke analytisk løsningsformler for LMM, og vi kan heller ikke representere renteprosessen i et rekombinerende rentetre. Dette betyr at for å implementere disse modellene må man bruke simuleringsteknikker.

# 5. Metode

Jeg har nå gått gjennom hovedtrekkene i teorien som ligger til grunn for prising av opsjoner knyttet mot rentenivået. I dette metodekapittelet skal jeg nå ta for meg mitt valg av fremgangsmåte for å anvende denne teorien til å verdsette opsjoner tilknyttet låneprodukter. Formålet med den påfølgende analysen er i hovedsak å belyse teorien ved å illustrere hvordan teorien anvendes på to praktiske eksempler.

Jeg har tidligere bemerket at det finnes flere tilnærminger til å prise rentederivater, men at det ikke hersker noen klar enighet om hvilken som er mest pålitelig. Det klart enkleste og minst tidkrevende er å bruke Blacks formel, og denne metoden er derfor mye brukt av praktikere. Blacks formel krever kun estimering av én ukjent parameter ($\sigma$), og er dermed et naturlig utgangspunkt for å anslå verdien av en opsjon. Blacks formel gir en enkel og ukomplisert tilnærming til prising av europeiske opsjoner, men som jeg har argumentert i tidligere kapitler er ikke Blacks formel alltid anvendbar og høster kritikk for å være inkonsekvent når den anvendes på rentederivater.

Et alternativ til Blacks formel er å bruke en av rentemodellene presentert i kapittel 4. For noen av disse modellene kan opsjonsverdier finnes analytisk. Om modellen ikke har analytiske løsninger, eller opsjonen har en komplisert struktur, kan simulering av rentebaner være et godt alternativ. Å prise med en modell for renteprosessen er mer tidkrevende og komplisert, men i kontrast til Blacks formel er metoden skreddersydd prising av renteopsjoner.

Først i dette kapittelet vil jeg diskutere valget av rentemodell og konkludere med at Hull-White modellen er godt egnet mitt formål. Videre vil jeg utdype hvordan denne modellen kan brukes for å prise opsjoner analytisk eller ved Monte Carlo simulering. Jeg vil deretter presentere hvilke data som ligger til grunn for utarbeidelsen av dagens terminstruktur og hvilke estimater jeg vil bruke for parametrene i modellene. Til slutt vil jeg rette et kritisk blikk mot fremgangsmåten ved å trekke frem fordeler og ulemper ved metoden.

## 5.1 Prising ved bruk av rentemodell

I kapittel 4 presenteres ulike modeller som kan brukes for å beskrive utviklingen i den korte spotrenten. I dette avsnittet vil jeg diskutere hvilke egenskaper som bør vurderes for å velge modell. Deretter vil jeg sammenligne de ulike modellene og argumentere for at Hull-White-modellen er et godt valg.

### 5.1.1 Valg av modell

Det er mange faktorer som spiller inn når man skal velge modell. Ulike situasjoner setter ulike rammer for hvilke ressurser som står til disposisjon og hva som kreves av modellen. De vurderinger som ligger til grunn for valg av modell kan oppsummeres i to betraktninger: en avveiing mellom modellens analyserbarhet og kompleksitet og en vurdering av hvor godt modellen synes å gjenspeile markedsdata og den sanne, dog ukjente, prosessen for $r$.

#### *Analyserbarhet og kompleksitet*

Det er ønskelig at modellen er lett å analysere og intuitivt gir mening. Samtidig er det bra om modellen fanger opp flest mulig av de underliggende faktorene som driver renteprosessen, hvilket innebærer å inkludere flere forklaringsfaktorer og eventuelt la flere ledd være stokastiske. De enkleste modellene er i større grad analytisk medgjørlige, og for flere av disse kan eksplisitte formler for prising europeiske opsjoner på obligasjoner utledes. For mer komplekse modeller finnes det som regel ikke analytiske løsninger. Ifølge Treepongkaruna og Gray (2003: 1) skyldes dette i hovedsak at fordelingen til fremtidige renter ofte er ukjent når $r$ følger en komplisert tidsserieprosess. Det er også ønskelig at renteprosessen er Markov, ettersom det da er lettere å jobbe analytisk med modellen. For en ikke-Markov prosess vokser antall noder i et rentetre eksponentielt med antall intervaller, dermed blir nøyaktig prising svært tidkrevende (Hull og White 1996: 282).

Jo flere modellegenskaper som inkluderes, jo mer kompleks blir modellen. Selvfølgelig er det positivt å ta flere hensyn, men dette medfører også at modellen blir vanskeligere både å forstå og implementere.

### Tilpasning til markedsdata og den sanne renteprosessen

En rentemodell er til lite nytte om brukeren ikke har tiltro til at den gir godt bilde av den virkelige prosessen som driver renten. Det finnes imidlertid ingen bred enighet om hvilke egenskaper denne prosessen faktisk beskrives ved. Det er imidlertid åpenbart ønskelig at modellen unngår å gi negative renter, har fornuftige 'mean-reversion' –egenskaper og at modellen impliserer en troverdig volatilitetsstruktur.

Enkelte forfattere advarer mot å innføre tidsavhengige parametere for å oppnå eksakt tilpasning til dagens markedsdata (jamfør arbitrasjefrie rentemodeller), da dette kan gi en "falsk sikkerhet" og gi "utilsiktede resultater" (Holm, 1995: 46). Flertallet synes imidlertid å mene at en slik tilpasning er en absolutt nødvendighet for å ha tiltro til de opsjonsprisene modellen gir.

Det hersker også uenighet om den korte renten best beskrives av en lognormal eller Normal modell. Wilmott (1998: 488) hevder at "i virkelighet er spotrenten nærmere de lognormale enn de Normale modellene". Dette blir imidlertid tilbakevist av Levin (2004) som hevder at selv om dette muligens stemte på 90-tallet beskrives renten nå langt bedre ved en normalfordeling.

### Valgt modell: Hull- White-modellen

På bakgrunn av forrige avsnitt er konklusjonen at det er ønskelig med en Markov, arbitrasjefri modell som er enkel å forstå og analysere, gir analytiske prisningsformler og som på en pålitelig måte representerer de underliggende driverne for den virkelige renteprosessen.

Hvilken av de modellene jeg har tatt for meg her passer best til denne beskrivelsen? Inspirert av Holm (1995: 48) og Sulebak (1996: 13) har jeg samlet noen av modellegenskapene i Tabell 5.1 for å lettere kunne sammenligne dem:

*Tabell 5.1 Sammenligning av egenskaper til rentemodeller*

| | Rendleman og Bartter | Vasicek | CIR | Ho og Lee | BDT | Hull og White |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Renteprosessen | $dr=\mu\, dt+\sigma\, dz$ | $dr=a(b-r)dt+\sigma\, dz$ | $dr=a(b-r)dt+\sqrt{r}dz$ | $dr=\theta(t)dt+\sigma dz$ | $d(\ln r)=[\theta(t)-\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln(r)]dt+\sigma(t)dz$ | $dr=[\theta(t)-ar]dt+\sigma dz$ |
| Analytisk løsning | Nei | Ja | Ja | Ja | Nei | Ja |
| Arbitrasjefri | Nei | Nei | Nei | Ja | Ja | Ja |
| Rentens fordeling | Normal | Lognormal | Chi-kvadratisk | Normal | Lognormal | Normal |
| Mean reverting | Nei | Ja | Ja | Nei | Ja | Ja |

En gjennomgang av tabellen viser at Hull-White modellen innehar flest av de skisserte ønskede egenskapene. I likhet med de fleste arbitrasjefrie modellene er den underliggende renteprosessen i Hull-White modellen Markov.

Hull-White modellen forutsetter at renten er normalfordelt, hvilket medfører at modellen tillater negative renter. Hull og White (1996: 270) argumenterer for at denne muligheten ikke har særlig stor sjanse for å inntreffe på grunn av modellens 'mean-reversion' - egenskaper, og derfor heller ikke har noen stor innvirkning på modellens resultater. Dette understøttes av Levin (2004) som hevder i sin artikkel "Interest Rate Model Selection", med støtte i undersøkelser av markedsdata, at nettopp Hull-White modellen gir et godt bilde av den virkelige renteprosessen.

### 5.1.2 Implementering av Hull-White modellen

#### *Analytisk løsning*

En god egenskap med Hull-White modellen er muligheten for analytisk prising av obligasjoner, hvilket hjelper arbeidet med å prise opsjoner betraktelig. Dersom vi legger til grunn at $r$ følger prosessen skissert i (4.11) er obligasjonspriser på et fremtidig tidspunkt $t$ gitt ved (formlene er hentet fra Hull (2006: 657) og Hull og White (1996: 304))

$$P(t,T)=A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \qquad (5.1)$$

der

$$B(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \tag{5.2}$$

og

$$\ln A(t,T)=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}+B(t,T)F(0,t)-\frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT}-e^{-at})^2(e^{2at}-1) \tag{5.3}$$

Med disse likningene kan prisen på nullkupongobligasjoner med forfall $T$ på et fremtidig tidspunkt $t$ fremskaffes ved bruk av dagens obligasjonspriser og den prosessen som er definert for $r$ (Hull og White, 2006: 657). Obligasjonspriser er per definisjon summen av obligasjonens neddiskonterte kontantstrømmer. I et risikonøytralt modellrammeverk er verdien på tidspunkt t av en obligasjon med forfall *T,* pålydende 1, dermed gitt ved:

$$P(t,T)=E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r(\tau)\,d\tau}\right] \tag{5.4}$$

Når $r$ er normalfordelt (slik den er i Hull-White modellen) blir uttrykket i parentesen i (5.4) lognormalfordelt (jamfør fotnote 5). Denne egenskapen gjør det mulig å uttrykke prisen på en europeisk kjøpsopsjon, *c,* på tidspunkt $t$ når underliggende aktivum er en obligasjon med forfall s, ved en formel som har samme oppbygning som Blacks (Hull og White, 1996: 303):

$$c=LP(0,s)N(h)-XP(0,T)N(h-\sigma_P) \tag{5.5}$$

der

$T$: Opsjonens forfall

$s$: Den underliggende obligasjonens forfall ($t < T < s$)

$X$: Utøvelsespris

$L$: Pålydende verdi på underliggende obligasjon

Tilsvarende er verdien av en put gitt ved:

$$p=XP(0,T)N[-(h-\sigma_p)]-LP(0,s)N(-h) \tag{5.6}$$

og for både put og call har vi at:

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \frac{P(0,s)L}{P(0,T)X} + \frac{\sigma_P}{2} \qquad (5.7)$$

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(s-T)}\right)\sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}} \qquad (5.8)$$

$\sigma_P$ er standardavviket til logaritmen til obligasjonsprisen på tidspunkt *T*, obligasjonsprisens volatilitet er dermed gitt ved $\sigma_p / \sqrt{T}$ (Hull, 2006: 658)

## *Monte Carlo simulering*

Ifølge Wilmott (2001: kp 25) finnes det i hovedsak tre numeriske metoder for å verdsette derivater når det ikke finnes eksakte formler: utviklingen i prisen kan presenteres i et pristre (jamfør binomisk prising), endelig-differensmetode kan anvendes eller man kan bruke Monte Carlo simulering. Jeg har valgt å bruke Monte Carlo simulering for å implementere Hull-White rentemodellen, og vil derfor ikke gjøre rede for de to andre metodene.

Monte Carlo simulering er et verktøy for å modellere situasjoner med usikkerhet. Metoden brukes ved komplekse situasjoner som ikke kan løses analytisk, dette gjelder for eksempel opsjoner der vi ikke har prisningsformler. Monte Carlo simulering av en stokastisk prosess er en fremgangsmåte for å generere tilfeldige utfall for denne prosessen, og kan således brukes til å simulere rentebaner basert på de forutsetninger vi har tatt om sannsynlighetsfordelingen til renten (Hull, 2006: 271).

**Simulering og rentederivater**

Under risikonøytral verdsetting er opsjonsprisen gitt ved (jamfør avsnitt 2.2.2):

$$Opsjonsverdi = E_t^Q\left[ e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} utbetaling(r) \right] \qquad (5.9)$$

Uttrykket i parentesen er en neddiskontert fremtidig opsjonsutbetaling. Forventningen under risikonøytralitet av denne utbetalingen er opsjonens verdi. Ved simulering kan rentebaner i en risikonøytral modell genereres, og *forventningen* av nåverdien av utbetalingen estimeres ved å ta gjennomsnittet av nåverdien av utbetalingen for et stort antall rentebaner.

Paul Wilmott (2001: 463) presenterer følgende oppskrift for å estimere opsjonsverdier med stokastisk rente:

1. Simuler et utfall for den stokastiske prosessen for spotrenten, *r*, fra dagens dato til opsjonens forfall. Dette gir en realisasjon av en rentebane for spotrenten.
2. Beregn utbetaling fra opsjonen og gjennomsnittelig rente over hele tidsperioden for denne realisasjonen.
3. Utfør mange slike realisasjoner.
4. Beregn nåverdien av utbetalingen fra opsjonen for hver realisasjon ved å neddiskontere utbetalingen med den gjennomsnittlige renten for denne realisasjonen.
5. Beregn gjennomsnittet av nåverdiene av utbetalingene for alle realisasjonene. Dette er opsjonsverdien.

**Simulering og Hull-White modellen**

I Hull-White modellen er renteprosessen i kontinuerlig tid gitt ved: $dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz$. For å få modellen over i diskret tid skrives uttrykket om til: $r_{t+1} - r_t = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon$, der $\varepsilon$ er en tilfeldig trekning fra en standard normalfordeling med forventning 0 og standardavvik lik[14]. Neste periodes rente kan dermed uttrykkes som dagens rente pluss et tidsavhengig driftsledd og et stokastisk variansledd:

$$r_{t+1} = r_t + a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon \tag{5.10}$$

θ(t) beregnes etter formel (4.12): $\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$. Her inngår forwardkurven derivert med hensyn på tiden, $F_t(0,t)$. Denne kan tilnærmes ved helningen på forwardkurven:

$$F_t(0,t) = \frac{\partial F(0,t)}{\partial t} \approx \frac{\Delta F(0,t)}{\Delta t} = \frac{F(0,t+1) - F(0,t)}{\Delta t} \tag{5.11}$$

[14] Slike tilfeldige trekninger genereres i Excel ved funksjonen NORMSINV(RAND())

**Monte Carlo simulering og nøyaktighet**

For å vurdere nøyaktigheten av et estimat funnet ved Monte Carlo simulering kan standardavviket, $v$, til estimatet $\overline{V_0}$ beregnes. Monte Carlo–estimatet er gjennomsnittet av en distribusjon av opsjonspriser generert fra tilfeldige utfall av renteprosessen, $s$ angir dermed standardavviket til en trekning, mens $v$ gir standardavviket til estimatet fremskaffet ved $m$ trekninger, og beregnes slik (McDonald, 2003: 606):

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(V_0^j - \overline{V_0}\right)^2}{m-1}} \tag{5.12}$$

$$v = \frac{s}{\sqrt{m}} \tag{5.13}$$

Siden $m$ angir antall simulerte baner vil $v$ synke ettersom antallet trekninger økes. Standardavviket kan brukes til å angi et konfidensintervall for estimatet. Et (100-p) % konfidensintervall angir en nedre og en øvre verdi, slik at intervallet med (100-p) % sannsynlighet inneholder den sanne opsjonsprisen. Dersom kritisk verdi for intervallet settes til $z_{p/2}$ vil konfidensintervallet være gitt ved:

$$\begin{aligned} V_L &= \overline{V_0} - z_{p/2} v \\ V_U &= \overline{V_0} + z_{p/2} v \end{aligned} \tag{5.14}$$

Der $V_L$ angir nedre grense og $V_U$ øvre grense (Mæland, 2005).

# 5.2 Datagrunnlag

## 5.2.1 Dagens rentekurve

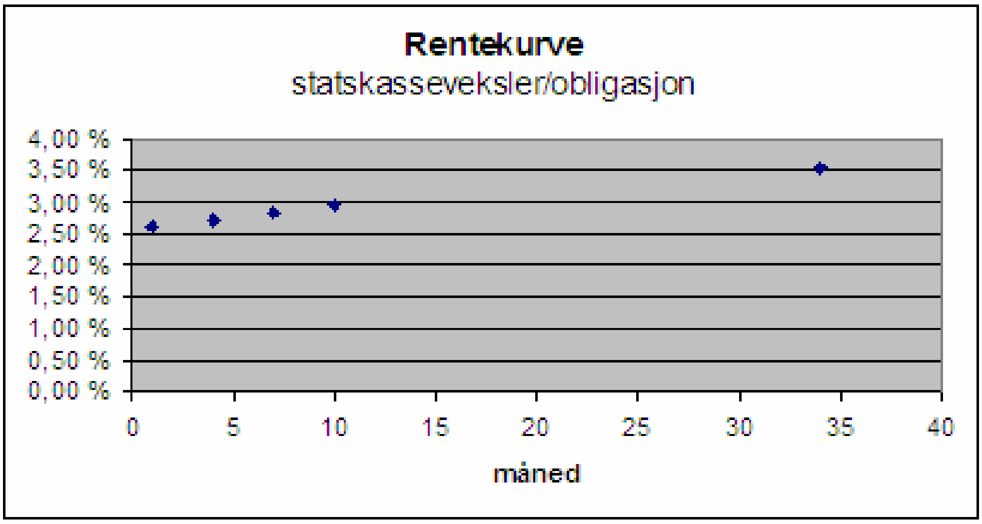
For å kunne neddiskontere utbetalingen fra en opsjon må risikonøytral rente for opsjonens levetid fremskaffes. Siden denne er en ukjent (teoretisk) størrelse er det vanlig å bruke renten på statsobligasjoner eller NIBOR som en tilnærming. Disse rentene oppgis imidlertid ikke for alle mulige løpetider, og en del renter må derfor anslås. I mine beregninger har jeg valgt å bruke stasobligasjonsrenter, da disse er tilgjenglige for løpetider lengre enn ett år. Data for statsobligasjoner og statskasseveksler kan hentes fra Norges Banks hjemmesider (www.norgesbank.no → statistikk → renter). Her oppgis ”årlig effektiv etterskuddsrente” for ulike løpetider med daglig, månedlig eller årlig notering.

I det følgende vil jeg bruke renter observert 30.03.2006. Informasjon er innhentet for 3, 6, 9 og 12-månedersrenter for statskasseveksler og 3-årsrenten for statsobligasjoner. Disse er omregnet til kontinuerlig rente etter formel (3.3) og gjengitt i Tabell 5.2:

*Tabell 5.2: Rente observert på statskasseveksler/obligasjon 30.03.06*

| Løpetid | Rente observert 30.03.06 | Kontinuerlig rente |
|---|---|---|
| 3 mnd | 2,61 % | 2,60152 % |
| 6 mnd | 2,71 % | 2,69180 % |
| 9 mnd | 2,82 % | 2,79059 % |
| 12 mnd | 2,94 % | 2,89761 % |
| 3 år | 3,53 % | 3,46912 % |

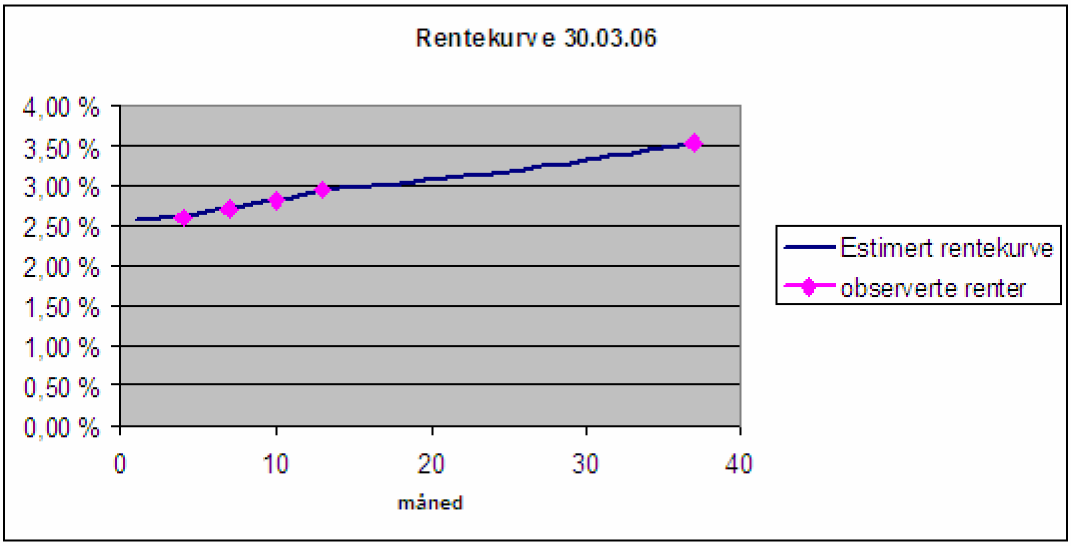
På bakgrunn av denne renteinformasjonen må altså renter for mellomliggende løpetider utledes.




*Figur 5.1: Renteinformasjon per 30.03.2006*

Det finnes flere måter å utarbeide en kurve som går gjennom punktene i figuren ovenfor. Det enkleste er å trekke en rett linje fra punkt til punkt, men det finnes også mer sofistikerte tilnærminger som for eksempel ”maksimum glatthets” -prinsippet basert på at den implisitte forwardrentekurven skal være glattest mulig (se for eksempel Bjerksund og Stensland

(1996)). Jeg har valgt en ad hoc løsning der jeg har anslått verdier for mellomliggende løpetider slik at rentekurven danner et bilde av markedet som er forenlig med den rentekurven som gjengis i Dagens Næringsliv og hjemmesidene til Oslo Børs i slutten av mars 2006. Dette naturligvis ikke den mest korrekte løsningen, men en *tilstrekkelig* løsning for mitt formål med hensyn til de naturlige begrensningene til omfanget av denne utredningen. Data for terminstrukturen er vedlagt i appendiks 1, og illustrert i Figur 5.2:




*Figur 5.2: Estimert rentekurve og observerte renter*

**Lånerentekurven**

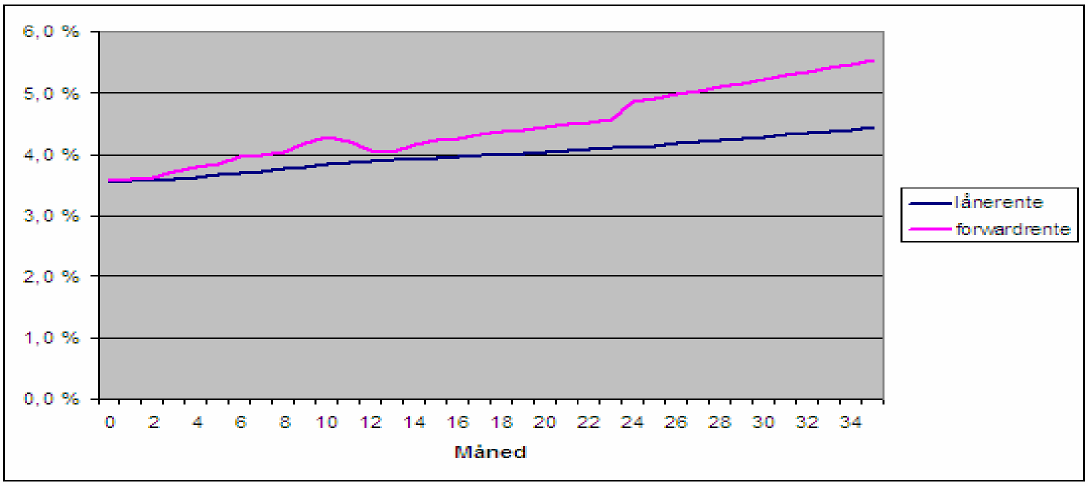
Den renten som løper på et boliglån er høyere enn statsobligasjonsrenten. Den marginen bankene legger til vil vanligvis variere over tid, men jeg har for enkelhets skyld valgt å holde denne konstant på samme nivå som ved inngåelse av avtalen for hele avtaleperioden.

Statsobligasjonsrenten per mars 2006 ligger i underkant av 2,60 %. I det første caset jeg skal ta for meg er utlånsrenten på samme tid 3,6 %. Rentemarginen settes derfor til 1 % og holdes konstant i hele renteopsjonens løpetid.

**Forwardrentekurven**

Når dagens rentekurve for lånerenten er fremskaffet kan forwardrenter beregnes for alle løpetider ved å bruke formel (3.7): $f_{0,t,T} = \dfrac{Tr_{0,T} - tr_{0,t}}{T - t}$. Låne- og forwardrentekurven er illustrert i Figur 5.3. I figuren synliggjøres et av problemene med min fremgangsmåte for estimering av rentekurven: forwardrentekurven blir ikke jevn, men er preget av ”hopp”.

Dette problemet kan overkommes ved å bruke mer sofistikerte metoder for å fremskaffe rentekurven, men vil ikke bli tillagt videre vekt i denne utredningen.




*Figur 5.3 Låne- og forwardrentekurve*

### 5.2.2 Estimering av modellparametre

#### *Blacks modell*

Den eneste parameteren som må estimeres for å bruke Blacks modell er volatiliteten, som forutsettes konstant i opsjonens levetid. Når Blacks modell brukes for å prise en opsjon på en obligasjon forutsettes det at verdien av obligasjonen på det tidspunktet opsjonen forfaller, $B_T$, er lognormal (merk at $T$ er tidspunktet o*psjonen* forfaller, obligasjonen forfaller på et senere tidspunkt $s$). $\sigma$ betegner her standardavviket til forwardprisen til obligasjonen og defineres slik at $\sigma\sqrt{T}$ er gjennomsnittelig standardavvik til logaritmen til den underliggende obligasjon i opsjonens levetid. Ifølge Hull (2006:613) gjelder da forholdet:

standardavviket til ln $B_T = \sigma\sqrt{T}$

Den volatiliteten man i utgangspunktet ønsker å bruke er *fremtidig* volatilitet, men denne er selvfølgelig ukjent, og derfor brukes andre tilnærminger for å finne et rimelig estimat for variabiliteten. *Historisk* volatilitet kan beregnes av tidligere data, men gir ingen garanti for at volatiliteten vil holde seg på samme nivå i fremtidene. Meglere oppgir gjerne *implisitt* volatilitet, som er den volatiliteten som medfører at Blacks modell gir en pris lik markedsprisen på for eksempel en cap eller en swap. Et siste alternativ er å bruke *subjektiv* volatilitet: egne anslag for volatiliteten, basert på tilgjengelig informasjon om historisk og implisitt volatilitet og annen markedsinformasjon (Sætervik, 1999: 37).

Jeg bruker en $\sigma$ på 20 % i analysen. Dette er et subjektivt anslag etter i rådføring med min veileder, Professor Kristian Miltersen ved NHH. Å "velge" en volatilitet på denne måten kan kanskje virke i overkant vilkårlig, men det ligger utenfor denne utredningens omfang å gå videre inn på problematikken ved å sette en verdi for σ.

### *Hull-White modellen*

I den mest generelle formen av Hull-White modellen er både $a$ og $\sigma$ funksjoner av $t$. Funksjonene for $a$ og $\sigma$ velges da slik at de priser utvalgte caps eller swap-opsjoner likt observerte markedspriser på tidspunkt null. Denne metoden kan imidlertid medføre sterk feilprisning fordi fremtidig volatilitetsmønster gjerne avviker fra dagens struktur. Hull og White anbefaler derfor å holde $a$ og $\sigma$ konstant. Modellen kan da kun prise caps og swap-opsjoner *tilnærmet* likt markedsobservasjoner. Fordelen er imidlertid at volatilitetsstrukturen blir stasjonær og det oppnås med dette "robust prising for ikke-standard renteopsjoner" (Hull og White, 1996: 220, min oversettelse).

I Hull-White modellen bestemmer $\sigma$ volatiliteten til spotrenten, mens $a$ angir den relative volatiliteten for lange og korte renter. Disse to volatilitetsparametrene bestemmes i utgangspunktet av analyser av markedsdata på aktivt handlede opsjoner (Clelow og Stricklad, 1998: 218). Dette er det dessverre ikke rom for i denne utredningen, så jeg vil også her bruke anslag innhentet fra min veileder Professor Kristian Milteresen ved NHH. I analysen vil jeg bruke følgende parametere i Hull-White modellen: $a = 0{,}40$ og $\sigma = 0{,}015$. Disse parametrene er kalibrert slik at volatiliteten er i overensstemmelse med implisitt volatilitet på handlede swap-opsjoner i markedet, som for tiden har cirka 20 % swap volatilitet.

## 5.3 Fordeler og ulemper ved metoden

Min metode for å belyse den fremstilte teorien består i korte trekk av å anvende Hull-White modellen for å prise to eksempler på opsjonselementer tilknyttet renten på boliglån. Jeg har valgt å la lånerenten til enhver tid ligge 1 % over den estimerte statsobligasjonsrenten og innhentet anslag på modellens parametere eksogent.

Den mest sentrale ulempen med denne metoden er at mine estimater for opsjonsverdier bygger på forenklende forutsetninger som gjør dem lite anvendelige til indikere en reell markedspris. Det er lite trolig at rentemarginen er konstant og den skjønnsmessige estimeringen av rentekurven er unøyaktig. I tillegg er modellen meget sensitiv for endringer i parametrene, som er bestemt utenfor analysen og dermed ikke nødvendigvis er satt til riktig nivå.

Produktene jeg har valgt å prise er såpass kompliserte at visse forutsetninger er unngåelige for en utredning av begrenset omfang. Samtidig har produktene fordelen av å være enkle å forstå og relatere seg til. Så lenge fokuset er rettet mot fremgangsmåten og metodikken har dermed ikke forenklingene de store konsekvensene.

Det kan hevdes at det å kun anvende én rentemodell er en ulempe. Andre modeller kunne gitt andre svar og det ville også vært nyttig å sammenligne resultater fra de ulike modellene. Dette ville imidlertid gått på bekostning av hvor grundig hver modell behandles, og jeg har derfor sett det som hensiktsmessig å fordype meg i Hull-White modellen. Metoden er etter min mening velegnet for å gi en solid illustrasjon av én tilnærming (av flere mulige) til prising av renteopsjoner, og således vise at den teorien som kan fremstå som virkelighetsfjern og abstrakt er et nyttig verktøy for å verdsette produkter som er relevante også for vanlige husholdninger.

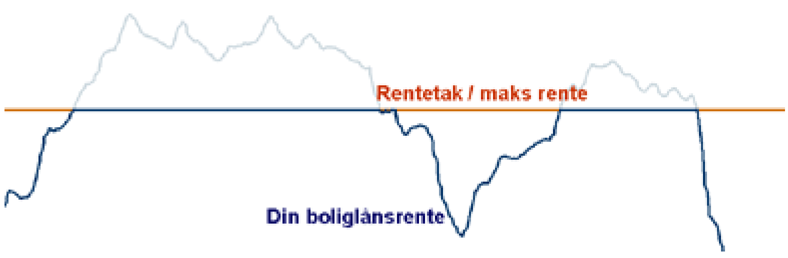
# 6. Analyse

Produktutvikling i lånemarkedet har medført at det nå tilbys lån med visse forsikringselementer eller grad av valgfrihet. For å anslå verdien av slike forsikringer og valgmuligheter tolkes de som opsjoner, og rammeverket for opsjonsprisning presentert i tidligere kapitler kan således anvendes. For å illustrere dette har jeg valgt å se på to typer produkter: boliglån med rentetak og retten til å nedbetale et fastrentelån til pari kurs. Det første produktet er i dag tilgjengelig på det norske markedet, det andre er per dags dato ikke tilbudt i Norge, men godt etablert i blant annet det danske lånemarkedet.

## 6.1 Case 1: Rentetak

Flere banker har de siste årene begynt å tilby sine kunder boliglån med rentetak. Dette betyr at lånetager betaler flytende rente så lenge denne holder seg under en forhåndsdefinert takrente. Dersom den flytende renten går over denne verdien (”taket”) betaler ikke kunden mer enn takrenten. Dette fungerer altså som en forsikring mot høye renter. Innen finanslitteraturen kalles dette en ”cap” og takrenten en ”caprente”, jamfør avsnitt 3.2.

Et slikt produkt kan tolkes som en serie av kjøpsopsjoner på den flytende renten. Opsjonseieren får retten til å betale det beste av flytende lånerente og takrente, en rett som naturlig nok kun utøves når flytende lånerente er høyere enn takrente, se Figur 6.1.




*Figur 6.1 Illustrasjon av rentetak (Nordea, 2005)*

### 6.1.1 Postbankens førstehjemslån

I april 2006 finnes følgende tilbud på Postbankens hjemmesider (tilsvarende er også tilbudt av DnBNOR som eier Postbanken):

**Postbanken Førstehjemslån**

**Nå med garanti mot høy rente - uten at det koster deg noe ekstra.**

| 1. prioritetslån inntil 100 % av kjøpesum | Nominell rente | Effektiv rente* |
|---|---|---|
| Rentesats | 3,60 % | 3,79 % |

Uansett hvor mye lånerenten stiger i markedet ellers, garanterer vi at renten på boliglånet ditt ikke vil øke med mer enn 2,75 prosentpoeng frem til 30. juni 2008. Dette betaler du ingenting for. Opp til rentetaket er renten flytende og vil følge rentemarkedet.

Figur 6.2: Postbanken førstehjemslån (Kilde: www.postbanken.no, 26.04.06)

Det tilbys her et rentetak med løpetid fra datoen for låneopptak til 30. juni 2008. Caprenten er på 3,60 % + 2,75 % = 6,35 %, og forutsettes å være oppgitt som årlig etterskuddsrente. Dette rentetaket tilbys uten vederlag, men kun til nye kunder som kjøper bolig for første gang. I det følgende vil jeg anta at kontrakten inngås 30. mars 2006, løpetiden for rentetaket blir dermed 2,25 år. Lånebeløpet settes til 1 000 000 kroner, og løpetiden til 20 år; rentetaket gjelder dog kun de første 27 månedene, deretter følger lånet vanlig flytende rente. Jeg forutsetter at lånet er avdragsfritt i rentetakets levetid, og vil se på verdien med henholdsvis kvartalsvise og månedlige terminer. Notasjonen fra avsnitt 3.2.2 er repetert i Tabell 6.1 sammen med inndata for case 1.

*Tabell 6.1: Inndata for case 1: rentetak*

| Notasjon | Betydning | Verdi i case 1 |
|---|---|---|
| $L$ | Hovedstol (lånebeløp) | 1 000 000 |
| $T$ | Levetid for rentetaket | 2 år og 3mnd = 2, 25 år |
| $t_k$ | oppgjørsdager, $k = 0, 1, 2, \ldots n \rightarrow t_{n+1} = T$ | $n$=26 (månedlige terminer)<br>$n$= 8 (kvartalsvise terminer) |
| $R_k$ | rente observert på tidspunkt $t_k$<br>for perioden mellom $t_k$ og $t_{k+1}$ | |
| $R_K$ | Caprenten | 6,35 % årlig etterskuddsvis |
| $\delta_k$ | Tidsperioden $t_k$ til $t_{k+1}$ | 1/12 (månedlige terminer) eller<br>1/4 (kvartalsvise terminer) |

### 6.1.2 Prising ved bruk av Blacks modell

#### *Fremgangsmåte*

I avsnitt 3.2.2 demonstrerte jeg at en cap består av en sum av caplets og at hver enkelt caplet kan tolkes som en europeisk kjøpsopsjon på spotrenten. Følgelig kan dette rentetaket tolkes som en portefølje av opsjoner på lånerenten, hvorav hver opsjon kan prises med en utgave av Blacks formel, slik den er oppgitt i formel (3.14): $caplet = L\delta_k P(0,t_{k+1})[F_k N(d_1) - R_K N(d_2)]$

Dersom det 2,25-årige rentetaket har månedlige terminer skal består capen av 27 (2,25*12) caplets. Utbetalingen bestemmes av renten på tidspunkt $t_k$ og kommer til utbetaling på tidspunkt $t_{k+1}$, jamfør vanlig etterskuddsbetaling av renter. Utbetalingen fra den første capleten bestemmes når capen starter ($t_0$) og utbetales etter en måned ($t_1$), mens den siste capen bestemmes på tidspunkt $t_{26}$ og utbetales på tidspunkt $t_{27}$ = 2,25 år. Tilsvarende har en cap med kvartalsvise terminer 9 (2,25*4) caplets som skal prises. Siden rentetaket trer kraft umiddelbart (og ikke på et tidspunkt i fremtiden) og den nåværende renten naturlig nok er kjent, vil verdien av den første capleten være null, uavhengig om det brukes månedlige eller kvartalsvise terminer[15].

Den caprenten som brukes i beregningene oppgis med en forrentningshyppighet som er konsistent med antall terminer per år. En caprente på 6,35 % med årlige terminer tilsvarer en caprente på 6,20 % med kvartalsvise terminer og 6,17 % med månedlige terminer. Også forwardrentene beregnes med samme forrentning som rentebetalingene. Neddiskontering gjøres imidlertid med kontinuerlig rente.  Hver caplet prises med formel (3.14), og summen av disse utgjør verdien av rentetaket. Utskrift fra beregningene ligger vedlagt i appendiks 2.

#### *Resultater*

Med månedlige terminer angir Blacks modell en verdi for rentetaket på kroner 901,00. For kvartalsvise terminer faller verdien til 818,62 kroner, eller henholdsvis 0,09 % og 0,08 %  av lånebeløpet. Det er naturlig at verdien faller med antall terminer per år ettersom hver termin

[15] Den første capleten er egentlig ikke en opsjon per definisjon siden utbetalingen er kjent i dag. Jeg har imidlertid valgt å ta den med slik at fremgangsmåten for prisingen blir lik det den er dersom rentetaket ikke trer i kraft før en gang i fremtiden.

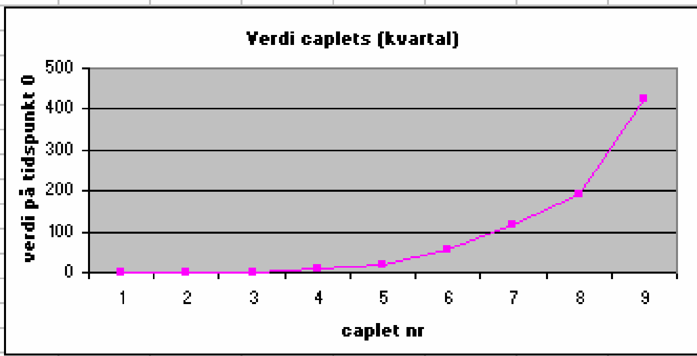
representer en opsjon. Lengre terminer medfører dermed et lavere antall opsjoner med mulighet for utbetaling.

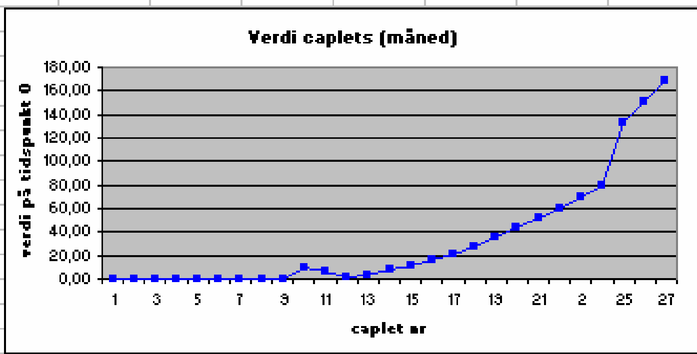
Utregningene er vedlagt i appendiks 2, og oppsummert i figuren nedenfor. Verdien av capletsene øker jo lenger frem i tid de forfaller. Dette kommer både av at dagens rentekurve er stigende og fordi usikkerheten om rentenivået antas å øke med tiden. Fordi opsjoner ikke kan gi negativ utbetaling har økt usikkerhet utelukkende positiv effekt på opsjonsprisen.

**Oppsummering av prising med Blacks modell**

| Månedlige terminer | |
|---|---|
| caplet nr | verdi |
| 1 | 0,00 |
| 2 | 0,00 |
| 3 | 0,00 |
| 4 | 0,00 |
| 5 | 0,00 |
| 6 | 0,01 |
| 7 | 0,14 |
| 8 | 0,36 |
| 9 | 0,99 |
| 10 | 3,15 |
| 11 | 6,24 |
| 12 | 6,62 |
| 13 | 5,33 |
| 14 | 6,41 |
| 15 | 11,76 |
| 16 | 16,24 |
| 17 | 21,60 |
| 18 | 28,19 |
| 19 | 36,07 |
| 20 | 43,53 |
| 21 | 51,71 |
| 22 | 60,57 |
| 23 | 70,09 |
| 24 | 80,24 |
| 25 | 132,25 |
| 26 | 150,26 |
| 27 | 169,24 |
| totalt: | 901,00 |
| i % | 0,0901 % |

| Kvartalsterminer | |
|---|---|
| caplet nr | verdi |
| 1 | 0,00 |
| 2 | 0,00 |
| 3 | 0,47 |
| 4 | 10,52 |
| 5 | 17,06 |
| 6 | 54,73 |
| 7 | 116,08 |
| 8 | 192,82 |
| 9 | 426,94 |
| totalt: | 818,62 |
| i % | 0,0819 % |




*Figur 6.3 Oppsummering av prising med Blacks modell*

## 6.1.3 Prising med Hull-White modellen: analytisk løsning

### *Fremgangsmåte*

I avsnitt 3.2.2 demonstrerte jeg at hver caplet i en cap kan tolkes som en salgsopsjon på en obligasjon som forfaller neste termin. Utøvelsesprisen er hovedstolen ($L$ = 1 000 000) og pålydende verdi på underliggende obligasjonen er $L(1+R_K\delta_k)$. For hver caplet beregnes $\sigma_p$ og $h$ etter formlene presentert i avsnitt 5.1.2, og for å finne $N(-h)$ og $N[-(h-\sigma_p)]$ brukes funksjonen NORMSDIST i Excel. Dette er all data som trengs for å finne dagens verdi av capletsene ved formel (5.6): $p = XP(0,T)N[-(h-\sigma_p)] - LP(0,s)N(-h)$. Jamfør prising med Blacks modell utgjør summen av capletsene verdien av rentetaket.

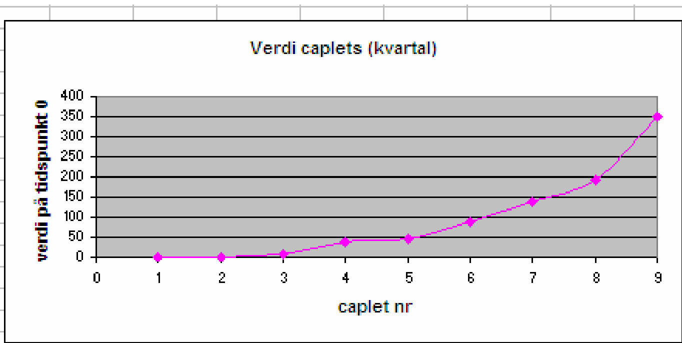
### *Resultater*

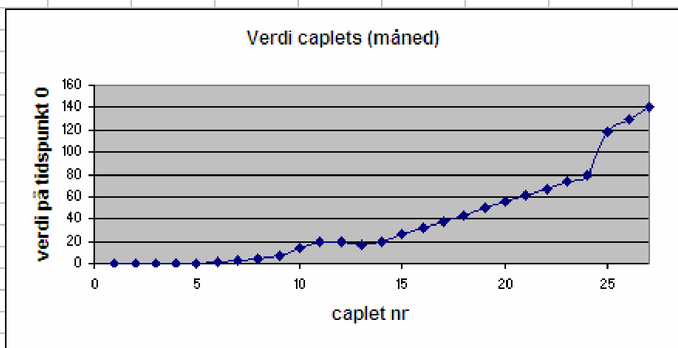
Ved månedlig terminer gir Hull-White modellen en verdi for rentetaket på 1015,53 (0,10 % av lånebeløpet), og for kvartalsvise terminer blir verdien 860,86 (0,86 % av lånebeløpet). Beregningene er presentert i appendiks 3 og oppsummert i figuren nedenfor.

Oppsummering av prising med Hull-White modellen

| Månedlige terminer | |
|---|---|
| caplet nr | verdi |
| 1 | 0,00 |
| 2 | 0,00 |
| 3 | 0,00 |
| 4 | 0,04 |
| 5 | 0,29 |
| 6 | 0,90 |
| 7 | 2,68 |
| 8 | 4,36 |
| 9 | 7,32 |
| 10 | 13,49 |
| 11 | 19,66 |
| 12 | 20,02 |
| 13 | 17,35 |
| 14 | 18,88 |
| 15 | 26,45 |
| 16 | 31,56 |
| 17 | 36,98 |
| 18 | 43,04 |
| 19 | 49,70 |
| 20 | 55,33 |
| 21 | 61,13 |
| 22 | 67,06 |
| 23 | 73,12 |
| 24 | 79,31 |
| 25 | 117,78 |
| 26 | 128,82 |
| 27 | 140,27 |
| totalt | 1015,53 |
| i % | 0,1016 % |

| Kvartalsterminger | |
|---|---|
| caplet nr | verdi |
| 1 | 0,00 |
| 2 | 0,10 |
| 3 | 6,79 |
| 4 | 36,56 |
| 5 | 46,23 |
| 6 | 89,75 |
| 7 | 140,38 |
| 8 | 190,93 |
| 9 | 350,12 |
| | 860,86 |
| | 0,0861 % |




*Figur 6.4:Oppsummering: prising av rentetak med Hull-White modellen, analytisk løsning*

### 6.1.4 Prising med Hull-White modellen: Monte Carlo simulering

Jeg har nå brukt Hull-White modellen for å finne en pris på Postbankens rentetak ved bruk av analytisk løsning. Jeg skal nå bruke samme modell til å prise samme produkt, men jeg vil bruke en annen fremgangsmåte: Monte Carlo simulering. Denne metoden er noe mer tidkrevende og brukes derfor vanligvis ikke når prisningsformler er tilgjenglige. Mitt formål er imidlertid å illustrere hvordan metoden fungerer, og det er da formålstjenlig å ha analytiske svar å sammenligne med.

#### *Fremgangsmåte*

Som jeg tidligere har vært inne på innebærer Monte Carlo simulering å generere en mengde stokastiske utfall for renteprosessen og beregne opsjonsverdien for hver av disse. Den endelige opsjonsprisen er gjennomsnittet av opsjonsprisene for en rekke utfall av renteprosessen. På side 41 har jeg forklart at rentebanen simuleres slik: $r_{t+1} = r_t + a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon$. Renten på ethvert tidspunkt bestemmes altså av renten i forrige periode ($r_t$), konstantene $a$, $\sigma$ og $\Delta t$, det stokastiske leddet ε, og det tidsavhengige driftsleddet $\theta(t)$. $\theta(t)$ beregnes etter formel (4.12) der $F_t(0,t)$ er tilnærmet etter formel (5.9). Den rentebanen som simuleres er den kontinuerlige lånerenten. For å beregne utbetalingene må denne gjøres om til kvartalsvis/månedlig forrentning etter formel (3.3), slik at lånerenten og caprenten oppgis med samme forrentningshyppighet. Når dette er gjort kan utbetalingen fra en caplet med forfall $t_{k+1}$ beregnes med formel (3.10): $L\ \delta_k \max(R_k - R_K, 0)$.

Denne utbetalingen skal så neddiskonteres i kontinuerlig tid med gjennomsnittsrenten for levetiden til hver enkelt caplet. For hver simulerte rentebane må vi derfor beregne utbetalingen på tidspunkt $t_k$ og gjennomsnittlig kontinuerlig lånerente for tidspunkt $t_0$ til $t_k$ for $k=1,2,...,9$ ved kvartalsterminer og $k=1,2,3,...,27$ ved månedlige terminer. Summen av de neddiskonterte utbetalingene utgjør verdien av rentetaket, jamfør prising med Blacks formel og analytisk prising med Hull-White modellen.

Hver gang beregningene i avsnittet over utføres viser ε til en tilfeldig trekning fra en normalfordeling med forventning 0 og standardavvik 1. Denne endres for hver ny beregning, og slik frembringes en rekke anslag på verdien av rentetaket. Verdien av rentetaket finnes ved å ta gjennomsnittet av nåverdien av utbetalingene for et stort antall rentebaner. For å effektivt utføre et stort antall beregninger brukes makroer: et lite sett datainstrukser som automatiserer beregningsprosessen. Jo flere simuleringer, jo mer presist blir svaret. Av tidsmessige bergrensninger og av hensyn til datakapasitet har jeg valgt å bruke 30 000 simuleringer. Skal man prise mange produkter eller ønsker at prisingen skal gå raskere finnes det flere måter å fremskynde konvergens (se for eksempel McDonald, 2003: 609-612 eller Wilmott, 2000: 935), som jeg ikke vil gå videre inn på her.

### Resultater

Ved månedlige terminer gir gjennomsnittet av 30 000 simuleringer en opsjonspris på 1005,44 kroner, og for kvartalsvise terminer blir prisen 909,74, dvs henholdsvis 0,10 og 0,09 % av lånebeløpet. Standardavvik og konfidensintervall for disse estimatene beregnes som gjennomgått på side 40, og er presentert i Tabell 6.2:

*Tabell 6.2: Resultat prising av rentetak ved simulering*

| | Månedlige terminer | Kvartalsterminer |
|---|---|---|
| Verdi rentetak | 1005,44 | 909,74 |
| standardavvik til estimatet *v* | 17,08 | 16,42 |
| 95 % konfidensintervall | [ 971,96 , 1038,92 ] | [ 877,59 , 941,92 ] |

Intervallet presentert i tabellen skal med 95 % sannsynlighet inneholde den sanne opsjonsverdien. For kvartalsdata er imidlertid intervallet ikke forenlig med opsjonsprisen fremskaffet ved analytisk løsning. Jeg vil komme tilbake til årsaken til dette senere i analysen.

Et gjennomført simuleringsprosjekt gir tilgang til rik informasjon om mulige verdier for opsjonen. Ettersom hver rentebane gir *én mulig* verdi av rentetaket, kan den risikonøytrale sannsynligheten[16] for at verdien av rentetaket skal bli større enn en gitt grense, X, fremskaffes ved å beregne *andelen simulerte baner* som gir en total verdi for de neddiskonterte utbetalingene fra rentetaket større enn X.

[16] Vi befinner oss fortsatt i en risikonøytral modellverden. De sannsynlighetene oppgitt her er dermed ikke dirkete overførbare til den ”virkelige” verden, men gir likevel en nyttig illustrasjon av fordelingen av verdier for rentetaket.

*Tabell 6.3: Risikonøytrale sannsynligheter for at verdien av rentetaket overstiger X*

| X | Risikonøytral sannsynlighet for verdi > X (mnd/kvartal) | |
|---|---|---|
| 40 000 | 0,010 % | 0,010 % |
| 30 000 | 0,060 % | 0,057 % |
| 20 000 | 0,430 % | 0,390 % |
| 10 000 | 2,517 % | 2,217 % |
| 5000 | 6,477 % | 5,943 % |
| 1000 | 17,700 % | 16,350 % |
| 0 | 32,037 % | 24,237 % |

Som tabellen viser vil rentetaket gi en utbetaling lik null i henholdsvis 68 og 76 % av de simulerte banene. Sannsynligheten for at verdien av rentetaket skal overstige X, synker imidlertid drastisk ettersom X øker, selv om det riktignok er en ørliten mulighet for at rentetaket skal få en verdi som overstiger hele 40 000 kroner.

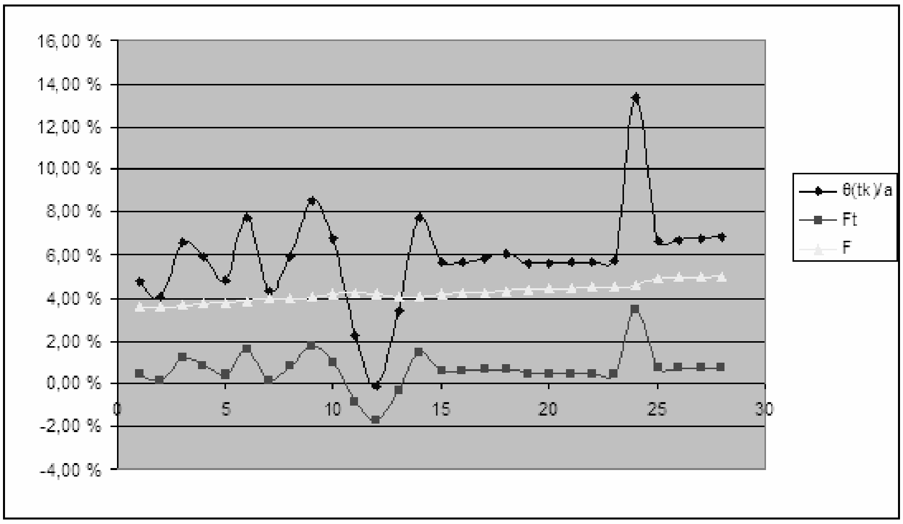
### 6.1.5 Sammenligning av resultater for case 1

Jeg har nå tatt for meg tre ulike tilnærminger til prisingen av et rentetak. Resultatene fra dette er presentert i Tabell 6.4:

*Tabell 6.4: Resultater case 1: Rentetak*

| Modell | Pris (12 terminer per år) | Pris (4 terminer per år) |
|---|---|---|
| Blacks | 901,00 | 818,62 |
| HW – analytisk | 1015,53 | 860,86 |
| HW-simulering | 1005,44 | 909,74 |

Det er vanskelig å si noe generelt om forskjellene mellom prisene ved de to modellene fordi estimatene i stor grad er sensitive for endringer i modellparametrene som er satt skjønnsmessig. Det er imidlertid påfallende at resultatene mellom de to implementeringene av Hull-White modellen viser såpass store avvik. For kvartalsvise terminer er faktisk prisen funnet ved analytisk løsning utenfor konfidensintervallet for estimatet funnet ved simulering. Trolig er dette relatert til beregningen av $\theta(t)$. $\theta(t)/a$ skal vise et slags likevektsnivå for renten, men i mine beregninger svinger $\theta(t)/a$ veldig mye og er også svakt negativ for månedsdata på et punkt. Problemet oppstår fordi rentekurven er estimert litt ”på slump”, dermed blir forwardkurven ujevn. Dette medfører store variasjoner i den deriverte av forwardkurven med hensyn på tid. Det er nesten utelukkende svingningene i $F_t$ som forårsaker variasjonen i $\theta(t)$, som igjen kan være en årsak til avvik mellom den analytiske tilnærmingen og simuleringsresultatene. Dette illustreres i Figur 6.5 som viser $\theta(t_k)/a$, $F_t$, og $F$ for månedsdata. Som nevnt i avsnitt 4.3.3, er $\theta(t_k) \approx Ft + a\ F$, dermed vil kurven til $F_t$ i stor grad påvirke formen på kurven for $\theta(t_k)/a$.




*Figur 6.5: Svingninger i $\theta(t_k)/a$*

Nivået på prisene ligger riktignok i samme området. Trolig er estimatene fra Hull-White modellen med analytisk løsning de beste, ettersom disse bygger på de mest realistiske forutsetningene om renteprosessen og ikke blir like forstyrret av ”hoppene” i forwardkurven som simuleringsresultatene.

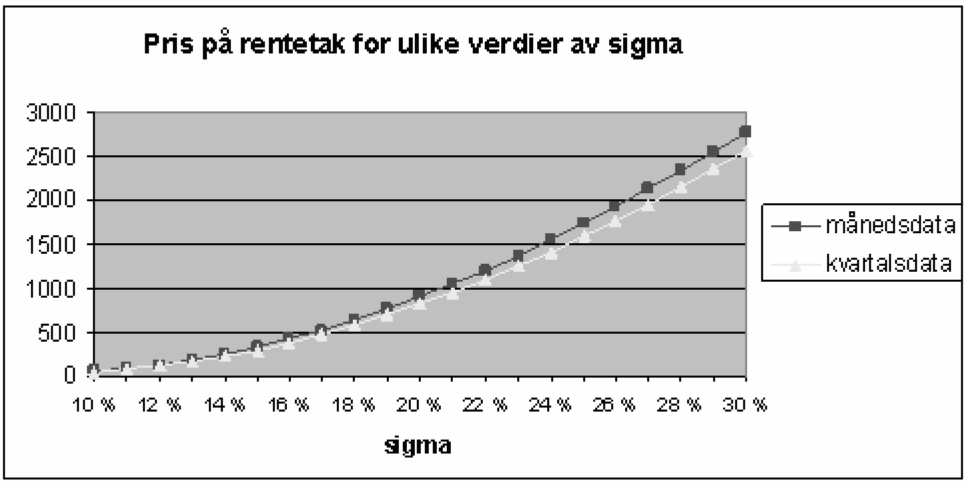
## 6.1.6 Sensitivitetsanalyse

Som jeg viste i forrige avsnitt gir analytisk løsning ved Blacks modell og Hull-White modellen relativt forskjellig resultater. Det er derfor interessant å se hvordan resultatene endres ved endringer i variablene i modellen. Dette gir også en mulighet for å sjekke at modellen reagerer som forventet ved endringer i parametrene. Jeg vil her se på endringer i volatiliteten og caprenten. Verdien av rentetaket forventes å stige når volatiliteten øker fordi en opsjon har kun oppsidepotensial. Utbetalingen kan aldri bli mindre enn null, dermed gir økt usikkerhet kun mulighet for større utbetaling og ingen økt mulighet for tap. Verdien av rentetaket forventes derimot å synke med økt caprente, ettersom det reduserer sannsynligheten for at fremtidig rente overstiger caprenten slik at opsjonen gir utbetaling.

### *Blacks formel*

**Endring i σ**

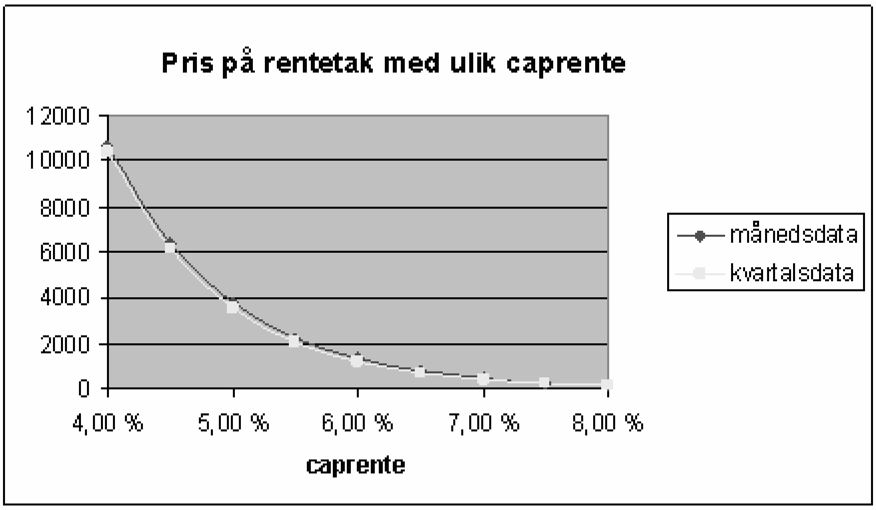
Prisen på rentetaket er som forventet positivt korrelert med σ, jamfør Figur 6.6. Av grafen kan det leses at dersom en σ på cirka 21 % hadde blitt anvendt, ville Blacks modell gitt en pris mer i samsvar med Hull-White modellen.




*Figur 6.6: Pris ved endring i σ - Blacks modell*

**Endring i caprenten, $R_K$**

Prisen på rentetaket synker etter hvert som caprenten øker (merk: σ holdes nå konstant). Ved en caprente på 8 % prises rentetaket til beskjedne 163 og 139 kroner. Ettersom caprenten settes lavere øker verdien av rentetaket drastisk, jamfør Figur 6.7:

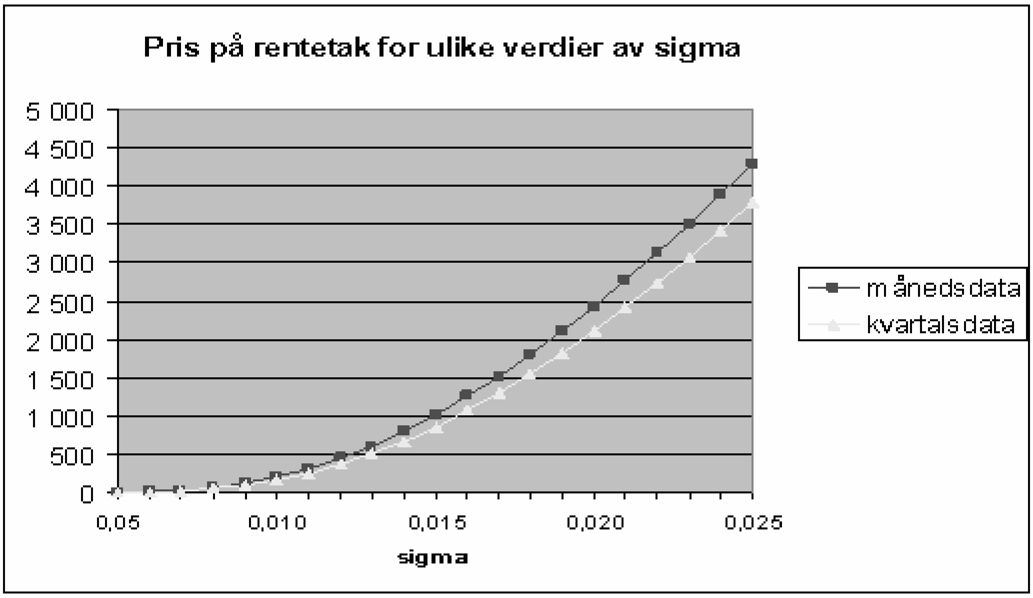



*Figur 6.7: Pris ved endring i caprenten – Blacks modell*

## *Hull-White modellen*

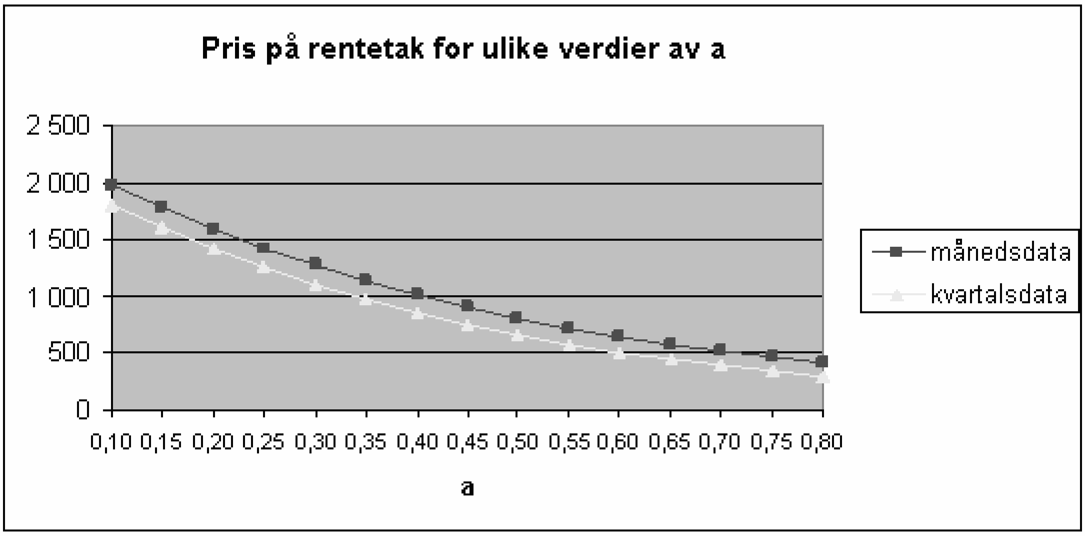
**Endring i volatilitetsparametrene a og σ**

I Hull-White modellen finnes det to volatilitetsparametere: $a$ og $\sigma$. Dersom a holdes konstant og $\sigma$ endres, endres prisen på rentetaket på samme vis som i Blacks modell, jamfør Figur 6.8.



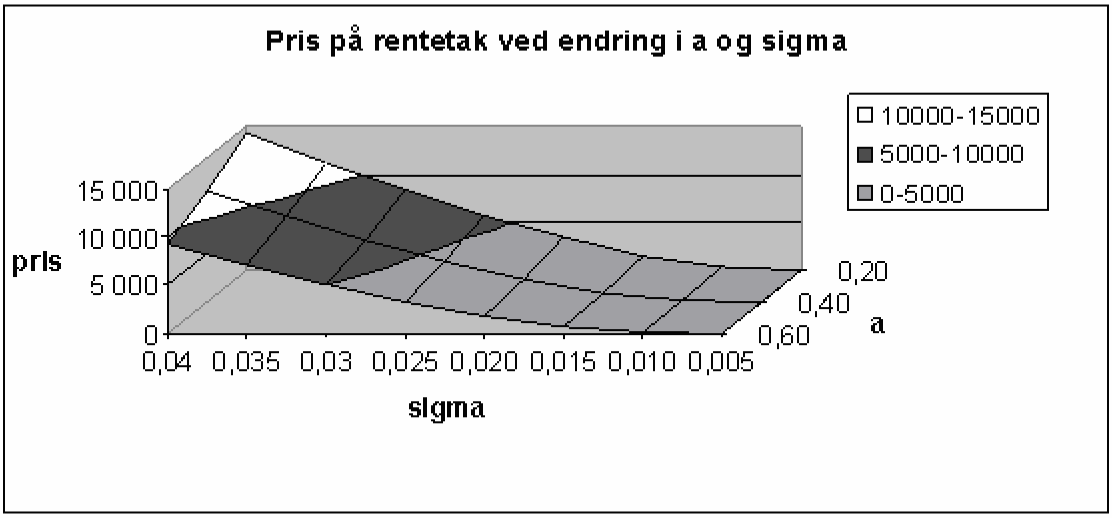

*Figur 6.8: Pris ved endring i σ – Hull-White modellen*

Parameteren $a$ angir graden av 'mean reversion' (se avsnitt 4.3.3). Når $a$ øker blir lange renter mindre volatile og renteprosessen har en sterkere grad av 'mean reversion'. Følgelig medfører høyere $a$ lavere volatilitet og lavere pris, jamfør Figur 6.9




*Figur 6.9 Pris ved endring i a – Hull White modellen*

Jeg har nå vist hvordan prisen endres når kun en parameter endres. Det er fullt mulig å se på hvordan prisen endres når flere variabler endres samtidig, det er bare litt vanskeligere å fremstille grafisk. Figur 6.10 viser prisen på rentetaket beregnet med Hull-White modellen for ulike kombinasjoner av *a* og *σ*. Legg merke til at aksene for *a* og *σ* er satt opp slik at det punktet som ligger i det nederst til høyre lengst frem i diagrammet angir den kombinasjonen som gir lavest pris (lav *σ* og høy *a*), mens hjørnet øverst til venstre lengst bak i diagrammet gir høyest pris (høy *σ* og lav *a*).

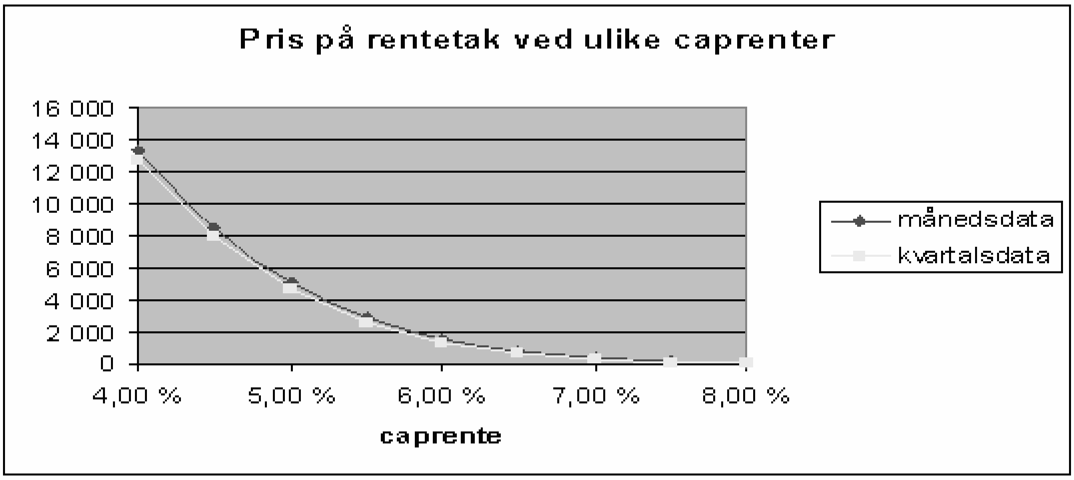



*Figur 6.10: Pris ved endring i a og σ – Hull-White modellen*

Figuren viser at prisen øker når a synker og σ øker: jo lenger til venstre og inn i diagrammet, jo høyere pris får rentetaket.

**Endring i caprenten, $R_K$**

Når caprenten øker synker verdien av rentetaket som i Blacks modell, jamfør Figur 6.11:




*Figur 6.11 Pris på  ved endring av caprente – Hull-White modellen*

## 6.1.7 Oppsummering case 1

Jeg har nå vist tre ulike versjoner av prising av Postbankens rentetak. De to modellene har gitt ulike estimater for prisen på rentetaket, men som sensitivitetsanalysen viser kan modellen manipuleres til å gi likere resultater ved å endre modellparametrene (dette er imidlertid ikke noe mål i seg selv og heller ikke god forskningsetikk). Trolig grunnet ujevn forwardrentekurve ga simulering og analytisk løsning med Hull-White modellen ikke overensstemmende resultater. Prisene fremskaffet analytisk ved Hull-White modellen, på 1015,53 og 860,86 gjenstår da som mest troverdige estimatene på verdien av rentetaket.

Rentetaket har under de forutsetningene jeg har tatt en relativt lav verdi sett i forhold til lånebeløpet. Populariteten til produktet kan derfor indikere at lånetagere tillegger rentetaket en større verdi enn det jeg har kommet frem til her. En årsak til dette er at den virkelige verden avviker fra modellverdenen på flere måter. Opsjonsprising forutsetter at aktørene kan kjøpe og selge instrumenter uten transaksjonskostnader og at det er ingen restriksjoner med hensyn til hvilke posisjoner man kan innta (ubegrenset short-salg osv.). I den virkelige verden har ikke vanlige husholdninger tilgang til særlig mange rentesikringsinstrumenter og har heller ikke mulighet til å fullt ut hedge sine posisjoner. Dermed kan verdien av et slikt produkt fremstå som langt høyere for en risikoavers låntager, som ikke har mulighet til å sikre seg på annet vis, enn de prisanslagene jeg har kommet frem til her.

## 6.2 Case 2: Fastrentelån med rett til forsert nedbetaling

Få norske husholdninger velger fastrente på boliglånet sitt. En årsak til dette er at dersom man har inngått en fastrentekontrakt går man glipp av fordelene ved et eventuelt rentefall og kan bli sittende med et dyrt lån. Dersom man ønsker å komme seg ut av en uheldig fastrentekontrakt må man betale overkurs til banken, for å dekke det tapet banken har på den avbrutte kontrakten. I enkelte land, deriblant Danmark, er det langt vanligere med fastrentelån enn i Norge. En spesiell egenskap med det danske lånemarkedet er konvertering av *realkreditobligasjoner* (lån med sikkerhet i bolig). Et konverterbart fastrentelån kan innfris før løpetiden er gått ut til pålydende kurs. I Econ-rapporten *Rentebinding på boliglån i Norge* (2005) omtales denne retten som en "rett til å forsere tilbakebetalingen av fastrentelån uten å betale full overkurs etter et rentefall". Denne retten innebærer altså å løse ut det gamle lånet og refinansiere boligen til gjeldende markedsvilkår.

Verdien av lån med konverteringsrett vil avhenge av hvilken konverteringsstrategi lånetageren følger (Jørgensen et al: 1999). Empirisk forskning viser gjerne at aktørene til tider er urasjonelle og ikke benytter seg av konverteringsretten på en optimal måte. Jeg vil imidlertid forutsette at låntager oppfører seg fullstendig rasjonelt og dermed følger en optimal utøvelsesstrategi. Jeg vil også se bort i fra eventuelle kostnader forbundet med å forsere tilbakebetalingen.

Retten til konvertering/forsert tilbakebetaling muliggjøres av strukturelle forhold som gjør det danske lånemarkedet langt mer sofistikert enn det norske. To viktige egenheter er et omfattende marked for *særskilt sikrede obligasjoner* (obligasjoner der boliglån stilles som sikkerhet og dermed innehar meget lav kredittrisiko) som gir mulighet for *matching av rentebinding* (samme rentebinding på innlån og utlån). Dette medfører at bankene finansierer sine boliglån ved å utstede obligasjonslån som kan nedbetales før ordinært forfall i samme takt som kundene benytter seg av retten til forsert nedbetaling av sine lån (ECON, 2005: 30).

Retten til forsert tilbakebetaling til pari kurs gjør fastrentelån langt mer attraktivt. Jeg vil i det følgende presentere et eksempel på hvordan denne typen lånevilkår kan prises. Det er imidlertid viktig å ha i mente at de strukturelle rammene for å kunne tilby en slik rett per dags dato ikke er tilstede i Norge. Rammebetingelsene for lånemarkedet vil igjen påvirke rentedannelsen, hvilket ytterligere vanskeliggjør å si noe om hvordan et slikt produkt vil fungere i det norske markedet. Jeg vil derfor nok en gang presisere at formålet med denne analysen er å belyse teorien presentert i tidligere kapitler, og at jeg derfor vil ta en del forutsetninger som reduserer den praktiske anvendelsen av prisestimatet.

Retten til å innfri lånet før forfall kan tolkes som en amerikansk kjøpsopsjon på en obligasjon med utøvelsespris lik pari kurs. Du kjøper tilbake lånet ditt for pålydende verdi, og refinansierer med et nytt lån som tas opp til markedsvilkår og derfor har verdi lik pari per definisjon.

### 6.2.1 Produktet som skal prises

Jeg vil ta for meg et lån med mange av de samme egenskapene som i case 1: et avdragsfritt lån på 1 million kroner med løpetid på 20 år og kvartalsvise terminer inngått 30.03.2006. I stedet for å sette et tak på renten bindes den til et fastsatt nivå for de neste 2,25 årene. Lånetager beholder imidlertid retten til å løse inn lånet til pari kurs, 1 million kroner, i forbindelse med en av de ni rentebetalingene. Etter siste rentebetaling regulert av fastrentekontrakten går lånet over til flytende rente og antar dermed en verdi lik pari.

Den fastrenten jeg bruker i mine beregninger er den renten som priser et vanlig fastrentelån på 1 million uten konverteringsrett kroner til nettopp 1 million kroner ved inngåelse (tidspunkt 0), gitt rentekurven på dette tidspunktet. Verdien av fastrentelånet ved inngåelse er en neddiskontert kontantstrøm bestående av 9 rentebetalinger og verdien av lånet ved bindingstidens slutt. Alle størrelsene utenom rentebetalingene er kjent. Jeg har brukt Goal Seek-funksjonen i Excel til å finne den fastrenten som medfører at nåverdien av fastrentelånets kontantstrømmer blir lånets hovedstol og får med dette en fastrente tilnærmet lik 4, 21 % [17].

[17] I det danske markedet er som nevnt konverteringsretten med på å forme rentedannelsen – dette betyr at fastrenten settes slik at et fastrentelån *inkludert* konverteringsrett prises lik pari.

*Tabell 6.5: Inndata case 2: Rett til forsert nedbetaling av fastrentelån*

| Notasjon | Betydning | Verdi i case 1 |
|---|---|---|
| $L$ | Hovedstol (lånebeløp) | 1 000 000 |
| $T$ | Levetid for opsjonen | 2 år og 3mnd = 2, 25 år |
| $t_k$ | oppgjørsdager der opsjonen *kan* utøves | $k$ = 1, 2, 3....... 8 |
| $R_K$ | Fastrente | 4,21 % kvartalsvis forrentet |
| $\delta_k$ | Tidsperioden $t_k$ til $t_{k+1}$ | 1/4 (kvartalsvise terminer) |

### 6.2.2 Monte Carlo simulering og amerikanske opsjoner

Dersom man eier en amerikansk opsjon må man på hvert tidspunkt som gir mulighet for utøvelse velge mellom å utøve eller beholde opsjonen. Kontantstrømmen ved utøvelse finnes ved samme fremgangsmåte som om opsjonen var europeisk og hadde forfall ved dette punktet og omtales ofte som opsjonens 'intrinsic value'. Verdien av å beholde opsjonen på et gitt punkt er derimot meget vanskelig å estimere. Denne er avhengig av forventningen om utbetaling i fremtiden dersom opsjonen *ikke* utøves nå. I tillegg kan opsjonen kun utøves èn gang, hvilket medfører at dersom opsjonen utøves i dag, mister man muligheten til å utøve i fremtiden. Følgelig er amerikanske opsjoner langt mer omstendelige å prise enn europeiske.

Monte Carlo simulering er i utgangspunktet lite tilpasset amerikanske opsjoner, og det er vanligere å bruke pristrær eller endelig-differens-metoder. Dette er blant annet på grunn av tidsretningen man må løse i. Amerikanske opsjoner må løses rekursivt: man starter med opsjonens verdi ved forfall og løser bakover i tid, og sørger hele tiden for at opsjonen utøves hvis dette er mer lønnsomt enn å la opsjonen leve. I Monte Carlo simulering jobber man vanligvis fremover, ved å la prisen på underliggende i kommende periode avhenge av dagens verdi. Amerikanske *rente*opsjoner er imidlertid også stiavhengige (det neddiskonteres til gjennomsnittelig rente), og for å prise stiavhengige opsjoner er Monte Carlo simulering et hendig verktøy.

Det siste tiåret har det blitt foreslått flere alternative tilnærminger for å prise også amerikanske opsjoner ved simulering. Broadie og Glasserman (1997) viser en fremgangsmåte som bygger på å estimere en bane av barriereverdier for tidlig utøvelse, hvilket også ligger til grunn i Andersen (2001). Jeg har valgt å følge en annen metode presentert av Longstaff og Schwartz (2001) som bruker regresjoner for å estimere den betingede forventningen av utbetaling ved å beholde opsjonen, og bærer navnet "The Least-Squares Approach". Jeg vil kun gå gjennom hovedtrekken for fremgangsmåten, for en fyldigere forklaring henviser jeg til artikkelen "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach" av Longstaff og Schwartz (2001), som gir en grundig og forståelig presentasjon av metoden.

### 6.2.3 Hovedtrekk i Longstaff of Schwartz metode

På ethvert tidspunkt med mulighet for utøvelse sammenligner eieren av opsjonen utbetalingen fra å utøve opsjonen umiddelbart og den forventede utbetalingen ved å holde opsjonen i live (jeg vil heretter kalle det å holde opsjonen i live *fortsettelse*). Opsjonseieren utøver umiddelbart kun hvis verdien av dette er størst. Dermed er *optimal utøvelsesstrategi* fundamentalt bestemt av den betingede forventningen av senere utbetalinger ved fortsettelse. Longstaff og Schwartz metode bygger på at en funksjon for denne betingede forventningen kan estimeres fra informasjon i de simulerte pris- og rentebanene ved å bruke regresjon. For hvert punkt langs en simulert rentebane der opsjonseier har et valg mellom å utøve eller ikke, beregnes den neddiskonterte verdien av senere realisert utbetaling ved fortsettelse for den gitte rentebanen. Verdiene av fortsettelse brukes så i en regresjon over underliggende tilstandsvariabler (eller funksjoner av disse) for å fremskaffe en funksjon for *den betingede forventningen av verdien ved fortsettelse* (betinget av tilstandsvariablene). Den beste tilpassningen for denne regresjonen gir et direkte estimat for funksjonen for den betingede forventningen av fortsettelse på et gitt tidspunkt.

Ved å estimere denne funksjonen for hvert tidspunkt med utøvelsesmulighet dannes en komplett spesifikasjon av den optimale utøvelsesstrategien for hver simulerte prisbane. Med denne informasjonen på plass kan en optimal utøvelses-regel ("stopping rule") for opsjonen estimeres. Dette er en regel som medfører at verdien av opsjonen maksimeres på hvert punkt i hver prisbane. Denne algoritmen er, som ønsket, rekursiv. Beregningene starter på siste utøvelsesdato og jobber bakover i tid til optimal utøvelses-regel er definert. Den optimale utøvelses-regelen brukes så fremover til å prise opsjonen. (Longstaff og Schwartz, 2001)

## 6.2.4 Prising med Hull-White modellen og Least Square Monte Carlo simulering

### *Simulering av pris- og rentebaner*

Når opsjonen utøves betales hovedstolen ($L$) og gjelden slettes. Utøvelsesverdien på tidspunkt $t_k$ er altså: *max{verdien av gjelden på tidspunkt* $t_k$ *– L,0}*. Lånet tolkes som en fastrenteobligasjon bestående av rentebetalinger hver termin og sluttverdien på lånet når opsjonen forfaller. Fastrenteobligasjonen består av 9 utbetalinger på tidspunkt $t_0$, 8 utbetalinger ved $t_1$, og så videre til $t_8$ der obligasjonen kun har èn gjenstående utbetaling.

For prise obligasjoner med Hull-White modellen beregnes neddiskonteringssatsen $P(t,T)$ med formlene (5.1) – (5.3). Opsjonen avhenger av obligasjonsverdiene på tidspunkt $t_k$, for $k$=1,2,3,..,8, følgelig må $P(t_k,t_n)$, der $k$=0,1,2,..,8 og $n = k$, ... 9, beregnes for å kunne neddiskontere obligasjonens gjenstående kontantstrømmer på hvert tidspunkt. I formelen for $P(t_k,t_n)$ inngår $B(t_k,t_n)$ og $A(t_k,t_n)$, disse beregnes ut fra dagens rentekurve og modellparametrene. Når $A$ og $B$ er kjent er den eneste ukjente i beregningene av $P(t_k,t_n)$ utfallene for $r$. Vi kan således beregne $P(t_k,t_n)$, og dermed også verdien av fastrentelånet, for en rekke tilfeldige utfall av rentekurven. Beregningene av $A$ og $B$, samt et eksempel på verdier for $P(t_k,t_n)$ er vedlagt i appendiks 5.

Én simulering medfører at 9 nye verdier for $z$ trekkes fra en normalfordeling med forventning 0 og standardavvik 1. Dette resulterer i 9 nye renteanslag (en for hvert kvartal) som skaper en ny simulert rentebane. Fra denne rekken av verdier for $r$ beregnes nye diskonteringsestimater ($P(t_k,t_n)$) som brukes for å skaffe 8 nye anslag for verdien av lånet, et for $t_1$, et for $t_2$ osv til $t_8$, og dermed også de tilhørende utbetalingene ved å utøve opsjonen. Jeg har estimert 10 000 rentebaner, som igjen angir 10 000 tilhørende prisbaner for fastrenteobligasjonen. Data fra disse pris- og rentebanene er grunnlaget for å beregne verdien av den amerikanske opsjonen med metoden fremstilt i forrige avsnitt.

## *Beregning av verdi ved å holde opsjonen*

Opsjonen som skal prises har åtte utøvelsespunkter: $t_1, t_2, .... ,t_8$. På tidspunkt $t_0$ og $t_9$ er verdien av lånet per definisjon lik hovedstolen, og opsjonen gir ingen utbetaling. På den siste utøvelsesdatoen er det optimalt å utøve opsjonen hvis den er 'in the money'[18]. For tidligere utøvelsestidspunkter er det imidlertid optimalt å sammenligne verdien av å utøve umiddelbart med den forventede utbetalingen fra å la opsjonen leve, og kun utøve hvis utøvelsesverdien er høyest.

Fremgangsmåten til Longstaff og Schwartz' starter med å beregne utbetaling for siste utøvelsesdato ($t_8$) for hver simulerte prisbane. Deretter identifiseres de rentebanene som er 'in the money' på tidspunkt $t_7$ og for disse banene beregnes den neddiskonterte verdien av utbetaling på $t_8$ (dersom opsjonen ikke lenger er 'in the money' ved $t_8$ er denne null). Det er kun prisbaner som er 'in the money' på $t_7$ som representerer et reelt valg om å utøve eller fortsette opsjonen. Dersom opsjonen er 'out of the money' vil eieren naturlig nok alltid velge å la opsjonen leve; derfor brukes kun 'in the money' -prisbaner i regresjonen.

Kjernen i denne metoden er som sagt å anta at det finnes et forhold mellom underliggende tilstandsvariabler og den neddiskonterte verdien av fremtidig opsjonsutbetaling ved å fortsette opsjonen for 'in the money' prisbaner. Hvordan dette forholdet ser ut er imidlertid ukjent. Ifølge Longstaff og Schwartz kan det vises at også svært enkle former for forhold gir gode resultater. Jeg har derfor valgt å forutsette samme forhold som eksempelet i Longstaff og Schwartz artikkel mellom den neddiskonterte verdien av utbetaling dersom en fortsetter opsjonen, notert med *Y*, og dagens pris på fastrenteobligasjonen, notert med *X*, for 'in the money'-prisbaner[19]: $Y=a+bX+cX^2$

Dette forholdet medfører at *Y* regresseres over *X* og $X^2$ og det fremskaffes anslag for verdier for a, b og c som minimerer $\sum_{i=1}^{m}(Y_i - a - bX_i - cX_i^2)^2$ , der m angir antall prisbaner som er 'in

[18] I opsjonsteori sies det at opsjonen er 'in the money' på et gitt tidspunkt dersom utøvelse ville gitt positiv utbetaling, mens 'out of the money' brukes dersom utøvelse ikke gir utbetaling.

[19] Jeg har valgt å representere tilstandsvariablene ved prisen på fastrenteobligasjonen, ikke ved renten. Obligasjonsprisen sier implisitt noe om renten, men renten kan også tas med direkte. De to fremgangsmåtene skal gi jevngode resultater, ettersom valg av funksjon ikke har særlig stor innvirkning på resultatet ifølge Longstaff og Schwartz (2001).

the money' (Hull, 2006: 580). Resultatet fra regresjonen angir betinget forventning – funksjonen, *E[Y | X]*, på et gitt tidspunkt.

På tidspunkt $t_7$ er *Y* den neddiskonterte verdien av utbetalingen på $t_8$. I praksis er denne er ukjent på tidspunkt $t_7$. Derfor estimeres en betinget forventning - funksjon som sier noe om hva *Y* forventes å bli, gitt nivået på *X* (prisen på fastrenteobligasjonen) på tidspunkt $t_7$. Ved å sette inn verdier for *X* i betinget forventning – funksjonen oppnås et estimat for den forventede verdien av å beholde opsjonen på et gitt tidspunkt for alle 'in the money' prisbaner. Dersom verdien av å utøve er høyere enn verdien av å fortsette utøves opsjonen, hvis ikke beholdes opsjonen i forventning om en bedre utbetaling på et senere tidspunkt.

Neste skritt er å identifisere de prisbanene som er 'in the money' på tidspunkt $t_6$ og gjenta samme prosedyre som ovenfor. Alle prisbanene som er 'in the money' identifiseres og tilhørende neddiskonterte verdien av utbetalingen ved fortsettelse beregnes. Ved lokalisering av senere opsjonsutbetalinger er det viktig å sørge for at restriksjonen om at opsjonen kun kan utøves èn gang per prisbane ikke brytes. Dersom verdien av utøvelse er større enn den betingede forventningen av fortsettelse for en gitt prisbane på tidspunkt $t_7$, er det den neddiskonterte verdien av utøvelse på $t_7$ som er relevant for estimering av forventet fortsettelsesverdi på $t_6$. Hva opsjonen eventuelt er verdt på $t_8$ i denne prisbanen spiller da ingen rolle. Hvis derimot betinget forventning av fortsettelse er større enn verdien av utøvelse på $t_7$ er det en eventuell utøvelse på $t_8$ som neddiskonteres til $t_6$. Opsjonsutbetalingene neddiskonteres alltid i kontinuerlig tid med renter fra den rentebanen som underligger prisbanen til fastrenteobligasjonen. Deretter regresseres verdiene av de neddiskonterte opsjonsutbetalingene på obligasjonsverdiene og de kvadrerte obligasjonsverdiene for alle prisbaner som er 'in the money' på tidspunkt $t_6$. En ny betinget forventning - funksjon fremskaffes og gir grunnlag for å beregne forventet utbetaling ved fortsettelse av opsjonen på tidspunkt $t_6$. I hver prisbane sammenlignes denne forventningen med verdien av utøvelse for å bestemme om opsjonen utøves eller ikke på tidspunkt $t_6$.

Slik fortsetter beregningene rekursivt til det for hver prisbane er bestemt hvilket tidspunkt opsjonen utøves på. Når utøvelsestidspunktet for hver prisbane er kjent (dersom opsjonen utøves i det hele tatt) kan verdien på $t_0$ finnes ved å neddiskontere utbetalingen med tilhørende rentebane. Sluttresultatet er 10 000 mulige opsjonspriser, en for hver pris/rentebane. Gjennomsnittet av disse er opsjonsprisen.

### 6.2.5 Resultater og oppsummering case 2

Ved fremgangsmåten beskrevet ovenfor får jeg en opsjonspris på kroner 6143,5. Standard-avviket til estimatet er 67,8, hvilket gir et 95 % konfidensintervall på [6010,6 , 6276,4].

For å sjekke om estimatet er troverdig har jeg priset samme opsjon under en naiv utøvelsesstrategi der opsjonen utøves idet utbetalingen ved utøvelse kommer over en gitt barriere. Med 30 000 simuleringer gir slike ikke-optimale utøvelsesstrategier følgende resultater:

*Tabell 6.6: Opsjonspriser ved ikke-optimal utøvelsesstrategi*

| Opsjonen utøves første gang utbetalingen overstiger | Verdi av opsjonen |
|---|---|
| 0 | 5006,882 |
| 1 000 | 5266,03 |
| 5 000 | 5873,61 |
| 10 000 | 5322,54 |

Tabell 6.6 viser at dersom opsjonseier utøver opsjonen ved første mulighet som gir utbetaling vil opsjonen være verdt 5006,882. Venter derimot opsjonseier med å utøve til utøvelse gir en utbetaling på minst 10 000 kroner blir verdien av opsjonen 5322,54. Som forventet gir disse ikke-optimale strategiene lavere opsjonsverdier enn opsjonsprisen som følger av en optimal utøvelsesstrategi. Nivået på opsjonsverdiene i tabellen indikerer at en opsjonspris på 6143,5 er troverdig, ettersom merverdien av optimal utøvelse på det laveste tilskrives en verdi på 270, hvilket fremstår som realistisk. Det er selvfølgelig mulig at også denne opsjonsprisen er upresis på grunn av den ujevne forwardkurven (jamfør simulering i case 1), men da jeg ikke har noen analytiske opsjonspriser og sammenligne med vil jeg ikke gå videre inn på dette.

# 7. Avslutning

I denne utredningen har jeg sett på prising av renteopsjoner både i teori og praksis. Jeg har tatt for meg veien fra generell opsjonsteori, via en fordypning i særegenhetene ved renteopsjoner til modeller som beskriver renteprosessen. Med bakgrunn i dette har jeg fordypet meg i Hull-White modellen og hvordan denne implementeres for å prise renteopsjoner. I analysen brukte jeg så den presenterte teorien for å prise et rentetak og retten til forsert nedbetaling av fastrentelån til pari kurs.

Mitt estimat for verdien av et rentetak på 6,35 % i 2,25 år på et lån på 1 million kroner er 1015,53 for månedlige terminer, og 860,86 for kvartalsterminer. Disse estimatene kom jeg frem til med Hull-White modellens analytiske prisningsformler. Jeg priste det samme rentetaket med Blacks formel og med simulering av Hull-White modellen, men har mindre tiltro til disse opsjonsprisene, ettersom Blacks formel ikke er skreddersydd renteopsjoner og simuleringen fikk problemer på grunn av ujevn forwardrentekurve. Jeg fant også at verdien av retten til å kunne gå ut av en fastrenteavtale på 4,21 % fastrente over 2,25 år. Ved bruk av Least Square Monte Carlo simulering priset jeg denne retten til kroner 6143,5 når lånet er på 1 million kroner.

Å prise renteopsjoner er, som jeg tidligere har vært inne på, til tider krevende og vanskelig. Det meste som er skrevet om temaet er relativt abstrakt og krever mye forkunnskaper av leseren. Jeg har funnet få gode eksempler i både lærebøker og artikler som viser beregningene skritt for skritt på en forståelig måte, hvilket jeg mener bekrefter nødvendigheten av ytterligere arbeid og bevisstgjøring. Kommende studenter kan for eksempel legge mindre vekt på det teoretisk grunnlaget og således frigjøre tid til en mer sofistikert analyse av reelle produkter i markedet, og for eksempel selv estimere modellparametrene. En alternativ vinkling kan være å bruke ulike modeller for å prise et enkelt produkt. Hadde tiden strukket til ville jeg gjerne gått grundigere inn på prisingen av amerikanske opsjoner og ulike tilnærminger til dette. Dette er en interessant problemstilling, men fordrer relativt god kjennskap til opsjonsprising i utgangspunktet, ettersom prising av amerikanske opsjoner er et problematisk og vanskelig område.

I kjølevannet av diskusjonen om etikken ved salg av strukturerte produkter, som kundene kan ha vanskeligheter med å forstå, kunne det vært interessant å undersøkt om bankene presenterer rentesikringsprodukter realistisk, eller om det også for denne typen produkter kan indikeres at bankene har en uhørt høy inntjeningsmargin. For at markedet skal være velfungerende er det ønskelig at aktørene kan både sammenligne og analysere produktene, hvilket fordrer en felles forståelse for hvordan opsjonsprisen bestemmes. Det er nok fortsatt en stund til konsensus om prisingen av renteopsjoner oppnås, slik det i dag finnes for prising av aksjeopsjoner. Fagfeltet er imidlertid i utvikling, og ettersom den som kan prise opsjoner bedre enn andre kan tjene store penger vil nok stadig nye og bedre løsninger utarbeides.

# Litteraturliste

Andersen, L. (2000) *A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor Market Model*. Journal of Computational Finance, Winter 2000, Vol. 3, No. 2, s 1-32.

Bjerksund, Petter og Stensland, Gunnar (1995) *Hvor går renten?*. NHH-Siluetten, nr 1 1995, s. 18-19

Bjerksund, Petter og Stensland, Gunnar (1996) *Utledning av rentens terminstruktur ved "maksimum glatthets"-prinsippet*, Beta nr 1/96, s. 2-6

Broadie, Mark og Glasserman, Paul (1997) *Pricing American-Style securities using simulation*. Journal of Economic Dynamics and Control (21) 1997, s. 1323-1352

Cairns, Andrew J. G. (2004) *Interest Rate Models – An Introduction*. Princeton University Press, New Jersey

Clewlow, Les og Strickland, Chris (1998) *Implementing Derivatives Models*. John Wiley and Sons. England

DnBNOR (2006) *Valuta og renter.*
https://www.dnbnor.no/markets/valuta_og_renter 16.03.2006

DnBNOR (2005) *Årsrapport 2005.*
http://www.dnbnor.com/ved_dnbnorno/01/11/arsra045.pdf , 05.05.2006

Econ (2005) *Rentebinding på boliglån i Norge*. ECON-rapport nr 2005-029, Prosjekt nr 44450. 25. mai 2005.

Finansdepartementet (2006) *Statsgjelden.*
http://odin.dep.no/fin/norsk/tema/norsk_okonomi/statsgjelden/bn.html,

Holm, Vidar (1995) *Bruk av rentederivater i sikring mot renterisiko*. Spesialoppgave ved høyere avdelings studium i økonomisk-administrative fag. Norges Handelshøyskole.

Hull, John (2006) *Options, Futures and Other Derivatives – sixth edition.* Prentice Hall, New Jersey

Hull, John og White, Alan (1993) *Interest-Rate Options: Choosing a Model for Trading*, kp 3 i Robert J. Schwartz og Clifford W. Smith, Jr., *Advanced Strategies in Financial Risk Management,* New York Institute of Finance

Hull, John og White, Alan (1996) *Hull-White on Derivatives – a compilation of articles by John Hull and Alan White*. Risk Publication, London.

Jørgensen, P. T., Miltersen, K. R. og Sørensen, C. (1996) *En sammenligning af konkverteringsstrategier for konverterbare realkreditlån*. finans/invest, No. 7:22-29.

Levin, Alexander (2004) *Interest Rate Model Selection – A conscientious choice for mortgage investors*. Journal of Portfolio Management.

Longstaff, Francis A. og Schwartz, Eduardo S. (2001) *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*. The Review of Financial Studies, Spring 2001, Vol. 14, No. 1, s. 113-147

McDonald, Robert L. (2003) *Derivatives Markets - international edition*. Pearson Education, Boston.

Mæland, Jøril (2005) *Forelesningsnotater i FIE 425: Derivater og Risikostyring*. NHH, Bergen

Nordea (2006) *Boliglån med rentetak.* http://www.nordea.no/sitemod/default/index.aspx?pid=778142. 20.03.2006

Norges Bank (2006) *Renteinformasjon* http://www.norges-bank.no/ 15.03.2006

Sulebak, Erik (1996) *Bruk av renteopsjoner og prising av disse med bl.a Black-Derman-Toy*. Derivatet nr 6, s 5-16.

Sættem, Frode (2004) *Forelesningsnotater i FIE 403: Finansmarkeder*. NHH, Bergen

Sætervik, Åge (1999) *Rentebærende papirer, deres egenskaper og Black Scholes modellen.* Norges Handelshøyskole, Bergen.

Treepongkaruna, Sirimon og Gray, Stephen (2003) *Short-term interest rate models: valuing interest rate derivatives using a Monte-Carlo approach.* Accounting and Finance 43, side 231-259

Wilmott, Paul (2000) *Paul Wilmott on Quantitative Finance – volume 2*. John Wiley & Sons, England

Wilmott, Paul (2001) *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, England.

Wimott, Paul (1998) Derivatives: The Theory and Practice of Financial Egineering. John Wiley & Sons, England

# Appendikser

## Appendiks 1: Terminstrukturen

Terminstruktur per 30.03.2006. Rentesatser hentet fra Norges Bank er uthevet (omregnet til kontinuerlig forrentning).

| månedlig | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| mnd | tk | statrente kont | lånerente kont | F(0,tk,tk+1) kont | F(0,tk,tk+1) mnd | P(0,tk) |
| 0 | 0,00 | 2,550 % | 3,550 % | 3,570 % | 3,575 % | 1,000 |
| 1 | 0,08 | 2,570 % | 3,570 % | 3,610 % | 3,615 % | 0,997 |
| 2 | 0,17 | 2,590 % | 3,590 % | 3,625 % | 3,630 % | 0,994 |
| **3** | 0,25 | **2,602 %** | 3,602 % | 3,722 % | 3,728 % | 0,991 |
| 4 | 0,33 | 2,632 % | 3,632 % | 3,796 % | 3,802 % | 0,988 |
| 5 | 0,42 | 2,664 % | 3,664 % | 3,829 % | 3,835 % | 0,985 |
| **6** | 0,50 | **2,692 %** | 3,692 % | 3,959 % | 3,966 % | 0,982 |
| 7 | 0,58 | 2,730 % | 3,730 % | 3,970 % | 3,977 % | 0,978 |
| 8 | 0,67 | 2,760 % | 3,760 % | 4,035 % | 4,042 % | 0,975 |
| **9** | 0,75 | **2,791 %** | 3,791 % | 4,185 % | 4,192 % | 0,972 |
| 10 | 0,83 | 2,830 % | 3,830 % | 4,270 % | 4,278 % | 0,969 |
| 11 | 0,92 | 2,870 % | 3,870 % | 4,201 % | 4,209 % | 0,965 |
| **12** | 1,00 | **2,898 %** | 3,898 % | 4,059 % | 4,066 % | 0,962 |
| 13 | 1,08 | 2,910 % | 3,910 % | 4,036 % | 4,043 % | 0,959 |
| 14 | 1,17 | 2,919 % | 3,919 % | 4,159 % | 4,166 % | 0,955 |
| **15** | 1,25 | 2,935 % | 3,935 % | 4,209 % | 4,216 % | 0,952 |
| 16 | 1,33 | 2,952 % | 3,952 % | 4,258 % | 4,266 % | 0,949 |
| 17 | 1,42 | 2,970 % | 3,970 % | 4,312 % | 4,320 % | 0,945 |
| **18** | 1,50 | 2,989 % | 3,989 % | 4,369 % | 4,377 % | 0,942 |
| 19 | 1,58 | 3,009 % | 4,009 % | 4,409 % | 4,417 % | 0,938 |
| 20 | 1,67 | 3,029 % | 4,029 % | 4,449 % | 4,457 % | 0,935 |
| **21** | 1,75 | 3,049 % | 4,049 % | 4,489 % | 4,498 % | 0,932 |
| 22 | 1,83 | 3,069 % | 4,069 % | 4,529 % | 4,538 % | 0,928 |
| 23 | 1,92 | 3,089 % | 4,089 % | 4,569 % | 4,578 % | 0,925 |
| **24** | 2,00 | *3,109 %* | 4,109 % | 4,859 % | 4,869 % | 0,921 |
| 25 | 2,08 | *3,139 %* | 4,139 % | 4,919 % | 4,929 % | 0,917 |
| 26 | 2,17 | *3,169 %* | 4,169 % | 4,979 % | 4,989 % | 0,914 |
| **27** | 2,25 | *3,199 %* | 4,199 % | 5,039 % | 5,050 % | 0,910 |
| *28* | *2,33* | *3,229 %* | *4,229 %* | 5,099 % | 5,110 % | 0,906 |
| *29* | *2,42* | *3,259 %* | *4,259 %* | 5,159 % | 5,170 % | 0,902 |
| ***30*** | *2,50* | *3,289 %* | *4,289 %* | 5,219 % | 5,230 % | 0,898 |
| *31* | *2,58* | *3,319 %* | *4,319 %* | 5,279 % | 5,291 % | 0,894 |
| *32* | *2,67* | *3,349 %* | *4,349 %* | 5,339 % | 5,351 % | 0,890 |
| ***33*** | *2,75* | *3,379 %* | *4,379 %* | 5,399 % | 5,411 % | 0,887 |
| *34* | *2,83* | *3,409 %* | *4,409 %* | 5,459 % | 5,472 % | 0,883 |
| *35* | *2,92* | *3,439 %* | *4,439 %* | 5,519 % | 5,532 % | |
| ***36*** | *3,00* | ***3,469 %*** | *4,469 %* | | | |

| kvartalsvis | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| mnd | tk | statsrente kont | lånerente kont | F(0,tk,tk+1) kont | F(0,tk,tk+1) kvartal | P(0,tk) |
| 0 | 0,000 | 2,550 % | 3,550 % | 3,602 % | 3,618 % | 1,000 |
| **3** | 0,250 | **2,602 %** | 3,602 % | 3,782 % | 3,800 % | 0,991 |
| **6** | 0,500 | **2,692 %** | 3,692 % | 3,988 % | 4,008 % | 0,982 |
| **9** | 0,750 | **2,791 %** | 3,791 % | 4,219 % | 4,241 % | 0,972 |
| **12** | 1,000 | **2,898 %** | 3,898 % | 4,085 % | 4,105 % | 0,962 |
| 15 | 1,250 | 2,935 % | 3,935 % | 4,260 % | 4,283 % | 0,952 |
| 18 | 1,500 | 2,989 % | 3,989 % | 4,409 % | 4,434 % | 0,942 |
| 21 | 1,750 | 3,049 % | 4,049 % | 4,529 % | 4,555 % | 0,932 |
| 24 | 2,000 | 3,109 % | 4,109 % | 4,919 % | 4,949 % | 0,921 |
| 27 | 2,250 | 3,199 % | 4,199 % | 5,099 % | 5,132 % | 0,910 |
| 30 | 2,500 | *3,289 %* | 4,289 % | 5,279 % | | |
| 33 | 2,750 | *3,379 %* | 4,379 % | | | |
| **36** | 3,000 | **3,469 %** | | | | |

# Appendiks 2: Prising av rentetak med Blacks modell

**PRISING RENTETAK - månedlige terminer**

| | |
|---|---|
| Hovedstol (L) | 1000000 |
| Caprente | 6,35 % |
| Caprente (måned) (RK) | 6,17236 % |
| Tid til forfall (år) | 2,25 |
| Terminer per år | 12 |
| σk | 20 % |
| δk | 0,0833 |

| Måned utbetalingen bestemmes | tk | P(0, tk+1) | Fk | d1 | d2 | N(d1) | N(d2) | Verdi caplet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00 | 0,9970 | 3,58 % | | | | | 0,000 |
| 1 | 0,08 | 0,9940 | 3,62 % | -9,235 | -9,293 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2 | 0,17 | 0,9910 | 3,63 % | -6,461 | -6,542 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 3 | 0,25 | 0,9880 | 3,73 % | -4,993 | -5,093 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 4 | 0,33 | 0,9848 | 3,80 % | -4,140 | -4,255 | 0,000 | 0,000 | 0,001 |
| 5 | 0,42 | 0,9817 | 3,83 % | -3,622 | -3,751 | 0,000 | 0,000 | 0,014 |
| 6 | 0,50 | 0,9785 | 3,97 % | -3,057 | -3,199 | 0,001 | 0,001 | 0,137 |
| 7 | 0,58 | 0,9752 | 3,98 % | -2,802 | -2,955 | 0,003 | 0,002 | 0,358 |
| 8 | 0,67 | 0,9720 | 4,04 % | -2,511 | -2,674 | 0,006 | 0,004 | 0,988 |
| 9 | 0,75 | 0,9686 | 4,19 % | -2,147 | -2,320 | 0,016 | 0,010 | 3,145 |
| 10 | 0,83 | 0,9651 | 4,28 % | -1,917 | -2,100 | 0,028 | 0,018 | 6,243 |
| 11 | 0,92 | 0,9618 | 4,21 % | -1,904 | -2,096 | 0,028 | 0,018 | 6,622 |
| 12 | 1,00 | 0,9585 | 4,07 % | -1,988 | -2,188 | 0,023 | 0,014 | 5,334 |
| 13 | 1,08 | 0,9553 | 4,04 % | -1,929 | -2,137 | 0,027 | 0,016 | 6,409 |
| 14 | 1,17 | 0,9520 | 4,17 % | -1,712 | -1,928 | 0,043 | 0,027 | 11,756 |
| 15 | 1,25 | 0,9487 | 4,22 % | -1,593 | -1,816 | 0,056 | 0,035 | 16,242 |
| 16 | 1,33 | 0,9453 | 4,27 % | -1,484 | -1,715 | 0,069 | 0,043 | 21,596 |
| 17 | 1,42 | 0,9419 | 4,32 % | -1,380 | -1,618 | 0,084 | 0,053 | 28,191 |
| 18 | 1,50 | 0,9385 | 4,38 % | -1,281 | -1,526 | 0,100 | 0,064 | 36,068 |
| 19 | 1,58 | 0,9351 | 4,42 % | -1,204 | -1,455 | 0,114 | 0,073 | 43,535 |
| 20 | 1,67 | 0,9316 | 4,46 % | -1,132 | -1,390 | 0,129 | 0,082 | 51,710 |
| 21 | 1,75 | 0,9281 | 4,50 % | -1,064 | -1,329 | 0,144 | 0,092 | 60,571 |
| 22 | 1,83 | 0,9246 | 4,54 % | -1,001 | -1,272 | 0,158 | 0,102 | 70,090 |
| 23 | 1,92 | 0,9211 | 4,58 % | -0,941 | -1,218 | 0,173 | 0,112 | 80,241 |
| 24 | 2,00 | 0,9174 | 4,87 % | -0,697 | -0,980 | 0,243 | 0,164 | 132,252 |
| 25 | 2,08 | 0,9136 | 4,93 % | -0,635 | -0,923 | 0,263 | 0,178 | 150,261 |
| 26 | 2,17 | 0,9098 | 4,99 % | -0,575 | -0,870 | 0,282 | 0,192 | 169,236 |
| | | | | | | | | 901,002 |

**PRISING RENTETAK - Kvartalsvise terminer**

| | |
|---|---|
| Hovedstol (L) | 1000000 |
| Caprente | 6,35 % |
| Caprente (RK) kvartal | 6,204158 % |
| Tid til forfall (år) | 2,25 |
| Terminer per år | 4 |
| σk | 20 % |
| δk | 0,25 |

| Måneden utbetalingen bestemmes | tk | P(0, tk+1) | F(0,tk, tk+1) | d1 | d2 | N(d1) | N(d2) | Verdi caplet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00 | 0,9910 | 3,62 % | | | | | 0,000 |
| 3 | 0,25 | 0,9817 | 3,80 % | -4,852 | -4,952 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 6 | 0,50 | 0,9720 | 4,01 % | -3,019 | -3,160 | 0,001 | 0,001 | 0,475 |
| 9 | 0,75 | 0,9618 | 4,24 % | -2,110 | -2,283 | 0,017 | 0,011 | 10,516 |
| 12 | 1,00 | 0,9520 | 4,11 % | -1,964 | -2,164 | 0,025 | 0,015 | 17,064 |
| 15 | 1,25 | 0,9419 | 4,28 % | -1,546 | -1,770 | 0,061 | 0,038 | 54,726 |
| 18 | 1,50 | 0,9316 | 4,43 % | -1,249 | -1,494 | 0,106 | 0,068 | 116,084 |
| 21 | 1,75 | 0,9211 | 4,55 % | -1,036 | -1,300 | 0,150 | 0,097 | 192,822 |
| 24 | 2,00 | 0,9098 | 4,95 % | -0,657 | -0,940 | 0,255 | 0,174 | 426,938 |
| | | | | | | | | 818,625 |

## Appendiks 3: Prising rentetak med Hull-White modellen - analytisk

**Hull-White - modellen: PRISING AV CAP - måned**

| | |
|---|---|
| Hovedstol (L) | 1 000 000 |
| Caprente | 6,35 % |
| Caprente månedlig termine | 6,172 % |
| Tid til forfall (T) | 2,25 |
| Terminer per år | 12,00 |
| δk | 0,0833 |
| a | 0,40 |
| σ | 0,015 |

Hver caplet prises som en put med følgende egenskaper:

| | | |
|---|---|---|
| tk | forfall for opsjonen | |
| tk+1 | forfall for underliggende obligasjon | |
| L | utøvelsesprisen | 1 000 000 |
| L(1+Rkδk) | Pålydende beløp på obligasj( | 1 005 143,63 |

| Måned | tk | σp | h | h-σp | N(-h) | N[-(h-σp)] | Verdi caplet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00 | | | | | | 0,000 |
| 1,00 | 0,08 | 0,00035 | 6,080 | 6,079 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2,00 | 0,17 | 0,00049 | 4,345 | 4,345 | 0,000 | 0,000 | 0,001 |
| 3,00 | 0,25 | 0,00059 | 3,467 | 3,467 | 0,000 | 0,000 | 0,039 |
| 4,00 | 0,33 | 0,00066 | 2,959 | 2,958 | 0,002 | 0,002 | 0,291 |
| 5,00 | 0,42 | 0,00073 | 2,651 | 2,650 | 0,004 | 0,004 | 0,898 |
| 6,00 | 0,50 | 0,00079 | 2,321 | 2,320 | 0,010 | 0,010 | 2,676 |
| 7,00 | 0,58 | 0,00084 | 2,171 | 2,170 | 0,015 | 0,015 | 4,363 |
| 8,00 | 0,67 | 0,00088 | 2,001 | 2,000 | 0,023 | 0,023 | 7,318 |
| 9,00 | 0,75 | 0,00092 | 1,780 | 1,779 | 0,038 | 0,038 | 13,488 |
| 10,00 | 0,83 | 0,00096 | 1,640 | 1,639 | 0,050 | 0,051 | 19,660 |
| 11,00 | 0,92 | 0,00099 | 1,645 | 1,644 | 0,050 | 0,050 | 20,022 |
| 12,00 | 1,00 | 0,00102 | 1,714 | 1,713 | 0,043 | 0,043 | 17,354 |
| 13,00 | 1,08 | 0,00105 | 1,689 | 1,688 | 0,046 | 0,046 | 18,875 |
| 14,00 | 1,17 | 0,00107 | 1,555 | 1,554 | 0,060 | 0,060 | 26,450 |
| 15,00 | 1,25 | 0,00109 | 1,486 | 1,485 | 0,069 | 0,069 | 31,565 |
| 16,00 | 1,33 | 0,00111 | 1,422 | 1,421 | 0,078 | 0,078 | 36,976 |
| 17,00 | 1,42 | 0,00113 | 1,359 | 1,357 | 0,087 | 0,087 | 43,037 |
| 18,00 | 1,50 | 0,00115 | 1,297 | 1,296 | 0,097 | 0,098 | 49,696 |
| 19,00 | 1,58 | 0,00116 | 1,251 | 1,249 | 0,106 | 0,106 | 55,335 |
| 20,00 | 1,67 | 0,00118 | 1,207 | 1,206 | 0,114 | 0,114 | 61,125 |
| 21,00 | 1,75 | 0,00119 | 1,165 | 1,164 | 0,122 | 0,122 | 67,057 |
| 22,00 | 1,83 | 0,00121 | 1,126 | 1,124 | 0,130 | 0,130 | 73,122 |
| 23,00 | 1,92 | 0,00122 | 1,087 | 1,086 | 0,138 | 0,139 | 79,315 |
| 24,00 | 2,00 | 0,00123 | 0,881 | 0,880 | 0,189 | 0,189 | 117,778 |
| 25,00 | 2,08 | 0,00124 | 0,834 | 0,832 | 0,202 | 0,203 | 128,818 |
| 26,00 | 2,17 | 0,00125 | 0,787 | 0,786 | 0,216 | 0,216 | 140,275 |
| 27,00 | 2,25 | | | | | | 1 015,533 |

| **Hull-White - modellen: PRISING AV CAP - kvartal** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| Hovedstol (L) | | 1000000 | | Hver caplet prises som en put med følgende egenskape | | | |
| Caprente | | 6,35 % | | | | | |
| Caprente kvartal (RK) | | 6,20 % | | tk | forfall for opsjonen | | |
| Tid til forfall (T) | | 2,25 | | tk+1 | forfall for underliggende obligasjon | | |
| Terminer per år | | 4 | | L | utøvelsesprisen | | 1000000 |
| δk | | 0,25 | | L(1+Rkδk) | Pålydende beløp på ob | | 1015510,396 |
| | | | | | | | |
| a | | 0,40 | | | | | |
| σ | | 0,015 | | | | | |
| | | | | | | | |
| Måned | tk | σp | h | h-σp | N(-h) | N[-(h-σp)] | Verdi caplet |
| 0 | 0,00 | | | | | | 0,00 |
| 3 | 0,25 | 0,00170 | 3,495 | 3,494 | 0,000 | 0,000 | 0,101 |
| 6 | 0,50 | 0,00229 | 2,367 | 2,365 | 0,009 | 0,009 | 6,786 |
| 9 | 0,75 | 0,00268 | 1,809 | 1,806 | 0,035 | 0,035 | 36,558 |
| 12 | 1,00 | 0,00296 | 1,751 | 1,748 | 0,040 | 0,040 | 46,227 |
| 15 | 1,25 | 0,00317 | 1,496 | 1,493 | 0,067 | 0,068 | 89,754 |
| 18 | 1,50 | 0,00334 | 1,311 | 1,308 | 0,095 | 0,095 | 140,380 |
| 21 | 1,75 | 0,00346 | 1,177 | 1,173 | 0,120 | 0,120 | 190,934 |
| 24 | 2,00 | 0,00356 | 0,870 | 0,866 | 0,192 | 0,193 | 350,120 |
| 27 | 2,25 | | | | | | 860,860 |

# Appendiks 4: Prising rentetak med Hull-White modellen - simulering

(siste kolonne viser verdien av rentetaket for en rekke simulert rentebaner, verdien av rentetaket er snittet av 30 000 simuleringer)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PRISING AV RENTETAK - MÅNED - HULL-WHITE MODELLEN | | | | | | | | | | | 8 458,622 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| **INNDATA** | | | **RESULTATER** | | | | **kriterie** | **ant. baner** | **i %** | | 4 134,775 |
| Lånebeløp | 1000000 | | antall trekninger | | 30000 | | verdi > 40 000 | 3 | 0,010 % | | 208,478 |
| RK år | 6,350 % | | Verdi cap | | 1005,41 | | verdi> 30 000 | 18 | 0,060 % | | 49,943 |
| RK mnd | 6,172 % | | I % av lånebeløp | | 0,10 % | | verdi> 20 000 | 129 | 0,430 % | | 0,000 |
| Løpetid | 2,25 | | | | | | verdi> 10 000 | 755 | 2,517 % | | 0,000 |
| tidssteg | 0,083 | | s | | 2958,765 | | verdi > 5000 | 1943 | 6,477 % | | 0,000 |
| a | 0,400 | | v | | 17,08244 | | verdi> 1000 | 5310 | 17,700 % | | 0,000 |
| σ | 0,015 | | Vl | | 971,9272 | | verdi> 0 | 9611 | 32,037 % | | 0,000 |
| | | | Vu | | 1038,889 | | verdi=0 | 20389 | 67,963 % | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 2 806,872 |
| caplet nr | Måned | tk | θ(tk)/a | z1 | sim r | snitt sim r(0,tk) | sim r (mnd) | utbetaling | PV(utbet) | | 0,000 |
| | 0 | 0,00 | 4,770 % | | 3,55 % | | 3,555 % | | | | 0,000 |
| 1 | 1 | 0,08 | 4,047 % | 0,9930 | 4,021 % | 3,55 % | 4,027 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 2 | 2 | 0,17 | 6,545 % | -0,6350 | 3,747 % | 3,79 % | 3,752 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 3 | 3 | 0,25 | 5,933 % | -0,6169 | 3,573 % | 3,77 % | 3,578 % | 0 | 0 | | 757,303 |
| 4 | 4 | 0,33 | 4,791 % | 0,1063 | 3,697 % | 3,72 % | 3,703 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 5 | 5 | 0,42 | 7,741 % | -0,1303 | 3,677 % | 3,72 % | 3,683 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 6 | 6 | 0,50 | 4,284 % | -0,1491 | 3,748 % | 3,71 % | 3,754 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 7 | 7 | 0,58 | 5,930 % | 0,0268 | 3,778 % | 3,72 % | 3,784 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 8 | 8 | 0,67 | 8,515 % | 0,3982 | 4,022 % | 3,72 % | 4,029 % | 0 | 0 | | 331,927 |
| 9 | 9 | 0,75 | 6,745 % | 0,2271 | 4,270 % | 3,76 % | 4,278 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 10 | 10 | 0,83 | 2,210 % | 0,7444 | 4,675 % | 3,81 % | 4,684 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 11 | 11 | 0,92 | -0,078 % | 1,4306 | 5,212 % | 3,89 % | 5,223 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 12 | 12 | 1,00 | 3,379 % | -0,8867 | 4,652 % | 4,00 % | 4,661 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 13 | 13 | 1,08 | 7,726 % | 1,0914 | 5,082 % | 4,05 % | 5,093 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 14 | 14 | 1,17 | 5,659 % | -0,2970 | 5,042 % | 4,12 % | 5,052 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 15 | 15 | 1,25 | 5,683 % | 1,7721 | 5,829 % | 4,18 % | 5,844 % | 0 | 0 | | 111,386 |
| 16 | 16 | 1,33 | 5,878 % | -0,9926 | 5,395 % | 4,29 % | 5,407 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 17 | 17 | 1,42 | 6,022 % | -1,2395 | 4,874 % | 4,35 % | 4,884 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 18 | 18 | 1,50 | 5,569 % | 0,7653 | 5,244 % | 4,38 % | 5,255 % | 0 | 0 | | 5 323,656 |
| 19 | 19 | 1,58 | 5,609 % | -0,0791 | 5,220 % | 4,43 % | 5,232 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 20 | 20 | 1,67 | 5,649 % | -0,9446 | 4,824 % | 4,47 % | 4,834 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 21 | 21 | 1,75 | 5,689 % | 0,3079 | 4,985 % | 4,48 % | 4,995 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 22 | 22 | 1,83 | 5,729 % | -1,0957 | 4,534 % | 4,51 % | 4,543 % | 0 | 0 | | 4 820,428 |
| 23 | 23 | 1,92 | 13,269 % | 0,7737 | 4,909 % | 4,51 % | 4,919 % | 0 | 0 | | 5 089,283 |
| 24 | 24 | 2,00 | 6,659 % | -1,2008 | 4,668 % | 4,52 % | 4,677 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 25 | 25 | 2,08 | 6,719 % | 0,7844 | 5,074 % | 4,53 % | 5,085 % | 0 | 0 | | 28,447 |
| 26 | 26 | 2,17 | 6,779 % | 1,9040 | 5,953 % | 4,55 % | 5,968 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 27 | 27 | 2,25 | 6,839 % | 0,7897 | 6,323 % | 4,60 % | 6,339 % | 0 | 0 | | 877,313 |
| | | | | | | | verdi cap for denne rentebane | | 0 | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 17 264,959 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 1 226,369 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 16 741,461 |
| | | | | | | | | | | | 400,561 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PRISING AV RENTETAK - MÅNED - HULL-WHITE MODELLEN | | | | | | | | | | | 8 458,622 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| **INNDATA** | | | **RESULTATER** | | | | **kriterie** | **ant. baner** | **i %** | | 4 134,775 |
| Lånebeløp | 1000000 | | antall trekninger | | 30000 | | verdi > 40 000 | 3 | 0,010 % | | 208,478 |
| RK år | 6,350 % | | Verdi cap | | 1005,41 | | verdi> 30 000 | 18 | 0,060 % | | 49,943 |
| RK mnd | 6,172 % | | I % av lånebeløp | | 0,10 % | | verdi> 20 000 | 129 | 0,430 % | | 0,000 |
| Løpetid | 2,25 | | | | | | verdi> 10 000 | 755 | 2,517 % | | 0,000 |
| tidssteg | 0,083 | | s | | 2958,765 | | verdi > 5000 | 1943 | 6,477 % | | 0,000 |
| a | 0,400 | | v | | 17,08244 | | verdi> 1000 | 5310 | 17,700 % | | 0,000 |
| σ | 0,015 | | Vl | | 971,9272 | | verdi> 0 | 9611 | 32,037 % | | 0,000 |
| | | | Vu | | 1038,889 | | verdi=0 | 20389 | 67,963 % | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 2 806,872 |
| caplet nr | Måned | tk | θ(tk)/a | z1 | sim r | snitt sim r(0,tk) | sim r (mnd) | utbetaling | PV(utbet) | | 0,000 |
| | 0 | 0,00 | 4,770 % | | 3,55 % | | 3,555 % | | | | 0,000 |
| 1 | 1 | 0,08 | 4,047 % | 0,9930 | 4,021 % | 3,55 % | 4,027 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 2 | 2 | 0,17 | 6,545 % | -0,6350 | 3,747 % | 3,79 % | 3,752 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 3 | 3 | 0,25 | 5,933 % | -0,6169 | 3,573 % | 3,77 % | 3,578 % | 0 | 0 | | 757,303 |
| 4 | 4 | 0,33 | 4,791 % | 0,1063 | 3,697 % | 3,72 % | 3,703 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 5 | 5 | 0,42 | 7,741 % | -0,1303 | 3,677 % | 3,72 % | 3,683 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 6 | 6 | 0,50 | 4,284 % | -0,1491 | 3,748 % | 3,71 % | 3,754 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 7 | 7 | 0,58 | 5,930 % | 0,0268 | 3,778 % | 3,72 % | 3,784 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 8 | 8 | 0,67 | 8,515 % | 0,3982 | 4,022 % | 3,72 % | 4,029 % | 0 | 0 | | 331,927 |
| 9 | 9 | 0,75 | 6,745 % | 0,2271 | 4,270 % | 3,76 % | 4,278 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 10 | 10 | 0,83 | 2,210 % | 0,7444 | 4,675 % | 3,81 % | 4,684 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 11 | 11 | 0,92 | -0,078 % | 1,4306 | 5,212 % | 3,89 % | 5,223 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 12 | 12 | 1,00 | 3,379 % | -0,8867 | 4,652 % | 4,00 % | 4,661 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 13 | 13 | 1,08 | 7,726 % | 1,0914 | 5,082 % | 4,05 % | 5,093 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 14 | 14 | 1,17 | 5,659 % | -0,2970 | 5,042 % | 4,12 % | 5,052 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 15 | 15 | 1,25 | 5,683 % | 1,7721 | 5,829 % | 4,18 % | 5,844 % | 0 | 0 | | 111,386 |
| 16 | 16 | 1,33 | 5,878 % | -0,9926 | 5,395 % | 4,29 % | 5,407 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 17 | 17 | 1,42 | 6,022 % | -1,2395 | 4,874 % | 4,35 % | 4,884 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 18 | 18 | 1,50 | 5,569 % | 0,7653 | 5,244 % | 4,38 % | 5,255 % | 0 | 0 | | 5 323,656 |
| 19 | 19 | 1,58 | 5,609 % | -0,0791 | 5,220 % | 4,43 % | 5,232 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 20 | 20 | 1,67 | 5,649 % | -0,9446 | 4,824 % | 4,47 % | 4,834 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 21 | 21 | 1,75 | 5,689 % | 0,3079 | 4,985 % | 4,48 % | 4,995 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 22 | 22 | 1,83 | 5,729 % | -1,0957 | 4,534 % | 4,51 % | 4,543 % | 0 | 0 | | 4 820,428 |
| 23 | 23 | 1,92 | 13,269 % | 0,7737 | 4,909 % | 4,51 % | 4,919 % | 0 | 0 | | 5 089,283 |
| 24 | 24 | 2,00 | 6,659 % | -1,2008 | 4,668 % | 4,52 % | 4,677 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 25 | 25 | 2,08 | 6,719 % | 0,7844 | 5,074 % | 4,53 % | 5,085 % | 0 | 0 | | 28,447 |
| 26 | 26 | 2,17 | 6,779 % | 1,9040 | 5,953 % | 4,55 % | 5,968 % | 0 | 0 | | 0,000 |
| 27 | 27 | 2,25 | 6,839 % | 0,7897 | 6,323 % | 4,60 % | 6,339 % | 0 | 0 | | 877,313 |
| | | | | | | | verdi cap for denne rentebane | | 0 | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 17 264,959 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 1 226,369 |
| | | | | | | | | | | | 0,000 |
| | | | | | | | | | | | 16 741,461 |
| | | | | | | | | | | | 400,561 |

# Appendiks 5: Prising av amerikansk opsjon

| terminstruktur | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| måned | tk | rente | lånerente | F(0,tk,tk+1) kont. | F(0,tk, tk+1) kvar | Ft(0, tk, tk+1) | θ(tk) | θ(tk)/a | P(0,tk) |
| 0 | 0,000 | 2,55 % | 3,55 % | 3,60 % | 3,62 % | 0,0072 | 0,0216 | 0,054072 | 1 |
| 3 | 0,250 | 2,60 % | 3,60 % | 3,78 % | 3,80 % | 0,0082 | 0,0236 | 0,059069 | 0,991037 |
| 6 | 0,500 | 2,69 % | 3,69 % | 3,99 % | 4,01 % | 0,0092 | 0,0255 | 0,063629 | 0,98171 |
| 9 | 0,750 | 2,79 % | 3,79 % | 4,22 % | 4,24 % | -0,0054 | 0,0118 | 0,029478 | 0,971971 |
| 12 | 1,000 | 2,90 % | 3,90 % | 4,08 % | 4,11 % | 0,0070 | 0,0236 | 0,059067 | 0,961774 |
| 15 | 1,250 | 2,94 % | 3,94 % | 4,26 % | 4,28 % | 0,0060 | 0,0233 | 0,058239 | 0,952003 |
| 18 | 1,500 | 2,99 % | 3,99 % | 4,41 % | 4,43 % | 0,0048 | 0,0227 | 0,056794 | 0,941918 |
| 21 | 1,750 | 3,05 % | 4,05 % | 4,53 % | 4,55 % | 0,0156 | 0,0340 | 0,084994 | 0,931593 |
| 24 | 2,000 | 3,11 % | 4,11 % | 4,92 % | 4,95 % | 0,0072 | 0,0272 | 0,067894 | 0,921104 |
| 27 | 2,250 | 3,20 % | 4,20 % | 5,10 % | 5,13 % | 0,0072 | 0,0279 | 0,069694 | 0,909846 |

| A | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A(tk,T) | A(tk,t8) | A(tk,t8) | A(tk,t6) | A(tk,t5) | A(tk,t4) | A(tk,t3) | A(tk,t2) | A(tk, t1) | A(t0,t0) |
| 0,9600 | 0,9681 | 0,9750 | 0,9812 | 0,9865 | 0,9909 | 0,9950 | 0,9979 | 0,9996 | 1,0000 |
| 0,9673 | 0,9749 | 0,9812 | 0,9866 | 0,9912 | 0,9947 | 0,9978 | 0,9996 | 1,0000 | |
| 0,9747 | 0,9816 | 0,9871 | 0,9917 | 0,9952 | 0,9976 | 0,9996 | 1,0000 | | |
| 0,9819 | 0,9880 | 0,9925 | 0,9961 | 0,9984 | 0,9995 | 1,0000 | | | |
| 0,9849 | 0,9906 | 0,9947 | 0,9977 | 0,9996 | 1,0000 | | | | |
| 0,9900 | 0,9947 | 0,9977 | 0,9995 | 1,0000 | | | | | |
| 0,9941 | 0,9977 | 0,9995 | 1,0000 | | | | | | |
| 0,9970 | 0,9995 | 1,0000 | | | | | | | |
| 0,9995 | 1,0000 | | | | | | | | |
| 1,0000 | | | | | | | | | |

| B | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B(tk,T) | B(tk, t8) | B(tk, t7) | B(tk,t6) | B(tk,t5) | B(tk,t4) | B(tk,t3) | B(tk,t2) | B(tk,t1) | B(t0,t0) |
| 1,4836 | 1,3767 | 1,2585 | 1,1280 | 0,9837 | 0,8242 | 0,6480 | 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 |
| 1,3767 | 1,2585 | 1,1280 | 0,9837 | 0,8242 | 0,6480 | 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 | |
| 1,2585 | 1,1280 | 0,9837 | 0,8242 | 0,6480 | 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 | | |
| 1,1280 | 0,9837 | 0,8242 | 0,6480 | 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 | | | |
| 0,9837 | 0,8242 | 0,6480 | 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 | | | | |
| 0,8242 | 0,6480 | 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 | | | | | |
| 0,6480 | 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 | | | | | | |
| 0,4532 | 0,2379 | 0,0000 | | | | | | | |
| 0,2379 | 0,0000 | | | | | | | | |
| 0,0000 | | | | | | | | | |

Eksempel på en matrise med diskonteringsfunksjoner (tilhører én simulert rentebane)

| P(tk,T) | P(tk,t8) | P(tk,t7) | P(tk,t6) | P(tk,t5) | P(tk,t4) | P(tk,t3) | P(tk,t2) | P(tk,t1) | P(t0,t0) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,9098 | 0,9211 | 0,9316 | 0,9419 | 0,9520 | 0,9618 | 0,9720 | 0,9817 | 0,9910 | 1,0000 |
| 0,9073 | 0,919 | 0,931 | 0,942 | 0,954 | 0,965 | 0,977 | 0,989 | 1,000 | |
| 0,9243 | 0,936 | 0,947 | 0,958 | 0,968 | 0,979 | 0,990 | 1,000 | | |
| 0,9488 | 0,959 | 0,968 | 0,977 | 0,985 | 0,992 | 1,000 | - | | |
| 0,9481 | 0,960 | 0,970 | 0,980 | 0,990 | 1,000 | - | - | | |
| 0,9555 | 0,967 | 0,978 | 0,989 | 1,000 | - | - | - | | |
| 0,9627 | 0,976 | 0,988 | 1,000 | - | - | - | - | | |
| 0,9799 | 0,990 | 1,000 | - | - | - | - | - | | |
| 0,9899 | 1,000 | - | - | - | - | - | - | | |
| 1,0000 | - | - | - | - | - | - | - | | |
| | | | | | | | | | |

De resterende beregningene for case 2 er dessverre for omfattende til å vises i dette dokumentet .