



# Investering etter Kelly-kriteriet

*Vil aksjeporteføljer basert på investeringer etter Kelly-kriteriet på lang sikt prestere bedre enn porteføljer hvor det er investert etter andre strategier?*

**Solveig Lillebø og Marthe Reinkind**

**Veileder: Terje Lensberg**

Selvstendig arbeid innen masterstudiet i økonomi og  
administrasjon

Hovedprofil: Finansiell økonomi

**NORGES HANDELSHØYSKOLE**

Dette selvstendige arbeidet er gjennomført som ledd i masterstudiet i økonomi- og administrasjon ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at Høyskolen eller sensorer inntår for de metoder som er anvendt, resultater som er fremkommet eller konklusjoner som er trukket i arbeidet.



## FORORD

Etter fem år ved Norges Handelshøyskole (NHH) har vi skrevet denne masteroppgaven som siste og avsluttende del av vårt masterstudie i økonomi og administrasjon. Vi har begge Finansiell økonomi som hovedprofil, og utredningen skrives innenfor dette fagområdet, våren 2013.

Arbeidet med oppgaven har gitt oss muligheten til å fordype oss i Evolusjonær finans, med hovedfokus på investering etter Kelly-kriteriet. Ingen av kursene vi har fulgt ved NHH har lagt særlig vekt på vårt tema i oppgaven. Vi har likevel hatt stor nytte og hjelp av kunnskap tilegnet i ulike fag ved høyskolen. Ettersom Evolusjonær finans og Kelly-kriteriet var nytt for oss, har det vært ekstra spennende og lærerikt å jobbe med. Kort fortalt er Kelly-kriteriet en evolusjonær investeringsstrategi, og en investering etter kriteriet forventes, i følge teorien, å gi en bedre avkastning enn andre investeringsstrategier. I utredningen ønsket vi å teste om teorien stemte, og dette arbeidet har vært både utfordrende og interessant.

Vi vil takke vår veileder professor Terje Lensberg for både gode råd, retningslinjer og nyttige innspill i løpet av arbeidet med utredningen. En takk rettes også til professor Thorsten Hens som ga oss gode tips og synspunkter. Vi vil i tillegg takke Nils D. Algaard hos Børsprosjektet ved NHH for datamaterialet som ligger til grunn for våre analyser, samt Kristine Lillebø for gjennomlesning og korrektur.

Bergen, våren 2013

---

Solveig Lillebø

---

Marthe Reinkind



---

## SAMMENDRAG

I denne utredningen ønsket vi å presentere en realistisk illustrasjon for bruken av den evolusjonære strategien Kelly-kriteriet. En aksjeportefølje basert på en langsiktig investering etter kriteriet forventes å prestere bedre enn porteføljer basert på andre investeringsstrategier. Vi har av den grunn valgt å studere og sammenlikne ulike Kelly-porteføljer med en markedsportefølje samt en portefølje basert på Markowitz-metoden.

Utgangspunktet for analysene var selskaper notert på Oslo Børs i perioden 1998 til 2012. Ved å benytte oss av fire års rullerende gjennomsnitt av historiske avkastninger som et estimat for fremtidig forventet avkastning, strakk våre porteføljer seg over ti år, fra 2002 til 2011. Som et verktøy for analysene har vi benyttet oss av Excel, med både Solver og VBA.

Våre resultater indikerer at Kelly-porteføljene blir slått av Markowitz-porteføljen. Dette gjelder med hensyn på både avkastning samt andre risiko- og prestasjonsmål. For eksempel hadde Markowitz-porteføljen en årlig gjennomsnittsavkastning på 8,40 % for hele perioden, mens den Kelly-porteføljen som presterte best hadde en årlig avkastning på 8,26 %. Forskjellene er altså ikke store. Markedsporteføljen hadde på sin side en årlig gjennomsnittsavkastning på 5,83 %. De tre ovennevnte porteføljene hadde videre Sharpe-tall på henholdsvis 0,08697 (Markowitz), 0,08226 (Kelly) og 0,03895 (Marked).

Når det gjelder våre resultater kan vi ikke, med grunnlag i våre analyser, trekke noen klare konklusjoner på om resultatene er signifikante. Årsaken er blant annet at datautvalget vårt er for lite, samt at tidsperioden er for kort. For oss var heller ikke dette hensikten med utredningen, da vi hovedsakelig ville illustrere anvendelsen av Kelly-kriteriet. Avslutningsvis i oppgaven har vi inkludert en kritisk diskusjon rundt ulike forutsetninger for våre analyser, og på hvordan Kelly-kriteriet kan forbedres med tanke på fremtidig anvendelse.



---

## INNHALDSFORTEGNELSE

FORORD .....	3
SAMMENDRAG.....	5
INNHALDSFORTEGNELSE .....	7
FIGUROVERSIKT.....	9
TABELLOVERSIKT .....	11
1. INNLEDNING OG PROBLEMSTILLING .....	13
1.1 Motivasjon .....	13
1.2 Problemstilling.....	13
2. HVA ER EVOLUSJONÆR FINANS .....	14
2.1 Biologisk evolusjon .....	14
2.2 Koblingen mellom biologisk evolusjon og Evolusjonær finans.....	16
2.3 Introduksjon til Kelly-kriteriet.....	19
3. TEORETISK BAKGRUNN .....	20
3.1 Passiv versus aktiv forvaltning .....	20
3.2 Diversifisering.....	21
3.3 Varians-Kovariansmatrise (VCV-matrise) .....	22
3.4 Markowitz-metoden.....	22
4. KELLY-KRITERIET .....	25
4.1 Kelly-kriteriet i gambling – Binomiske pengespill.....	27
4.2 Kelly-kriteriet i aksjemarkedet – Kontinuerlige pengespill.....	31
4.3 Full og Fractional Kelly .....	34
4.4 Berømte Kelly-investorer.....	35
4.5 Svakheter ved Kelly-kriteriet.....	35
5. METODE.....	37
5.1 Kvantitativ metode.....	37
5.2 Datainnsamling .....	37
5.3 Dataanalysens metodevalg.....	40
5.3.1 Forutsetninger for analysen.....	40
5.3.2 Varians-Kovariansmatrise (VCV-matrise) .....	41
5.3.3 Markedsporteføljen .....	42

5.3.4 Markowitz-metoden .....	42
5.3.5 Kelly-kriteriet .....	43
6. ANALYSE .....	46
6.1 Vekstratene for Kelly-porteføljene .....	46
6.2 Andeler investert .....	47
6.3 Avkastning .....	50
6.4 Risiko- og Prestasjonsmål .....	56
6.5 Fractional Kelly-porteføljer .....	61
6.6 Konjunkturer .....	64
7. KRITISK DISKUSJON .....	67
7.1 Bruken av Kelly-kriteriet som en illustrasjon .....	67
7.2 Bruk av historisk avkastning som et estimat på fremtidig forventet avkastning .....	68
7.3 VCV-matrisen og Markowitz-metoden .....	69
7.4 Begrensninger knyttet til resultatmålene .....	70
7.5 Mulige måter å forbedre resultatene i Kelly-porteføljene på .....	70
8. KONKLUSJON .....	72
9. LITTERATURLISTE .....	74
10. APPENDIKS .....	79
10.1 VBA .....	79
10.2 Evalueringskriterier .....	80
10.3 Analyse .....	84



---

## FIGUROVERSIKT

Figur 3.1: Effisient front.....	23
Figur 4.1: $G(f)$ som en funksjon av $f$ .....	30
Figur 6.1: Andeler investert i 2002.....	48
Figur 6.2: Andeler investert i 2005.....	48
Figur 6.3: Andeler investert i 2008.....	49
Figur 6.4: Andeler investert i 2011.....	49
Figur 6.5: Forventede avkastninger fra 2002 til 2011.....	51
Figur 6.6: Virkelige avkastninger fra 2002 til 2011.....	53
Figur 6.7: Faktisk avkastning versus forventet avkastning for Kelly 100 % .....	54
Figur 6.8: Faktisk avkastning versus forventet avkastning for Kelly 175 % .....	55
Figur 10.1: VBA benyttet i 2002.....	79
Figur 10.2: Andeler investert i 2003.....	84
Figur 10.3: Andeler investert i 2004.....	85
Figur 10.4: Andeler investert i 2006.....	85
Figur 10.5: Andeler investert i 2007.....	85
Figur 10.6: Andeler investert i 2009.....	86
Figur 10.7: Andeler investert i 2010.....	86



## TABELLOVERSIKT

Tabell 5.1: 10-årige gjennomsnittlige renter på norske statsobligasjoner.....	39
Tabell 6.1: Årlig forventet vekstrate for Kelly-porteføljene.....	46
Tabell 6.2: Årlig forventet avkastning for 2002 til 2011 .....	50
Tabell 6.3: Årlig gjennomsnitt av forventet avkastning for hele perioden .....	51
Tabell 6.4: Årlig virkelig avkastning fra 2002 til 2011 .....	52
Tabell 6.5: Årlig gjennomsnitt av virkelig avkastning for hele perioden.....	53
Tabell 6.6: Meravkastning utover risikofri rente per år fra 2002 til 2011.....	55
Tabell 6.7: Årlig gjennomsnittlig standardavvik fra 2002 til 2011.....	56
Tabell 6.8: Gjennomsnittlige årlige beta-verdier fra 2002 til 2011 .....	57
Tabell 6.9: Usystematisk risiko fra 2002 til 2011.....	58
Tabell 6.10: Gjennomsnittlige årlige Sharpe-tall fra 2002 til 2011 .....	58
Tabell 6.11: Gjennomsnittlig årlige Treynors indeks fra 2002 til 2011.....	59
Tabell 6.12: Gjennomsnittlig årlig $M^2$ fra 2002 til 2011.....	59
Tabell 6.13: Gjennomsnittlig årlige Jensens alfa-verdier fra 2002 til 2011...	60
Tabell 6.14: Gjennomsnittlig årlige Information Ratio fra 2002 til 2011.....	60
Tabell 6.15: Standardavvik for Fractional Kelly per år fra 2002 til 2011.....	62
Tabell 6.16: Årlig gjennomsnitt av forventet avkastning for Fractional Kelly fra 2002 til 2011.....	62
Tabell 6.17: Årlig gjennomsnitt av virkelig avkastning for Fractional Kelly fra 2002 til 2011.....	63



## 1. INNLEDNING OG PROBLEMSTILLING

### 1.1 Motivasjon

Før vi startet arbeidet med masteroppgaven var vi begge usikre på hva vi ønsket å fordype oss i. Innenfor Finansiell økonomi finnes det utrolig mange spennende fagområder og tema som var mulige å kikke nærmere på. Vi fant imidlertid tidlig ut at aktiv forvaltning både var et dagsaktuelt og interessant tema. En årsak er at mange analytikere sjeldent slår markedsavkastingen. Vi tenkte at det ville vært spennende å se på andre former for aktiv forvaltning og undersøke om det kan finnes ”bedre måter” å investere på. Veileder introduserte oss for Evolusjonær finans, og det er et område som det har blitt fokusert lite på i undervisningen, både på bachelor- og masternivå ved NHH. Vi fant feltet interessant og valgte da å studere nærmere en investeringsstrategi innenfor Evolusjonær finans, kalt Kelly-kriteriet. Kelly-kriteriet regnes som en evolusjonær strategi da det forventes å slå andre investeringsstrategier og dermed overleve i markedet på lang sikt.

### 1.2 Problemstilling

I vår masteroppgave vil vi presentere Kelly-kriteriet og bruken av det. Vi ønsker videre å analysere om en investering etter kriteriet vil gjøre det bedre på lang sikt sammenliknet med Markedsporteføljen og en aktiv portefølje basert på Markowitz-metoden. I den forbindelse benytter vi oss av data fra Oslo Børs. Oppgaven er en realistisk illustrasjon av Kelly-kriteriet i liten skala, og problemstillingen er som følger:

*Vil aksjeporteføljer basert på investeringer etter Kelly-kriteriet på lang sikt prestere bedre enn porteføljer hvor det er investert etter andre strategier?*

## 2. HVA ER EVOLUSJONÆR FINANS

Begreper som forventning-varians-analyse ("*mean-variance analysis*"), arbitrasjepricing, effisiente markeder og rasjonalitet har lenge stått sentralt i finansfaget (Hens & Schenk-Hoppé, 2004). Fagfeltet er imidlertid i utvikling og nyere forskning utfordrer det tradisjonelle markedssynet (Hens & Schenk-Hoppé, 2005). Med utgangspunkt i beslutningsteori, og da særlig de psykologiske utfordringer og feller knyttet til beslutninger under usikkerhet, har derfor et nytt felt innen finansfaget, Behavioural finance, vokst frem. Fagfeltet kombinerer finans med psykologi, og resultatet er at det stilles spørsmålstegn ved flere etablerte sannheter innen finans. Behavioural finance sine sentrale funn tyder nemlig på at enkeltindivider konsekvent viker fra både rasjonell oppførsel og etablerte regler om sannsynlighet (Hens & Bachmann, 2008).

Det finnes videre en tredje tilnærming til Finansiell økonomi kalt Evolusjonær finans. Synet er plassert noe mellom tradisjonell og behavioural tankegang, med et fokus på strategier, markedsseleksjon og mutasjoner (Hens & Schenk-Hoppé, 2004). For mens både Tradisjonell finans og Behavioural finance har det til felles at en aktørs valg og handlinger skal kunne være representativ for de andre aktørenes valg og handlinger, så bygger Evolusjonær finans på tanken om ulikhet blant aktørene. I Evolusjonær finans anser en markedene i å bestå av ulike strategier, og fokuset er derfor ikke på individnivå. Det kommer som et resultat av oppfatningen om at enkeltpersoner har liten betydning for markedet, da markedet ikke bryr seg om *hvem* som investerer *hva* etter bestemte investeringsstrategier. Det relevante for markedet er hvor mye kapital som er investert etter slike strategier. Videre legger Evolusjonær finans heller ikke vekt på hvordan investeringsstrategiene utvikles, da det interessante er hvilke resultater de oppnår når de først ankommer markedet (Hens & Schenk-Hoppé, 2005).

### 2.1 Biologisk evolusjon

Som navnet antyder henter Evolusjonær finans sin inspirasjon fra biologien. Spesielt brukes ideene fra evolusjonsteorien, eller utviklingslæren som den også er kalt. Evolusjonsteorien ble presentert av Charles Darwin i hans bok "*Artenes opprinnelse*" i 1859. Han viste på grunnlag av observasjoner og innsamlet materialet at det hadde foregått en utvikling blant arter. I tillegg presenterte han en teori om prosessen dit gjennom teorien om *naturlig utvalg* (Brøgger, 2007). Et annet begrep i

utviklingslæren er *variasjon*. Dette kan illustreres ved å se på reproduksjon i form av at foreldre får barn. Da vil barna arve flere egenskaper fra foreldrene. Egenskaper som arves kan imidlertid variere mellom søsken. Eksempelvis vil noen barn vokse og bli høye, mens andre vil bli sterke. Noen vil bli lyse, mens andre vil bli mørke. (Parker, 1994). Enkelte egenskaper er godt tilpasset både omgivelsene og miljøet. Planter og dyr med slike trekk vil lettere kunne tilpasse seg endringer, og følgelig stille sterkere i kampen om å overleve på lang sikt. Darwin omtalte det som "*Survival of the fittest*", noe som innebærer at de artene med de beste egenskapene vil være levedyktige og produsere avkom som er godt tilpasset miljøet, mens arter som ikke klarer å tilpasse seg vil dø ut (Parker, 1994). Darwins tanker har gitt videre grobunn for Evolusjonær finans.

Det er flere som har gått i Darwins fotspor. Følgelig har ytterligere tanker rundt biologisk evolusjon og dens kobling til Evolusjonær finans blitt presentert. Eksempelvis skrev Hans-Werner Sinn i 2002 om menneskers preferanser, og at det er naturens måte å styre vår oppførsel på, slik at vi tilfredsstiller "reglene" for biologisk evolusjon. Evolusjon handler om overlevelse, men valg som arter tar skjer som oftest automatisk uten at man faktisk tenker på det å klare seg. Det gjelder for eksempel at vi drikker når vi er tørste og at vi spiser når vi er sultne. Da tilfredsstiller vi våre preferanser selv om det underliggende målet er å sikre overlevelse og reproduksjon (Sinn, 2002).

Richard Dawkins ga i 1976 ut boka "*The Selfish Gene*", der vitenskapen om evolusjon og biologi er skrevet som populærlitteratur. Dawkins tar utgangspunkt i at alle – både mennesker og dyr – blir drevet av sine gener, og at man derfor er å regne som maskiner (Dawkins, 2009). De mest suksessrike genene vil være preget av "hensynsløs egoisme", noe som trolig også vil medføre en begrenset form for altruisme. Fra naturens side er artene født egoistiske og vil derfor kun tenke på seg selv. Nestekjærlighet og samarbeid er noe som ikke finnes naturlig, men som må læres. Genene våre både lærer og oppfordrer oss til å opptre egoistiske, men en verden kun preget av egoisme ville med stor sannsynlighet vært en "skadelig" verden. Det er derfor ikke bestemt at man alltid må adlyde det genene forteller oss. Likevel har de artene som har overlevd gjennom naturlig utvalg trolig oppført seg egoistisk.

Dawkins definerer altruisme, eller velferd, som en handling der en art utfører en gjerning som øker en annen arts sjanse til å overleve. Videre sier Dawkins at årsakene til altruisme ikke er relevante, da det kun er viktig å se på hvordan handlingene påvirker artenes sjanse til å overleve (Dawkins, 2009).

### *SELEKSJON OG KONKURRANSE*

Et svært sentralt tema innenfor evolusjon er *seleksjon*. Dawkins mener at grunnlaget for seleksjonsprosessen er genene våre. Han mener det ligger til grunn for vår egeninteresse, og tar derfor ikke hensyn til verken arter, grupper eller individer. Dawkins forklarer at det hele startet med et molekyl, tilnærmet et DNA-molekyl, som var i stand til å kopiere seg selv, slik at det var en replikator. Replikatoren fungerte som en slags ”mal” slik at kopiene var tilnærmet identiske. Det finnes flere ulike replikator-molekyler og det er derfor forskjeller når det gjelder hastigheten på formeringen og hvor nøyaktig de klarer å formere seg (Dawkins, 2009).

En annen betydningsfull faktor er *konkurranse*. Feil hos replikatorene kan medføre at nye molekyler enten blir sterkere eller svakere enn tidligere. Uten av de selv var klar over det, kjempet replikatorene for tilværelsen slik at det etter hvert oppstod forbedringer som gjorde molekylene mer stabile. Replikatorene blir i dag kalt gener (Dawkins, 2009). Genene lever i alle arter; dyr, planter, bakterier og virus. Artene blir genenes overlevelsesmekanismer selv om artene finnes i ulike former og fasonger. De utvikler ulike egenskaper, og dermed også ulike overlevelsesmekanismer. På grunnlag av atferd kan vi derfor skille mellom for eksempel planter og dyr og hvor de lever, om det er i havet, på land eller i luften. I tillegg lærer artene seg å skille mellom hva som er godt og hva som kan være skadelig, slik at de kan forsøke å unngå sistnevnte. Både læring og altruistisk atferd kan arves, helt eller delvis, og er med på å påvirke overlevelsesraten til ulike arter (Dawkins, 2009). På denne måten kan vi derfor si at Dawkins gir et godt innblikk i en måte man kan se for seg evolusjonen, dog litt annerledes enn det Darwin beskriver.

## **2.2 Koblingen mellom biologisk evolusjon og Evolusjonær finans**

*“While in biology resources like food are fought for, in finance strategies fight for market capital. Selection changes the relative weight of strategies in the market and may lead to extinction for some. On the other hand, mutation enriches the market’s ecology”* (Hens & Schenk-Hoppé, 2005, s. 2).



---

Med sitatet over forklarer Hens og Schenk-Hoppé (2005) enkelt tankene bak sammenhengen mellom biologisk evolusjon og Evolusjonær finans. En slik tilnærming til økonomisk analyse ble først introdusert i 1950, da Armen A. Alchian presenterte sin artikkel ”*Uncertainty, Evolution, and Economic theory*”. I artikkelen trakk Alchian koblinger mellom biologisk evolusjon og naturlig seleksjon til økonomien, da han så på det økonomiske systemet som tilpasningsdyktig med det resultatet at der da eksisterer en utvelgelse blant profittsøkende handlinger. Alchian mente dermed at markedene velger ut de ”*vinnerne*” som overlever i markedet på sikt. Det betyr at de aktørene som overlever er de som best mulig har klart å tilpasse seg i de eksisterende markedene.

Nærmere bestemt er, i følge Alchian (1950), den økonomiske atferden som selekteres i markedet den som fører til suksess og levedyktighet. Suksess kan identifiseres ved hjelp av realisert positiv profitt. Det innebærer at de som ikke realiserer positiv profitt i markedet forsvinner, mens de resterende blir. De bakenforliggende årsakene til slik positiv realisert profitt er ikke relevante, da det er det faktum at bedriftene gjør suksess som er interessant. Hvem som gjør suksess er relativt, da det avhenger av konkurransen mellom aktørene. Vinnerne er nemlig de som gjør det bedre enn sine faktiske motstandere, uavhengig av hvor dyktige både vinnerne og taperne er. “*Even in a world of stupid men there would still be profits*” (Alchian, 1950, s. 213).

*Flaks* kan trolig være en forklaring på hvorfor noen overlever i markedene mens andre selekteres ut. Flakselementet blir dermed mer sentralt dess større usikkerhet det er knyttet til adferden. En annen mulig forklaring kan være *evnen til tilpasning*. På den ene siden kan det indikere at vinnerne er de som har tilpasset seg markedet, slik at deres adferd er den som realiserer positiv profitt. Samtidig kan det vel så gjerne skyldes at markedet adopterer de som er egnet til å overleve. Uansett, så argumenterer Alchian (1950) for at der eksisterer noen former for individuell tilpasning blant aktørene. En slik form er tilpasning gjennom *imitasjon*. Dette innebærer en kopiering av observerte egenskaper hos vinnerne, dersom egenskapene kan forbindes til deres suksess. Imitasjon kan også føre til *innovasjon*, da aktører ubevisst kan ende med å være nyskapende i forsøket på å kopiere suksess-skapende adferd. En annen form for individuell tilpasning kan skje gjennom prøving og feiling. Med base i overnevnte momenter beskrev Alchian sammenhengen mellom evolusjon og økonomi på

følgende måte: ”*The economic counterparts of genetic heredity, mutations, and natural selection are imitation, innovation, and positive profits*” (Alchian, 1950, s. 220).

Artikkelen ”*Market Competition and Selection*”, skrevet av Blume og Easley (2007), bygger videre på Alchians utsagn om at realisert positiv profitt er det viktigste for suksess. De fleste økonomiske modeller tar utgangspunkt i hypoteser om at aktørene er rasjonelle, men det vil ikke være slik at alle aktører alltid handler rasjonelt. Hvorfor utfallene likevel konvergerer mot de predikerte utfallene på lang sikt kan ha flere mulige forklaringer. En måte man kan forklare utfallene på er at aktørene på lang sikt lærer å oppføre seg slik som modellene predikerer. En alternativ forklaring kan være at aktører oppfører seg ”som om” de er rasjonelle og at de dermed blir valgt ut av markedene (Blume & Easley, 2007). Den siste forklaringen betyr at aktørene selv ikke vet hvorfor noen opplever suksess og andre tap, da det er markedet som velger ut de som oppfører seg slik som modellene predikerer.

Blume & Easley (2007) gjengir Enke (1951), som forklarer hvorfor realisert positiv profitt er viktig, ved å benytte et eksempel som omhandler konkurranse mellom bedrifter. Vinnerne på kort sikt vil bli de som maksimerer profitt, men på lang sikt vil bedriftene som opplever suksess optimalisere sin egen situasjon slik at de overlever. Det betyr derfor ikke at de nødvendigvis maksimerer profitt, men de vil ha høy nok fortjeneste til å overleve i markedet. Vi kan derfor si at aktørene oppfører seg ”som om” de er klar over hvordan de skal overleve på lang sikt. Det bør påpekes at denne fortjenesten likevel kan skyldes enten flaks og/eller personlige egenskaper (Blume & Easley, 2007).

Vi kan også benytte investorer for å studere aktører som oppfører seg ”som om” de er rasjonelle, og derfor hevde at de på lang sikt vil dominere markedet. Slike rasjonelle investorer vil sannsynligvis prise verdipapirene korrekt på lang sikt. Cootner beskrev et slikt eksempel i boken ”*The Random Character of Stock Market Prices*” fra 1964, og det er gjengitt i artikkelen til Blume & Easley (2007). Investorer som predikerer bedre enn markedet over en lengre periode vil få en større innflytelse på prisen i fremtidige prediksjoner, hvilket medfører at dagens pris vil komme nærmere til virkelig verdi. På denne måten akkumulerer investorer mest verdi og oppfører seg ”som om” de er rasjonelle, selv om de ikke nødvendigvis er rasjonelle (Blume &

Easley, 2007). Investorene oppfører seg i tillegg ”som om” de har full informasjon og kunnskap om markedet og prisene (Friedman, 1970). Markedet velger på den måten ut bedrifter eller aktører som maksimerer profitt, siden andre tvinges ut på grunn av finansielle tap. Aktører som lykkes vil i tillegg vokse seg større, og etter hvert ta over mer og mer av markedet slik at de tilslutt vil være dominerende (Blume & Easley, 2007).

I avsnittene over ser vi koblingen mellom biologisk evolusjon og Evolusjonær finans, der markedene mer eller mindre velger ut hvilke aktører som vil lykkes og dominere. Vi ser likevel at det er vanskelig å si hva som er flaks og hva som læres underveis, men at de som oppfører seg ”som om” de er rasjonelle står igjen som vinnere. Sentralt i Evolusjonær finans står strategi, og med det mener vi at fokuset faller mer bort fra aktørene og retter seg mot strategiene som aktørene benytter (Hens & Schenk-Hoppé, 2005). Aktører som benytter slike strategier vil da overleve og oppleve suksess i markedet, mens aktører som vektlegger andre strategier vil trolig forsvinne (Blume & Easley, 2007). Evolusjonær finans sier da noe om hva en kan forvente av markedet, samtidig som teorien sier noe om hvilke strategier en bør benytte. Dette gjelder både strategier når man entrer eller når man forsvarer en posisjon i et marked. Vi kan derfor si at Evolusjonær finans er både deskriptiv og normativ. Likevel gir ikke tilnærmingen noe fasit på hvilke strategier som gir best resultat, da man må ta hensyn det allerede etablerte markedet som aktøren ønsker seg inn i (Hens & Schenk-Hoppé, 2005).

### **2.3 Introduksjon til Kelly-kriteriet**

Det finnes eksempler på ulike strategier innenfor Evolusjonær finans, men videre i vår oppgave vil Kelly-kriteriet fra 1956 stå i fokus. Strategien ble opprinnelig benyttet i gambling, der man skulle utnytte en fordelaktig situasjon. Videre går strategien ut på å maksimere den forventede vekstraten for formue, ved å maksimere logaritmisk nytte. Sinn gir i sin artikkel fra 2002 bevis på at forventet nyttemaksimering med logaritmisk nytte dominerer i seleksjonsprosessen. Det er fordi strategier som følger andre investeringskriterier trolig vil forsvinne ut av markedet på lang sikt (Sinn, 2002). Det taler for at Kelly-kriteriet kan sees på som en evolusjonær strategi.

### 3. TEORETISK BAKGRUNN

I kapittel 3 ønsker vi å presentere deler av det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for analysene i denne utredningen. Kelly-kriteriet, som er vårt hovedfokus, vil derimot være tema i neste kapittel. Vi starter her med en kort forklaring av skillet mellom passiv og aktiv forvaltning, samt litt teori rundt begrepet diversifisering. Deretter beskriver vi kort hva en Varians-Kovariansmatrise (VCV-matrise) er, før vi presenterer den berømte Markowitz-metoden.

#### 3.1 Passiv versus aktiv forvaltning

Det finnes to ulike hovedtyper innen forvaltning, nemlig passiv og aktiv forvaltning. Passiv forvaltning kalles gjerne indeksforvaltning og innebærer at investoren ønsker å følge en indeks. Det er for de investorer som ser på det som lite sannsynlig at de kan slå markedet. Et annet insentiv for passiv forvaltning, bortsett fra ønsket om å følge markedet, er å minimere transaksjonskostnadene. Passiv forvaltning kan også benyttes på deler av en portefølje, og gjerne på områder der forvalteren har liten sannynlighet for å prestere bedre enn markedet (Høegh-Krohn, 2004).

De investorer som konsekvent investerer for å slå markedet i form av en høyere avkastning, driver med aktiv forvaltning. I Norge er den vanligste indeksen for norske aksjer Oslo Børs sin hovedindeks. For utenlandske aksjer benyttes gjerne Morgan Stanleys indekssystem. Aktive investorers mål er da å oppnå meravkastning i forhold til sine respektive referanseindekser. Utfordringen ved slik forvaltning er målsetningen om at avkastningen skal være høyere enn markedet over en lengre periode, og ikke bare som et resultat av flaks (Høegh-Krohn, 2004). I denne sammenhengen blir markedseffisiens sentralt. Hypotesen om effisiente markeder sier at all tilgjengelig informasjon er reflektert i prisen på et aktivum. Nærmere bestemt omtales markedseffisiens på tre ulike måter, nemlig i form av svak -, middles - og sterk form for effisiens (Bodie, et al., 2009, s. G4). Hvorvidt det vil være lønnsomt med aktiv forvaltning avhenger følgelig av finansmarkedenes grad av markedseffisiens. Bodie, et al. (2009) argumenterer på sin side for at markedene bare er nær effisiente. På den måten vil det, for noen investorer, være muligheter for lønnsom aktiv forvaltning.

Aktiv forvaltning innebærer selvsagt en større risiko for investoren enn passiv forvaltning. Denne tilleggsrisikoen kalles tracking error, og er risikoen utover den som allerede finnes i indeksporteføljen (Høegh-Krohn, 2004).

Høegh-Krohn (2004) deler videre aktiv forvaltning helt grovt inn etter to ulike investeringsfilosofier: fundamentalt- og momentum-orienterte. Synet som fokuserer på fundamentale verdier innebærer at forvalteren vil kjøpe en aksje der kursen er lavere enn fundamental verdi og selge den når den er høyere. Forvalteren vil derfor hele tiden arbeide mot å kunne anslå en aksjes fundamentale verdi. Den andre investeringsfilosofien legger mer vekt på kortsiktige faktorer. Momentumforvaltere fokuserer nemlig på retningen aksjen skal bevege seg og tar ikke hensyn til den fundamentale verdien (Høegh-Krohn, 2004).

Investering etter både Kelly-kriteriet og Markowitz-metoden blir ansett som aktiv forvaltning, da begge metoder investerer i aksjeandeler som avviker fra markedsporteføljen.

### 3.2 Diversifisering

Diversifisering er et sentralt begrep knyttet til risiko og porteføljeoptimering. I følge Bodie, et al. (2009), kan det defineres som “*Spreading a portfolio over many investments to avoid excessive exposure to any one source of risk*” (Bodie, et al., 2009, s. G4). Som et resultat, er diversifisering en viktig grunn til at mange investorer investerer i porteføljer fremfor i enkeltaksjer.

#### *SYSTEMATISK OG USYSTEMATISK RISIKO*

Det er imidlertid ikke mulig å diversifisere bort all risiko, uansett hvor godt en aktør diversifiserer en portefølje. Systematisk risiko vil alltid være tilstede og er derfor en markedsrisiko som påvirker alle aktører i markedene (Bodie, et al., 2009, s. 195). Variansen tilsvarer da totalrisikoen. Den risikoen som gjenstår dersom man trekker fra systematisk risiko kalles usystematisk eller firmaspesifikk risiko. Denne kan elimineres ved å diversifisere en portefølje ytterligere. Variansen tilsvarer da,

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma^2(\varepsilon_i)$$

hvor

$\sigma^2(\varepsilon_i)$

usystematisk risiko

$\beta_i^2 * \sigma_M^2$	systematisk risiko
$\sigma_i^2$	total risiko (variansen)

### 3.3 Varians-Kovariansmatrise (VCV-matrise)

Volatilitet, som illustreres enten ved varians eller standardavvik, er svært sentralt innen finans. En aksjes volatilitet måler risiko samt illustrerer hvordan dens kurser varierer over tid. Også kovarians er viktig, da det kan gi informasjon om i hvilken grad ulike aksjepriser beveger seg sammen. Følgelig er kovarians essensielt for diversifisering. Som et eksempel, vil neppe investering i to aktiva med høy kovarians medføre god diversifisering, da bevegelser i prisen på den ene trolig vil følge bevegelsene i prisen på den andre.

I porteføljeoptimering vil det altså være viktig med god oversikt over aksjenes volatilitet og kovarians. Etersom investorene i praksis vanligvis må håndtere mange aksjer og medfølgende aksjekurser, vil det være nyttig å utføre beregningene i matriseform. Følgelig benyttes ofte VCV-matrisen, som er et estimat på fremtidige varianser og kovarianser mellom flere aktiva. Vi vil i kapittel 5 komme nærmere innpå hvordan vi beregner en slik matrise.

### 3.4 Markowitz-metoden

Harry M. Markowitz mottok i 1990 Nobelprisen i økonomi sammen med Merton H. Miller og William F. Sharpe. Motivasjonen bak prisen var *“their pioneering work in the theory of financial economics”* (The Nobel Foundation, 1990). Markowitz er kjent for så mangt, og særlig er han kjent for den rollen han har spilt innen Moderne Porteføljeteori, da han har ledet veien mot et paradigmeskift innenfor kapitalforvaltning (Benninga, 2008 e).

Konstruksjonen av en optimal portefølje etter Markowitz-metoden baserer seg på teorien om effisiente porteføljer. En effisient portefølje kalles også for minimum-variansportefølje, og er en risikabel portefølje som, blant andre porteføljer, har den minste variansen gitt en bestemt forventet avkastning. Følgelig finner man en effisient portefølje  $p = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  for en gitt avkastning  $\mu$  ved å

$$\text{Min } \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} = \text{Var}(r_p)$$

gitt at

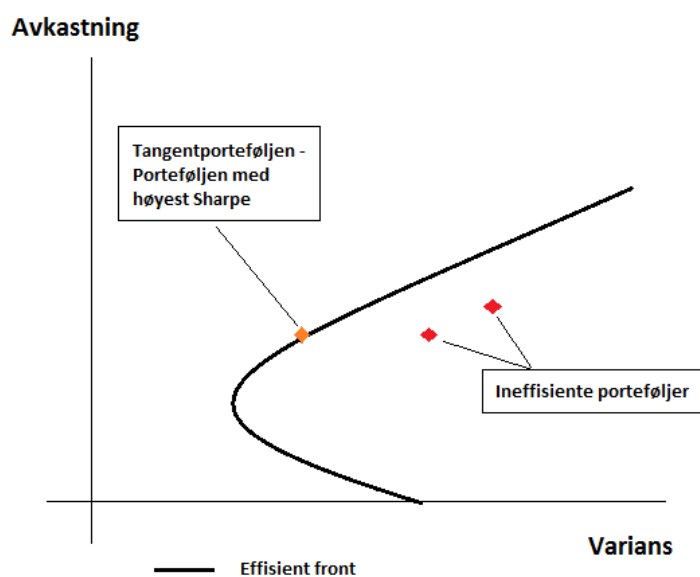
$$\sum_i w_i r_i = \mu = E(r_p)$$

$$\sum_i w_i = 1$$

Sammen danner alle minimum-variansporteføljene en effisient front hvor alle porteføljene på fronten har minst mulig varians til tilhørende forventet avkastning (Benninga, 2008 a). Følgelig er de alle optimale porteføljer. Tangentporteføljen er den porteføljen på den effisiente fronten som har høyest Sharpe-rate, og det er denne porteføljen vi er ute etter å finne (Benninga, 2008 d).

Ved å ta utgangspunkt i historiske aksjekurser til flere aktiva, finner Markowitz-metoden den optimale kombinasjonen av andeler investert i hvert aktivum ved å bruke en beregnet VCV-matrise og hvert aktivas gjennomsnittlige forventede avkastning. I første omgang beregnes to effisiente porteføljer. Ettersom enhver kombinasjon av to effisiente porteføljer også utgjør en effisient portefølje, kan den effisiente fronten finnes ved å kombinere de to porteføljene (Black, 1972).

Figur 3.1 illustrerer en effisient front, tangentporteføljen samt to ineffisiente porteføljer. De ineffisiente porteføljene er to eksempler på porteføljer hvor den forventede avkastningen er for lav i forhold til variansen.



Figur3.1: Effisient front

Matematisk sett finner Markowitz-metoden de to effisiente porteføljene, som senere kombineres til flere effisiente porteføljer som sammen danner en front (Benninga, 2008 b, s. 270), ved å løse det følgende optimeringsproblemet for to ulike mål på forventet avkastning,  $E(R)_{Target}$  :

$$\text{Minimer } W^T V C V W$$

gitt at

$$\sum_{n=1}^N w_n = 1$$

$$WR = E(R)_{Target}$$

hvor:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad \text{Vektor med vekter i de ulike aktivaene}$$

$T$   $T$  illustrer at vektor  $W$  er transponert

$w_n$  Vekt i aksje  $n$

$V C V$  VCV-matrisen

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad \text{Vektor med avkastningene til de ulike aktivaene}$$

$E(R)_{Target}$  Valgte mål på forventet avkastning

Kritikk rettet mot Markowitz-metoden presenterer vi nærmere i kapittel 7.



## 4. KELLY-KRITERIET

I kapittelet som følger vil vi fordype oss i Kelly-kriteriet i form av en detaljert presentasjon. Vi starter med en kort introduksjon til kriteriet. Deretter utleder vi Kelly-kriteriet til bruk som investeringsstrategi i både gambling og aksjemarkedet. Videre presenterer vi både teori om Fractional Kelly-strategier og berømte investorer som sies å benytte kriteriet, før vi til slutt går i dybden på begrensninger og ulemper knyttet til investeringsstrategien.

Som tidligere nevnt, bygger Evolusjonær finans på tanken om et marked som velger ut de investorer og bedrifter som oppfører seg ”som om” de er rasjonelle. Videre er det eksisterende strategier i markedene, og ikke enkeltindivider, som er av interesse. Følgelig kan det tenkes at det i markedet også finnes seleksjon av vinnende strategier. En vinnende investeringsstrategi vil på sikt kunne utkonkurrere andre investeringsstrategier. At en strategi er utkonkurrerende har vi valgt å definere slik som Alchian (1950) forklarer konseptet relatert til bedrifter; at de bedrifter som realiserer positiv profitt blir værende på markedet, mens de andre aktørene forsvinner. Dette kan tolkes dit hen at strategier med negative avkastninger utkonkurreres av de med positive, slik at de etter hvert blir borte fra markedet. Blume & Easley (2007) har stilt spørsmålsteget ved om slike strategier kan identifiseres? Og dersom de kan det, vil enhver aktør som benytter seg av en slik strategi overleve på bekostning av de aktører som ikke gjør det (Blume & Easley, 2007)? Investering etter Kelly-kriteriet er en handlestrategi som sies å være robust overfor nettopp en slik seleksjonsprosess.

Kort fortalt, så er prinsippet bak Kelly-kriteriet at hver investor skal satse eller investere sine penger slik at den forventede vekstraten for kapitalen maksimeres etter hvert kapitalinnskudd. Å maksimere den forventede vekstraten tilsvarer en maksimering av investors forventede logaritmiske nytte (Thorp, 2008). Verdt å understreke er imidlertid det faktum at det hovedsakelig er i *fordelaktige situasjoner* at Kelly-kriteriet gir retningslinjer for optimal ressursallokering (Rotando & Thorp, 1992).

### *FORDELAKTIGE SITUASJONER*

Rotando og Thorp (1992) forklarer at et spill er fordelaktig hvis der finnes en strategi som medfører en positiv forventningsverdi for spillet. Dette er gitt av  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n =$

$+\infty) > 0$ , hvor  $X_n$  er spillerens kapital etter  $n$  forsøk (Rotando & Thorp, 1992). I gambling er det flere spill som kan regnes som fordelaktige for den som gambler. I eksempelvis Blackjack har gambleren mulighet til å bruke egne evner, informasjon og kunnskap i valg av strategi for å forbedre sin hånd etter at et veddemål er inngått. Til sammenligning må "Huset" uansett følge en fast strategi (Thorp, 1969). På den måten har spilleren i utgangspunktet en høyere sannsynlighet for å vinne enn for å tape. Et eksempel på hvordan gambleren da kan øke sine vannersjanser er ved å telle kort, slik at han øker sin informasjon om spillet. En slik fordel til spilleren kaller Thorp (1969) for "edge"

Aksjemarkedet kan også by på fordelaktige situasjoner. Å kombinere ulike verdipapirer er én måte for investoren å skaffe seg en "edge" på i aksjemarkedet (Thorp, 1969). Videre i utredningen vil vi anta at fordelaktige situasjoner i aksjemarkedet også kan oppstå ved at investorer har informasjon om enkelte selskaper som tilsier at forventningsverdien ved investering i selskapenes aksjer blir positiv. "Edgen" består følgelig av informasjon som investoren har, men som ikke er reflektert i prisen. Slik informasjon kan anskaffes ved for eksempel grundige verdivurderinger av selskapet. Kelly-kriteriet vil da bli benyttet til optimal ressursallokering på aksjer med en slik "edge".

#### *KELLY-KRITERIETS BAKGRUNN*

Grunnlaget for investering etter Kelly-kriteriet ble presentert av J. L. Kelly, Jr. i 1956. I sin artikkel, "*A New Interpretation of Information Rate*", lanserer Kelly (1956) en ny type gambler som søker etter å maksimere forventet verdi av logaritmen av sin formue. Kelly begrunner valget av det nye maksimeringsproblemet med det faktum at logaritmen er additiv ved gjentatte veddemål, slik at store talls lov gjelder (Kelly, 1956, s. 926).

Strategien som den benyttes i dag har blitt betraktelig videreutviklet siden 1956, men da Kelly var den første til å benytte logaritmisk nytte for å oppnå optimal vekst, bærer kriteriet ennå hans navn (MacLean, et al., 2012). Likevel er Kelly-kriteriet for mange også kjent under navn som "*geometric mean maximizing portfolio strategy*", "*maximizing logarithmic utility*", "*the growth-optimal strategy*" og "*the capital growth criterion*" (Thorp, 2006, s. 2).

Edward O. Thorp var den første til å ta Kelly-kriteriet i bruk. I sin bok, ”*Beat the Dealer*” fra 1962, introduserte han kriteriet som ”*The Kelly gambling system*” (Thorp, 2008). Den gang ble strategien benyttet i gambling, og da særlig i kortspillet Blackjack. Fra og med 1966 kalte Thorp strategien for ”*the Kelly criterion*”, og kriteriet har etter hvert fått sin anvendelse som både en gamblings- og en investeringsstrategi (Thorp, 2008).

Videre i oppgaven vil vi først utlede formlene som benyttes ved Kelly-kriteriet i gambling, før vi utreder et eksempel på formler som anvendes i aksjemarkedet. Som nevnt over, er en fellesnevner mellom ulike spill innenfor gambling og aksjemarkedet at de begge kan by på fordelaktige situasjoner for spilleren eller investoren (Thorp, 1969). En forskjell er imidlertid at mens gambling oppfattes som et binomisk spill, kan investering i aksjemarkedet bli sett på som et kontinuerlig pengespill (Rotando & Thorp, 1992). Årsaken er at det ved aksjeinvesteringer ikke finnes et bestemt antall utfall, noe som resulterer i at en kontinuerlig sannsynlighetsfordeling bør benyttes (Hung, 2010).

#### **4.1 Kelly-kriteriet i gambling – Binomiske pengespill**

På tross av at vi i denne oppgaven utelukkende anvender Kelly-kriteriet på aksjemarkedet, velger vi likevel å inkludere også en grundig utledning av kriteriet i gambling. Det er for å gi en bedre forståelse av Kelly-kriteriets mange funksjoner, samt for å vise den opprinnelige anvendelsen av Kelly-kriteriet.

For å illustrere hvordan Kelly-kriteriet kan benyttes innen binomiske pengespill, tar vi utgangspunkt i utledningene fra artikkelen ”*The Kelly Criterion and the Stock Market*”, skrevet av Rotando & Thorp i 1992. Følgelig vil vi bygge vår utgreiing på det samme, enkle scenarioet om myntkasting som forfatterne av artikkelen presenterer.

En spillsituasjon bygger på at en gambler konkurrerer mot en annen part. Denne motstanderen har en uendelig formue som han kan bruke på gambling med myntkast. For hvert myntkast, som er uavhengig av det forrige, vil han satse like mye av denne kapitalen. Spesielt med dette myntkastet er at mynten er partisk, slik at sannsynligheten for seier til gambleren er  $p > 1/2$ . Da vil  $q = 1 - p$  angi risikoen for at gambleren vil tape myntkastet. Med andre ord er dette et fordelaktig spill, ettersom

sannsynligheten for å vinne er større enn sannsynligheten for å tape. Da gamblerens startkapital er gitt ved  $X_0$ , går optimeringsproblemet ut på å avgjøre hvilket pengebeløp  $B_i$  gambleren skal satse på hvert myntkast (Rotando & Thorp, 1992).

Innskudd  $B_i$  i hvert spill  $i$  kan alternativt velges etter det tradisjonelle ønsket om maksimere forventet verdi av spillet  $E(X_n)$  etter  $n$  forsøk.

Forventet verdi av spillet  $E(X_n)$  er da lik:

$$E(X_n) = X_0 + \sum_{k=1}^n E(B_k T_k) = X_0 + \sum_{k=1}^n (p - q)E(B_k)$$

Dersom

$$T_k = 1 \quad \text{Ved seier i forsøk } k$$

$$T_k = -1 \quad \text{Ved tap i forsøk } k$$

Slik at

$$X_k = X_{k-1} + T_k B_k \quad \text{for } k = 1, 2, 3 \dots n$$

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n T_k B_k$$

Siden gambleren har større sjanse for å vinne enn å tape, er det naturlig å velge forventet innskudd  $E(B_k)$  ved hvert forsøk for å maksimere forventet gevinst  $E(X_n)$ . Det innebærer en investering av hele formuen ved hvert spill, hvilket vil medføre en overhengende fare for å gå konkurs. Sannsynligheten for å tape hele formuen er nemlig gitt ved  $1 - p^n$ , hvor  $\frac{1}{2} < p < 1$  og  $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - p^n] = 1$ . Følgelig er ikke strategien optimal (Rotando & Thorp, 1992).

En annen mulig gamblingsstrategi er å minimere sannsynligheten for tap ved å satse så lite som mulig på hvert spill. Samtidig vil da også forventet verdi av kapitalen minimeres, og derfor er heller ikke denne strategien optimal (Rotando & Thorp, 1992).

Kelly-kriteriet, på sin side, er en kombinasjon av de ovennevnte strategiene da den fører til at innskuddet  $B_i$  i hvert spill hverken maksimerer eller minimerer forventet verdi  $E(X_n)$ . Følgelig unngår gambleren en "garantert" konkurs, på samme tid som

om konkursfaren heller ikke er minimert. En foreslått strategi, som et alternativ til de to førstnevnte, er da at gambleren satser en fast andel,  $f$  (*fraction*), av sin kapital ved hvert forsøk. Dette forutsetter at sannsynligheten for å vinne er lik ved hvert myntkast. Det samme er gevinsten. Videre antas det at kapitalen er uendelig delelig, slik at det er mulig å investere  $f$  i hvert spill (Rotando & Thorp, 1992).

Dersom gambleren satser en fast andel  $f$  av sin daværende formue ved hvert forsøk, slik at  $B_i = fX_{i-1}$ , hvor  $0 \leq f \leq 1$ , kalles dette ofte for "fast andels-satsing" ("*fixed fractional*" *betting*). Dersom summen av antall forsøk er  $n$ , og forsøkene kan ende i både suksess  $S$  og fiasko  $F$ , vil  $S + F = n$ , og gamblerens kapital etter  $n$  forsøk være  $X_n = X_0(1+f)^S(1-f)^F$ . Dersom  $0 < f < 1$ , så vil  $P(X_n = 0) = 0$ . På grunn av dette, vil gambleren teoretisk sett aldri kunne tape alle sine penger (Rotando & Thorp, 1992).

Da Kelly introduserte en ny type gambler i 1956, valgte han å maksimere den forventede verdien av vekstraten for kapital,  $G(f)$ , slik at vi da finner den optimale andelen  $f^*$  som skal satses i hvert spill. Vekstraten er gitt ved

$$\begin{aligned} G(f) &= E \left\{ \log \left[ \frac{X_n}{X_0} \right]^{1/n} \right\} = E \left\{ \frac{S}{n} \log(1+f) + \frac{F}{n} \log(1-f) \right\} \\ &= p \log(1+f) + q \log(1-f) \end{aligned}$$

Logikken bak dette bygger på at

$$e^{n \log \left[ \frac{X_n}{X_0} \right]^{1/n}} = \frac{X_n}{X_0}$$

Det medfører at den eksponentielle vekstraten per forsøk måles av størrelsen

$$\text{Log} \left( \left[ \frac{X_n}{X_0} \right]^{1/n} \right) = \frac{S}{n} \log(1+f) + \frac{F}{n} \log(1-f).$$

For at det å maksimere vekstraten for kapital  $G(f)$  skal være ekvivalent med å maksimere forventet logaritmisk nytte,  $E \log X_n$ , for en fast  $n$  er

$$G(f) = \left( \frac{1}{n} \right) E(\log X_n) - \left( \frac{1}{n} \right) \log X_0$$

Den optimale andelen  $f^*$  som skal satses i hvert spill finnes altså ved å maksimere  $G(f)$ . Det medfører følgelig å derivere  $G(f)$  med hensyn på  $f$ , og sette uttrykket lik 0 etter førsteordensbetingelsen. Det gir

$$G'(f) = \frac{p}{1+f} - \frac{q}{1-f} = \frac{p-q-f}{(1+f)(1-f)} = 0$$

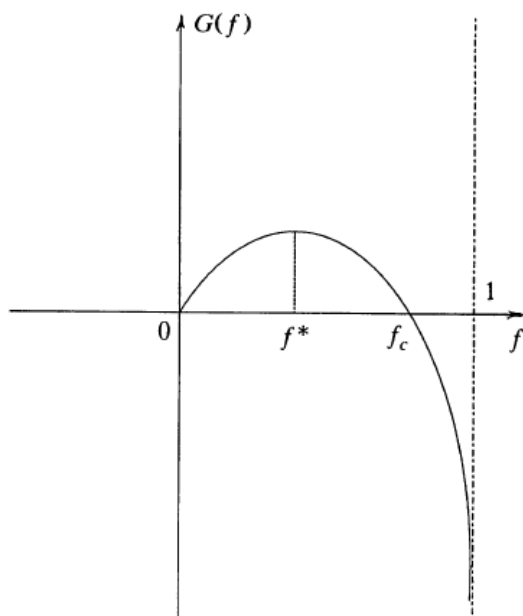
Optimal andel  $f^*$  som skal satses ved hvert spill blir da

$$f = f^* = p - q$$

(Rotando & Thorp, 1992).

Vi ser altså at optimal andel investert i gambling, i følge Kelly-kriteriet, er differansen mellom sannsynligheten for å vinne og sannsynligheten for å tape. På den måten investerer gambleren tilsvarende ”edgen” i hver situasjon.

Vekstratens  $G(f)$  egenskaper er illustrert i figur 4.1 under.



Figur 4.1:  $G(f)$  som en funksjon av  $f$  (Rotando & Thorp, 1992)

Dobbelderivering av vekstraten  $G(f)$  viser at,

$$G''(f) = \frac{-f^2 + 2f(p-q) - 1}{(1-f^2)^2} < 0$$

Da den andrederiverte av vekstraten er negativ, vet vi at  $G'(f)$  er avtakende i intervallet  $[0,1)$ , slik at  $G(f)$  blir konkav, med et toppunkt på  $f = f^*$ . Ved å sette  $f = 0$ , ser vi også at  $G'(0) = p - q > 0$ , slik at vekstraten er positiv for  $f$  nær 0. Etersom  $G(0) = 0$  og  $\lim_{f \rightarrow 1^-} G(f) = -\infty$ , finnes det også en verdi  $f_c > 0$ , hvor  $0 < f^* < f_c < 1$ , slik at ved denne andelen investert er vekstraten lik 0,  $G(f_c) = 0$  (Rotando & Thorp, 1992).

#### 4.2 Kelly-kriteriet i aksjemarkedet – Kontinuerlige pengespill

Ved bruk av Kelly-kriteriet i aksjemarkedet vil den optimale andelen,  $f^*$ , som skal investeres i hver aksje bli beregnet med en noe annen fremgangsmåte enn ved gambling. Videre i denne oppgaven vil vi bruke benevnningen  $w^*$  for de vektene som skal investeres i de ulike aktivaene i porteføljen, fremfor  $f^*$ .

Det å finne slike andeler i en aksjeportefølje etter Kelly-kriteriet kan være en matematisk utfordring, da det innebærer en komplisert optimeringsprosess. I denne oppgaven har vi derfor benyttet en approksimasjon av det opprinnelige optimeringsproblemet, beskrevet i kapittel 15 i boken "*Investment Science*" av David G. Luenberger (1998). Utgangspunktet for approksimasjonen er en modell med kontinuerlig tid for korrelerte aksjer, hvor antall aksjer er gitt ved  $n$ . Vi antar videre at  $p_i$  er prisen på aktiva  $i$ , hvor  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Denne prisen følger en standard geometrisk "*Brownian motion*", slik at

$$\frac{dp_i}{p_i} = \mu_i dt + dz_i$$

hvor

$z_i$  benevnningen for en "Wienerprosess" hvor variansen er  $\sigma_i^2$  og ikke 1.

Grunnet komponenter fra "Wienerprosessen" er aksjene korrelerte, slik at

$$\text{cov}(dz_i, dz_j) = E(dz_i, dz_j) = \sigma_{ij} dt$$

Varians-kovariansmatrisen (VCV-matrisen) består følgelig av de ulike variansene til aksjene samt kovariansen mellom dem.

Videre antar vi at hvert aktivum  $i$  har en lognormal fordeling, slik at

$$E \left[ \left( \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right) \right] = \left( \mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) t = v_i t$$

og

$$\text{var} \left[ \left( \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right) \right] = \sigma_i^2 t$$

i tidspunktet  $t$  (Luenberger, 1998).

De  $n$  aksjene kan kombineres til en portefølje, hvor aksjenes vekter er gitt ved  $w_i$  og  $i = 1, 2, 3 \dots, n$ . I første omgang settes summen av vektene lik 1, slik at  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . Som et resultat av at porteføljens avkastning er lik den vektete summen av hvert aktivums avkastning, blir verdien av porteføljen  $V$  gitt ved

$$\frac{dV}{V} = \sum_{i=1}^n w_i \frac{dp_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i dt + w_i dz_i$$

Variansen av det stokastiske uttrykket er

$$E \left( \sum_{i=1}^n w_i dz_i \right)^2 = E \left( \sum_{i=1}^n w_i dz_i \right) \left( \sum_{j=1}^n w_j dz_j \right) = \sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j dt$$

Følgelig vil porteføljens verdi på tidspunkt  $t$   $V(t)$  være lognormal med

$$E \left[ \ln \left( \frac{V(t)}{V(0)} \right) \right] = vt = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i t - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j t \quad (4.1)$$

hvor

$$\sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j t = \sigma^2(t) \quad \text{Variansen}$$

Vekstraten til porteføljen er da gitt ved

$$v = \frac{1}{t} E \left[ \ln \left( \frac{V(t)}{V(0)} \right) \right]$$

Denne vekstraten endres ved å variere de ulike vektene  $w_1, w_2, \dots, w_n$  på aksjene i porteføljen. Den optimale veksten på porteføljen oppnås derfor ved å finne de vektene som maksimerer vekstraten. Med utgangspunkt i ligning (4.1) får vi derfor det følgende optimeringsproblemet:



$$\max_w \sum_{i=1}^n w_i \mu_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j$$

$$\text{gitt at } \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

(Luenberger, 1998).

I vår oppgave har vi antatt at investorene også kan investere i et risikofritt aktivum. Følgelig må dette inkluderes i optimeringsproblemet. Som for risikable aktiva antar vi at prisen på det risikofrie aktivumet  $p_0(t)$  holder betingelsen om at

$$\frac{dp_0(t)}{p_0} = r_f dt$$

En videre antagelse er at det risikofrie aktivumet er på den effisiente fronten, gitt at ingen andre aksjer kan kombineres til å oppnå null-varians. Med andre ord utgjør det risikofrie aktivumet hele minimum-varians-punktet. Ved å finne det log-optimale punktet vil man følgelig finne hele den effisiente front (Luenberger, 1998).

En slik log-optimal portefølje består av andeler  $w_1, w_2, \dots, w_n$  i risikable aktiva samt en andel  $w_0 = 1 - \sum_{j=1}^n w_j$  i det risikofrie aktivumet. Luenberger (1998) viser at man kommer frem til andeler i en log-optimal portefølje ved å maksimere den overordnede vekstraten  $v$  til porteføljen. Med utgangspunkt i ligning (4.1) får vi da følgende optimeringsproblem:

$$\max_w \left[ (1 - \sum_{j=1}^n w_j) r_f + \sum_{j=1}^n \left( \mu_j w_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_j \sigma_{jk} w_k \right) \right] \quad (4.2)$$

hvor

$$\begin{aligned} (1 - \sum_{j=1}^n w_j) r_f &= E(R_f) && \text{Forventet avkastning risikofri investering/lån} \\ \sum_{j=1}^n \mu_j w_j &= E(R_j) && \text{Forventet avkastning for investering i risikable} \\ &&& \text{aktiva} \\ \sum_{k=1}^n w_j \sigma_{jk} w_k &= \sigma^2 && \text{Varians portefølje} \end{aligned}$$

Den maksimale vekstraten til porteføljen blir derfor

$$v_{opt} = (1 - \sum_{j=1}^n w_j^*) r_f + \sum_{j=1}^n \left( u_j w_j^* - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_j^* \sigma_{jk} w_k^* \right)$$

Det medfører at

$$E(R_{opt}) = E(R_f) + E(R_j) \quad \text{Forventet avkastning optimal portefølje}$$

Løsningen på ligning (4.2) er da gitt ved

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_j = \mu_j - r_f \quad (4.3)$$

$$\text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

(Luenberger, 1998).

Ved å benytte oss av approksimasjonen over vil de ulike vektene som er investert i porteføljen kanskje vike noe fra løsningene vi hadde fått dersom vi hadde benyttet oss av det opprinnelige optimeringsproblemet gitt av Kelly-kriteriet. Likevel vil våre resultater være gode nok til å illustrere bruken av Kelly-kriteriet som en retningslinje for investering.

### 4.3 Full og Fractional Kelly

Teorien skiller mellom Full Kelly og Fractional Kelly. En Full Kelly-investor vil investere hele andelen som kriteriet anbefaler. Ved å benytte Full Kelly kan det imidlertid være høy risiko for at kapitalen vil bli kraftig redusert, noe som skremmer mange investorer. Aktører kan derfor alternativt benytte seg av Fractional Kelly, som er en strategi der de investerer en andel av den kapitalen som kriteriet anbefaler (Thorp, 1969). Dette gir investorene en større sikkerhet og dermed mindre risiko (Thorp, 2006). Samtidig som risikoen reduseres ved å benytte Fractional Kelly, vil også vekstraten på kapitalen reduseres. Matematisk kan vi skille mellom de to strategiene ved å si at Full Kelly er lik  $f^*$ , mens Fractional Kelly er lik  $f_c = f^*c$ .  $c$  er den andelen kapital man skal investere og ligger mellom 0 og 1.

Artikkelen til Maclean, et al. (2010 a) viser at en Full Kelly-strategi gir best avkastning på lang sikt, samtidig som den innebærer stor risiko. I artikkelen sammenliknes og utvides to eksperimenter som benytter seg av Kelly-kriteriet. Et eksperiment presentert av Ziemba og Hausch fra 1986, benyttet både Full Kelly og Fractional Kelly som investeringsstrategi, men delte sistnevnte inn i fire. Andelene benyttet for Fractional Kelly var  $c = \frac{3}{4}$ ,  $c = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{4}$  og  $c = \frac{1}{8}$ . Forfatterne kom frem

til at gjennomsnittlig formue ved endt eksperiment var mye høyere desto nærmere Full Kelly man hadde investert (MacLean, et al., 2010 a). Det vil også være høyere volatilitet i formuen jo høyere andel av Kelly-strategien man investerer etter. Resultatene indikerer som nevnt i første avsnitt at høy vekst i formue også innebærer høy risiko (MacLean, et al., 2010 a). Den store nedsiderisikoen ved Full Kelly vil derfor kunne reduseres ved å investere etter Fractional Kelly-strategien, og for noen investorer vil en mindre nedside være ønskelig.

#### **4.4 Berømte Kelly-investorer**

En berømt person som har gjort investeringer helt eller delvis ved hjelp av Kelly-kriteriet er Edward O. Thorp. Siden 1969 har han ledet suksessfulle hedge fond (Thorp, 2013 a) og tjent store summer ved å blant annet benytte seg av Kelly-kriteriet som investeringsstrategi. Thorp er både en forretningsmann, forsker, forfatter og foreleser. Han er en av pionerene bak kriteriet og en ekspert innenfor spille teori. Interessen for Kelly-kriteriet startet allerede i 1958 i Las Vegas da han spilte Blackjack og eksperimenterte med strategien (Thorp, 2013 b). Senere, i 1961 viste han hvordan Kelly-kriteriet kunne benyttes i Blackjack gjennom å skape en ”edge”, slik at man alltid vil ha større sannsynlighet for å vinne enn for å tape (Thorp, 2013 c). Thorp var også en av de første til å hevde at Kelly-kriteriet var en investeringsstrategi som ville gi en bedre avkastning på lang sikt enn andre investeringsstrategier.

Den amerikanske forretningsmannen og investoren Warren Buffett har gjort store investeringer på tvers av industrier, og opparbeidet seg en enorm formue. Buffett tenker svært langsiktig i sine investeringer, og basert på noen av hans uttalelser mener blant annet Thorp (2008) at det ser ut til at Buffett oppfører seg som en Full Kelly-investor. Buffett ser på aksjeinvesteringer som et spill og dersom investoren har kunnskap om spillet bør investeringen være konsentrert, da han mener man alltid bør investere i førstevalget. Synet sammenlikner Buffett med basketball og NBA, fordi man hele tiden bør la den beste spilleren spille, fremfor å la alle få prøve seg (Dang Le, 2008).

#### **4.5 Svakheter ved Kelly-kriteriet**

Som beskrevet i første del av kapittel 4, vil Kelly-kriteriet være en optimal strategi dersom spillsituasjonen er fordelaktig. Eksempelet som blir presentert i avsnitt 4.1

omhandler myntkast i en fordelaktig situasjon der sannsynligheten for gevinst er større enn 50 %. I normale situasjoner som omhandler eksempelvis myntkast, vil imidlertid sannsynligheten for gevinst og tap vil være like stor. En slik situasjon vil derfor ikke være fordelaktig, og Kelly-kriteriet vil ikke nødvendigvis den beste investeringsstrategien (MacLean, et al., 2010 b).

Thorp (2006) retter videre kritikk mot forutsetningen ved Kelly-kriteriet om at kapitalen skal være uendelig delelig. I virkeligheten vil man i de fleste gamblingssituasjoner også være nødt til å satse et minimumsbeløp. Det betyr at faren for konkurs alltid kan være tilstede, da dette beløpet kan være høyere enn  $f^*$ .

Den muligens største ulempen knyttet til Kelly-kriteriet, er at det binder opp svært store deler av investorenes kapital. Som et resultat tar investorer vanligvis en enorm risiko når de investerer etter Kelly-kriteriet. På tross av at en investeringssituasjon er fordelaktig, slik at sannsynligheten for å vinne gjerne er klart størst, vil det likevel være noe fare for at det ikke vil bli gevinst. Ved å investere en stor del av sin formue vil tapet i de tilfeller også bli svært høyt (MacLean, et al., 2010 b).

En annen faktor som en investor bør ta hensyn til dersom Kelly-kriteriet vurderes som investeringsstrategi er at det er en svært langsiktig strategi. Det innebærer at de gode egenskapene ved kriteriet gjøres gjeldene på lang sikt. På samme tid kan det derimot medføre at kriteriets egenskaper kan bli negative dersom investor benytter seg av kort og medium tidshorisont, grunnet lav risikoaversjon knyttet til logaritmisk nytte (MacLean, et al., 2010 b). Dette kan tolkes dithen at Kelly-strategien kan gjøre det bedre enn andre handlestrategier kun på lang sikt. Relevant i den sammenheng blir også det at en Kelly-investor gjerne investerer hele sin formue i få aktiva. Som et resultat er risikoen stor for at investor på kort sikt kan tape store deler av sin investerte aksjekapital. Ved slike tap er det ikke alle investorer som har mulighet til å fortsette å investere, slik at deres tidshorisont følgende blir for kort.

## 5. METODE

I dette kapittelet vil vi presentere de metoder vi har benyttet oss av i utredningen for å kunne besvare problemstillingen på en best mulig måte. Selve ordet metode står for ”å følge en bestemt vei mot et mål,” (Johannessen, et al., 2004, s. 32). Metodevalg vil derfor være avgjørende for oppgavens konklusjoner, da den legger retningslinjer for både datainnsamling og hvordan denne dataen skal analyseres og tolkes (Johannessen, et al., 2004). Hva som vil være den mest hensiktsmessige metoden vil følgelig variere mellom studier og hovedsakelig avgjøres av målet med oppgaven, samt hvilke forutsetninger og ressurser som ligger til grunn hos forfatterne (Gripsrud, et al., 2010).

### 5.1 Kvantitativ metode

Innenfor metodefaget er det vanlig å skille mellom kvalitativ og kvantitativ metode, ettersom de to metodene har ulike måter å innhente og analysere data på. Forskjellene illustreres nærmere av deres navn, som står for henholdsvis trekk ved fenomener (kvalitativ) og mengde eller antall (kvantitativ) (Johannessen, et al., 2004, s. 363). I vår oppgave har vi valgt å benytte oss av en kvantitativ metode. Dette er et valg vi har tatt da vi ønsker å illustrere bruken av Kelly-kriteriet på det norske aksjemarkedet, og følgelig har hatt behov for flest mulig aksjeselskaper å velge mellom.

### 5.2 Datainnsamling

Valg av data – og innsamlingsmetodikk kan ofte være en kritisk faktor i økonomiske analyser. Det kommer av at datasettet vil være avgjørende med tanke på hvilke resultater analysen gir, og følgende hvilke konklusjoner som kan trekkes ut av analysen.

Ulike typer data kan deles inn i forskjellige kategorier. Avsnittet over omhandlet kvalitative og kvantitative metoder. Mer presist kan det sies at det er de innsamlede dataene som er enten kvalitative eller kvantitative, hvorav kvantitative data oppgis som tall mens resten kan sees på som kvalitative data (Gripsrud, et al., 2010, s. 79). I oppgaven vår har vi benyttet oss av kvantitative data, da vi bare jobber med tall.

*PRIMÆR- OG SEKUNDÆRDATA*

Data kan videre deles inn i primær- og sekundærdata. Mens primærdata hentes inn av - og tilpasses av forskeren med et formål om å besvare forskerens spesifikke problemstilling, er sekundærdata innhentet av andre som et ledd i deres forskning (Gripsrud, et al., 2010).

I denne masteroppgaven benytter vi oss utelukkende av sekundærdata, som vi hovedsakelig har fått tilsendt av Børsdatabasen ved Norges Handelshøyskole. Fordelen er da at vi har spart mye tid på datasamlingen, sammenlignet med om vi skulle hentet alle dataene på egenhånd. På den andre siden er det en større risiko for lavere validitet knyttet til sekundærdata enn til primærdata (Gripsrud, et al., 2010).

Datasettet vi har fått tilsendt består av tall fra Oslo Børs fra år 1998 og til og med år 2012. Nærmere bestemt inneholder datasettet nøkkeltall for alle selskaper notert på Oslo Børs i tidsperioden, slik som månedlige aksjekurser, antall utstedte aksjer, markedsverdier, P/B-ratio, EBIT og kontantstrøm. De relevante dataene for vår utredning er månedlige historiske aksjekurser og historiske markedsverdier.

I tillegg til å benytte oss av datasettet fra Børsdatabasen, har vi valgt å bruke 10-årige årsgjennomsnitt av norske statsobligasjoner som et anslag på risikofrie renter i årene fra 1998 til 2012. Dataene innhentet vi fra Norges Bank sine hjemmesider, se tabell 5.1 (Norges Bank, 2013).

<b>Risikofrie renter (%)</b>		
<b>År</b>	<b>Årlig</b>	<b>Månedlig</b>
<b>2002</b>	6,24	0,52
<b>2003</b>	6,38	0,53
<b>2004</b>	5,04	0,42
<b>2005</b>	4,36	0,36
<b>2006</b>	3,74	0,31
<b>2007</b>	4,07	0,34
<b>2008</b>	4,78	0,40
<b>2009</b>	4,47	0,37
<b>2010</b>	4,00	0,33
<b>2011</b>	3,52	0,29
<b>Snitt</b>	4,66	0,39

*Tabell 5.1: 10-årige gjennomsnittlige renter på norske statsobligasjoner*

#### *VALG KNYTTET TIL DATAENE*

Våre analyser er i hovedsak basert på historiske aksjekurser på Oslo Børs fra 1998 til 2012, ettersom vi har valgt å bruke et aritmetisk gjennomsnitt over de fire siste år som et estimat på fremtidig forventet avkastning. Mer presist har vi benyttet oss av dividende og eventjusterte aksjekurser. Da vi har valgt å benytte oss av månedlige data, kommer dette som en avveining mellom behovet for å ha nok data og dataens relevans.

Kelly-kriteriet er en teori om ressursallokering, og ikke en teori om "stock picking". Som tidligere nevnt er Kelly-kriteriet til bruk i fordelaktige situasjoner. Med andre ord skal man investere etter kriteriet i aksjer med en "edge". Denne "edgen" kan ikke finnes ved hjelp av Kelly-kriteriet. Vi har derfor tatt utgangspunkt i de ti selskapene som er størst på Oslo Børs i form av markedsverdi ved tidspunktet for rebalansering av vår portefølje. På den måten investerer vi kun i de aksjene som markedet holder mest i. Selv om vår utvelgelse av selskaper ikke nødvendigvis medfører en "edge", vil det være et greit utgangspunkt for oss å ta, da fokuset i denne utredningen ligger på å illustrere bruken av Kelly-kriteriet. Vi vil imidlertid komme tilbake til en diskusjon knyttet til valg av "edge" i kapittel 7.

### 5.3 Dataanalysens metodevalg

Formålet med denne utredningen er å se hvorvidt investering etter Kelly-kriteriet vil gi bedre resultater enn investering etter den tradisjonelle Markowitz-metoden og passiv investering i Markedsporteføljen. For å besvare problemstillingen på en best mulig måte har vi valgt å gjøre de nødvendige utregninger i Excel, med hjelp av verktøyene Solver og VBA.

#### 5.3.1 Forutsetninger for analysen

Flere av de forutsetningene som ligger til grunn i analysen har vært de samme ved beregninger knyttet til alle porteføljene.

##### *TIDSHORISONT OG REBALANSERING*

Vi har en tidshorisont på ti år, fra 2001 til og med 2011, hvor vi benytter oss av årlig rebalansering på alle porteføljene. Tidspunktet for rebalansering har vært første mandag hver februar, etter en personlig samtale med Thorsten Hens (21.02.13) hvor han tipset oss om at tidlig februar var det beste rebalanseringstidspunktet.

Vi har valgt å ta utgangspunkt i de ti største selskapene etter markedsverdi på Oslo Børs ved hvert rebalanseringstidspunkt. De ti selskapene, som har variert fra år til år, har da utgjort vår Markedsportefølje det påfølgende året. I tillegg har selskapene dannet grunnlaget for hvilke aksjer som Kelly-kriteriet og Markowitz-metoden har hatt mulighet til å allokere sine ressurser blant.

##### *FORVENTET FREMTIDIG AVKASTNING*

Som et estimat på forventet fremtidig avkastning for aksjene har vi benyttet oss av 4-års historisk rullerende månedlig aritmetisk gjennomsnitt av aksjeavkastning. I denne beregningen har vi valgt å benytte oss av logaritmisk avkastning på aksjene, og deretter beregnet deres aritmetiske gjennomsnitt. Grunnet vårt valg av 4-års rullerende historisk gjennomsnitt har vi hvert år bare kunnet inkludere de selskapene som vi har hatt fullstendig informasjon om i de fire foregående år. Markedsporteføljen har derfor ikke bestått av alle de ti største selskapene hvert år. Et eksempel er Statoil. Selskapet var på topp ti allerede i 2002, men da Statoil ikke ble børsnotert før i midten av 2001, var det ikke mulig å inkludere selskapet i våre analyser før i 2006. Hvordan vårt valg av estimat på forventet fremtidig avkastning kan ha påvirket resultatene våre, vil vi komme tilbake til i kapittel 7.



I løpet av tidsperioden vi har sett på, har flere selskaper slått seg sammen og/eller blitt oppkjøpt. Børsen oppgir imidlertid slike selskaper med sine nåværende navn og symboler. Det betyr at for eksempel Aker Kværner heter Aker Solutions selv på datoer der selskapet egentlig skulle hatt sitt originale navn. For oss utgjorde dette ingen problemer, da det faktisk var en fordel at selskapene hadde sine nåværende navn og symbol for hele perioden vi har studert.

### *RISIKOFRIE LÅN OG BANKINNSKUDD*

En forutsetning som ligger til grunn for våre analyser, er at i de årene det blir aktuelt med enten noe lånefinansiering eller investering i risikofrie aktiva vil det skje til den tilhørende risikofrie renten det året.

### *BEGRENSNING PÅ SHORT-SALG*

Vi har også tatt en forutsetning på at det ikke er tillatt med short-salg i verken Kelly-porteføljen eller i Markowitz-porteføljen.

### *TRANSAKSJONSKOSTNADER*

I all aktiv forvaltning er der forskjellige transaksjonskostnader knyttet til kjøp og salg av aksjer. Eksempler er kommisjoner og ”Implementation Shortfall”. Vi har imidlertid valgt å se bort i fra transaksjonskostnader i våre utregninger, og vil heller diskutere hvilken innvirkning det kan ha på investeringsstrategienes resultater i kapittel 7.

### **5.3.2 Varians-Kovariansmatrise (VCV-matrise)**

VCV-matrisen er, som nevnt, et nyttig verktøy i forbindelse med optimering av porteføljer. Matrisen benytter historisk avkastning og kommer ved hjelp av disse frem til estimater på fremtidig varians og kovarians til aksjene i porteføljen. I denne oppgaven benyttet vi Excel som et verktøy for utregninger av matrisen, men vi vil her ha et hovedfokus på det matematiske bak våre beregninger fremfor Excel-funksjoner.

En VCV-matrise har følgende matriseform,

$$VCV = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

hvor kovariansen er:

$$\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j) = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)]$$

Et estimat for VCV-matrisen er gitt ved

$$VCV = \frac{M^T * M}{A} \quad (5.1)$$

$A$  er antall observasjoner,  $M$  betegner matrisen for meravkastning, mens  $M^T$  er den transponerte meravkastningsmatrisen. På matriseform er  $M$  og  $M^T$  gitt ved henholdsvis

$$\text{Meravkastning}, M = \begin{bmatrix} r_{11} - \bar{r}_1 & \cdots & r_{N1} - \bar{r}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1M} - \bar{r}_1 & \cdots & r_{NA} - \bar{r}_1 \end{bmatrix}$$

og

$$\text{Meravkastning}^T, M^T = \begin{bmatrix} r_{11} - \bar{r}_1 & \cdots & r_{1A} - \bar{r}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} - \bar{r}_1 & \cdots & r_{NA} - \bar{r}_1 \end{bmatrix}$$

(Benninga, 2008 c).

Med utgangspunkt i matematikken over, beregnet vi først matrisen for meravkastning. Deretter benyttet vi oss av enkelte matrisefunksjoner i Excel for å gjøre utregningene gitt i ligning (5.1). Alle beregningene gjorde vi for hvert år i perioden fra 2002 til 2011, slik at vi fikk ti VCV-matriser.

### 5.3.3 Markedsporteføljen

For å regne ut Markedsporteføljen hvert år har vi, som tidligere nevnt, tatt utgangspunkt i de ti største selskapene på Oslo Børs, målt etter markedsverdi. Beregningene gjøres ved å dividere hvert aktuelle selskaps markedsverdi på den totale markedsverdien av alle selskapene i porteføljen. Slik fikk vi de andelene vi benyttet oss av da vi beregnet Markedsporteføljens prestasjoner.

### 5.3.4 Markowitz-metoden

Videre ønsket vi å benytte oss av Markowitz-metoden, som beskrevet i kapittel 3, for å beregne andeler til en optimal portefølje. Resultatene medførte imidlertid enkelte short-posisjoner. Årsaken er at flere av selskapene har en negativ forventet fremtidig avkastning. Etersom shorting ikke er noe vi ønsket å inkludere i porteføljen, la vi til en begrensning om at det ikke var tillatt med negative investeringer i aksjene. En slik

begrensning resulterer imidlertid i at man ikke lenger kan beregne en effisient front ved å kombinere to minimum-variansporteføljer. Alternativet blir å konstruere så mange effisiente porteføljer manuelt at det blir mulig å utlede en effisient front fra dem. For å slippe å gjøre alle de utregningene for hånd, skrev vi en makro i VBA som utførte de nødvendige beregningene for oss.

For hvert enkelt år starter makroen med å finne den porteføljen med minst varians til en gitt forventet avkastning (Target ER). Den benytter seg av Solver for å gjøre utregningene. Hvilken Target ER makroen starter på er det vi som bestemmer, og denne varierer noe fra år til år. Grunnen er at forventet avkastning til porteføljen ikke kan overstige forventet avkastning til et aktivum alene, og vil derfor endres på en årlig basis. Når makroen har funnet optimale andeler som den skal investere i porteføljen, skriver den ut disse i Excel, sammen med porteføljens forventede avkastning og standardavvik. Deretter starter makroen utregningene på ny, ved å øke den Target ER som benyttes for å finne minimum-varians-porteføljen. Hvor mye Target ER økes med, avhenger av et intervall som vi har bestemt på forhånd. Intervallet varierer fra år til år, for at Target ER fremdeles kan passe med forventede avkastninger til porteføljens ulike aktiva. Denne prosessen repeteres 40 ganger, slik at vi får 40 ulike minimum-varians-porteføljer. Avslutningsvis finner vi den porteføljen med høyest Sharpe, da dette vil være den optimale Markowitz-porteføljen. For en detaljert beskrivelse av en slik makro, henviser vi til *Figur 10.1 i Appendix*

Utrekningene ved hjelp av VBA gjorde vi for hvert enkelt år, slik at vi fikk ti optimale Markowitz-porteføljer. Sammen utgjør porteføljene for hvert år én Markowitz-portefølje for hele perioden.

### 5.3.5 Kelly-kriteriet

For å finne de optimale andelene som vi hvert år skulle investere etter Kelly-kriteriet, fulgte vi følgende oppskrift i Excel.

Vi startet med å utføre nødvendige beregninger, slik at vi kunne kalkulere VCV-matrisen (1). Deretter brukte vi Solver til å løse optimeringsproblemet (2) gitt av ligning (4.2):

$$\max_w \left[ \left(1 - \sum_{j=1}^n w_j\right) r_f + \sum_{j=1}^n \left( \mu_j w_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n w_j \sigma_{jk} w_k \right) \right]$$

Med andre ord fant Solver den optimale vekstraten for kapital ved å endre på de ulike vektene investert i hver aksje. Implisitt fikk vi da også oppgitt vekten investert i risikofritt aktivum. Løsningene for de investerte andelene var da gitt ved ligning (4.3):

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_j = \mu_j - r_f$$

Gjennom å løse optimeringsproblemet over i Solver, fikk vi i enkelte år svært store longposisjoner, hvilket medførte flere aksjeinvesteringer med lån mot opptil 1500 %. Årsaken til dette ligger i at ligning (4.2) er en annengrads Taylorapprosimasjon av det opprinnelige optimeringsproblemet. Da det ikke er realistisk at en investor vil låne så store beløp for å kjøpe aksjer, konstruerte vi to ulike porteføljer hvor den ene hadde en begrensning på at andel investert i risikable aktiva skulle være mindre enn eller lik 100 %, og én hvor andel investert ikke kunne overstige 175 %. Vi innførte altså to ulike begrensninger i Solver (3). Videre vil vi omtale de to porteføljene som henholdsvis Kelly 100 % og Kelly 175 %.

Vi valgte de to begrensningene knyttet til andeler av ulike årsaker. Det er naturlig å anta at de fleste som handler på børs ikke ønsker å handle med lånefinansiering, da det vil øke risikoen betraktelig. Denne forutsetningen ligger til grunn ved valg av den første begrensningen, hvor man bare kan investere egenkapital i aksjer.

Da vi i tillegg konstruerte en portefølje med mulighet til å låne opptil 75 % av tilgjengelig egenkapital, har vi tatt utgangspunkt i teorien om Kelly-kriteriet som sier at det er en relativt risikofylt strategi. Vi tenker derfor at flere av de investorene som velger å investere etter strategien har en høyere grad av risikovillighet enn den gjengse aksjehandler, noe som også medfører et større ønske om å lånefinansiere aksjekjøpene sine. Følgelig står investoren her litt friere i sine investeringsmuligheter. Dette syntes vi var et spennende utgangspunkt for sammenligning av alle porteføljene, selv om premissene for resultatene deres selvsagt ikke blir de samme.

Som tidligere nevnt er det mulig å redusere risikoen ved investering etter Kelly-kriteriet ved bare å investere en forhåndsbestemt andel,  $c$ , av tilgjengelig aksjekapital i risikable aktiva. Resten av kapitalen vil da investeres risikofritt, med unntak av de gangene  $c$  er så stor at det likevel innebærer noe lån på porteføljen.

---

Vi konstruerte derfor også fire forskjellige porteføljer med fire ulike andeler av kapitalen investert, for både Kelly-porteføljen med 0 % lån og for porteføljen med inntil 75 % lån. Ved valg av andeler har vi tatt utgangspunkt i artikkelen "*Medium Term Simulations of The Full Kelly and Fractional Kelly Investment Strategies*" av MacLean, et al. (2010 a), og valgt de samme andelene som dem. Det medfører at

$$c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{4} \text{ og } c_4 = \frac{1}{8}$$

(MacLean, et al., 2010 a).

Optimale andeler investert i Fractional Kelly-porteføljene finnes ved å løse optimeringsproblemet i ligning (4.2), for så å multiplisere hver andel med sin respektive  $c$  (4).

Siden analysen vår strekker seg fra år 2002 til 2011, fulgte vi denne fremgangsmåten for hvert enkelt år. Avslutningsvis kombinerte vi de årlige resultatene til samlede porteføljer for hele perioden.

## 6. ANALYSE

I kapittel 6 ønsker vi å presentere resultatene fra våre analyser. Ved å sammenligne avkastninger og ulike risiko- og prestasjonsmål, vil vi derfor få et klarer syn på om investering etter Kelly-kriteriet slår Markowitz-metoden og/eller passiv forvaltning.

Vi starter med å vise forventet vekstrate for kapital for de to Kelly-porteføljene. Deretter illustrerer vi de ulike andelene hver portefølje har holdt i hvert selskap, før vi ser på de virkelige avkastningene i forhold til forventede avkastninger. Vi vil videre sammenligne porteføljene etter risiko- og prestasjonsmål. Til slutt vil vi evaluere prestasjonene til Fractional Kelly-porteføljene, før vi vil se hvorvidt noen av svingningene i avkastninger kan forklares ut i fra økonomiske konjunkturer.

### 6.1 Vekstratene for Kelly-porteføljene

Andelene i Kelly-porteføljen blir som tidligere nevnt bestemt gjennom å maksimere vekstraten for kapital. I tabell 6.1 ser vi årlig forventet vekst for Kelly-porteføljene i årene 2002 til 2011.

Årlig forventet vekstrate for Kelly-porteføljene (%)		
	Kelly 100 %	Kelly 175 %
<b>2002</b>	25,30	29,63
<b>2003</b>	10,42	10,86
<b>2004</b>	24,36	25,22
<b>2005</b>	25,67	25,82
<b>2006</b>	27,02	41,56
<b>2007</b>	39,67	63,60
<b>2008</b>	34,87	53,75
<b>2009</b>	15,17	16,90
<b>2010</b>	14,34	14,34
<b>2011</b>	10,49	10,49

*Tabell 6.1: Årlig forventet vekstrate for Kelly-porteføljene*

Vi ser at vekstraten er høyest for Kelly 175 % i samtlige år, med unntak av 2010 og 2011 da vekstratene var like for begge Kelly-porteføljene. Det kommer som et resultat av at investerte andeler i hver aksje da var like for de to Kelly-porteføljene, fordi de optimale andelene var under 100 %. Vekstratene over er i tråd med teorien om at ved større risiko kan man oppnå en høyere vekstrate. Ved å sammenligne vekstratene for de to porteføljene ser vi her også hvordan begrensningene knyttet til lånefinansiering i

de to Kelly-porteføljene spiller inn. Optimeringen av begge porteføljene bygger på det samme optimeringsproblem, så det eneste som skiller de er denne lånebegrensningen. Vekstraten for kapitalen er høyest for den porteføljen med svakest begrensning knyttet til lån. Videre vet vi at en optimering av en Kelly-portefølje helt uten en slik begrensning vil medføre en ytterligere høyere vekstrate, men at andelene investert i enkelte aksjer da vil bli helt usannsynlig høye i enkelte år.

## 6.2 Andeler investert

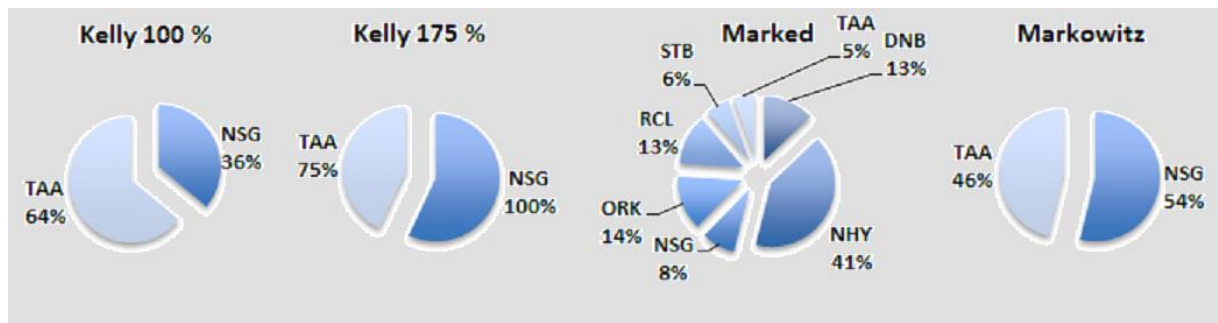
Som et resultat av investeringer etter forskjellige kriterier og begrensninger, allokterer de to Kelly-porteføljene ressursene sine ulikt. Videre ser vi at Kelly-porteføljene også er forskjellig fra både Markedsporteføljen og Markowitz-porteføljen. Ved å investere i ulike selskaper vil følgelig også prestasjonene variere. Derfor velger vi å vise andelsfordelingene fra portefølje til portefølje. Ettersom vi rebalanserer én gang i året, vil porteføljene videre variere fra år til år.

En annen egenskap ved Kelly-porteføljene som vi ser tydelig på ressursallokeringen, er mangelen på diversifisering. Følgelig tar en Kelly-investor høyere risiko enn andre, noe som teoretisk sett burde blitt belønnet i form av høyere avkastning. Det er derfor spennende å se om dette er tilfellet eller ikke.

Vi vil her illustrere de ulike andelene investert i år 2002, 2005, 2008 og 2011. På den måten skaper vi et generelt inntrykk av hvordan en Kelly-investor investerer, sammenlignet med markedet og en Markowitz-investor. Andeler investert i de resterende år er vedlagt i *Appendiks 10.3*

2002

I figur 6.1 ser vi hvilke selskaper de ulike porteføljene består av i 2002.

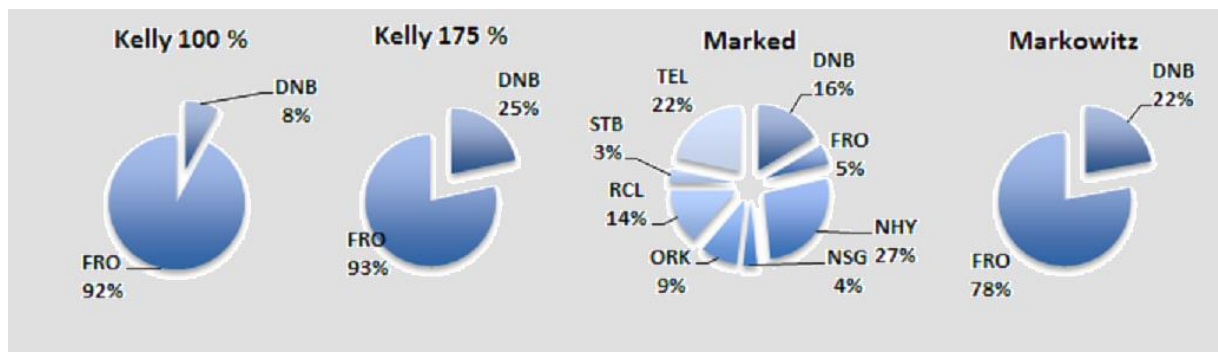


Figur 6.1: Andeler investert i 2002.

Vi ser at de to Kelly-porteføljene bare holder to posisjoner, sammenlignet med markedet som består av syv selskaper. Måten å investere på stemmer altså overens med Warren Buffets utsagn om at en investor bør satse alle kort på sine favoritter. I 2002 holder Markowitz-porteføljen de samme to selskapene som Kelly-porteføljene, men med ulike andeler investert.

2005

Figur 6.2 illustrerer porteføljene i 2005.



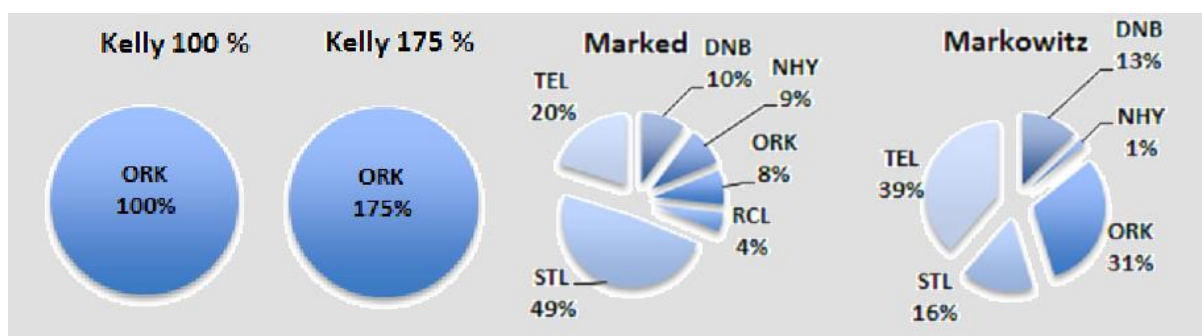
Figur 6.2: Andeler investert i 2005

Også i 2005 ser vi at alle de aktive porteføljene investerer i de to samme selskapene. Begge Kelly-porteføljene holder imidlertid en større andel i ett av selskapene (Frontline (FRO)), enn det Markowitz-porteføljen gjør. Følgelig vil Kelly-porteføljene trolig være mer risikable enn Markowitz-porteføljen, ettersom en betydelig del av porteføljeavkastningen vil avhenge av ett selskap. Av figuren over ser vi uansett klart hvor lite diversifiserte alle de aktive porteføljene er.



2008

I 2008 består de ulike porteføljene av følgende andeler, illustrert i figur 6.3.

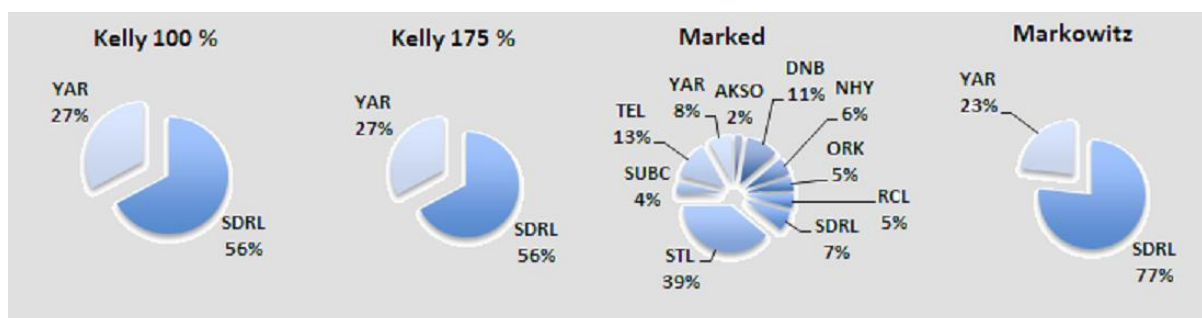


Figur 6.3: Andeler investert i 2008

I 2008 viser begge Kelly-porteføljene hvor ekstrem Kelly-strategien kan være. Ved å satse hele formuen på én aksje blir risikoen for ruin betraktelig mye større enn ved å diversifisere investeringene sine. Markowitz-porteføljen er i 2008 bedre diversifisert enn Kelly-porteføljene.

2011

Figur 6.4 illustrerer porteføljene i 2011.



Figur 6.4: Andeler investert i 2011

Av figuren over ser vi at de to Kelly-porteføljene, samt Markowitz-porteføljen, igjen er underdiversifiserte. Vi ser videre at Kelly 100 % holder nøyaktig samme andeler i de to selskapene som Kelly 175 %. Kelly-investorer investerer altså ikke nødvendigvis hele sin formue etter kriteriet. Følgelig reduseres andeler investert i takt med fremtidig forventet avkastning.

### 6.3 Avkastning

#### FORVENTET AVKASTNING

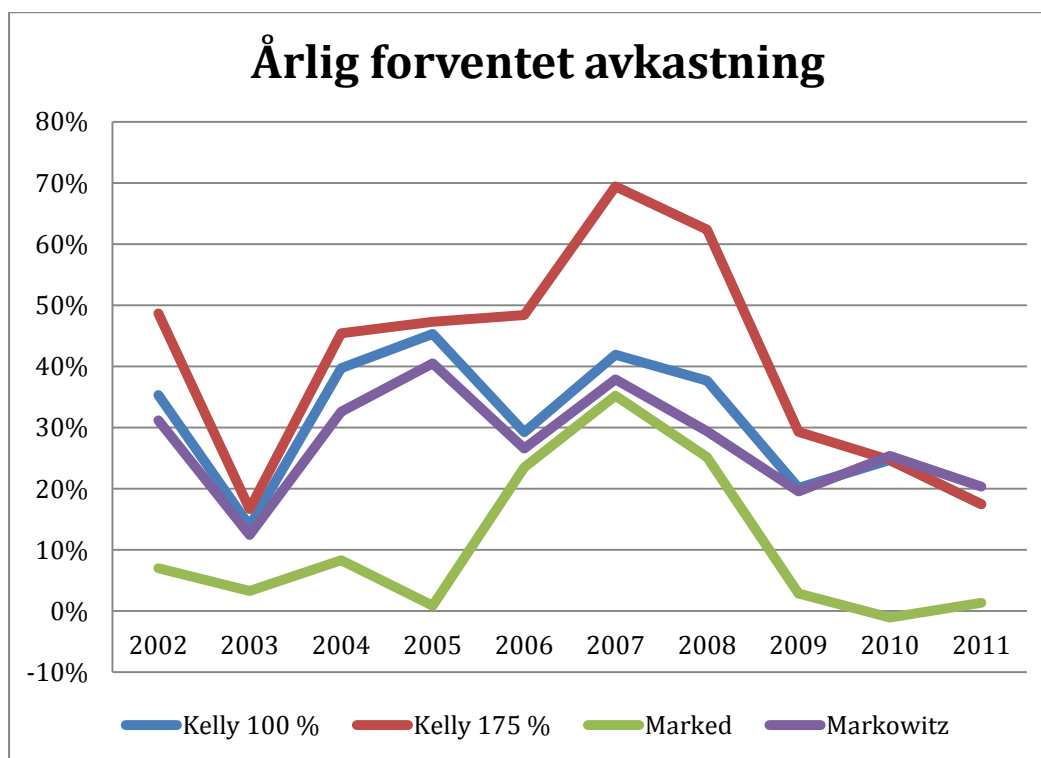
Med utgangspunkt i de posisjonene hver portefølje holder hvert år, og med estimater for fremtidig forventet avkastning for hvert selskap, har vi beregnet årlig forventet totalavkastning for hver portefølje. Resultatene vises under, i tabell 6.2.

	Årlig forventet avkastning (%)			
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002</b>	35,29	48,63	7,01	31,20
<b>2003</b>	13,89	16,68	3,31	12,46
<b>2004</b>	39,74	45,40	8,31	32,58
<b>2005</b>	45,29	47,28	0,91	40,50
<b>2006</b>	29,26	48,40	23,48	26,58
<b>2007</b>	41,92	69,45	35,22	37,86
<b>2008</b>	37,69	62,37	25,16	29,40
<b>2009</b>	20,15	29,31	2,86	19,58
<b>2010</b>	24,68	24,68	-1,04	25,38
<b>2011</b>	17,45	17,45	1,34	20,34

Tabell 6.2: Årlig forventet avkastning fra 2002 til 2011

Vi ser her at alle de aktive porteføljene hvert år har en betydelig større forventet avkastning enn Markedsporteføljen. I årene 2006 til 2008 har imidlertid Markedsporteføljen en forventet avkastning som ligger nærmere de aktives. Med unntak av et par år har Kelly 175 % høyest forventningsverdi, etterfulgt av Kelly 100 %, hvilket er i tråd med teorien om at Kelly-kriteriet er en evolusjonær strategi som vil overleve andre investeringsstrategier på lang sikt. Enkelte år har likevel Markowitz-porteføljen høyest forventet avkastning.

Forskjellene mellom de årlige forventede avkastningene er illustrert i figur 6.5.



Figur 6.5: Forventede avkastninger fra 2002 til 2011

Ettersom Kelly-kriteriet er en langsiktig investeringsstrategi, er vi mer interesserte i hvordan porteføljen gjør det i løpet av de 10 årene, enn resultatene for hvert enkelt år. Tabell 6.3 viser det årlige gjennomsnittet av forventet avkastning for hele perioden.

<b>Årlig gjennomsnitt av forventet avkastning (%)</b>				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	30,54	40,97	10,65	27,25

Tabell 6.3: Årlig gjennomsnitt av forventet avkastning for hele perioden

Som ventet, ser vi at de to Kelly-porteføljene har høyest gjennomsnittlig forventet avkastning for hele perioden. Differansen ned til Markowitz-porteføljen er imidlertid ikke så stor, og da særlig ikke fra Kelly 100 %. For å evaluere hvordan en portefølje presterer, er det imidlertid ikke de forventede avkastningene som er av størst interesse. Under presenterer vi de virkelige avkastningene for våre fire porteføljer.

*VIRKELIG AVKASTNING*

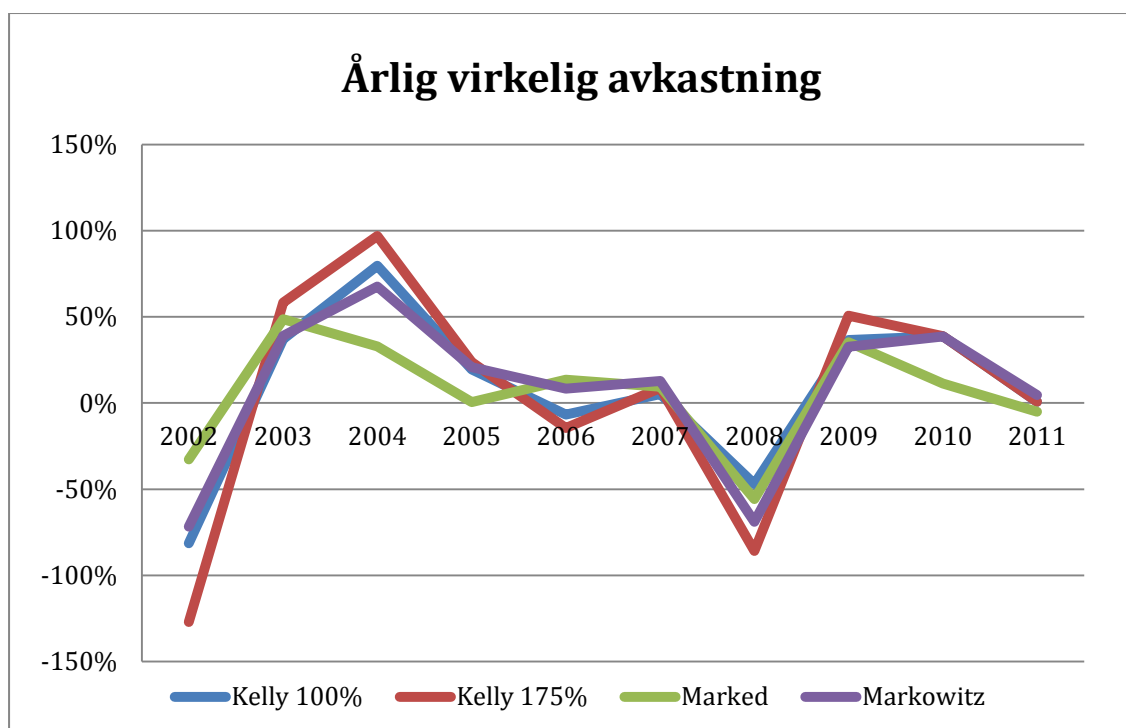
De virkelige avkastningene er basert på beregnede andeler og den avkastningen som selskapene faktisk oppnådde i de enkelte år. Avkastninger per år er presentert i Tabell 6.4.

	<b>Årlig virkelig avkastning (%)</b>			
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002</b>	-81,45	-127,10	-32,65	-71,70
<b>2003</b>	37,19	58,33	48,75	39,03
<b>2004</b>	79,61	97,01	32,89	67,66
<b>2005</b>	19,53	23,68	0,46	20,77
<b>2006</b>	-6,65	-14,45	13,56	8,40
<b>2007</b>	5,12	8,77	9,41	12,87
<b>2008</b>	-46,96	-85,76	-55,67	-68,92
<b>2009</b>	36,68	50,75	35,25	32,69
<b>2010</b>	38,78	38,78	11,24	38,60
<b>2011</b>	0,78	0,78	-4,99	4,64

*Tabell 6.4: Årlig virkelig avkastning fra 2002 til 2011.*

Som vi ser av tabellen over var virkeligheten ikke helt som forventet. Felles for alle porteføljene er at det er store svingninger i avkastningen fra år til år. Svingningene er godt illustrert når vi for eksempel sammenligner årene 2002 og 2003. Det er vanskelig å trekke noen klare konklusjoner i hvilken portefølje som presterer best ved å se på en år-til-år basis. Avkastningene indikerer imidlertid at noe spesielt har skjedd i markedet i årene 2002 og 2008. Dette vil vi komme tilbake til i avsnitt 6.6.

Hvordan porteføljenes virkelige avkastninger beveger seg i forhold til hverandre, er vist i figur 6.6.



Figur 6.6: Virkelige avkastninger fra 2002 til 2011

Også for virkelig avkastning vil det være mest relevant å se på hvilken portefølje som gjør det best i form av høyest avkastning for hele perioden. Tabell 6.5 (under) viser den totale årlige gjennomsnittsavkastningen for hele perioden.

<b>Årlig gjennomsnitt av virkelig avkastning (%)</b>				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	8,26	5,08	5,83	8,40

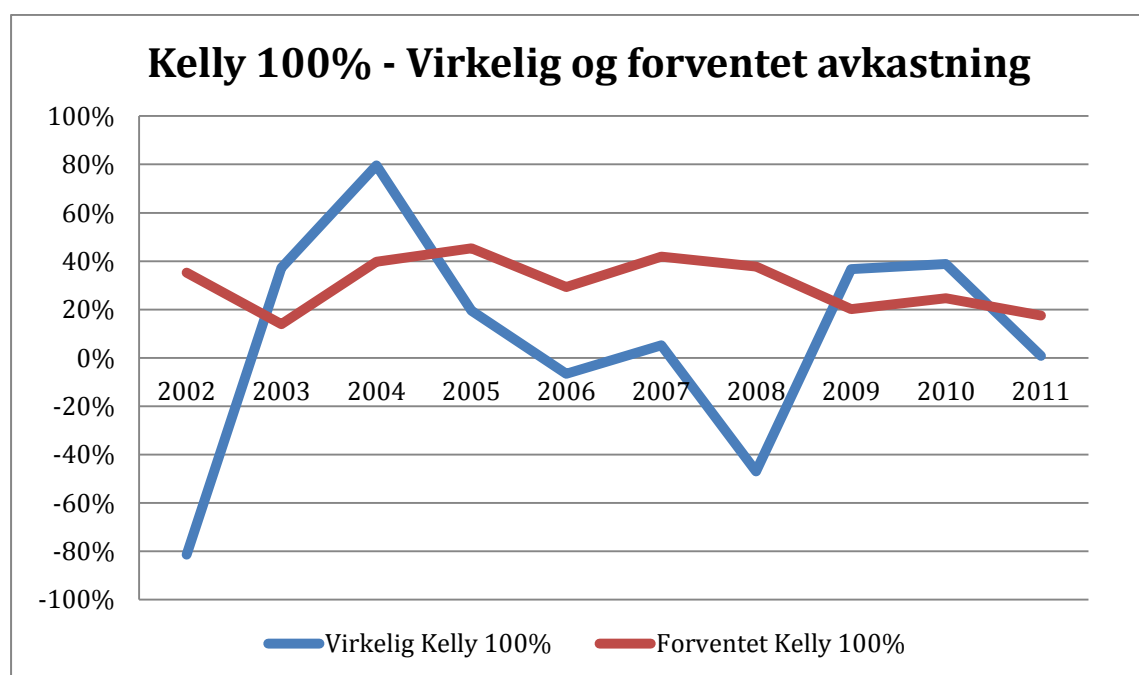
Tabell 6.5: Årlig gjennomsnitt av virkelig avkastning for hele perioden.

Tabellen over viser at alle de fire porteføljene i snitt har en positiv årlig avkastning for hele perioden. I motsetning til hva som var forventet, er det imidlertid Markowitz-porteføljen som har det høyeste årlige gjennomsnittet i de ti årene. Avkastningen til Kelly 100 % er imidlertid bare 0,14 % lavere. Når det gjelder Kelly 175 % må den se seg slått av alle de andre porteføljene, inkludert Markedsporteføljen. Det taler for at denne aktive porteføljen ikke skaper meravkastning utover referanseindeksen.

### VIRKELIG OG FORVENTET AVKASTNING

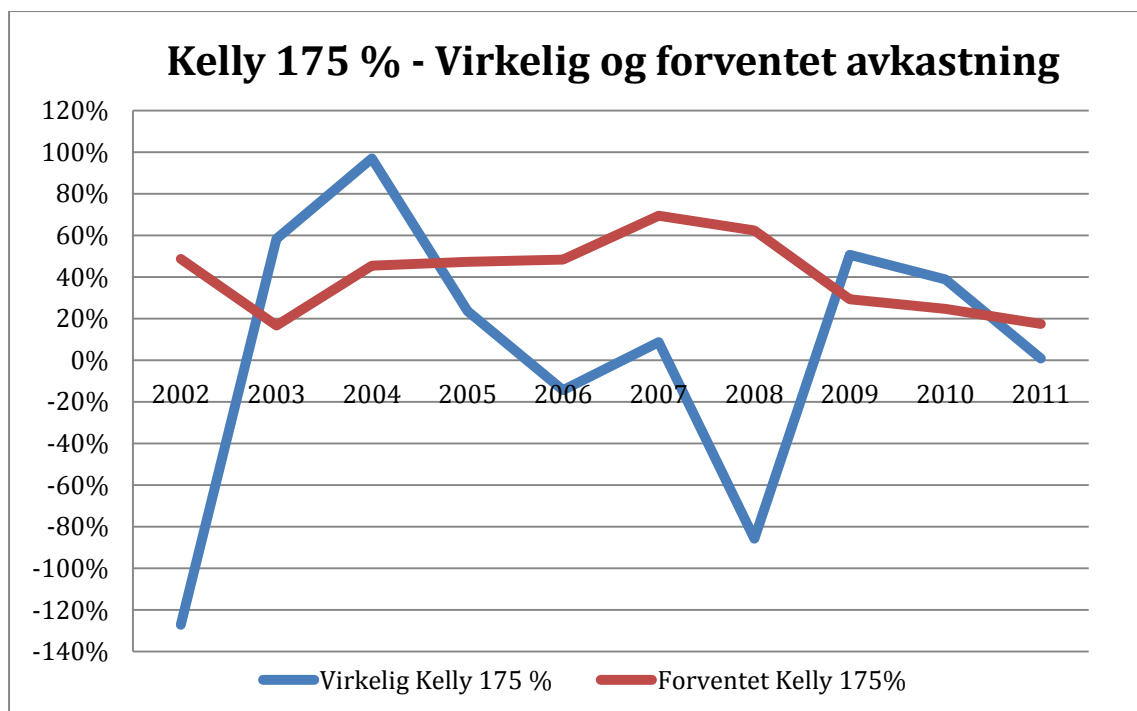
I følge våre beregninger var Kelly 175 % spådd å prestere best i form av både høyest vekstrate og høyest forventede avkastning, etterfulgt av Kelly 100 %. Ved å se på virkelig avkastning må begge Kelly-porteføljene imidlertid se seg slått av Markowitz-porteføljen. For lettere å se for seg forskjellene mellom forventede resultater og virkelige, vil vi her illustrere de i form av to figurer.

Figur 6.7 viser hvordan virkelig avkastning avviker fra forventet avkastning for Kelly 100 %.



Figur 6.7: Faktisk avkastning versus forventet avkastning for Kelly 100 %

Figur 6.8 illustrerer hvordan faktisk avkastning avviker fra forventet avkastning for Kelly 175 %.



Figur 6.8: Faktisk avkastning versus forventet avkastning for Kelly 175 %

Vi ser at trendene er de samme for begge Kelly-porteføljene. Mens forventet avkastning er noenlunde stabil gjennom hele perioden, er virkelig avkastning preget av store svingninger. Som nevnt ovenfor vil vi komme tilbake til mulige forklaringer i avsnitt 6.6.

#### MERAVKASTNING UTOVER RISIKOFRIRENTE

For å investere i risikable aktiva bør investoren oppnå en avkastning som er større enn risikofri rente for å være villig til å ta på seg den ekstra risikoen investeringen medfører. I tabell 6.6 ser vi årlig gjennomsnittlig meravkastning for hele perioden, hvor meravkastningen her er den avkastningen som det er mulig å oppnå ved å investere i porteføljene sammenliknet med en investering i risikofritt aktivum.

Meravkastning utover risikofri rente (%)				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	3,60	0,42	1,17	3,74

Tabell 6.6: Meravkastning utover risikofri rente per år fra 2002 til 2011.

Av tabellen ser vi at meravkastningen for alle våre fire porteføljer er positiv. Meravkastningen til Kelly 175 % er imidlertid relativt lav sammenliknet med de andre aktive porteføljene. I tillegg har Kelly 175 % en lavere meravkastning enn

Markedsporteføljen. I følge Oslo Finans AS (2013) har slik meravkastning historisk sett vært på rundt 3-4 %. Videre ser vi at meravkastningen for Kelly 100 % og Markowitz-porteføljen er over 3 %, noe som er over dobbelt så høyt som meravkastningen til Markedsporteføljen. Ettersom Markowitz-porteføljen var den porteføljen med høyest avkastning er det selvsagt også den porteføljen som oppnår størst meravkastning utover risikofri rente. Differansen ned til Kelly 100 % er likevel ikke så stor.

#### 6.4 Risiko- og Prestasjonsmål

Hvordan en portefølje presterer kan ikke evalueres ut i fra å se på avkastninger alene. I så tilfellet ville konklusjonen allerede vært klar: *”Investering etter Markowitz-metoden fører til den beste porteføljen.”* Derfor har vi også vurdert de fire porteføljene etter ulike risiko- og prestasjonsmål. For mer informasjon om de anvendte prestasjonsmålene, se *Appendiks 10.2*.

Videre i avsnittet vil vi se nærmere på både risiko og de ulike prestasjonsmålene for perioden 2002-2011. På den måten kan vi evaluere hvordan Kelly-porteføljene gjør det sammenliknet med både Markedsporteføljen og Markowitz-porteføljen, utover det å sammenligne avkastninger.

##### STANDARDVVIK

Som nevnt er volatilitet svært sentralt for investorer i aksjemarkedet. Her vil vi presentere volatiliteten i form av et årlig gjennomsnitt av standardavviket for porteføljene i årene fra 2002 til 2011 (Tabell 6.7).

Standardavvik (%)				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	43,79	62,02	29,92	43,05

Tabell 6.7: Årlig gjennomsnittlig standardavvik fra 2002 til 2011.

Standardavviket indikerer store variasjoner i porteføljene, og at det trolig er store svingninger i avkastningene. Dersom vi ser på standardavviket for amerikanske aksjer ligger det, historisk sett, på rundt 15 % (Malkenes, 2013 b). Våre tall er imidlertid hentet fra Oslo Børs og standardavviket vil trolig være høyere for norske aksjer enn for amerikanske på grunn av størrelse og risikofaktorer. I følge Oslo Finans AS har



aksjer på Oslo Børs historisk sett hatt et standardavvik på ca. 21% (Oslo Finans AS, 2013). Standardavviket til vår Markedsportefølje ligger naturligvis litt over dette snittet da vi kun har sett på utvalgte aksjer og ikke på hele markedet under ett. Graden av diversifiseringen er da lavere i vår Markedsportefølje enn for hele Oslo Børs. Vi kan likevel anta at standardavviket for Markedsporteføljen er relativt normalt. Begge Kelly-porteføljene samt Markowitz-porteføljen har et betydelig høyere standardavvik enn Markedsporteføljen. Dette stemmer bra overens med svingningene vi observerte i avkastningen fra år til år, samt med teorien om at aktiv forvaltning medfører høyere risiko enn passiv forvaltning. Standardavviket for Kelly 175 % er det høyeste, og over dobbelt så høyt som for Markedsporteføljen. Det kan skyldes mulighetene for lånefinansiering i denne porteføljen, hvilket kan medføre større svingninger i dens avkastninger. Dersom en investor har lånefinansiert et aksjekjøp og aksjekursen stiger, vil gevinsten være stor. Tapet er dessverre tilsvarende stort dersom den lånefinansierte aksjen opplever et stort verdifall, da oppsiden og nedsiden er større. Følgelig vil denne porteføljen også medføre størst risiko for investor.

### *BETA*

En annen måte å måle risiko i porteføljene på, er ved å se på beta-verdier. Beta-verdiene til porteføljene er gitt i Tabell 6.8.

	<b>Beta</b>			
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	1,220	1,875	1,000	1,299

*Tabell 6.8: Gjennomsnittlige årlige beta-verdier fra 2002 til 2011.*

Markedsporteføljen har selvsagt en beta-verdi på 1. Da vi benytter denne porteføljen som vår referanseindeks vil verdiene til aksjene i denne porteføljen bevege seg perfekt med vårt marked. For de tre andre porteføljene våre har vi positive beta-verdier som er større enn 1. Det betyr at verdien til aksjene i porteføljene er mer volatile enn Markedsporteføljen. En beta-verdi høyere enn 1 indikerer derfor en mulighet for en høyere avkastning enn Markedsporteføljen, men det innebærer også større risiko. Vi ser her at Kelly 175 % har den høyeste beta-verdien, som antyder muligheten for både den største avkastningen og det største tapet.

*USYSTEMATISK RISIKO*

Da den usystematiske risiko er den risikoen som er mulig å diversifisere bort vil det være naturlig å anta at den vil være høy for både Kelly 100 %, Kelly 175 % og Markowitz-porteføljen. Årsaken ligger i at porteføljene ikke diversifiserer sine investeringer. Tabell 6.9 presenterer porteføljenes usystematiske risiko i tidsperioden.

$\sigma_{\epsilon}$ (usystematisk risiko) (%)				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	24,22	30,87	0	18,54

Tabell 6.9: Usystematisk risiko fra 2002 til 2011.

I tabellen over ser vi at antagelsene våre er korrekte. Både Kelly 100 %, Kelly 175 % og Markowitz-porteføljen har svært høye andeler usystematisk risiko. Den usystematiske risikoen er ikke avhengig av hvordan resten av markedet gjør det. De høye andelene over viser at selv om markedet beveger seg oppover, er det likevel ikke en garanti for at de aktive porteføljene gjør det samme.

*SHARPE RATIO*

Det er selvsagt positivt med høy avkastning på en portefølje. Det vil likevel ikke være gunstig med en så høy avkastning som mulig, da det trolig innebærer stor risiko. For å vite om god avkastning kan forklare av høy risiko, er det nødvendig å evaluere en porteføljes prestasjoner etter Sharpe ratioen. Et høyt Sharpe-tall indikerer at den økte avkastningen ikke skyldes en økning i risiko for porteføljen. Med andre ord vil det si at et høyt Sharpe-tall indikerer en god investering. Tabell 6.10 viser en gjennomsnittlig årlig Sharpe for hver av porteføljene i årene fra 2002 til 2011.

Sharpe ratio				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	0,08226	0,00655	0,03895	0,08697

Tabell 6.10: Gjennomsnittlige årlige Sharpe-tall fra 2002 til 2011.

Av tabellen over ser vi at Kelly 100 % har et høyere Sharpe-tall enn Markedsporteføljen, som også er vår referanseindeks. Kelly 100 % har altså en høyere risikojustert avkastning enn Markedsporteføljen. Det høyeste Sharpe-tallet er det imidlertid Markowitz-porteføljen som har. Det skyldes at denne porteføljen har lavere

standardavvik samtidig som den har et høyere meravkastning utover risikofri rente enn Kelly 100 %. Kelly 175 % gjør, basert på Sharpe-ratioen, det dårligst av porteføljene, med et Sharpe-tall på kun 0,00655. Det kan trolig skyldes at deler av investeringen er basert på lån og vil derfor innebære svært stor risiko for investoren. Samlet ser vi at Sharpe-tallene er positive for alle porteføljene i perioden 2002-2011. I enkelte år har kanskje Sharpe-tallene vært negative på grunn av makroøkonomiske hendelser i markedet. Vi velger likevel å se på perioden samlet da vi benytter oss av et langsiktig perspektiv.

#### *TREYNORS INDEKS*

Et annet prestasjonsmål er Treynors indeks. Også dette er et mål som ser på meravkastning i forhold til risiko. Treynors indeks tar imidlertid ikke hensyn til den usystematiske risikoen, slik som Sharpe-ratioen gjør. Tabell 6.11 viser Treynors indeks for de fire porteføljene i perioden fra 2002 til 2011.

<b>Treynors indeks</b>				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	0,02954	0,00224	0,01165	0,03438

*Tabell 6.11: Gjennomsnittlig årlig Treynors indeks fra 2002 til 2011.*

Vi ser av tabellen at Kelly 175 % gjør det dårligere enn Markedsporteføljen. Både Kelly 100 % og Markowitz-porteføljen gjør det bedre enn Markedsporteføljen. Også etter dette evalueringskriteriet er det imidlertid Markowitz-porteføljen som presterer best.

#### *MODIGLIANI OG MODIGLIANI ( $M^2$ )*

Modigliani og Modigliani sammenlikner porteføljen og markedet ved å benytte samme standardavvik for begge, og da standardavviket for markedet. Tabell 6.12 viser  $M^2$  for hver av porteføljene for hele perioden.

<b><math>M^2</math> (%)</b>				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	1,30	-0,97	0	1,44

*Tabell 6.12: Gjennomsnittlig årlig  $M^2$  fra 2002 til 2011.*

For Kelly 100 % er differansen mellom den optimaliserte porteføljekombinasjonen og markedet alene positiv, mens det motsatte er tilfellet for Kelly 175 %. Markowitz-porteføljen er imidlertid igjen den av porteføljene med størst differanse til markedet alene.

#### *JENSENS ALFA*

For aktiv forvaltning vil det være særlig spennende å sammenligne alfa-verdiene til de ulike porteføljene. Tabell 6.13 illustrerer et snitt av årlig Jensens alfa-verdi for hver portefølje i hele tidsperioden.

<b>Jensens Alfa (%)</b>				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	2,181	-1,003	0	2,231

*Tabell 6.13: Gjennomsnittlige årlige Jensens alfa-verdier fra 2002 til 2011.*

Ut i fra tabellen ser vi at Kelly 100 % har en positiv Jensens alfa-verdi, hvilket tyder på at porteføljen vil få en høyere avkastning enn Markedsporteføljen. Også Markowitz-porteføljen har en positiv Jensens alfa-verdi. Denne er også noe høyere enn Jensens alfa-verdien til Kelly 100 %.

Kelly 175 % har på sin side en negativ Jensens alfa-verdi, som indikerer at denne porteføljen vil få en lavere avkastning enn Markedsporteføljen. Dersom vi kun hadde vektlagt alfa-verdien som evalueringskriterium ser vi derfor at vi ikke burde fulgt strategien til Kelly 175 %. Sammenligner vi derimot dette resultatet med Beta-verdien over, antyder de to målene en ulik konklusjon, da Beta-verdien viser en mulighet for høyere avkastning enn Markedsporteføljen.

#### *INFORMATION RATIO (IR)*

Når det gjelder å evaluere porteføljene etter Information Ratio, viser Tabell 6.14 de ulike IR'ene for tidsperioden.

<b>IR (%)</b>				
	Kelly 100 %	Kelly 175 %	Marked	Markowitz
<b>2002-2011</b>	9,005	-3,249	0	12,031

*Tabell 6.14: Gjennomsnittlig årlig Information Ratio fra 2002 til 2011.*

Som vi ser av tabellen får både Kelly 100 % og Markowitz-porteføljen en positiv IR, noe som betyr en positiv unormal avkastning per enhet usystematisk risiko. For Kelly 175 % er imidlertid IR negativ, som betyr at avkastningen utover normalen også vil være negativ for porteføljen.

#### *OPPSUMMERINGS AV PORTEFØLJENES PRESTASJONER*

For å oppsummere funnene fra analysen over, ser vi at Markowitz-porteføljen presterer bedre enn begge Kelly-porteføljene på samtlige risiko- og prestasjonsmål. Dersom vi ser på virkelig avkastning, var også denne høyest for Markowitz-porteføljen. Det er imidlertid ikke mye som skiller Markowitz-porteføljen fra Kelly 100 %. Forskjellene er derimot større mellom Markowitz-porteføljen og Kelly 175 %, som i følge våre analyser er den klart dårligste handlestrategien i perioden 2002 til 2011.

### **6.5 Fractional Kelly-porteføljer**

Som beskrevet tidligere i oppgaven har vi også valgt å se på ulike Fractional Kelly-strategier. Da Kelly-strategien er en investeringsstrategi som innebærer høy risiko for investoren, vil det å kunne investere forhåndsbestemte andeler av sin formue være med på å redusere risikoen betraktelig for investoren. Som teorien sier, vil dette også medføre en lavere avkastning for porteføljen.

I denne oppgaven har vi, som nevnt, investert Fractional Kelly-andeler på henholdsvis  $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  (0,75 %, 0,50 %, 0,25 % og 0,13 %) av de andeler som vi kom frem til ved å løse optimeringsproblemet i ligning (4.2). Her vil vi presentere de resultatene vi fikk, for å illustrere hvordan Fractional Kelly-strategier kan benyttes for å redusere risikoen, men da på bekostning av avkastning.

#### *STANDARDVARIANS FOR FRACTIONAL KELLY*

Under i tabell 6.15 viser vi standardavvikene til de ulike Fractional Kelly-porteføljene.

<b>Standardavvik Fractional Kelly (%)</b>		
c	Kelly 100 %	Kelly 175 %
<b>0,75</b>	32,78	47,74
<b>0,50</b>	21,77	30,78
<b>0,25</b>	10,76	14,88
<b>0,13</b>	6,39	7,24

Tabell 6.15: Standardavvik for Fractional Kelly per år fra 2002 til 2011.

Som forventet synker standardavviket i takt med at andelen av formuen investert etter Kelly-kriteriet synker. Funnene over underbygger teorien om at investering etter Fractional Kelly er en mindre risikofull strategi enn en Full Kelly-investering. For de Fractional Kelly-porteføljene hvor investeringsandelene er størst, er imidlertid standardavvikene fremdeles relativt høye. Tabellen over illustrerer likevel klart hvordan risikoen kan reduseres ved å følge en Fractional Kelly-strategi. For Kelly 100 % er standardavviket lavere enn standardavviket til Markedsporteføljen allerede ved  $c = \frac{1}{2}$ , mens det samme er tilfellet for  $c = \frac{1}{4}$  for Kelly 175 %.

#### FORVENTET AVKASTNING FOR FRACTIONAL KELLY

I tabell 6.16 som følger ser vi et årlig gjennomsnitt av forventet avkastning for de ulike Fractional Kelly-porteføljene.

<b>Fractional Kelly – forventet avkastning (%)</b>		
c	Kelly 100 %	Kelly 175 %
<b>0,75</b>	24,03	31,86
<b>0,50</b>	17,53	22,75
<b>0,25</b>	11,03	13,77
<b>0,13</b>	7,85	9,18

Tabell 6.16: Årlig gjennomsnitt av forventet avkastning for Fractional Kelly fra 2002 til 2011.

Vi ser her at forventet avkastning til Fractional Kelly-porteføljene synker i takt med en synkende c. Forventet avkastning for alle Fractional Kelly-porteføljene er likevel positive og relativt høye. Vi ser imidlertid at det er store forskjeller på å investere hele 75 % av opprinnelig Kelly-andel mot å investere bare 13 %.

### VIRKELIG AVKASTNING FOR FRACTIONAL KELLY

Den virkelige avkastningen for Fractional Kelly-porteføljene ble imidlertid heller ikke som forventet, hvilket er i tråd med den virkelige avkastningen for Kelly 100 % og 175 %. Det er illustrert i Tabell 6.17

Fractional Kelly - virkelig avkastning (%)		
c	Kelly 100 %	Kelly 175 %
<b>0,75</b>	7,33	5,13
<b>0,50</b>	6,39	3,96
<b>0,25</b>	5,46	3,76
<b>0,13</b>	4,55	3,95

Tabell 6.17: Årlig gjennomsnitt av virkelig avkastning for Fractional Kelly fra 2002 til 2011.

Dersom vi studerer de virkelige avkastningene nærmere ser vi at under Kelly 175 % er det Fractional Kelly med andel  $\frac{1}{4}$  som oppnår den laveste avkastningen. I tillegg er forskjellen mellom Fractional Kelly  $\frac{1}{2}$  og  $\frac{1}{8}$  kun 0,01 %, noe som trolig skyldes at man investerer det overskytende i risikofritt aktivum. Vi ser derfor at ved å kombinere Kelly-investering med risikofritt aktivum kan i noen tilfeller risikoen reduseres uten at avkastningen synker merkbart.

Som tidligere vist var den årlige gjennomsnittlige avkastningen for Kelly 100 % og Kelly 175 % henholdsvis 8,26 % og 5,08 %. Vi ser derfor av tabellen over at ved  $c = \frac{3}{4}$  oppnår Fractional Kelly-investering på Kelly 175 % faktisk en svakt høyere avkastning enn Kelly 175 %. I den sammenheng vil en Fractional Kelly-strategi følgelig være å foretrekke fremfor en Full Kelly. For de resterende Fractional Kelly-porteføljene knyttet til Kelly 175 % er situasjonen imidlertid en annen. Da det årlige gjennomsnittet av risikofri rente for perioden er 4,66 % ser vi nemlig at de porteføljene har en negativ meravkastning over risikofri rente. Fractional Kelly-porteføljene knyttet til Kelly 100 % presterer på sin side bedre da alle, med unntak av  $c = \frac{1}{8}$ , oppnår en positiv meravkastning over risikofri rente.

## 6.6 Konjunkturer

Som nevnt i avsnittene over, ser vi at porteføljene opplevde store svingninger i løpet av vår valgte tidsperiode. Enkelte år var imidlertid mer ekstreme enn andre, da aksjekursene falt betydelig. Av den grunn ønsker vi videre å se på om det kan skyldes tilfeldigheter eller om forklaringer kan finnes i økonomiske konjunkturer fra 2002 til 2011.

Figur 6.6 i avsnitt 6.3 viser de virkelige avkastningene for våre porteføljer fra 2002 til 2011. Av den ser vi at alle porteføljene beveger seg i relativt like konjunkturer. Det er imidlertid to årstall som peker seg ut i form av tydelige nedgangskonjunkturer; 2002 og 2008. I den forbindelse vil vi her presentere to viktige hendelser.

### *DOTCOM-KRISEN*

I 1999 og i deler av 2000 opplevde markedet en sterk utvikling i Internett-teknologien. Forventningene var enorme og aksjene på Internett-relatert teknologi ble svært høyt priset. Aktører hadde et optimistisk syn på fremtiden til denne bransjen, selv om mange selskaper hadde store gjeldsposter. Forventningene snudde da flere innså at selskapene ikke kunne vise til noen inntjening slik at prisene ble justert tilbake. I starten av 2000-tallet opplevde den amerikanske økonomien en langvarig nedtur. Av grafen over ser vi at våre porteføljer gjør det svært dårlig i 2002. Selv om det ikke kan leses av grafen siden vi begynner i 2002 og kun viser avkastning på utvalgte aksjer i porteføljene, var Oslo Børs i starten av 2003 tilbake til et nivå tilsvarende 1996 med tanke på utvikling og fall i aksjeomsetning (Oslo Børs, 2013).

I 2002 ser vi da at andre faktorer enn porteføljevalg kan forklare den negative avkastningen. De fire ulike porteføljene vi ser på får alle en negativ avkastning. Det som imidlertid er tydelig er at Markedsporteføljen gjør det mindre dårlig enn både Kelly-porteføljene og Markowitz-porteføljen. Det skyldes trolig at Markedsporteføljen er bedre diversifisert enn de aktive porteføljene. Kelly-porteføljene har kun to posisjoner, hvilket innebærer stor risiko når hele markedet synker. Det samme gjelder for Markowitz-porteføljen i 2002, men på tross av dette gjør også Markowitz-porteføljen det mindre dårlig enn Kelly-porteføljene.



## *FINANSKRISEN*

Av Figur 6.6 ser vi også at aksjeavkastningen falt kraftig i 2008. Investeringsbanken Lehman Brothers gikk konkurs høsten 2008, og kjennetegner starten på finanskrisen. Investorer hadde frem til da tjent gode penger på å investere i aksjemarkedet. Videre presenterer vi her ulike faktorer som kan ha ført til det store fallet i aksjeavkastningene det året.

Det første som kan sies å være en medvirkende årsak til krisen var boligboblen i USA. Politikken som ble ført innebar at "alle" skulle få mulighet til å kjøpe bolig. Dette medførte god tilgang på kreditt og lån også til lite kredittverdige lånetakere. Slike lån ble kalt subprimelån (Malkenes, 2013 a). Grunnen til at de fleste lånesøknader ble innvilget, var at man forventet en prisstigning i boligmarkedet som skulle vedvare, og sikkerheten ble kun basert på en slik forventning. Gode og dårlige lån ble pakket sammen og solgt videre i kompliserte verdipakker, og på den måten ble risikoen godt skjult.

I begynnelsen av 2006 flatet boligprisstigningen ut, og flere lånetakere slet med mislighold av lån samtidig som rentene steg. Særlig subprimelånetakere hadde vanskeligheter, og problemene spredte seg til pengemarkedene. Det var fordi det viste seg at mange av verdens største banker hadde investert i verdipapirer som helt eller delvis inneholdt subprimelån, og mistilliten vokste (Statistisk sentralbyrå, 2012). Bankene begynte dermed å slite med likviditeten og problemene spredte seg til ikke-finansielle aktører. Denne usikkerheten medførte at kapitalen ble flyttet fra aksjemarkedet og pengemarkedet til sikrere posisjoner som kontanter og statspapirer (Statistisk sentralbyrå, 2012). Når alle vil selge sine aksjer synker prisen og følgelig også avkastningen, som vi ser igjen i Figur 6.6. I forkant av krisen ønsket ingen aktører å låne penger til hverandre, lånerenten økte og spreaden mellom styringsrenten og pengemarkedsrenten steg (Malkenes, 2013 a). I september 2008 slo som sagt krisen ut for fullt. Da lot den amerikanske staten Lehman Brothers gå konkurs, fordi de ikke klarte å få andre finansinstitusjoner til å overta. Som et resultat økte risikopremien, vi fikk en tillitskrise i finansmarkedene og pengemarkedet nærmest stoppet opp (Malkenes, 2013 a). Flere banker i andre land gikk etter hvert konkurs. I tillegg sank både aksje- og råvarepriser i hele verden. Børsfall på 50 % eller mer ble resultatene for de fleste børsene i verden (Malkenes, 2013 a).

Ringvirkningene var enorme, utlånspraksis ble strammet inn, arbeidsledigheten steg og vi fikk et fall i BNP i hele OECD-området i siste del av 2008 (Statistisk sentralbyrå, 2012). Verdt å merke seg er at problemene var enda større internasjonalt enn i Norge.

Samlet sett illustrerer Figur 6.6 at alle porteføljene gjør det svært dårlig i 2008. Det kan dermed tyde på at det er forholdene rundt og ikke bare porteføljevalget som er avgjørende for avkastningen på det tidspunktet. Det som er overraskende er imidlertid at Kelly 100 % gjør det mindre dårlig enn både Markowitz-porteføljen og Markedsporteføljen, som begge slår Kelly 175 %. En sterkt medvirkende årsak til at Kelly 100 % gjorde det best, er at porteføljen bare investerte i Orkla-aksjen, som gjorde det litt bedre enn de andre aksjene i vårt marked. Orkla-aksjen sank likevel mye i verdi, og for Kelly 175 % som hadde lånt 75 % ekstra for å investere i Orkla, medførte dette store tap. For oss er det imidlertid vanskelig å si noe om det at Kelly 100 % gjør det minst dårlig skyldes noe annet enn tilfeldigheter og flaks, særlig med tanke på at begge Kelly-porteføljene gjorde det dårligst i 2002.

## 7. KRITISK DISKUSJON

I følgende kapittel ønsker vi å presentere en kritisk diskusjon knyttet til ulike valg, antakelser, modeller og prestasjonsmål som vi har bygget våre analyser og resultater på. Vi ønsker også her å rette fokus på ulike begrensninger knyttet til våre analyser. Avslutningsvis har vi også drøftet mulige måter å forbedre resultatene til Kelly-porteføljene på, med tanke på hva vi ville endret dersom vi skulle investert etter Kelly-kriteriet på nytt.

### 7.1 Bruken av Kelly-kriteriet som en illustrasjon

Det er viktig å gjenta at oppgaven vår gir en illustrasjon på bruken av Kelly-kriteriet. Med det mener vi at oppgaven er relativt kort og vi har tatt ulike snarveier for å forsøke å illustrere kriteriet på en så enkel måte som mulig. Vi har derfor benyttet oss av Luenberger (1998) sin approksimasjon av det virkelige optimeringsproblemet da dette er en mer forståelig måte å løse kriteriet på matematisk sett. Et mål for oss har vært å gi en slags ”oppskrift” på hvordan en investor kan benytte seg av kriteriet til å regne ut aksjeandeler i en log-optimal portefølje. Vi har i den forbindelse tatt høyde for noen begrensninger i analysen. Et eksempel er vårt valg av ”edge” som vi vil omtale nærmere i avsnitt 7.5. Vi valgte også, som nevnt i avsnitt 5.3.5, å sette begrensninger på hvor store andeler investoren kunne investere. Bakgrunnen for denne begrensningen er at vi antar at investorene som faktisk benytter seg av kriteriet er svært kapitalsterke, slik at det vil være mulig å låne hele 75 % av egenkapitalen. En annen tanke bak lånebegrensningene var at uten dem hadde investoren faktisk gått konkurs allerede i det første året vi så på fordi andelene investert var enorme og avkastningen viste seg å bli negativ.

Det at vi kun har sett på Oslo Børs og gjort investeringene utelukkende der, innebærer også en begrensning på analysen. Valget har medført en ytterligere økning i risiko fordi Oslo Børs, på grunn av dens størrelse, i seg selv ansees som lite diversifisert. En investor med ønske om diversifisering ville sannsynligvis valgt å investere også på utenlandske børser. Det kan vi begrunne gjennom å se på historiske standardavvik på rundt 17 % for globale aksjemarkeder mot ca. 21 % på Oslo Børs (Oslo Finans AS, 2013).

I mange oppgaver undersøker man gjerne om resultatene er signifikante. Vi mener imidlertid at det er lite relevant i vår fremstilling av Kelly-kriteriet, da oppgaven vår er ment som en illustrasjon. Videre kan vi også anta at resultatene uansett ikke ville blitt signifikante. Eksempler på grunner til det er at vi i vår fremstilling har et datautvalg som er for lite, og i tillegg går våre analyser over en for kort tidsperiode.

### *RISIKOFRI RENTE*

Videre har vi i oppgaven vår antatt at vi både kan låne og investere til risikofri rente. En slik antakelse føler vi har vært greit å ta fordi vi har ønsket å gi en illustrasjon. Følgelig har vi ikke lagt særlig vekt på hverken lån eller sparing. I en virkelig situasjon ville nok derimot ikke lånerenten vært identisk med sparerenten.

Som et estimat på risikofri rente i oppgaven har vi valgt å benytte renten på norske 10-årige statsobligasjoner. Valget kan ha påvirket våre resultater, men vi antar at en slik påvirkning ville vært minimal siden vi kun har benyttet oss av norske aksjer. Et alternativ kunne imidlertid vært å bruke amerikanske 3-årige statsobligasjoner (*Treasury Bills*) som estimat for risikofri rente i oppgaven. Samlet sett anser vi likevel valget som mindre betydningsfullt for vår illustrasjon av Kelly-kriteriet.

### *TRANSASKJONSKOSTNADER*

Vi har valgt å ekskludere transaksjonskostnader fra analysen. Det er imidlertid viktig å være klar over betydningen av transaksjonskostnader knyttet til aktiv forvaltning, da det reduserer meravkastningen utover passiv avkastning, eller markedsavkastningen. For å vurdere om aktiv avkastning er signifikant, ville det vært nyttig å inkludere slike kostnader knyttet til aksjehandel.

## **7.2 Bruk av historisk avkastning som et estimat på fremtidig forventet avkastning**

I denne oppgaven har vi basert flere utregninger til både Kelly-porteføljene og Markowitz-porteføljen på en felles antakelse om at ved å se på hvordan historien har vært kan man også si noe om hvordan fremtiden vil bli. Følgelig har vi benyttet oss av historiske aksjekurser for å estimere både fremtidig forventet avkastning for aksjene, samt deres forventede varians. Estimaten har vi videre benyttet for å beregne de ulike andelene i porteføljene. I følge Benninga (2008 c) er dette en modig antagelse å ta. På tross av at det å bruke aritmetisk gjennomsnitt av avkastningene de siste fire år

er en standard fremgangsmåte for slike beregninger, har metoden høstet en del kritikk. Spørsmålet er nemlig om historisk informasjon tegner et godt nok bilde på hvordan avkastninger vil være i tiden som kommer? Storebrand (2013) besvarer spørsmålet i form av en berømt setning: ”*Historisk avkastning er ingen garanti for fremtidig avkastning*” (Storebrand, 2013, s. 1). Konjunkturer, risikoprofil og lignende vil også være sentralt for hvordan aksjer presterer i fremtiden (Storebrand, 2013).

Som et resultat av det ovennevnte vil estimerer som utelukkende er basert på historiske data ha en begrenset evne til å predikere fremtiden. Da andelene i de ulike porteføljene er basert på slike estimerer, vil det være en begrensning vi må ta høyde for i våre resultater. Verdt å nevne er imidlertid det faktum at prestasjonene til alle de aktive porteføljene våre bygger på denne antagelsen. Hvordan de presterer i forhold til hverandre ville kanskje derfor ikke blitt endret drastisk ved bruk av andre metoder i beregninger for fremtidige forventninger.

Som et alternativ til historiske avkastninger kunne vi beregnet fremtidige forventede avkastninger ved å se på forholdet mellom dividende og pris, eller forholdet mellom inntjening og pris (Finansdepartementet, 2013). Årsaken til at vi likevel benyttet oss av historisk avkastning ligger igjen i vårt ønske om å illustrere bruken av kriteriet.

### **7.3 VCV-matrisen og Markowitz-metoden**

Som presentert tidligere i oppgaven, har vi benyttet oss av en standard VCV-matrise i våre utregninger av både andeler i Kelly-porteføljene og Markowitz-porteføljen. Verdt å vite er imidlertid det faktum at denne VCV-matrisen har blitt kritisert for sin manglende evne til å predikere fremtidige kovarianser, noe som kan medføre urealistisk store shortposisjoner og longposisjoner i enkelte aksjer i porteføljene. Som et resultat kan små endringer i estimerte avkastninger ha en dramatisk effekt på de ulike vektene i de optimale porteføljene (Benninga, 2008 c).

Markowitz-metoden har også høstet noe kritikk. Mens dens måte å optimere porteføljer på teoretisk sett virker lovende, viser det seg at den i virkeligheten, som VCV-matrisen, kan føre til store short- og longposisjoner i de optimale porteføljene. Hovedforklaringen er imidlertid bruken av historiske data i modellen (Benninga, 2008 e).

På tross av den ovennevnte kritikken av VCV-matrisen og Markowitz-metoden har vi likevel tatt det i bruk i våre analyser. Det er imidlertid viktig å ha ulempene knyttet til bruken i bakhodet, da det kan ha påvirket våre resultater.

#### **7.4 Begrensninger knyttet til resultatmålene**

Å evaluere en portefølje kan være svært vanskelig da ikke alle målene gir så gode beskrivelser av resultatene alene, på samme tid som de sammen med andre resultatmål vil de være nyttige for evalueringen av porteføljene. Ulike resultatmål kan gi ulike anbefalinger av hvilke porteføljer som er best, noe som kan virke forvirrende. En annen faktor man bør ta hensyn til når en skal evaluere porteføljene er at evalueringen i stor grad vil avhenge av investorens preferanser og hvilken risiko som ønskes. I tillegg vil også evalueringen av porteføljens resultatmål avhenge av hvordan porteføljen faktisk passer til investorens samlede investeringer (Bodie, et al., 2009, s. 832). Med det mener vi at investorer investerer gjerne i porteføljer med ulike risikoprofil og på den måten er det vanskeligere å vite preferansene for den enkelte portefølje sett alene.

#### **7.5 Mulige måter å forbedre resultatene i Kelly-porteføljene på**

Ettersom vår hensikt med oppgaven hovedsakelig er å illustrere bruken av Kelly-kriteriet, har vi som ovennevnt bygget våre analyser på opptil flere antakelser. Om det er antakelsene våre eller selve Kelly-kriteriet som er årsaken til at Markowitz-porteføljen presterer bedre enn Kelly-porteføljene er vanskelig å si. I avsnittene som følger ønsker vi likevel å diskutere mulige måter å forbedre resultatene i Kelly-porteføljene på.

Som tidligere nevnt er Kelly-kriteriet en optimal investeringsstrategi i fordelaktige situasjoner. I forbindelse med porteføljeoptimering betyr det at man skulle investert i aksjer med en "edge" for å kunne benytte seg av Kelly-kriteriet. Vår måte å plukke aksjer på har imidlertid neppe medført en slik "edge", da vi utelukkende har valgt å investere i aksjer etter størrelse på markedsverdi. Det at et selskap er stort på børs gir ikke nødvendigvis en større sannsynlighet for at selskapets aksjer vil stige i verdi enn at aksjekursen vil synke. Vi har heller ikke noe spesiell informasjon som har gjort det mulig å utnytte situasjonen til vår fordel. Som et resultat har vi anvendt Kelly-kriteriet på aksjer uten noen form for "edge", og følgelig på en situasjon som ikke er

fordelaktig. For å kunne forbedre Kelly-porteføljenes prestasjoner ville "edgen" trolig vært det viktigste momentet å endre på, slik at investeringssituasjonen faktisk kunne vært fordelaktig.

For å oppnå en fordelaktig investeringssituasjon burde vi nok utført grundigere verdivurderinger av selskapene på Oslo Børs. Videre burde vi muligens også inkludert aksjer fra flere indekser, som for eksempel The Dow Jones. På den måten kunne vi oppnådd et bedre beslutningsgrunnlag for valget av aksjer å investere i, enn utelukkende størrelse på markedsverdi på Oslo Børs og historisk avkastning.

Et annet aspekt i vår oppgave er at våre porteføljer har en tiårig tidshorisont. Ettersom Kelly-kriteriet teoretisk sett vil utkonkurrere andre strategier på sikt kan det imidlertid diskuteres om vår tidshorisont er lang nok til at nettopp det vil kunne skje. En måte å forbedre Kelly-porteføljenes resultater på kan derfor være å utvide tidshorisonten.

I denne oppgaven har vi også benyttet oss av Luenbergers (1998) modell for beregningen av andeler i Kelly-porteføljene. Ved å bruke det opprinnelige optimeringsproblemet til Kelly-kriteriet ville muligens resultatene vært annerledes, da det kunne medført andre investeringsandeler i aksjene. Om resultatet ville blitt betydelig forbedret er likevel vanskelig å si.

## 8. KONKLUSJON

Formålet med masterutredningen vår har vært å gi en realistisk illustrasjon av den evolusjonære strategien kalt Kelly-kriteriet, samt å se om denne strategien utkonkurrerer andre strategier på lang sikt. Med utgangspunkt i Oslo Børs og de ti største selskapene hvert år fra 2002-2011 har vi benyttet oss av historisk avkastning som et grunnlag for våre analyser. Vi har konstruert to ulike Kelly-porteføljer kalt Kelly 100 % og Kelly 175 %, med andeler på henholdsvis maksimalt 100 % av tilgjengelig egenkapital og maksimalt 175 %. Sistnevnte har da muligheten for lånefinansierte aksjekjøp. I analysene har vi også inkludert flere porteføljer basert på Fractional Kelly-strategier av både Kelly 100 % og 175 %. For å se om investering etter Kelly-kriteriet presterer bedre enn andre investeringsstrategier, har vi sammenlignet resultatene med både Markedsporteføljen og en portefølje basert på Markowitz-metoden.

Våre resultater er ikke i tråd med teorien om Evolusjonær Finans, da Markowitz-porteføljen ga best avkastning for investoren i tidsperioden vi studerte. Også i følge flere risiko- og prestasjonsmål presterte Markowitz-porteføljen bedre enn Kelly-porteføljene. Det var imidlertid ikke mye som skilte resultatene til Kelly 100 % fra Markowitz-porteføljen. Forskjellene var større for Kelly 175 %, som endte med en lavere årlig gjennomsnittsavkastning for perioden enn Markedsporteføljen. Ved å se på alle de aktive porteføljene ser vi altså at Markowitz-porteføljen har både høyest avkastning og lavest risiko. Alle de aktive, samt Markedsporteføljen, hadde positiv meravkastning utover risikofri rente. Dette er imidlertid før vi har tatt hensyn til ulike transaksjonskostnader knyttet til aktiv forvaltning.

Når vi videre sammenlignet Full Kelly med Fractional Kelly, så vi at ved å benytte Fractional Kelly-strategier på Kelly 100 %, oppnådde vi høyere avkastninger enn for Kelly 175 % for alle  $c$  utenom  $c = \frac{1}{8}$ .

På grunnlag av våre data og analyser er det vanskelig å gi et klart svar på vår problemstilling. Under våre forutsetninger gjeldende i perioden fra 2002 til 2011, slår Markowitz-metoden Kelly-kriteriet. Hvorvidt kriteriet vil overleve over en enda lengre tidsperiode og derfor regnes som en evolusjonær strategi er imidlertid vanskelig å svare på. Følgelig ville det vært svært interessant å gjøre ytterligere



analyser med et fokus på å forbedre forutsetningene vi har tatt. Vi tenker da særlig på å utvide tidshorizonten samt en forbedring av vår ”stock picking”, slik at aksjene kunne fått en bedre ”edge”. Dersom vi hadde foretatt de nevnte endringene ville det vært spennende å se hvordan en porteføljeinvestering etter Kelly-kriteriet da hadde prestert i forhold til andre investeringsstrategier.

## 9. LITTERATURLISTE

Alchian, A. A. (1950) Uncertainty, Evolution, and Economic Theory. *The Journal of Political Economy*, ss. 211-221.

Benninga, S. (2008 a) Chapter 8: Portfolios Models - Introduction. I: *Financial Modeling*. Third edition. Cambridge: The MIT Press, ss. 239-260.

Benninga, S. (2008 b) Chapter 9: Calculating Efficient Portfolios When There Are No Short-Sale Restrictions. I: *Financial Modeling*. Third Edition. Cambridge: The MIT Press, ss. 261-290.

Benninga, S. (2008 c) Chapter 10: Calculating the Variance-Covariance Matrix. I: *Financial Modeling*. Third Edition. Cambridge: The MIT Press, ss. 291 -316.

Benninga, S. (2008 d) Chapter 12: Efficient Portfolios without Short Sales. I: *Financial Modeling*. Third Edition. Cambridge : The MIT Press, ss. 317-348.

Benninga, S. (2008 e) Chapter 13: The Black-Litterman Approach to Portfolio Optimization. I: *Financial Modeling*. Third edition. Cambridge: The MIT Press, ss. 349-370.

Black, F. (1972) Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *The Journal of Business*. Vol. 45, No. 3, ss. 444-455.

Blume, L. & Easley, D. (2007) Market Competition and Selection. *The New Palgrave Dictionary of Economics*.

Bodie, Z., Kane, A. & Marcus, A. J. (2009) *Investments*. 8. red. New York: McGraw-Hill/Irwin.

Brøgger, A. (2007) *Store norske leksikon*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://snl.no/utviklingslaeren>

[Funnet 1. februar 2013].

Dang Le (2008) *Notes from Buffett Meeting 2/15/2008*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://undergroundvalue.blogspot.no/2008/02/notes-from-buffett->

---

[meeting-2152008\\_23.html](#)

[Funnet 23. februar 2008].

Dawkins, R. (2009) *Det egoistisk genet*. Oslo, Humanist Forlaget.

Finansdepartementet (2013) *Nasjonalbudsjettet 2002*. [Internett]

Tilgjengelig fra:

<http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/regpubl/stmeld/20012002/stmeld-nr-1-2001-2002-/9/3.html?id=477604>

[Funnet 4. mai 2013].

Friedman, M. (1970) Part I - The Methodology of Positive Economics. *Essays in Positive Economics*, ss. 3-43.

Gripsrud, G., Olsson, U. H. & Silkoset, R. (2010) *Metode og dataanalyse, Beslutningsstøtte for bedrifter ved bruk av JMP*. Kristiansand: Høyskoleforlaget AS.

Hens, T. ( 21.02.2013) *Personlig samtale*. NHH, 21.februar 2013.

Hens, T. & Bachmann, K. (2008) *Behavioural finance for private banking*.

Chichester: John Wiley and Sons, Ltd, Publications.

Hens, T. & Schenk-Hoppé, K. (2004) Survival of the Fittest on Wall Street. *Institute of Economics University of Copenhagen, Discussion Papers*.

Hens, T. & Schenk-Hoppé, K. (2005) Evolutionary finance: introduction to the special issue. *Journal of Mathematical Economics* 41, ss. 1-5.

Hung, J. (2010) *Betting with the Kelly Criterion*. [Internett]

Tilgjengelig fra: [http://www.math.washington.edu/~morrow/336\\_10/papers/jane.pdf](http://www.math.washington.edu/~morrow/336_10/papers/jane.pdf)

[Funnet 22. februar 2013].

Høegh-Krohn, N. E. J. (2004) Vitkige problemstillinger og utviklingstrekk i moderne kapitalforvaltning. *Praktisk økonomi & finans*, ss. 3-9.

Johannessen, A., Kristoffersen, L. & Tufte, P. A. (2004) *Forskningsmetode for økonomisk-administrative fag*. Oslo: Abstrakt forlag as.

Kelly, J. L. (1956) A New Interpretation of Information Rate. *The Bell System Technical Journal*, ss. 917-926.

Luenberger, D. (1998) Optimal Portfolio Growth. I: *Investment Science*. New York: Oxford University Press, Inc., ss. 417-443.

MacLean, L. C., Thorp, E. O., Zhao, Y. & Ziemba, W. T. (2010 a) Medium Term Simulations of The Full Kelly and Fractional Kelly Investment Strategies. I: *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, ss. 545-564.

MacLean, L. C., Thorp, E. O. & Ziemba, W. T. (2010 b) *Good and bad properties of the Kelly criterion*. [Internett]

Tilgjengelig fra:

[http://www.edwardthorp.com/sitebuildercontent/sitebuilderfiles/Good\\_Bad\\_Paper.pdf](http://www.edwardthorp.com/sitebuildercontent/sitebuilderfiles/Good_Bad_Paper.pdf)

[Funnet 22. januar 2013].

MacLean, L. C., Thorp, E. O. & Ziemba, W. T. (2012) Introduction to the Early Ideas and Contributions. I: *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, ss. 3-10.

Malkenes, R. (2013 a) *Finansdepartementet*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/nouer/2011/nou-2011-1/5.html?id=631173>

[Funnet 22. april 2013].

Malkenes, R. (2013 b) *St.meld. nr. 1 (2001-2002) Nasjonalbudsjettet 2002*. [Internett]

Tilgjengelig fra:

<http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/regpubl/stmeld/20012002/stmeld-nr-1-2001-2002-/9/4.html?id=477605>

[Funnet 6. mai 2013].

Norges Bank (2013) *Statsobligasjoner. Årsgjennomsnitt*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.norges-bank.no/no/prisstabilitet/rentestatistikk/statsobligasjoner-rente-arsgjennomsnitt-av->

---

daglige-noteringer/

[Funnet 19. april 2013].

Oslo Børs (2013) *Børsens historie*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Om-oss/Boersens-historie>

[Funnet 21. april 2013].

Oslo Finans AS (2013) *Aksjefond*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.oslofinans.no/aksjefond>

[Funnet 6. mai 2013].

Parker, S. (1994) *Charles Darwin og utviklingslæren*. [Internett]

Tilgjengelig fra:

<http://www.nb.no/nbsok/nb/01d3acaccec15cf2754acd84094a3603.nbdigital?lang=no#23>

[Funnet 15. februar 2013].

Rotando, L. M. & Thorp, E. (1992) The Kelly Criterion and the Stock Market. *The American Mathematical Monthly*. Vol.99, No.10, ss. 922-931.

Sinn, H.-W. (2002) Weber's Law and the Biological Evolution of Risk Preferences: The Selective Dominance of the Logarithmic Utility Function, 2002 Geneva Risk Lecture. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*. 28, ss. 87-100.

Statistisk sentralbyrå (2012) *Forskning*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.ssb.no/a/forskning/artikler/2009/3/1236011117.84.html>

[Funnet 22. april 2013].

Storebrand (2013) *Kvartalsrapport Storebrand Innskuddspensjon*. [Internett]

Tilgjengelig fra:

[https://www.storebrand.no/site/stb.nsf/Get/get2e22dc744698e8a220db99b8d215a135/\\$FILE/Innskuddspensjon\\_kvartalsrapport.pdf](https://www.storebrand.no/site/stb.nsf/Get/get2e22dc744698e8a220db99b8d215a135/$FILE/Innskuddspensjon_kvartalsrapport.pdf)

[Funnet 5. mai 2013].

The Nobel Foundation (1990) *The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1990: Harry M. Markowitz, Merton H. Miller, William F. Sharpe*. [Internett]

Tilgjengelig fra:

[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1990/markowitz.html#](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1990/markowitz.html#)

[Funnet 22. april 2013].

Thorp, E. O. (1969) Optimal Gambling Systems for Favorable Games, 37 (3). *Review of the International Statistical Institute*, ss. 273-293.

Thorp, E. O. (2006) The Kelly Criterion in Blackjack Sports Betting, and The Stock Market. I: *Handbook for Asset and Liability Management*. Elsevier B.V., Kap. 9.

Thorp, E. O. (2008) Understanding The Kelly Criterion. *A Mathematician on Wall Street, Wilmot Magazine* .

Thorp, E. O. (2013 a) *The Story*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.fortunesformula.com/index.html>

[Funnet 4. mai 2013].

Thorp, E. O. (2013 b) *Kelly Criterion*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.fortunesformula.com/KellyCriterion.html>

[Funnet 4. mai 2013].

Thorp, E. O. (2013 c) *Dr. Edward O. Thorp, PhD*. [Internett]

Tilgjengelig fra: <http://www.fortunesformula.com/Bio.html>

[Funnet 4. mai 2013].

Ubøe, J. & Jørgensen, K. (2004) *Statistikk for økonomifag*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

## 10. APPENDIKS

### 10.1 VBA

Under ser vi makroen som vi benyttet for å regne ut Markowitz-andeler i 2002.

```
Sub NSSMarkowitz()  
For counter = 1 To 40  
    SolverReset  
    Range("TargetERNSS2") = 0.005 + counter * 0.001  
    SolverAdd CellRef:="ERNSS2", Relation:=2,  
FormulaText:="TargetERNSS"  
    SolverAdd CellRef:="WeightsNSS2", Relation:=3,  
FormulaText:="0"  
    SolverAdd CellRef:="SumWeightsNSS2", Relation:=2,  
FormulaText:="1"  
    SolverOk SetCell:="VarNSS2", MaxMinVal:=2, ValueOf:="0",  
ByChange:="WeightsNSS"  
    SolverSolve (True)  
    SolverFinish  
    Range("Results2").Cells(counter, 1) = counter  
    Range("Results2").Cells(counter, 2) = Range("StDevNSS2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 3) = Range("ERNSS2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 5) =  
Range("WeightDNB2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 6) =  
Range("WeightNHY2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 7) =  
Range("WeightNSG2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 8) =  
Range("WeightORK2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 9) =  
Range("WeightRCL2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 10) =  
Range("WeightSTB2").Value  
    Range("Results2").Cells(counter, 11) =  
Range("WeightTAA2").Value  
    Next counter  
End Sub
```

Figur 10.1: VBA benyttet i 2002

## 10.2 Evalueringskriterier

### *ARITMETISK GJENNOMSNIITT*

Aritmetisk gjennomsnitt benytter historiske data og vektlegger alle observasjoner likt. Det betyr at for  $n$  observasjoner vil vi dele på  $\frac{1}{n}$  slik at sannsynligheten,  $p(s)$ , blir lik for hvert utfall (Bodie, et al., 2009, s. 127). Forventet avkastning blir da estimert slik:

$$E(r) = \sum_{s=1}^n p(s)r(s) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n r(s)$$

hvor

$E(r)$	Aritmetisk forventet gjennomsnitt
$p(s)$	Sannsynligheten for hver observasjon
$r(s)$	Historisk gjennomsnitt

### *LOGARITMISK AVKASTNING*

Logaritmisk avkastning, eller kontinuerlig forrentet avkastning som den også blir kalt, viser avkastningen når den tar hensyn til rentes renteffekt.

$$r_t^* = \ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right)$$

hvor

$r_t^*$	Logaritmisk avkastning
$V_t$	Verdi på aksjen i år $t$
$V_{t-1}$	Verdi på aksjen i år $t - 1$

Ettersom vi ønsker å anta at avkastningen for en eller flere perioder skal representere avkastningen i neste periode vil logaritmisk avkastning være en passende metode å benytte (Benninga, 2008 a, s. 258).

### *RISIKO – VOLATILITET: STANDARDAVVIK OG VARIANS*

Volatilitet er et begrep som brukes om risiko og svingninger i finansmarkedene. Videre sier volatilitet også noe om usikkerheten knyttet til avkastningen til en aksje eller en portefølje (Bodie, et al., 2009, s. G13). Som mål på volatiliteten benytter vi oss av varians og standardavvik.



## Varians

Variansen er et risikomål og måler variasjonen i avkastningen (Ubøe & Jørgensen, 2004, s. 24). Det forventede kvadratavviket fra forventningen er et annet navn på variansen og formuleres:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

hvor

$\sigma^2$	Variansen
$N$	Antall observasjoner
$x_i$	Observasjoner
$\bar{x}$	Porteføljens gjennomsnitt

## Standardavvik

Standardavviket er et spredningsmål som sier noe om hvor langt verdiene i gjennomsnitt varierer fra gjennomsnittsverdien eller gjennomsnittsavkastningen (Ubøe & Jørgensen, 2004, s. 25). Følgelig benyttes standardavvik ofte til å måle risikoen i en portefølje, der verdien viser hvor mye avkastningen forventes å svinge. Standardavviken regnes ut ved å ta kvadratroten av variansen og er formulert slik:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

hvor

$\sigma$	Standardavvik
$N$	Antall observasjoner
$x_i$	Observasjoner
$\bar{x}$	Porteføljens gjennomsnitt

## BETA

Beta måler i hvilken grad porteføljen beveger seg i samsvar med markedsporteføljen (Bodie, et al., 2009, s. 281). Formelen for beta blir gitt som følger;

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$

hvor

$\beta_i$	Betaverdien til en portefølje
$\sigma_M^2$	Variansen til markedet
$Cov(r_i, r_M)$	Kovariansen mellom porteføljen og markedet

### *SHARPE RATIO*

Sharpe ratio er et av de mest brukte resultatmålene innenfor finans som tar hensyn til risiko og avkastning. Mer nøyaktig måler Sharpe ratio hvilken gjennomsnittlig avkastning man kan oppnå, justert for totalrisiko og risikofri rente (Bodie, et al., 2009, s. 826). Totalrisikoen blir her gitt ved standardavviket til porteføljen.

$$S_p = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\sigma_p}$$

hvor

$S_p$	Sharpe ratio til porteføljen
$\bar{r}_p$	Gjennomsnittlig avkastning til porteføljen
$\bar{r}_f$	Gjennomsnittlig risikofri rente
$\sigma_p$	Standardavviket til porteføljen (total risiko)

Resultatmålet brukes ofte til å rangere ulike porteføljer. I tillegg til å ta hensyn til systematisk risiko, tar Sharpe indeksen også hensyn til risikoen i den aktuelle porteføljen.

### *TREYNORS INDEKS*

Treynors indeks ser, som Sharpe indeksen, på meravkastningen i forhold til risiko. Forskjellen er at Treynors indeksen benytter seg kun av systematisk risiko og tar dermed ikke hensyn til den usystematiske (Bodie, et al., 2009, s. 826). Som mål for den systematiske risikoen benyttes betaen for porteføljen.

$$T_p = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\beta_p}$$

hvor

$T_p$	Treynors indeks
$\bar{r}_p$	Gjennomsnittlig avkastning til porteføljen
$\bar{r}_f$	Gjennomsnittlig risikofri rente
$\beta_p$	Betaverdien til porteføljen (systematisk risiko)

Dersom en investor har en veldiversifisert totalportefølje kan Treynors indeksen være et egnet mål for de delporteføljene som er risikable.

### *JENSENS ALFA*

Dersom både betaverdien og gjennomsnittlig markedsavkastning er gitt vil Jensens alfa estimere avkastningen utover det som beregnes i referanseindeksen. (Bodie, et al., 2009, s. 826).

$$\alpha = J_p = \bar{r}_p - [\bar{r}_f + (\bar{r}_M - \bar{r}_f)\beta_p]$$

hvor

$\alpha = J_p$	Jensens alfa
$\bar{r}_p$	Gjennomsnittlig avkastning til porteføljen
$\bar{r}_f$	Gjennomsnittlig risikofri rente
$\bar{r}_M$	Gjennomsnittlig avkastning for markedet
$\beta_p$	Betaverdien til porteføljen (systematisk risiko)

Er alfa-verdien positiv hentyder at porteføljen vil ha en høyere avkastning enn markedsporteføljen, som er vår referanseindeks.

### *MODIGLIANI – MODIGLIANI ( $M^2$ )*

Som Sharpe ratio benytter  $M^2$  seg av den totale volatiliteten som et risikomål. Forskjellen er at den justerer for risiko ved hjelp av risikofritt aktivum. På den måten blir standardavviket det samme for porteføljen og markedsindeksen (Bodie, et al., 2009, s. 827). Ved å benytte samme standardavvik som markedet vil forventet avkastning til porteføljen tilsvare en optimalisert porteføljekombinasjon, og  $M^2$  viser forskjellen mellom den og markedet alene.

$$M^2 = (S_p - S_M)\sigma_M$$

hvor

$M^2$	Modigliani – Modigliani
$S_p$	Sharpe ratio til porteføljen
$S_M$	Sharpe ratio til markedet
$\sigma_M$	Standardavviket til markedet

### INFORMATION RATIO (IR)

Information ratio måler den unormale avkastningen per enhet usystematisk risiko (Bodie, et al., 2009, s. 826).

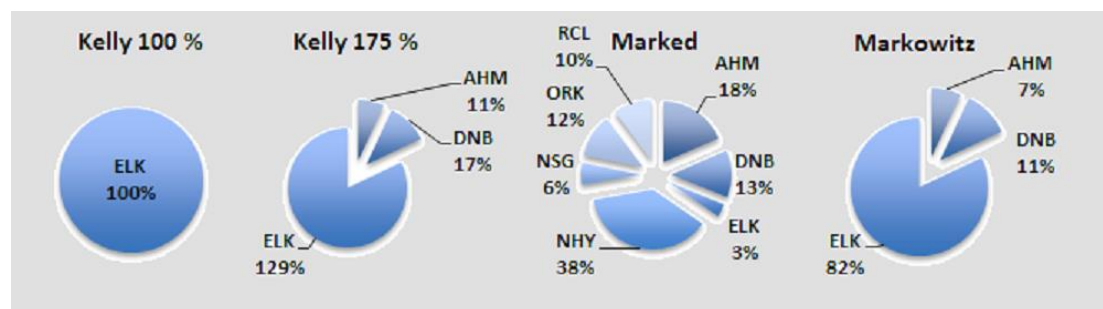
$$IR_p = \frac{\alpha_p}{\sigma_{\varepsilon p}}$$

hvor

$IR_p$	Information ratio til porteføljen
$\alpha_p$	Jensens alfa
$\sigma_{\varepsilon p}$	Usystematisk standardavvik til porteføljen (dermed usystematisk risiko til porteføljen)

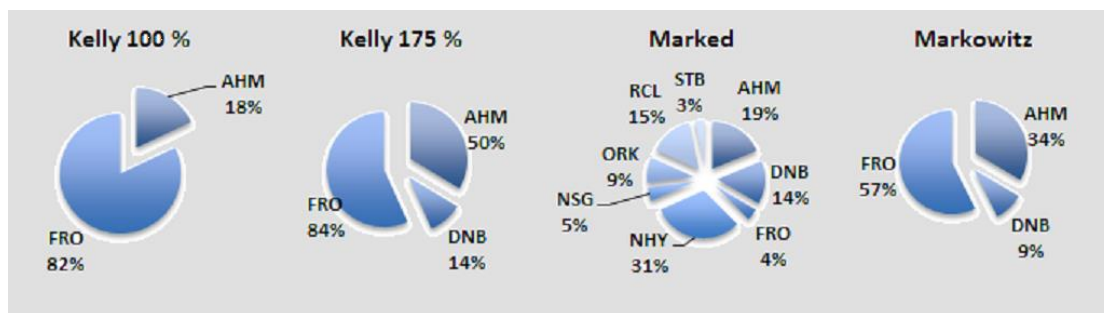
## 10.3 Analyse

2003



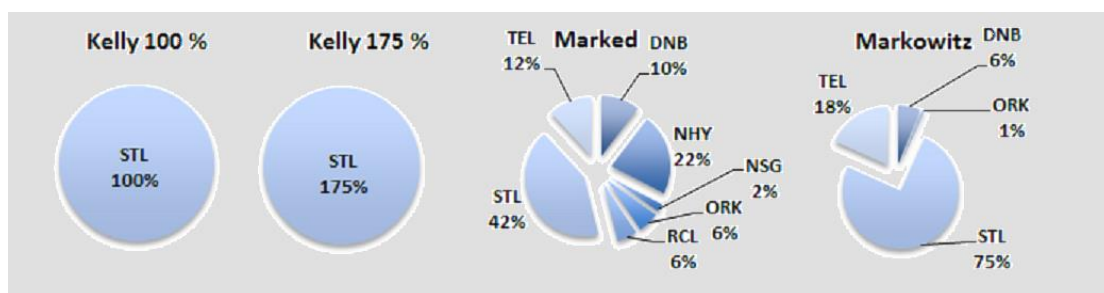
Figur 10.2: Andeler investert i 2003

2004



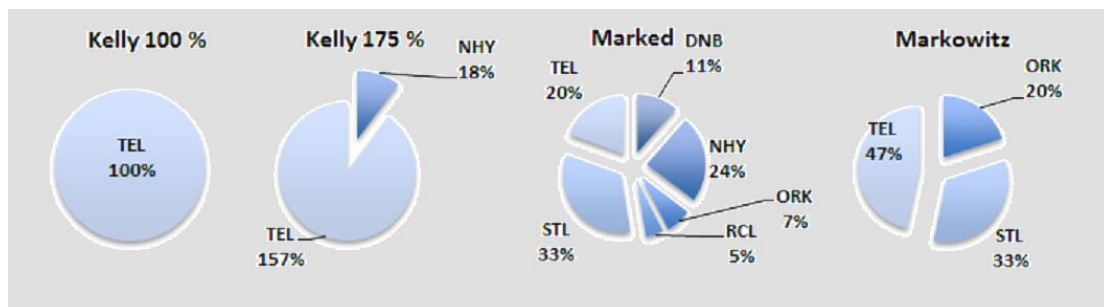
Figur 10.3: Andeler investert i 2004

2006



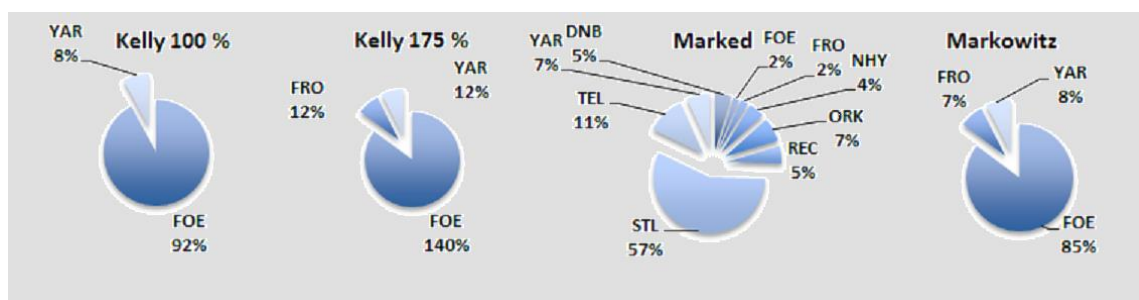
Figur 10.4: Andeler investert i 2006

2007



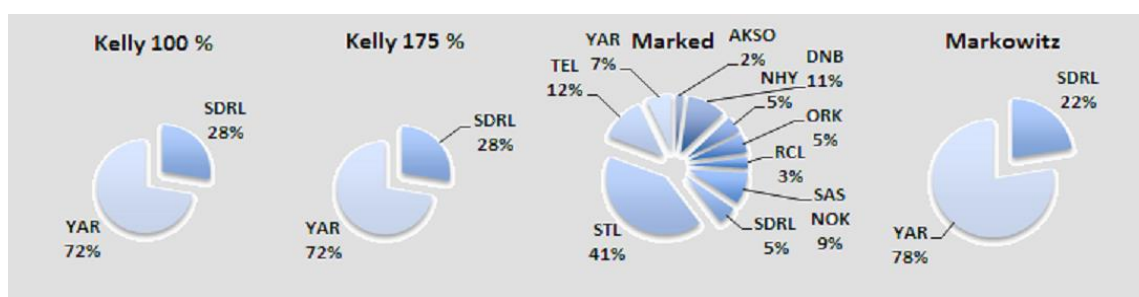
Figur 10.5: Andeler investert i 2007

2009



Figur 10.6: Andeler investert i 2009

2010



Figur 10.7: Andeler investert i 2010