NHH

INSTITUTT FOR FORETAKSØKONOMI

DEPARTMENT OF BUSINESS AND MANAGEMENT SCIENCE

FOR 8 2013

ISSN: 1500-4066

August 2013

Discussion paper

Preferansevalg: Opptellingsregler og velgeradferd

BY

Eivind Stensholt

Norges Handelshøyskole

NORWEGIAN SCHOOL OF ECONOMICS

Preferansevalg
Opptellingsregler og velgeradferd

Eivind Stensholt

Institutt for foretaksøkonomi
Norges Handelshøyskole

22. august 2013

Many forms of Government have been tried and will be tried in this world of sin and woe. No one pretends that democracy is perfect or all wise. Indeed, it has been said that democracy is the worst form of Government except all those other forms that have been tried from time to time. (Winston Churchill 1947)

… but I would argue that in the distant future, when people look back at what happened in this century, they will find it difficult not to accord primacy to the emergence of democracy as the preeminently acceptable form of governance. (Amarthya Sen 1997)

FORORD

Ved preferansevalg gir velgeren en mer eller mindre fullstendig rangering av alternativene eller kandidatene**.** Hovedtemaene på disse sidene presenteres i innledningskapitlet: tre store familier av preferansevalg, nemlig *poengvalg*, *Condorcet-valg* og *stemmeoverføringsvalg*, samt *modellering av velgernes tilpasning* til de ulike opptellingsregler.

Samspillet mellom opptellingsreglene og velgernes adferd avgjør et valg. Flere metoder i studiet av dette samspillet presenteres og anvendes på tilpassede og virkelige eksempler. Selv om man primært er motivert for å studere den ene faktoren, må man vurdere hva den andre faktoren betyr i samspillet. Jeg håper at lesere med ulike mål og innfallsvinkler kan finne metoder og modeller av interesse.

Viktige problemer melder seg allerede i valg med tre kandidater. *Sirkeldelingsmodellen* omfatter et *piktogram* som visualiserer preferansevalg med tre kandidater eller kandidattripler i valg med flere kandidater. Et program (i *Maple*) for beregning og utskrift av piktogrammet forklares og gjengis fullstendig i et appendiks.

Noe av dette stoffet var lenge et innslag i valgfagsundervisningen ved Norges Handelshøyskole, og diskusjoner med kollegaer har vært en kjærkommen stimulans: en spesiell takk til Leif Sandal og Per Manne. En takk også til NHH som gir gode arbeidsvilkår for sine seniorer.

NHH, 22. august 2013
Eivind Stensholt

PREFERANSEVALG

INNHOLDSFORTEGNELSE

1 Forord

2 Innholdsfortegnelse

4 **Kapittel 1 Preferansevalg, håp og muligheter**

4 1.1 Hva er preferansevalg?

5 1.2 Ufullstendige stemmesedler
SYMMETRISERING

5 1.3 Poengmetoder
AVSTANDSMODELLER FOR STEMMEFORDELING, PLURALIOTETSVALG, BORDAVALG, STRATEGISK STEMMEGIVNING, STRATEGISK NOMINERING, KUNSTLØPDØMMING, EUROVISJONSAVSTEMNINGEN

9 1.4 To andre typer av preferansevalg
CONDORCET-METODER, CONDORCET-VINNER, CONDORCET-SYKEL; STV-METODER

12 1.5 Lineære modeller for preferansefordelingen
TILPASNING AV AVSTANDSMODELL, BLACKS ENTOPPETHETSMODELL, MEDIANVELGERTEOREMET

16 1.6 Preferansefordeling og strategisk adferd
STRATEGI 1, 2 OG 3. EKSPRESSIV OG INSTRUMENTELL STEMMEGIVNING, RESPEKT FOR VELGERNES RANGERINGER.

19 **Kapittel 2 Preferanserelasjoner**

19 2.1 Konkret og abstrakt om relasjoner
TABELLEN (MATRISEN) FOR EN RELASJON, TURNERINGSRELASJONER

21 2.2 Hjelperelasjonene P og I
STRENG PREFERANSE, INDIFFERENS

22 2.3 Noen typer av relasjoner
REFLEKSIVI`TET, ANTIREFLEKSIVITET, SYMMETRI, ANTISYMMETRI, KOMPLETTHET, TRANSITIVITET; NÅR MÅ EN RASJONELL VELGER HA EN TRANSITIV PREFERANSE? EKVIVALENSRELASJONER

25 2.4 Fellesskapets preferanserelasjon
EN VALGMETODE ER EN FUNKSJON AV RELASJONER; TO HOVEDKRAV: KOMPLETT ORDNING SOM RESULTAT OG IIA; ANONYMITET OG NØYTRALITET

29 **Kapittel 3 Matrisesumsmetoder**
STEMMESEDLER PÅ MATRISEFORM; BORDA- ELLER CONDORCET-OPPTELLING; ROTERENDE FLERTALL

30 3.1 Condorcet og Borda
CONDORCET-VINNERENS BORDASUM; BALDWINS OG NANSONS METODER, STRATEGI 2

32 3.2 Godtakelsesvalg (Approval Voting)
GODTAKELSESVALG MED BORDAOPPTELLING

35 3.3 Andre poengmetoder
NAURU-METODEN; RANGE VOTING

37 **Kapittel 4 Sirkeldelingsmodeller**
KANDIDATTRIANGEL, PIKTOGRAM, AVSTAND TIL PERFEKT SIRKELDELING

40 4.1 Beregning av et piktogram
DEN GEOMETRISKE IDÉ BAK REGNEPROGRAMMET, FALSKE PIKTOGRAM

42 4.2 T og Condorcets paradoks
PIKTOGRAMMETS UNNTAKSTREKANT T; BEGRENSET RISIKO FOR EN CONDORCET-SYKEL

44 4.3 Piktogrammer og Blacks entoppethet
ENTOPPETHET HOS EN LITEN VELGERGRUPPE; HVORFOR CONDORCETSYKLER ER SJELDNE
47 **Kapittel 5 Condorcets paradoks**
MULIGHETEN FOR STRATEGI 2 KAN IKKE FJERNES HELT; ET NO-SHOW PARADOKS
50 5.1 Condorcetmetoder og Strategi 2
BPW OG SV: MINIMERING AV MULIGHETENE FOR STRATEGI 2
53 5.2 Konstruksjon av en Condorcetrelasjon
EN GITT TURNERINGSRELASJON SOM CONDORCETRELASJON, MCGARVEYS KONSTRUKSJON
57 5.3 Moulins teorem
NO-SHOW SITUASJONER KAN OPPSTÅ FOR ENHVER CONDORCETMETODE
59 5.4 Voteringsløp og Condorcet-sykler
AVSTEMNING I NASJONALFORSAMLINGER, STORTINGETS FLYPLASSAVSTEMNING 1992
63 **Kapittel 6 Stemmeoverføringsmetoder**
REGLENE FOR STV, NÅR KAN STV PASSE? IRV OG MULIGE KONSTELLASJONER, STRATEGI 3 OG FELLER
67 6.1 To valgdager: primærvalg og finale
VANLIG «RUNOFF», «INSTANT RUNOFF» OG PREFERANSEINFORMASJON; MONOTONISITET; DET FRANSKE PRESIDENTVALG 2002
69 6.2 IRV-valget i Burlington 2009
PREFERANSEFORDELINGEN: CONDORCETVINNER MED FOR LITEN PRIMÆROPPSLUTNING, PLURALITETSVINNER MED FOR LITEN SEKUNDÆROPPSLUTNING
71 6.3 Striden om IRV
IKKE-MONOTONISITET OG MULIGE MOTTILTAK; FORTSATT STRID I BURLINGTON; RETTSLIG TVIST I MINNESOTA: ER IKKE-MONOTONISITET «UNCONSTITUTIONAL»? ELDRE DOM OM BUCKLINS METODE SOM ANFØRT PREJUDIKAT
77 6.4 STV for $s \geqslant 2$
VALGKRITERIENE TIL HARE OG DROOP, SAMMENLIGNING MED MODIFISERT SAINTE-LAGUË; EN FORM FOR «FREE RIDING», MEEKS OPPTELLINGSREGEL
81 **Kapittel 7 Arrows umulighetsteorem**
PARETOBETINGELSER, ARROWS TEOREM OG DEN AKSIOMATISKE METODE
82 7.1 Et bevis for Arrows teorem
BEVISET BYGGER PÅ EN RELATIVT SVAK PARETOBETINGELSE
87 7.2 Gibbards og Satterthwaites umulighetsteorem
RESULTATET VISES SOM EN FØLGE AV ARROWS TEOREM
91 **Appendiks. Et program for beregning og utskrift av piktogrammer**
EKTE OG FALSKT PIKTOGRAM, PARAMETRE OG AREALFORMLER, PROGRAMMETS STRUKTUR, UTSKRIFT AV MAPLE-PROGRAM
98 **Referanser**

1 Preferansevalg, håp og muligheter

Ved valg av én representant til politiske organer eller til styreverv og tillitsverv i aksjeselskap, miljøutvalg, fagforeninger, boligsameier eller private foreninger, kan en velger som oftest bare støtte ett av de foreliggende alternativ (én partiliste eller én kandidat). Men en velgergruppe kan være splittet mellom flere alternativ som står hverandre nær. En slik valgordning vil da kunne favorisere en mindre velgergruppe som er samlet om ett alternativ.

Kan valgordninger, som lar den enkelte velger rangere alternativene i *preferanseorden*, gjennom opptellingen finne en vinner som en slik splittet velgergruppe, og kanskje velgere flest, aksepterer som et kompromiss? Interessen for slike opptellingsregler er knyttet til et håp om at valgresultatet vil fremstå som akseptabelt og rettferdig for velgere flest, enten de regner seg som vinnere eller tapere.

Man kan også håpe at en valgordning som tar hensyn til velgernes rangering kan bidra til en saklig diskusjon i forkant av valget. I stedet for å beskylde andre for å svekke en felles sak ved å stemme på sjanseløse kandidater, kan det være mer å vinne ved å fremstille sitt eget alternativ som samlende og verdig til subsidiær støtte. Velgernes rangeringer og et egnet opptellings-reglement kan forhåpentlig bidra til å skape et godt debattklima.

Det er langt fra enkelt å utforme slike opptellingsregler. Regler som synes lovende viser seg å ha mer eller mindre problematiske bivirkninger. Det finnes generelle resultater som viser at det alltid vil være noen ufullkommenheter. I diskusjonen av hva slags preferansevalg som bør brukes sammenligner man ufullkommenheter; hvor hyppig gjør de seg gjeldende, og hvor alvorlige er de?

1.1 Hva er preferansevalg?

Med preferansevalg menes gjerne valgmetoder der hver enkelt velger på stemmeseddelen gir en fullstendig rangering av kandidatene. Med tre kandidater, a, b, og c, er det da seks måter å stemme på:

	1.plass	2.plass	3.plass
(1)	a	b	c
(2)	a	c	b
(3)	c	a	b
(4)	c	b	a
(5)	b	c	a
(6)	b	a	c

I kortnotasjon blir disse preferansene ofte skrevet

abc, acb, cab, cba, bca, bac.

Med n kandidater, blir det i alt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ måter, altså 24 måter med 4 kandidater, 120 måter med 5 kandidater osv. Med en slik stemmeseddel uttrykkes et klart standpunkt om ethvert par {x, y} av kandidater. Men det avholdes også valg hvor man tillates å erklære x og y som like gode eller å ikke sammenligne x og y, dvs. erklære «vet ikke».

1.2 Ufullstendige stemmesedler

Man behøver altså ikke å kreve at alle velgere leverer en stemmeseddel med en av de n! fullstendige rangeringene. Det kan være praktisk nødvendig å tillate en velger å sette noen kandidater på delt plass eller å utelate noen kandidater, f.eks. fordi velgeren ikke har kjennskap til dem. (Ved et guvernørvalg i California i 2003, som ble vunnet av skuespilleren Schwarzenegger, var det 135 kandidater.)

I tilknytning til de enkelte valgmetoder diskuteres det hvordan ufullstendige stemmesedler bør behandles. For de valgmetoder som blir omtalt her, kan en ufullstendig stemmeseddel behandles med *symmetrisering*. Det forklares ved følgende eksempel:

1.2.1 Eksempel

I et valg med 7 kandidater, a, b, c, d, e, f og g, ønsker en velger å sette a og b likt foran de andre, fulgt av c og d, mens e, f og g utelates. Ved *symmetrisering* regnes først utelatte kandidater som om de kom på delt sisteplass. I en kort notasjonsform kan dette skrives

(ab)cd(efg)

Parentesene viser delt 1. og 2. plass for a og b samt delt 5., 6. og 7. plass for e, f og g, mens c har udelt 3.plass og d har udelt 4.plass. Ved symmetrisering regnes så som om stemmeseddelen var erstattet med 12 stemmesedler med fullstendig rangering, hver med vekt 1/12; disse 12 «ministemmesedlene» er:

abcdefg, abcdegf, abcdgef, abcdgfe, abcdfge, abcdfeg,
bacdefg, bacdegf, bacdgef, bacdgfe, bacdfge, bacdfeg.

1.2.2 Symmetrisering i praksis og teori

Symmetrisering er en generell fremgangsmåte, men når man bruker en av de vanlige metoder for preferansevalg, trenger man ikke reelt å erstatte en ufullstendig stemmeseddel med ministemmesedler. Det finnes gjerne et enklere alternativ som gir samme resultat.

Hvis ufullstendige stemmesedler tenkes behandlet med symmetrisering, som i eksempel 1.2.1, kan man konsentrere teorien om valgmetoder som bygger på fullstendige rangeringer. For teoriens del er det vanlig å legge til grunn at den enkelte velgers stemmeseddel inneholder en fritt valgt rangering blant de n! fullstendige rangeringer.

1.3 Poengmetoder

En poengmetode for preferansevalg med n kandidater kan beskrives ved en sekvens av tall

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_n$$

En velger gir p_k poeng til kandidaten rangert som nummer k, og ved opptellingen blir kandidatene rangert etter samlet poengsum. Poengmetoder brukes ved noen valg der det skal kåres en enkelt vinner. *Pluralitetsvalg* og *Bordavalg* (Jean-Charles, chevalier de Borda, 1733 – 1799) er to poengmetoder, gitt ved de to følgende spesielle sekvenser:

	p_1	p_2	p_3	⋯	p_{n-1}	p_n
Pluralitetsvalg	1	0	0	⋯	0	0
Bordavalg	n-1	n-2	n-3	⋯	1	0

I politiske valg har ofte velgerne, stort sett, en oppfatning av at kandidatene, stort sett, befinner seg på en skala fra ytre venstre (0) til ytre høyre (1). I et tankeeksperiment kan vi rendyrke en slik oppfatning. Vi starter med to kandidater og plasserer kandidat a på 0.4 og kandidat b på 0.7. Med en enkel *«avstandsmodell»* tenker vi at velgerne er jevnt fordelt mellom 0 og 1, og at den enkelte velger rangerer kandidatene etter avstand til velgerens ståsted. Figurene 1.3.1 og 1.3.2 viser begge at 55% av velgerne ser på a som den nærmeste av de to: a slår b med 55% mot 45% av stemmene. Med bare to kandidater er det ingen forskjell på pluralitetsvalg og Bordavalg.

Men hva skjer hvis en tredjekandidat c dukker opp i posisjon 0.2 ? For å studere virkningen av en tredjekandidat er det nyttig å tenke på de fullstendige rangeringene, selv om velgerne i et pluralitetsvalg naturlig nok ikke leverer noen fullstendig rangering på valgdagen.

c a b

0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0

cab | acb |abc| bac

1.3.1 Figur En ny kandidat c utflankerer opprinnelig vinner a; b blir pluralitetsvinner men a forblir Bordavinner. Preferansene cba og bca forekommer ikke, for ingen setter mellomkandidat a sist.

Overgangene mellom ulike rangeringer går ved skillestrekene i 0.3, 0.45 og 0.55, og stemmene fordeles på fire slag av stemmesedler:

cab 30%; acb 15%; abc 10%; bac 45%

I et pluralitetsvalg splittes venstresiden, og b vinner med 45% mot c 30% og a 25%.

Pluralitetsvalg gir både venstresiden og høyresiden et sterkt incentiv til å samle seg om én kandidat; velgere som tenker seg å støtte en kandidat uten realistisk vinnersjanse kritiseres for å «kaste bort stemmen sin». Det er bare a som kan slå b i et parvis oppgjør. Pluralitetsvalg oppfordrer til en form for *«strategisk stemmegivning»*, der mange med cab som «personlig ønskeliste», likevel stemmer a for reelt å påvirke utfallet, som om de mente acb. Velgerne har en sterk oppfordring til å samle seg om to hovedkandidater. Pluralitetsvalg er vanlige i USA, Canada og Storbritannia, og anses som en viktig grunn til at politikken domineres av to store partier. Denne virkningen av pluralitetsvalg kalles ofte Duvergers lov.

I et Bordavalg med fordelingen fra Figur 1.3.1 og 100 velgere, kan regnskapet føres slik:

	2 poeng	1 poeng	0 poeng	Bordasum
a	15+10	30+45	0	125
b	45	10	30+15	100
c	30	15	10+55	75

Ved Bordaopptelling av valget i Figur 1.3.1 vinner venstresidens a, selv om c er blitt kandidat. Men hva skjer hvis en tredjekandidat e nomineres på ytre høyre fløy, i posisjon 0.9?

a b e

0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0

abe |bae| bea | eba

1.3.2 Figur En ny kandidat e utflankerer opprinnelig taper b; b blir Bordavinner og a forblir pluralitetsvinner. Preferansene aeb og eab forekommer ikke; ingen setter mellomkandidaten b sist.

Overgangene mellom ulike rangeringer går ved skillestrekene i 0.55, 0.65 og 0.8, og stemmene fordeles på fire slag av stemmesedler:

abe 55%; bae 10%; bea 15%; eba 20%

I et pluralitetsvalg vinner a enda klarere enn før siden e kaprer noen topprangeringer fra b. Men i et Bordavalg går det annerledes. Borda-regnskapet kan føres slik:

	2 poeng	1 poeng	0 poeng	Bordasum
a	55	10	15+20	120
b	10+15	55+20	0	125
e	20	15	55+10	55

Ved Bordaopptelling av valget i Figur 1.3.2 vinner altså høyresidens b, fordi e er blitt kandidat; man ser at 15% av velgerne befinner seg nær midten av høyresiden og får reelt en dobbeltstemme til fordel for b i kampen mot venstresidens a i og med at det nomineres en sjanseløs kandidat e på ytre høyre.

Men venstresidens velgere kan også skaffe seg en dobbeltstemme i kampen mot b ved å stemme aeb (for så vidt i strid med modellen, som ikke kan «forklare» en slik preferanse). Anta at x av abe-velgerne i stedet stemmer aeb ($0 \leqslant x \leqslant 55$). Med $x > 5$ vil a vinne gjennom en annen form for *«strategisk stemmegivning».* Men som et mottiltak kan så y av bae-velgerne stemme bea ($0 \leqslant y \leqslant 10$). De nye Bordasummene blir

$$120 - y,\ 125 - x,\ 55 + x + y$$

Bordavalg gir altså et helt annet incentiv til strategisk stemmegivning enn pluralitetsvalg. En duell mellom a's og b's tilhengere kan utvikle seg som en variant av «russisk rulett», med fatalt utfall for begge duellantene hvis strategien overdrives: Dersom $x+2y > 65$, blir resultatet nemlig at e vinner, altså det verst mulige resultat for 65% av velgerne!

– – – – – – – –

Ved et vanlig valg, med Bordaopptelling etter at alle stemmer er avgitt, kan nominasjonen av en sjanseløs kandidat ha fått avgjørende virkning, selv om ingen har stemt strategisk – og virkningen ville neppe noensinne bli oppdaget.

Men hvis ny opptelling av et preferansevalg bekjentgjøres etter hvert som nye kandidater kommer til og innpasses i velgernes rangeringer, kan virkningen bli svært synlig. Nettopp slik ble det i mange år gjort ved dømming av kunstløp på skøyter.

1.3.3 Eksempel

Bordametoden ble lenge brukt i kunstløpskonkurranser. Selv om det var dommernes bedømmelse i form av karakterer som fikk mest oppmerksomhet hos publikum, så var det den enkelte dommers rangering av kunstløperne som lå til grunn for resultatet.

Når en løper var ferdig, ble resultatlisten oppdatert ved ny Bordaopptelling. Og da hendte det at publikum fikk seg en overraskelse. I et enkelt tilfelle med n=3 løpere, a, b og e, samt v=5 dommere, er a og b ferdige og dommerne har rangert slik:

	I	II	III	IV	V
1.plass	a	a	a	b	b
2.plass	b	b	b	a	a

Altså er det 3 Bordapoeng til a og 2 Bordapoeng til b. Publikum får vite at dommerne har dømt a foran b. Men etter at e har gått, blir det slik:

	I	II	III	IV	V
1.plass	a	a	e	b	b
2.plass	b	b	a	e	e
3.plass	e	e	b	a	a

Nå får a 2+2+1+0+0 = 5 Bordapoeng, b får 1+1+0+2+2 = 6 og e får 0+0+2+1+1 = 4. [Med samme virkning brukte man *plassiffer*, a: 1+1+2+3+3=10; b: 2+2+3+1+1=9; e: 3+3+1+2+2=11.] Selv om e havner etter både a og b, er det en konsekvens av e's løp at a og b bytter plass innbyrdes.

Under verdensmesterskapet 1995 hendte noe lignende. Der var stillingen

1. Chen Lu, 2. Nicole Bobek, 3. Surya Bonaly.

Disse tre var ferdige med konkurransen. Så kom unge Michelle Kwan, i starten av en imponerende karrière, gikk sitt løp og tok en uventet fjerdeplass. Kwan skaffet seg også en plass i valgordnings-litteraturen, fordi en konsekvens av hennes løp var at rekkefølgen i toppen ble endret til:

1. Chen Lu, 2. Surya Bonaly, 3. Nicole Bobek.

Man foretok den gang først en "medianrangering"; hvis f.eks. en kunstløper av 9 dommere fikk rangeringene 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, så ble medianen = 3 = rangeringen fra dommeren i midten når de stilles opp etter sine rangeringer av løperen. Løpere som da fikk samme median, ble deretter skilt med Bordaopptelling som «tie-break». Hensikten var klart nok å redusere Bordametodens incentiv til «dommerkrig» med strategisk stemmegivning som våpen. Det er rimelig å tro at den hensikten ble oppnådd. Men likevel kunne man få en lignende virkning som ved utflankeringen i Figur 1.3.2.

En valgopptelling som følges av rundt 125 millioner TV-seere avgjør rekkefølgen i Eurovisjonens sangkonkurranse «Melodi Grand Prix», men man ser bare siste del av opptellingen. Der gis det poeng, og det er en utbredt misforståelse at da dreier det seg om en poeng-metode!

1.3.4 Eksempel

I den årlige *Eurovision Song Contest* rangerer hvert land sangene (unntatt landets eget bidrag), og seerne får deretter følge siste fase i opptellingen. Da gir hvert land poeng etter følgende tabell:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_n n>10
Eurovision	12	10	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Det skrives ofte at man følger Bordas metode, men det er svært misvisende, selv om Bordas poengtabell nok ville gi en endelig rangering nær den som følger av tabellen Eurovisjonen bruker. En grunnleggende forskjell er nemlig at med Bordas metode, som med andre preferansevalg,

har den enkelte velger et fritt valg av rangering, og kan bruke sin frihet til å stemme strategisk.

Derimot er rangeringen fra det enkelte land slett ikke noen stemmeseddel, men er selv et valgresultat, og kan f.eks. bygge på at hver velger i landet har stemt for en enkelt sang, som om det var pluralitetsvalg. Uansett hvordan reglene er i det enkelte land, er mulighetene for strategisk stemmegivning helt annerledes enn i et valg med Bordas metode.

– – – – – – – –

Ved pluralitetsvalg i Figur 1.3.1 kan en overgang av tilstrekkelig mange velgere fra cab til acb overføre seieren fra b til a. Ved å støtte a som en kompromisskandidat oppnår de venstresidevelgere som deltar i strategien et resultat de ser på som en *forbedring*.

En overgang tilbake igjen fra acb til cab vil resultere i en *forverring*, idet seieren overføres fra a til b. Men begge endringene illustrerer den samme egenskap ved valgmetoden; den ene er gunstig for deltagerne i overgangen, den andre ugunstig. Ved alle metoder for preferansevalg brukes uttrykket *«strategisk»* (eller *«taktisk»*) stemmegivning når endringen er gunstig for deltagerne, men det eksisterer en tilsvarende mulighet for ugunstig endring i motsatt retning, og som det kan være vel så god grunn til å interessere seg for.

Ved Bordavalg i Figur 1.3.2 kan en overgang av tilstrekkelig mange velgere fra abe til aeb overføre seieren fra b til a. Ved et Bordavalg kan de velgere som setter a først, frykte at om de setter en sterk kandidat b på annenplass, så kan de komme i skade for å la b snappe seieren fra a. En strategisk overgang fra abe til aeb kan være begrunnet i slik frykt.

Med økende antall kandidater, øker incentivene til strategisk stemmegivning i Bordavalg: Hvis a og b er de to klart sterkeste blant n kandidater, kan velgere som primært støtter a og foretrekker b fremfor de øvrige kandidater, likevel flytte b til sisteplass og gi a en fordel på n-1 Bordapoeng. Med en tilsvarende reaksjon fra dem som primært støtter b, kan altså seieren da gå til en tredjekandidat som ville ha blitt klart slått av a hvis b ikke var kandidat og av b hvis a ikke var kandidat.

Det finnes valgmetoder hvor de velgere som primært støtter en av to hovedkandidater, a og b, ikke kan hjelpe sin favoritt ved å sette hovedmotstanderen lenger ned enn på annenplass; slik er de vanligste STV-metodene omtalt i avsnitt 1.4.4.

Ulike valgmetoder gir ulike muligheter for strategisk stemmegivning, og for utspekulert nominasjon av en sjanseløs ekstrakandidat. Mange spørsmål melder seg: Hvilke muligheter er det i praksis tale om for den enkelte valgmetode? I hvilken grad forekommer de ved normale fordelinger av velgernes preferanser? Og, med tanke på Duvergers lov, hvordan vil andre valgmetoder enn pluralitetsmetoden i det lange løp bidra til å forme det politiske landskap? Pluralitetsmetoden er omstridt fordi et topartisystem har sine tilhengere og sine motstandere. Hvordan kan og bør mulighetene for strategisk stemmegivning og utspekulert nominasjon påvirke et samfunns valg av valgmetoder?

1.4 To andre typer av preferansevalg

Metoder som brukes i virkelige preferansevalg for n kandidater og som ikke er en poeng-metode, tilhører som oftest én av to store familier, *Condorcetmetodene* og *stemmeoverførings-metodene (STV).*

1.4.1 Condorcet-familien

Grunntanken bak Condorcetmetodene er *parvise sammenligninger*; man teller opp et valg med n kandidater som om det var et valg for hvert par av kandidater. En kandidat som slår alle andre kandidater i slike parvise sammenligninger, kalles en Condorcetvinner (Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, 1743–1794). En kandidat som ikke er Condorcet-vinner, men heller ikke taper i noen parvis sammenligning kalles en *svak Condorcetvinner*; i parvis sammenligning må to svake Condorcetvinnere begge ha nøyaktig 50% av stemmene. Med økende antall velgere blir både stemmelikhet og svake Condorcetvinnere sjeldnere. Noen teoretiske arbeider holder seg til et odde antall velgere, for helt å unngå tekniske komplikasjoner med stemmelikhet; for anvendelser på et stort velgertall v har det neppe stor praktisk betydning.

1.4.2 Eksempel

Med stemmefordelingen som vises i Figur 1.3.1 ser vi at i paret {a,b} vinner a med 55% mot 45%, og i paret {a,c} vinner a med 70% mot 30%. Condorcetvinneren a er nærmest det politiske sentrum og slår høyresidens b med støtte fra venstre fløy og slår dessuten kandidaten c på ytre venstre meget klart med hele høyresidens støtte. I valget som vises i Figur 1.3.2 er a også nærmest det politiske sentrum, og vinner i parvis sammenligning mot hver av de to motstanderne.

Valgene i Figur 1.3.1 og Figur 1.3.2 illustrerer et trekk ved Condorcetmetodene: Resultatet er lite påvirkelig av nominasjon av sjanseløse kandidater: Når c nomineres i det første valget (Figur 1.3.1) vil ikke oppsplittingen av venstresiden hjelpe høyresidens b til seier som i et pluralitetvalg. Når e nomineres i det andre valget (Figur 1.3.2), vil ikke nominasjonen av e hjelpe høyresidens b til seier som i et Bordavalg.

Men det eksisterer ikke alltid en Condorcetvinner eller svak Condorcetvinner. Det enkleste tilfelle har tre kandidater og tre velgere:

1.4.3 Eksempel

Velgerne I, II, III rangerer kandidatene f, g, h slik:

I: fgh; II: ghf; III: hfg

I paret {f,g} vinner f med 2 – 1; i paret {g,h} vinner g med 2 – 1; i paret {h,f} vinner h med 2 – 1.

Kandidatene slår hverandre i ring, og danner en *Condorcetsykel* der «f slår g slår h slår f… ». Det eksisterer ingen Condorcetvinner.

Lengre Condorcetsykler med større marginer kan også tenkes: La fem velgere rangere fem kandidater slik:

I: fghij; II: ghijf; III: hijfg; IV: ijfgh; V: jfghi

Her blir det en Condorcetsykel av lengde fem,

f slår g (4 – 1); g slår h (4 – 1); h slår i (4 – 1); i slår j (4 – 1); j slår f (4 – 1),

Syklene kan gjøres så lange man vil, med så store *relative* forskjeller man vil: (0.7– 0.3), (0.8 – 0.2) … .

Ingen metode for preferansevalg for vilkårlige velgertall v og kandidattall n kan med sikkerhet unngå å kåre en vinner som taper en parvis sammenligning med vilkårlig stor relativ margin.

Den konstruerte kunstløpsdømmingen i eksempel 1.3.3 gir også en Condorcetsykel:

a slår b (3 – 2); b slår c (4 – 1); c slår a (3 – 2).

Med en *Condorcet-metode* menes en metode for preferansevalg som gir seieren til Condorcet-vinneren, hvis det eksisterer en Condorcet-vinner. Ulike Condorcet-metoder har ulike regler for å finne en vinner dersom det ikke eksisterer noen Condorcet-vinner.

Man kan f.eks. gå over til Bordapoeng hvis det ikke er noen Condorcet-vinner; i så fall vinner b kunstløpskonkurransen i Eksempel 1.3.3. En annen Condorcet-metode (Baldwins) består i å eliminere kandidaten med lavest Bordascore; når e da fjernes, blir a vinner.

I de to første valgene i eksempel 1.4.3, vil ikke Bordapoengene skille mellom kandidatene. Av symmetrigrunner kan man, for å få et entydig valgresultat, være nødt til
enten å bryte et prinsipp om at alle kandidater behandles likt (f.eks. yngste kandidat vinner),
eller å bryte et prinsipp om at alle velgere behandles likt (f.eks. eldste velger avgjør).

Mangel på Condorcetvinner og svak Condorcetvinner er et trekk ved selve preferanse-fordelingen. Uansett hvilken valgmetode som brukes, vil det da bli kåret en vinner som ville tape i en parvis sammenligning med en eller flere andre kandidater, og muligens med stor margin (Eksempel 1.4.3). Muligheten av sykler er da ikke et gyldig argument mot å bruke Condorcet-metoder. I diskusjonen om hvordan sykler bør behandles har man trukket inn mange hensyn som synes rimelige, og mange Condorcetmetoder er blitt foreslått. Som bakgrunn for denne diskusjonen er det greit å kjenne til et empirisk faktum: I preferansevalg med et rimelig stort antall uavhengige velgere er det en sjeldenhet at det ikke eksisterer noen Condorcetvinner.

Med et stort antall kandidater er det riktig nok mange tripler av kandidater. Med f.eks. 20 kandidater, a, b, c, … , r, s, t er det i alt

$$20 \cdot 19 \cdot 18/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 1140 \text{ kandidattripler } \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \dots, \{r,s,t\}.$$

Da er det tross alt normalt om noen av dem er sykliske. Men i alminnelighet vil det da likevel være en Condorcetvinner som slår alle tre**!**

1.4.4 Stemmeoverføringsfamilien (STV – Single Transferable Vote)

Grunntanken bak stemmeoverføringsmetodene er at opptellingen skjer i flere runder der bare antall topprangeringer for hver kandidat telles. En runde avsluttes på en av to måter:

enten: *en eller flere kandidater har oppnådd et fastsatt antall førsteplasser og blir valgt,*
eller*: ingen har nok førsteplasser til å bli valgt, en eller flere av de svakeste kandidater elimineres så fra alle stemmesedler, hvor de etterfølgende rykker frem til ledige plasser.*

En velger som får sin topprangerte kandidat eliminert, overfører sin stemme til den som overtar topprangeringen, og neste opptellingsrunde starter. Slike metoder er i bruk både ved valg av en enkelt representant, f.eks. en president, og ved valg av flere representanter fra samme valgforsamling.

Normalt skjer også eliminasjonene på grunnlag av førsteplassene. Valgmetoden får dermed en svært viktig egenskap:

En velger kan ikke påvirke resultatet for en kandidat k ved å endre rekkefølgen av de kandidater velgeren rangerer etter k.

Grunnen er rett og slett at informasjon om rangeringene etter kandidat k på en stemmeseddel ikke registreres i en opptellingsrunde der k fremdeles er med og konkurrerer.

Når det skal velges en enkelt representant er det vanlig å fastsette valgkriteriet, dvs. antall førsteplasser på stemmesedlene som kreves for å bli valgt, til litt over halvparten av antall stemmer.

1.4.5 Eksempel

Når stemmene i Figur 1.3.1 skal telles ved stemmeoverføring, og én representant skal velges, settes valgkriteriet til f.eks. 51%. Førstestemmene fordeles slik:

c 30%; a 25%; b 45%

Ingen har 51% av førstestemmene i første opptellingsrunde, og noen må elimineres. Kandidat a har færrest førstestemmer og elimineres. I annen runde får c 45% av førstestemmene mens b får 55%; b velges i annen opptellingsrunde. Hvis valgkriteriet var fastsatt annerledes, ville sluttresultatet blitt det samme. (Med et valgkriterium på 60% ville det formelt vært nødvendig med eliminasjon av c i annen runde, og i tredje runde ville b blitt alene igjen og fått 100%.)

I Eksempel 1.4.5 ble Condorcetvinneren a eliminert og pluralitetsvinneren b ble også STV-vinner. I neste eksempel kommer Condorcetvinneren til annen runde og vinner naturligvis. Men en Condorcetvinner skal ikke føle seg for trygg. Et nytt fenomen viser seg:

1.4.6 Eksempel

Anta at preferansefordelingen er slik (se eksempel 1.5.1 for konstruksjon av en figur):

abe 38%; bae 20%; bea 12%; eba 30% (*).

I første runde elimineres e med 30% av topprangeringene mens a (38%) og b (32%) går til «finalen». Med 100 velgere vinner der b over a (62 – 38). Condorcetvinneren b blir også her STV-vinner, men pluralitetsvinneren a har en mulighet for strategisk stemmegivning: a får 3 av sine velgere til å stemme eba. Den nye fordelingen blir:

abe 35%; bae 20%; bea 12%; eba 33% (**)

I (**) er det Condorcetvinneren b som blir eliminert i første opptellingsrunde, og a vinner så over e (55 – 45). Siden a vil tape en finale mot b men vinne mot e, er det verdt noen førstestemmer å få e til å slå ut b i kampen om den andre finaleplassen.

En betydelig motstand mot STV-metodene er knyttet til muligheten for en slik strategi, og kanskje enda mer til muligheten for den motsatte endring, fra (**) med vinner a til (*) med vinner b, for den kan oppfattes som at tre velgere går i en felle: De skifter (i all oppriktighet!) sin oppfatning fra eba til abe; som konsekvens mister så a seieren til b.

Både Condorcetmetoder og STV-metoder er laget for å få valgt en akseptabel kompromiss-kandidat, og kan gi samme vinner, som i eksempel 1.4.6 (*). Som Figur 1.3.1 og 1.3.2 antyder, vil en Condorcetvinner generelt være nær det politiske sentrum. Men siden STV til enhver tid teller førstestemmer, kan en Condorcetvinner bli eliminert, som i eksempel 1.4.5. De to siste kandidater er samlende på hver sin fløy, men sentrumsvelgerne avgjør hvilken side som vinner. Store fløypartier må konkurrere om sentrumsvelgernes subsidiære støtte.

1.5 Lineære modeller for preferansefordelingen

Figurene 1.3.1 og 1.3.2 illustrerer preferansefordelinger man neppe vil se ved virkelige valg. To av de seks mulige rangeringer forekommer ikke i de to tenkte valgene; vi tenker oss at alle velgere i det første valget ser a som nærmest eller nest-nærmest og at derfor ingen rangerer a sist; tilsvarende for b i det andre valget. Man må som regel regne med at noen velgere rangerer annerledes, gjerne på grunnlag av en avvikende oppfatning av det politiske landskap, og at alle seks mulige rangeringer av tre kandidater forekommer. Unntak, der en eller flere av de seks muligheter ikke brukes av noen velger, forekommer sporadisk i valgforsamlinger som er riktig små eller som har et lite antall stemmeblokker. Det kan skje i en nasjonalforsamling der partigrupper samordner preferansene sine. Der har det også forekommet preferansefordelinger uten noen Condorcetvinner. Se Eksempel 3.01 og del 5.4.

Modellen som de to figurene 1.3.1 og 1.3.2 illustrerer passer altså sjelden eksakt. Men hvis de to rangeringer som utelates bare forekommer hos noen få velgere, kan modellen likevel være en forenkling som er nyttig for noen formål. En bestemt rekkefølge av kandidatene fra venstre til høyre kan av et stort velgerflertall fordelt over hele skalaen bli oppfattet som objektivt riktig, selv om velgere som har samme oppfatning av rekkefølgen kan ha ulike oppfatninger av avstandene. En felles oppfatning hos et tverrpolitisk flertall av visse trekk i det politiske landskapet er i seg selv en politisk realitet, og forenklede modeller der også fire og flere kandidater tenkes plassert på en linje er mye brukt.

Preferansefordelinger i 1.3.1 og 1.3.2 er laget ved at de tre kandidatpunktene velges først, og skillene mellom to velgergrupper går ved de tre midtpunktene. Hvis preferansefordelingen er gitt, kan man også konstruere tre kandidatpunkt som passer, som vist i neste eksempel:

1.5.1 Eksempel

Anta det er tre kandidater, a, b, e fra venstre mot høyre, som i Figur 1.3.2, men med følgende fordeling (fra Eksempel 1.4.6):

abe 38%; bae 20%; bea 12%; eba 30%.

Sammenlignet med Figur 1.3.2 blir skillepunktene noe forskjøvet, til

0.38; 0.58; 0.70.

Så gjelder det å plassere kandidatene slik at de observerte skillepunktene også blir midtpunkt for to og to kandidatpunkt. Først plasseres a og e på hver sin side av 0.58, men i samme avstand:

a i 0.58 – x og e i 0.58 + x,

med ukjent x>0. Men a og b skal ha 0.38 som midtpunkt, og da må man sette:

b i 0.18+x.

Kontroll: [(0.58 – x) + (0.18 + x)]/2 = 0.38. Endelig skal 0.70 være midtpunktet mellom b og e, altså

[(0.18 + x) + ((0.58 + x)]/2 = 0.38 + x = 0.70, dvs. x = 0.32;

Resultatet av modelleringen er da at kandidatene plasseres slik:

a i 0.26; b i 0.50; e i 0.90

Generelt, med skillestreker gjennom α, β, γ der $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, plasserer man

a i $\alpha+\beta-\gamma$; b i $\gamma+\alpha-\beta$, e i $\beta+\gamma-\alpha$.

Med andre prosenter for abe, bae, bea, eba, kan det da hende at man må plassere kandidater utenfor linjestykket fra 0 til 1; det kan være et tegn på at preferansefordelingen ikke er realistisk.

Når de tre kandidater lar seg plassere i eksempel 1.5.1, er det samtidig et eksempel på et generelt prinsipp som ofte gjør seg gjeldende ved modelltilpasninger: Når man har tre kandidatpunkter å rutte med, kan man også styre de tre midtpunktene til ønskede mål. For en eksakt tilpassing trenger man i alminnelighet minst like mange «styringsparametere» (kandidatpunkt) som det er «målparametere» (skillestreker).

Allerede når man utvider figurer som 1.3.1 og 1.3.2 til fire kandidater, blir det for mange mål å styre mot, slik neste eksempel illustrerer:

1.5.2 Eksempel

Vi tenker oss nå 4 kandidater, a, b, c, d plassert i punktene 0.1, 0.3, 0.6 og 1.0

	a		b			c				d
0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	abcd	|	bacd	| bcad |	cbad |	cbda |	cdba	|	dcba	

1.5.3 Figur Med n=4 kandidater blir det høyst n[n-1]/2 = 6 ulike midtpunkt der preferanse skifter; det gir 7 *«entoppede preferanser»* (se 1.5.4): En kandidat med en nabo på hver side rangeres ikke etter begge naboene. Men i alt 8 preferanser er entoppede for rekkefølgen på linjen.

Skillestrekene mellom ulike rangeringer i Figur 1.5.3 går ved midtpunktene 0.2, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, og 0.8, og stemmene fordeles på syv slag av stemmesedler:

abcd 20%; bacd 15%; bcad 10%; cbad 10%; cbda 10%; cdba 15%; dcba 20%.

Men om vi endrer størrelsene av de syv velgerkategoriene litt, og dermed plasseringen av de seks skillestrekene som «målparametere», så er det i alminnelighet ikke mulig å styre alle midtpunktene på plass med bare fire kandidatpunkter som «styringsparametere». Hvis kandidatpunktene «speilvendes» og a, b, c, og d plasseres på 0.0, 0.4, 0.7 og 0.9, så faller velgerkategorien cbad bort mens bcda kommer til. Det viser seg umulig å plassere a, b, c og d fra venstre mot høyre slik at preferansene cbad og bcda får hvert sitt intervall. En grunn er denne:

Midtpunktet mellom b og c må ha bcda-velgerne til venstre og cbad-velgerne til høyre, mens midtpunktet mellom a og d må ha cbad-velgerne til venstre og bcda-velgerne til høyre.

1.5.4 Duncan Black's entoppethetsmodell (single peak model)

Hvis kandidatene er fordelt fra venstre mot høyre langs et linjestykke, sies en preferanse å være *entoppet* (*single-peaked*) i forhold til rekkefølgen på linjen dersom

en kandidat med en nabo på hver side ikke av noen velger rangeres etter begge naboene.

En velger har da fallende rangering mot venstre og mot høyre, vekk fra sin topprangerte kandidat.

Dersom den enkelte velgers rangering da følger av avstandene fra kandidatpunktene til velgerens ståsted, blir antall mulige preferanser sterkt begrenset: Med n kandidater er det i alt n(n-1)/2 par av kandidater og dermed høyst n(n-1)/2 forskjellige midtpunkter og skillestreker, og altså høyst 1 + n(n-1)/2 mulige preferanser. Med n=4 blir det da høyst 7 preferanser, slik som i Figur 1.5.3. De er alle entoppede, men plasseringen av kandidatpunktene gjør altså at modellen ikke omfatter preferansen bcda, som også er entoppet. Det hjelper ikke engang å modellere med variabel velgertetthet fordi, som vist i eksempel 1.5.2,

preferansene cbad og bcda er gjensidig utelukkende.

Black's entoppethetsmodell (Duncan Black, 1908 –1991) omfatter alle rangeringer som er entoppede i forhold til en gitt rekkefølge av kandidatene fra venstre mot høyre. Med n kandidater blir det i alt 2^{n-1} mulige rangeringer. En tabell viser hvorledes antall rangeringer som kan oppnås med en fastlagt avstandsmodell, 1+n[n-1]/2, vokser meget langsommere enn antallet A(n) som Black åpner for:

n	2	3	4	5	6	7	8
1+n[n-1]/2	2	4	7	11	16	22	29
A(n) = 2^{n-1}	2	4	8	16	32	64	128

Entoppethetsmodellen passer hvis velgerne har samme oppfatning av rekkefølgen av kandidatpunktene fra venstre mot høyre, men hver velger har sin oppfatning av de nøyaktige posisjonene og rangerer ut fra sin egen oppfatning av avstandene til sin egen posisjon.

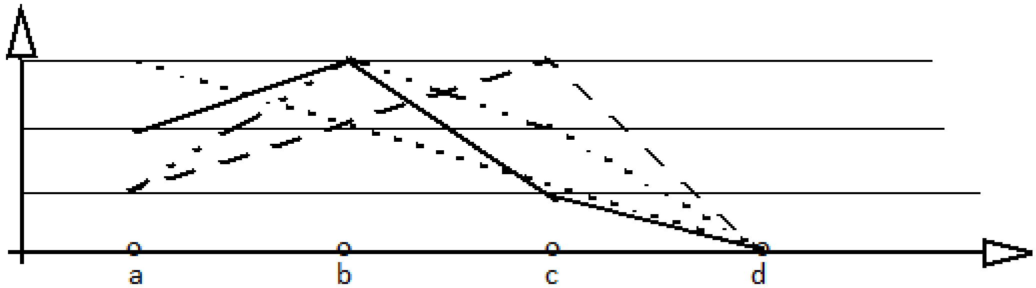
For å se at det er 2^{n-1} entoppede rangeringer, kan man først legge merke til at sisteplassen i en entoppet rangering må gå til kandidaten på ytre venstre (a) eller på ytre høyre (d), for hvis sisteplassen gikk til en tredjekandidat c, måtte c ha to naboer som begge var rangert foran c.
Hvis antall entoppede rangeringer av n-1 kandidater betegnes A(n-1), så kan

- a rangeres sist etter A(n-1) entoppede rangeringer av de n-1 kandidatene til høyre for a, og
- d rangeres sist etter A(n-1) entoppede rangeringer av de n-1 kandidatene til venstre for d.

Det gir i alt A(n-1) + A(n-1) entoppede rangeringer av n kandidater, altså A(n) = 2xA(n-1).

1.5.5 Eksempel

De 2^{3-1} = 4 entoppede rangeringene av a, b, c med d tilføyd på fjerdeplass, gir halvparten av de 2^{4-1} = 8 entoppede rangeringene av a, b, c, d og vises på figuren. Fire andre rangeringer har a på sisteplass.



1.5.6 Figur Med 4 kandidater, a, b, c, d fra venstre til høyre, er det 8 éntoppede rangeringer; 4 av dem har d på sisteplass og vises på figuren; abcd, bacd, bcad, cbad. Tilsvarende er det 4 rangeringer med a på sisteplass.

1.5.7 Entoppethet og eksistensen av en Condorcetvinner

Dersom det eksisterer en rekkefølge av kandidatene som gjør alle velgerpreferanser éntoppede, så eksisterer det en Condorcetvinner. Grunnen kan man se fra Figur 1.5.3. Vi grupperer velgerne fra venstre mot høyre på grunnlag av deres topprangering. Innenfor en gruppe med felles topprangering kan vi opprette undergrupper etter annenpreferanser osv., men for det følgende resonnement kan vi ordne dem vilkårlig fra venstre mot høyre.

Velgerne lengst til venstre rangerer a først (20%) og så kommer de som rangerer b først (25%). Vi har fremdeles ikke kommet til en *medianvelger*, som har like mange (så nær som mulig) velgere til venstre for seg som til høyre for seg. En medianvelger må befinne seg blant de 35% som rangerer c først. Med et odde antall velgere (f.eks. 101) er det en entydig medianvelger (nr. 51 fra venstre og høyre). Hvis det er et jamnt antall velgere (f.eks. 100), kan vi anse to naboer som medianvelgere (nr. 50 fra venstre og nr. 50 fra høyre); la oss da anta at de har samme topprangering. Duncan Black påviste at

den kandidaten som støttes av medianvelger(ne), er Condorcetvinner.

I Figur 1.5.3 er altså c Condorcetvinner. Resultatet kalles gjerne *medianvelgerteoremet*. Resultatet beror på at at den kandidat som er topprangert av medianvelger(ne), i parvise sammenligninger, både

slår alle kandidater lenger til venstre med støtte av medianvelger(ne) og hele høyresiden, og
slår alle kandidater lenger til høyre med støtte av medianvelger(ne) og hele venstresiden.

Hvis det er to medianvelgere, j og j+1, og de har ulik topprangering, så blir det minst to kandidater som står likt i parvis sammenligning, men som slår alle andre; disse kandidatene blir da svake Condorcetvinnere. (Kandidat x som topprangeres av velger j og kandidat y som topprangeres av velger j+1 blir svake Condorcetvinnere; i tillegg kan det tenkes å være kandidater mellom x og y uten noen topprangeringer.)

1.6 Preferansefordeling og strategisk adferd

Med få unntak skal vi holde oss til preferansevalg der den enkelte velger fritt velger en av de n! mulige rangeringer av de n kandidatene. Men langt på vei er de metoder og resultater som vi kommer inn på gyldige for preferansevalg med ufullstendige stemmesedler når det symmetriseres som forklart i del 1.2, slik at opptellingen deretter bare gjelder stemmesedler med en av de n! fullstendige rangeringer.

Man kan da anse pluralitetsvalg som en «degenerert» form for preferansevalg, der opptellingen ikke påvirkes av annet enn førsteplassene på hver enkelt stemmeseddel. Men pluralitetsvalg brukes ved mange viktige valg, og derfor blir det interessant å sammenligne pluralitetsvalg med andre «egentlige» preferansevalg. Ved å holde oss til disse n! mulige velgerpreferanser, studerer vi ulike metoder for preferansevalg, medregnet pluralitetsvalg, innenfor en felles ramme, og det bidrar til å gjøre sammenligninger meningsfulle.

1.6.1 Tre hovedtyper av strategisk stemmegivning.

Strategisk (også kalt taktisk) stemmegivning kan ta mange former. I eksemplene har vi sett tre typer som allment anses som særlig viktige ved de vanlige metodene for preferansevalg. Med n=3 kandidater, x, y og z, er de slik:

	Oppr. stemme	Ny stemme	Oppr. vinner	Ny vinner
Strategi 1	xyz	yxz	z	y
Strategi 2	xyz	xzy	y	x
Strategi 3	xyz	yxz	z	x

Ved at et passende antall velgere endrer sin stemmegivning fra den opprinnelig planlagte, så endres vinneren. Forutsetningen er naturligvis at andre velgergrupper ikke prøver å påvirke resultatet med strategi av samme eller av en annen type. Dette generaliseres til n⩾4:

Strategi 1 betyr å støtte en annen enn opprinnelig planlagt med topprangering;
Strategi 2 betyr å hjelpe sin topprangerte ved omordninger lenger ned på listen;
Strategi 3 betyr å hjelpe sin topprangerte ved å sette en annen kandidat på førsteplass.

For velgerne som deltar i det strategiske opplegget, og stemmer annerledes enn opprinnelig planlagt, forbedres resultatet både når den planlagte og når den nye rangering legges til grunn.

Pluralitetsvalg kritiseres gjerne fordi velgerne kan utsettes for et sterkt press om å forlate en sjanseløs kandidat x og satse på den de anser som det «minste onde» blant kandidatene som anses å ha reelle muligheter til å vinne, altså Strategi 1. Men den ofte brukte negative betegnelsen «Favorite betrayal» er nok mindre dekkende for deltagernes motivasjon enn alternativet «compromise».

Incentivet til å prøve Strategi 2 er påfallende sterkt i Bordavalg og andre poengmetoder med graderte poengsatser (pluralitetsmetoden er et ekstremtilfelle der bare førsteplasser betyr noe). I kapittel 5 ser vi spesielt på hvordan Condorcet-metoder kan defineres for å unngå Strategi 2 så langt det lar seg gjøre.

Muligheter for Strategi 3 finner vi særlig i stemmeoverføringsvalg.

1.6.2 Eksempel I eksempel 1.4.6 kunne 3 abe- velgere la pluralitets-vinner a snappe STV-seieren fra Condorcet-vinner b ved å skifte til eba. For å se at det dreier seg om Strategi 3 kan vi dele opp skiftet i tre etapper der bare to naboer bytter plass:

abe → aeb → eab → eba

Det er andreetappen med ombytte av de to første som er avgjørende; a kommer i finale mot e og ikke mot den langt farligere Condorcet-vinner b.

Hvilken *virkning* muligheten av hver enkelt strategitype har for hver enkelt metode er et omfattende problemfelt. De følgende kapitler er ment som et opplegg til nærmere diskusjon og undersøkelse. Både Condorcet og STV betegner store familier av metoder. Mulighetene av å endre resultatet ved strategisk stemmegivning vil avhenge både av hvilke metoder og spesielle varianter av metodene som brukes, og av hvordan preferansene er fordelt blant velgerne, altså av det «politiske landskapet». Pluralitetsvalg gjennom lang tid har bidratt til å forme politiske landskap med to dominerende partier; vil andre metoder for preferansevalg ha andre virkninger og forme landskapet annerledes?

1.6.3 Oppriktig eller uoppriktig stemmegivning?

Pluralitetsvalg er omstridt, men når metoden anvendes ved politiske valg, som i USA, Canada og Storbritannia, skjer det i samfunn der en løpende politisk debatt inngår i grunnlaget for den oppfatning velgerne danner seg av det politiske landskap. En forutgående valgkamp oppfordrer dem til å overveie om de vil stemme *ekspressivt* for en (antatt) sjanseløs kandidat de helst ser som vinner eller stemme *instrumentelt* for den de foretrekker blant kandidatene med (antatt) rimelig vinnersjanse.

En slik løpende politisk debatt vil gjøre en utflankering som den man ser i Figur 1.3.1 mindre virkningsfull: Venstresidens velgere oppfordres til å samle seg om den kandidaten (a) som har mulighet til å vinne over høyresidens kandidat (b) gjennom en form for strategisk stemmegivning. Men hvis pluralitetsmetoden anvendes uten bakgrunn i debatt eller valgkamp, må man regne med at valgutfallet vil bli påvirket f.eks. av tilfeldig utflankering og at de sterkeste kandidatene kan få svært ulike tap når en ny kandidat blir nominert.

Strategisk stemmegivning kalles av og til «uoppriktig», men de velgere som følger Strategi 1 og endrer fra xyz til yxz er oppriktige: De stemmer jo yxz nettopp for å gi y sin beste støtte. Mange fremholder at pluralitetsvalg med Strategi 1 motvirker fragmentering i småpartier og virker stabiliserende. Den side som rammes av utflankering i Figur 1.3.1 har selv adgang til Strategi 1 for å redusere virkningene ved å samle seg – oppriktig – om sin sterkeste kandidat.

Med Strategi 2 derimot, kan man si at endringen fra xyz til xzy ikke innebærer at velgeren oppriktig mener å gi z noen fordel fremfor y. Når det gjelder Bordavalg er det et sterkt incentiv til å anvende Strategi 2, og med økende antall kandidater blir incentivet til å bruke Strategi 2 bare sterkere. Med 11 kandidater kan velgeren således selv bestemme om forskjellen mellom den foretrukne kandidat x og den sterkeste konkurrent y skal være 1 eller 10 Borda-poeng.

Den politiske side som rammes av utflankering i Figur 1.3.2 kan vanskelig redusere virkningen på annen måte enn ved Strategi 2. I den grad en valgmetode er et strategisk spill for velgerne, kan det ha mer for seg å diskutere valgmetoden enn å diskutere velgernes oppriktighet. Skal en metode for preferansevalg i rimelig grad oppfylle håpet om å kåre en god kompromisskandidat til vinner, er det vesentlig at den enkelte velger tør rangere oppriktig: Å rangere en god kandidat på andreplass skal, om mulig, ikke skade mulighetene for kandidaten på førsteplass. En god metode for preferansevalg bør være utformet med respekt for velgernes rangeringer.

Det er vel kjent at ingen Condorcet-metode kan utelukke muligheten av å vinne med Strategi 2, men det er betydelig gradsforskjell sammenlignet med Bordas metode. Forskjellige Condorcet-metoder tillater dessuten Strategi 2 i svært forskjellig grad. Mulighetene for å vinne med Strategi 2 er noe man kan tillegge vekt ved valg av Condorcet-metode.

De vanlige STV-metodene tillater altså noen ganger, som forklart i Eksempel 1.6.2, en velgergruppe som mener xyz å vinne ved Strategi 3. Gruppen tar seieren fra z til x ved å stemme yxz; bevegelsen krysser grensen mellom de preferansefordelinger som vinnes av z og de preferansefordelinger som vinnes av x i «gal retning». Det minner om en riksgrense som krøller seg: Mellom Strömstad og Halden er Sverige i vest og Norge i øst; et skritt vestover *kan* føre fra Norge til Sverige. Noen spesielle betingelser må være oppfylt for at Strategi 3 skal bli mulig. Har STV gode sider som preger dens ordinære bruk og kan oppveie for uheldige omstendigheter som gjør Strategi 3 mulig, eller er selve muligheten av Strategi 3 en alvorlig innvending mot STV?

2 Preferanserelasjoner

En relasjon i mengden **A** *er en undermengde i mengden* **A**x**A.**

Denne standarddefinisjonen kan virke kryptisk. Hva har en slik abstrakt, dvs. generell definisjon rent konkret å gjøre med f.eks. tema valgmetoder? De neste sider er forsøkt tilpasset lesere som, i likhet med forfatteren, helst vil ha noen konkrete eksempler som bakgrunn før abstraksjonene strømmer på. For et poeng med en abstrakt fremstillingsform er å kunne se og resonnere om mange ulike konkretiseringer under en felles synsvinkel.

2.1 Konkret og abstrakt om relasjoner

La et valg ha 7 kandidater, a, b c, d, e, f, g. En velgers preferanse kan sees som et resultat av 21 parvise sammenligninger, siden det er 21 uordnede par av kandidater: {x,y} =

{a,b}, {a,c}, {a,d}, {a,e}, {a,f}, {a,g}, {b,c},
{b,d}, {b,e}, {b,f}, {b,g}, {c,d}, {c,e}, {c,f},
{c,g}, {d,e}, {d,f}, {d,g}, {e,f}, {e,g}, {f,g}.

Preferansen kan gis oversiktlig i form av en 7x7-matrise, dvs. en tabell, der

1 i cellen (x,y), dvs. linje x og søyle y, tolkes som «x minst like god som y»;

i motsatt fall settes 0 i cellen. Velgeren i eksempel 1.2.1, som vil ignorere e, f og g men ellers rangere (ab)cd, kunne uttrykke dette i en 7x7-tabell:

2.1.1 Tabell Tabellen tilsvarer en *ufullstendig stemmeseddel* med (ab)cd, hvor e, f, og g ignoreres. Med 1 i alle diagonalcellene (x,x) uttrykkes «x minst like god som x», noe som her skal anses som gyldig også for de ignorerte e, f og g.

	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	1	1	0	0	0
b	1	1	1	1	0	0	0
c	0	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	0	0	0
e	0	0	0	0	1	0	0
f	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	1

Hvis en velger står helt fritt til å levere sin stemmeseddel i form av en slik tabell, er det mange muligheter. Med 1 i diagonalcellene, kan velgeren i de øvrige 42 celler velge fritt mellom 0 og 1; med 42 valg blir antall muligheter

$$2^{42} = 4398046511104$$

Til sammenligning nevnes at antall fullstendige rangeringer er $7! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 5040$. I normale valg må de fleste av de 4398046511104 mulighetene nok anses som lite aktuelle, og ofte irrasjonelle.

Tabellen sies å uttrykke en *preferanserelasjon* $\mathbb{R}$, og en annen måte å redegjøre for $\mathbb{R}$ på er ved en opplisting av alle cellene med innhold 1:

(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d), (e,e), (f,f), (g,g) (*)

Det mer generelle relasjonsbegrepet favner videre enn preferanser, f.eks. kan man tenke på ulike slektskapsrelasjoner mellom mennesker; 1 i linje x og søyle y kan f.eks. bety at x og y er søskenbarn.

Kvadratiske tabeller med 0-er og 1-ere kan altså brukes i mange sammenhenger, f.eks. til å angi resultatene i en fotballturnering der alle har møtt hverandre én gang, og der 1 i cellen (x,y) betyr at lag x ikke tapte for lag y. I en turnering med n lag er selvsagt antall muligheter langt større enn n!: Hvert cellepar (x,y) og (y,x) kan fylles ut på 3 måter fordi to 0-er er utelukket etter ferdigspilt turnering. For en 7x7 tabell blir det 3^{21} = 10460353203 muligheter. Med en *turneringsrelasjon* menes i alminnelighet en slik relasjon der heller ikke noen uavgjort kamp forekommer. (I fotball kunne man tenke seg obligatorisk straffesparkkonkurranse hvis det står likt etter vanlig spill.) Hvert cellepar kan da fylles ut på to måter. En 7x7-tabell kan altså fylles med 2^{21} = 2097152 turneringsrelasjoner.

Relasjonsbegrepet dukker ofte opp i både ren matematikk og i anvendelsene. Dermed oppstår et behov for å se de ulike relasjoner, som kamprelasjoner, preferanserelasjoner og mye annet, under en felles synsvinkel. For å behandle relasjonsbegrepet generelt, må man se bort fra de mulige konkrete betydninger, og tenke abstrakt. Da er matriser (tabeller) med 0 og 1 et egnet middel. Den vanlige definisjon svarer til opplistingen av celler. Man knytter altså det generelle relasjonsbegrepet til tabellidéen; og lister opp de cellene som inneholder 1. Det generelle relasjonsbegrepet omfatter da enhver samling av celler eller, ekvivalent, enhver kvadratisk tabell der hver celle inneholder 0 eller 1.

Det er vanlig å *definere* det generelle begrepet binær *relasjon i en mengde* **A** som en delmengde av **A**x**A**; med **A**x**A** menes mengden av alle ordnede par (x,y) der både x og y tilhører **A**. Et ordnet par svarer til en celle i tabellen. Relasjonen $\mathbb{R}$ med ovenstående tabell kan defineres ved mengden (*) av ordnede par som svarer til celler med innhold = 1.

I Wikipedia sies det slik: *«In mathematics, a **binary relation on** a set A is a collection of ordered pairs of elements of A. In other words, it is a subset of the Cartesian product* $A^2 = A \times A$.*»*

Hvis det står 1 i celle (x,y) uttrykkes det ofte som

$$x\mathbb{R}y$$

og det kan generelt uttales «x er relatert til y».

Når relasjonen $\mathbb{R}$ har en bestemt betydning, kan det være rimelig å uttrykke seg mindre abstrakt, og si f.eks. om kandidater ved et valg at «x er minst like god som y» eller om fotballag i en liga at «x tapte ikke kampen mot y». Hvis det finnes standardsymboler, f.eks. ulikhetstegnene $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ når det gjelder tall i stedet for kandidater, bruker man oftest standardsymbolene i stedet for en uspesifisert $\mathbb{R}$.

Tabellen over viser en ufullstendig stemmeseddel: I 15 av de 21 parene av kandidater har velgeren ikke uttrykt noen oppfatning. Som et grunnlag for symmetrisering, kan preferansen ved valgopptelling representeres ved følgende matrise:

$\mathbb{R}$	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1	1	1
e	0	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	0	1	1	1
g	0	0	0	0	1	1	1

2.1.2 Tabell Tabellen tilsvarer en stemmeseddel med (ab)cd, hvor e, f, og g ignoreres: Symmetrisering innebærer at de ignorerte kandidater e, f, g (Tabell 2.1.1) settes sist og likt. Til hvert par {x,y} svarer to celler, (x,y) og (y,x); summen av de to cellers innhold er nå 1 (hvis x er bedre enn y eller y er bedre enn x) eller 2 (hvis x og y stilles likt), Det er altså 3 muligheter for hvert par {x,y} og dermed 3^{21} mulige tabeller**.**

2.2 Hjelperelasjonene $\mathbb{P}$ og $\mathbb{I}$

La nå $\mathbb{R}$ være en vilkårlig gitt relasjon i en mengde **A**. Tilknyttet $\mathbb{R}$ er to andre relasjoner, $\mathbb{P}$ og $\mathbb{I}$, definert ved $\mathbb{R}$:

$$x\mathbb{I}y \;\Leftrightarrow\; (x\mathbb{R}y \text{ og } y\mathbb{R}x) \quad \text{og} \quad x\mathbb{P}y \;\Leftrightarrow\; (x\mathbb{R}y \text{ men } \textit{ikke } y\mathbb{R}x)$$

$\mathbb{I}$ står for *indifferens* og $x\mathbb{I}y$ tolkes som at en velger med preferansen $\mathbb{R}$ ikke skiller mellom x og y. Hvis $\mathbb{R}$ er som i tabellen 2.1.2, så får hjelperelasjonen $\mathbb{I}$ følgende tabell:

$\mathbb{I}$	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0
c	0	0	1	0	0	0	0
d	0	0	0	1	0	0	0
e	0	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	0	1	1	1
g	0	0	0	0	1	1	1

2.2.1 Tabell Tabellen viser hjelperelasjonen $\mathbb{I}$ for indifferens («like god som») som hører til relasjonen $\mathbb{R}$ («minst like god som») fra Tabell 2.1.2.

Hvis $\mathbb{R}$ er en preferanserelasjon «minst like god som», så står hjelperelasjonen $\mathbb{I}$ for «like god som». Innenfor 4 av de 21 parene {a,b}, {e,f}, {e,g}, {f,g} regnes begge kandidatene som like gode. På tilsvarende måte ser vi at relasjonen $\mathbb{P}$ for *streng preferanse* får følgende tabell:

$\mathbb{P}$	a	b	c	d	e	f	g
a	0	0	1	1	1	1	1
b	0	0	1	1	1	1	1
c	0	0	0	1	1	1	1
d	0	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

2.2.2 Tabell Tabellen viser hjelperelasjonen $\mathbb{P}$ for streng preferanse («bedre enn») som hører til relasjonen $\mathbb{R}$ («minst like god som») fra Tabell 2.1.2.

Hvis $\mathbb{R}$ er en preferanserelasjon «minst like god som», så står hjelperelasjonen $\mathbb{P}$ for «bedre enn». Innenfor 17 av de 21 parene foretrekkes den ene fremfor den andre.

2.2.3 Alternativ notasjon

Man ser ofte symbolene $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ anvendt ved preferanserelasjoner, gjerne i en slynget versjon $\prec$,$\preccurlyeq$, $\succ$, $\succcurlyeq$; da kan

x$\mathbb{R}$y skrives x$\succcurlyeq$y eller y$\preccurlyeq$x og x$\mathbb{P}$y skrives x$\succ$y eller y$\prec$x

Indifferens noteres likevel gjerne med et tegn som skiller seg fra likhet =, fordi indifferens kan gjelde mellom ulike kandidater: x$\mathbb{I}$y kan inntreffe selv om x ≠ y.

2.3 Noen typer av relasjoner

Relasjoner som finnes i ren matematikk og i anvendelsene, har vanligvis noen av de følgende egenskaper, men ikke alle, for de er innbyrdes uforenlige. En relasjon $\mathbb{S}$ i en mengde **A** sies å være

(i) *refleksiv* dersom x$\mathbb{S}$x holder for alle x i **A**;
(ii) *antirefleksiv* dersom x$\mathbb{S}$x ikke holder for noen x i **A**
(iii) *symmetrisk* dersom x$\mathbb{S}$y medfører y$\mathbb{S}$x når x≠y
(iv) *antisymmetrisk* dersom x$\mathbb{S}$y og y$\mathbb{S}$x ikke begge kan holde når x≠y
(v) *komplett* dersom x$\mathbb{S}$y, y$\mathbb{S}$x, eller begge deler alltid holder når x≠y
(vi) *transitiv* dersom x$\mathbb{S}$y og y$\mathbb{S}$z alltid medfører x$\mathbb{S}$z

La m(x,y) bety innholdet av cellen (x,y) i en relasjonstabell, dermed er m(x,y) = 0 eller m(x,y) = 1. De fem første egenskapene tilsvarer iøynefallende trekk ved relasjonstabellen.

Om *(i)* og *(ii)* holder, ser man ved å inspisere cellene (x,x), på en diagonal i tabellen.
Refleksivitet betyr at m(x,x) = 1 for alle x; en preferanserelasjon $\mathbb{R}$ med tolkning «minst like god som», er refleksiv, som f.eks. i Tabell 2.1.2. Det samme gjelder hjelperelasjonen $\mathbb{I}$, som f.eks. i Tabell 2.2.1.
Antirefleksivitet betyr at m(x,x) = 0 for alle x; hjelperelasjonen $\mathbb{P}$, «bedre enn», er antirefleksiv, som i Tabell 2.2.2 . Disse og andre egenskaper ved $\mathbb{P}$ og $\mathbb{I}$ vises formelt i avsnitt 2.3.3.

Om egenskapene (iii), (iv) og (v) holder ser man ved å inspisere hvert par av celler, (x,y) og (y,x) med x≠y, beliggende symmetrisk på hver sin side av diagonalen.
Symmetri betyr at m(x,y) + m(y,x) ≠ 1, dvs. at m(x,y) = m(y,x) når x≠y. Hjelperelasjonen $\mathbb{I}$ vil alltid være symmetrisk, som f.eks. i Tabell 2.2.1.
Antisymmetri betyr at m(x,y) + m(y,x) < 2 når x≠y. Hvis en velger har en antisymmetrisk preferanserelasjon $\mathbb{R}$, så innebærer det at velgeren aldri rangerer to kandidater likt, men *kan* ha uttrykt «vet ikke» om et eller flere par {x,y}, altså ha levert en ufullstendig stemmeseddel, som i Tabell 2.1.1.
Kompletthet betyr at m(x,y) + m(y,x) > 0 når x≠y. Hvis en velger har en komplett preferanserelasjon $\mathbb{R}$ så innebærer det at velgeren alltid tar et standpunkt: x$\mathbb{P}$y, y$\mathbb{P}$x eller x$\mathbb{I}$y, som i Tabell 2.2.1.
Når en ufullstendig stemmeseddel behandles med symmetrisering, tenkes den erstattet av ministemmesedler som er komplette og antisymmetriske, altså der m(x,y) + m(y,x) = 1.

Transitivitet er en egenskap som man neppe ser med et blikk på tabellen for en relasjon. Eksempler på transitive relasjoner i mengden av reelle tall er ulikhetene $<$, $\leqslant$, $>$ og $\geqslant$. Således vil a$<$ b og b$<$ c medføre a$<$ c osv.

I en normal valgsituasjon går man gjerne ut fra at en velgers relasjon $\mathbb{R}$ «minst like god som» er transitiv. Hvis man mener kandidat a er minst like godt skikket som kandidat b til å være president, og b minst like godt som kandidat c, så er det jo også rimelig at man mener at a er minst like godt skikket som c. Det anses ofte som irrasjonelt av en velger å ha en *intransitiv, dvs.* ikke transitiv $\mathbb{R}$.

Men det kan tenkes andre valgsituasjoner, f.eks. når det er flere dommere i en sport hvor konkurrentene møtes parvis i en turnering. Man venter at en dommer som har holdt a foran b i parvis oppgjør og b foran c i parvis oppgjør, vil stille opp som dommer i det parvise oppgjør mellom a og c uten å være forutinntatt: Det er rett og slett et etisk krav.

Spillet «stein-saks-papir» er kunstig, men som neste eksempel viser, kan man lage tre spilleterninger som faktisk slår hverandre i ring. Det er ikke tale om noen subjektiv vurdering:

Eksempel 2.3.1 Sidene i terningene A, B, C forsynes med andre tall enn vanlig:

A: 1, 1, 5, 5, 9, 9;   B: 2, 2, 6, 6, 7, 7;   C: 3, 3, 4, 4, 8, 8.

To spillere bruker hver sin terning, kaster en gang hver, og den som får opp høyest tall vinner 1 krone. Kan vi rangere terningene? Siden antall utfall er odde (3^2 = 9) og to terninger ikke kan vise samme tall, må en terning vinne minst 5 ganger av 9. Og en rangering blir umulig fordi det viser seg at terningene slår hverandre i ring. En tabell gir detaljene:

	A1	A5	A9	B2	B6	B7	C3	C4	C8
A1				**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
A5				**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
A9				**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
B2	**1**	**0**	**0**				**0**	**0**	**0**
B6	**1**	**1**	**0**				**1**	**1**	**0**
B7	**1**	**1**	**0**				**1**	**1**	**0**
C3	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**			
C4	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**			
C8	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**			

2.3.2 Tabell Tre terninger: A slår C, C slår B, B slår A med sannsynlighet 5/9. En rasjonell velger foretrekker A fremfor C, C fremfor B og B fremfor A, altså A$\mathbb{P}$C, C$\mathbb{P}$B, B$\mathbb{P}$A.

Hvis terningene i eksempel 2.3.1 ble vurdert etter hvordan de ville klare seg mot en fjerde terning T, ville det selvsagt ikke oppstått noen sykel i en rasjonell velgers preferanse. I normale valg vurderes kandidatene i forhold til samme oppgave, men det kan altså tenkes valg der parvise sammenligninger meget vel kan bygge på intransitive velgerpreferanser.

2.3.3 Egenskaper ved hjelperelasjonene $\mathbb{P}$ og $\mathbb{I}$.

En relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv, altså har egenskapene *(i)*, *(iii)* og *(vi),* kalles en *ekvivalensrelasjon.* Ekvivalensrelasjoner møter man over alt i ren og anvendt matematikk. En velkjent ekvivalensrelasjon $\mathbb{S}$ i mengden av trekanter er *ensformethet* (*formlikhet*): Trekantene A og B er ensformede, notert A$\mathbb{S}$B, dersom den ene fremkommer av den andre ved at sidelengdene multipliseres med et passende tall k>0.

Litt formalistisk, kan man begrunne egenskapene slik:
A$\mathbb{S}$A følger idet man kan velge k=1 (altså er *refleksiviteten* bevist);
A$\mathbb{S}$B medfører B$\mathbb{S}$A fordi hvis B fremkommer av A ved multiplikasjon med k, så fremkommer A av B ved multiplikasjon med 1/k (altså er *symmetrien* bevist);
av A$\mathbb{S}$B og B$\mathbb{S}$C følger A$\mathbb{S}$C fordi hvis multiplikasjon med k_1 lar B fremkomme av A og multiplikasjon med k_2 lar C fremkomme av B, så vil multiplikasjon med $k_1 \cdot k_2$ la C fremkomme av A (altså er *transitiviteten* bevist).

Mengden av alle trekanter organiseres i klasser av innbyrdes formlike trekanter; to trekanter er i samme klasse hvis og bare hvis de er formlike. På tilsvarende måte vil enhver ekvivalensrelasjon i en mengde dele mengden inn i ekvivalensklasser; hvert element i mengden tilhører nøyaktig én ekvivalensklasse. Transitiviteten medfører at et element ikke kan tilhøre to forskjellige ekvivalensklasser.

Spesielt gjelder dette for indifferensrelasjonen $\mathbb{I}$ dersom preferanserelasjonen $\mathbb{R}$ er transitiv og refleksiv. Litt mer formalisme basert på definisjonene av $\mathbb{I}$ og $\mathbb{P}$ i avsnitt 2.2 etablerer noen intuitivt rimelige egenskaper hos de tre relasjonene $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}$ og $\mathbb{I}$, deriblant at $\mathbb{I}$ virkelig blir en ekvivalensrelasjon:

2.3.4 Anta at $\mathbb{R}$ er transitiv og refleksiv, og at hjelperelasjonene $\mathbb{P}$ og $\mathbb{I}$ er definert som i avsnitt 2.2. Da gjelder

- **(1)** $\mathbb{P}$ er transitiv og antirefleksiv;
- **(2)** $\mathbb{I}$ er en ekvivalensrelasjon;
- **(3)** hvis x$\mathbb{R}$y, så gjelder nøyaktig ett av to: enten x$\mathbb{P}$y eller x$\mathbb{I}$y;
- **(4)** x$\mathbb{R}$y og y$\mathbb{P}$z medfører x$\mathbb{P}$z;
- **(5)** x$\mathbb{P}$y og y$\mathbb{R}$z medfører x$\mathbb{P}$z.

Bevis: **(3)** følger direkte av hvordan $\mathbb{P}$ og $\mathbb{I}$ er definert i avsnitt 2.2.
(2a) $\mathbb{I}$ er refleksiv fordi x$\mathbb{I}$x ⇔ [x$\mathbb{R}$x og x$\mathbb{R}$x] ⇔ x$\mathbb{R}$x, hvilket bare betyr at $\mathbb{R}$ er refleksiv. .
(2b) $\mathbb{I}$ er symmetrisk idet x$\mathbb{I}$y ⇔ [x$\mathbb{R}$y og y$\mathbb{R}$x] ⇔ [y$\mathbb{R}$x og x$\mathbb{R}$y] ⇔ y$\mathbb{I}$x.
(2c) $\mathbb{I}$ er transitiv som følge av definisjonen av $\mathbb{I}$ og transitiviteten av $\mathbb{R}$: [x$\mathbb{I}$y og y$\mathbb{I}$z] ⇔
{[x$\mathbb{R}$y og y$\mathbb{R}$x] og [y$\mathbb{R}$z og z$\mathbb{R}$y]} ⇔ {[x$\mathbb{R}$y og y$\mathbb{R}$z] og [z$\mathbb{R}$y og y$\mathbb{R}$x]} ⇒ {x$\mathbb{R}$z og z$\mathbb{R}$x} ⇔ x$\mathbb{I}$z
(4) Forutsetningen medfører at x$\mathbb{R}$y og y$\mathbb{R}$z. Siden $\mathbb{R}$ er transitiv, følger da at x$\mathbb{R}$z, og i følge (3) er enten x$\mathbb{P}$z eller x$\mathbb{I}$z. Men det siste er utelukket; (2b) ville da nemlig medføre z$\mathbb{I}$x og dermed z$\mathbb{R}$x;

sammen med $x\mathrm{R}y$ gir det $z\mathrm{R}y$ siden R er transitiv, men $z\mathrm{R}y$ er i konflikt med $y\mathrm{P}z$. Altså gjenstår $x\mathrm{P}z$ som eneste mulighet.

(5) Dette blir analogt til (4): Forutsetningen medfører at $x\mathrm{R}y$ og $y\mathrm{R}z$, og dermed $x\mathrm{R}z$ fordi R er transitiv. Enten er da $x\mathrm{P}z$ eller så er $x\mathrm{I}z$. Men det siste ville i følge (2b) medføre $z\mathrm{I}x$, og videre $z\mathrm{R}x$ og $y\mathrm{R}x$, i konflikt med $x\mathrm{P}y$.

(1a) P er transitiv: $x\mathrm{P}y$ og $y\mathrm{P}z \Rightarrow [x\mathrm{P}y$ og $y\mathrm{R}z] \Rightarrow x\mathrm{P}z$ på grunn av (5).

(1b) P er opplagt antirefleksiv, for $x\mathrm{P}x$ måtte bety noe absurd, «$x\mathrm{R}x$ men ikke $x\mathrm{R}x$».

2.3.5 Eksempel
Hjelperelasjonen I i tabell 2.2.1 er en ekvivalensrelasjon med fire ekvivalensklasser, i denne sammenheng gjerne kalt *indifferensklasser*, nemlig {a,b}, {c}, {d}, {e,f,g}.

– – – – – – – –

Egenskapene i 2.3.4 kan fremstå som opplagte fordi uttrykk som «bedre enn» og «like god som» inngår i dagligtalen. I dagligtale kan man godt ignorere at en ønsket økning av sukkermengden i teen kan være for liten til å bli merket. Som det ofte formuleres: man kan være indifferent mellom 3 og 4 teskjeer sukker og indifferent mellom 4 og 5, og likevel synes at 5 er bedre enn 3. Men en slik indifferens er ikke transitiv, og er i følge 2.3.4(2) uforenlig med en transitiv R.

Trenger man en egen teori for preferanser i en uendelig mengde av alternativ som går gradvis over i hverandre? I politiske valg er det neppe så tett med kandidater at man må modellere med intransitive I og R. Men velferdsøkonomer modellerer alternative fordelinger av velferdsgoder som punkt med reelle koordinater og definerer deriverbare «nyttefunksjoner». Noen ganger foretrekker de å holde seg til en R som bare er «kvasitransitiv»:

2.3.6 Kvasitransitivitet R sies å være *kvasitransitiv* hvis hjelperelasjonen P er transitiv. Transitivitet av R medfører at R også er kvasitransitiv i følge resultatet 2.3.4(1), men R kan være kvasitransitiv uten å være transitiv. Hva foretrekker man f.eks. av x eller y mg sukker i teen? Anta at man kan merke en forskjell hvis $|x-y| \geqslant 100$, men ellers ikke. Definer R ved

$$y\mathrm{R}x \Leftrightarrow y > x-100\text{; dermed er } y\mathrm{I}x \Leftrightarrow |y-x| < 100 \text{ og } y\mathrm{P}x \Leftrightarrow y \geqslant x+100$$

(Vi ser på sukkermengder der stor nok økning betyr økende preferanse.) La $y=x+60$ og $z=y+60$; da er $|y-x| < 100$, $|z-y| < 100$ men $|z-x|=120$, og dermed $x\mathrm{I}y$, $y\mathrm{I}z$, men ikke $x\mathrm{I}z$.

Derfor er I ikke transitiv. Da kan heller ikke R være transitiv i følge 2.3.4(2). Men P er transitiv, fordi $c\mathrm{P}b$ og $b\mathrm{P}a$ medfører $c-a = (c-b)+(b-a) \geqslant 100+100 = 200 \geqslant 100$, og $(c-a) \geqslant 100$ betyr $c\mathrm{P}a$.

2.4 Fellesskapets preferanserelasjon.

Vi tenker oss en mengde **A** med n kandidater eller alternativer, og en mengde **V** av v velgere, og at velger i har en preferanserelasjon R_i i **A**, $1 \leqslant i \leqslant v$.

2.4.1 Definisjon En *valgmetode* er en **funksjon $\mathcal{F}$ i de v variablene R_i:**

$$\mathrm{R} = \mathcal{F}(\mathrm{R}_1, \ \mathrm{R}_2, \cdots, \ \mathrm{R}_v)$$

Også R er en relasjon i **A**, og den tolkes som *preferanserelasjonen til fellesskapet* **V.**

2.4.2 Krav til velgernes preferanser

Om velgerpreferansene $\mathbb{R}_i$ forutsetter vi at de oppfyller to standardkrav til «minst like god som», nemlig *(i)* og *(vi)* i 2.3 (refleksivitet og transitivitet). I teorien forutsettes ofte også både *(iv)* og *(v)* (antisymmetri og kompletthet), altså at den enkelte velger uttaler seg klart om hvert enkelt par {x, y} av kandidater: m(x,y) + m(y,x) = 1. Det betyr at hverken «vet ikke» eller «like gode» godtas. Det kan være at selve opptellingsregelen, dvs. funksjonen $\mathcal{F}$ krever så klar beskjed gjennom stemmesedlene, men da kan opptelling gjøres etter at ufullstendige stemmesedler er behandlet med «symmetrisering» som nevnt i kap 1.2.

Det kan, som nevnt, tenkes situasjoner der en velger forutsettes å vurdere hvert par {x,y} av kandidater for seg, uavhengig av alle andre par; for eksempel gjelder det for dommere i enkelte idretter. Det betyr at krav (vi), transitivitet, ikke nødvendigvis er oppfylt. For normale valg er det naturlig å anta at hver enkelt velger har en transitiv preferanserelasjon $\mathbb{R}_i$, og eventuelt sette det som krav for at stemmeseddelen skal godtas. I valgordningsteorien forutsettes nesten alltid at hver velger har en transitiv $\mathbb{R}_i$.

2.4.3 To krav til valgmetodens avgjørelsesevne

Valg avholdes for mange formål, f.eks. for:

(1) å velge en eller flere representanter til en forsamling uten å rangere dem innbyrdes;
(2) å velge flere kandidater med en viss innbyrdes rangering;
(3) å rangere et visst antall kandidater som nr. 1, nr. 2, osv.

Felles for disse tilfellene er at

fellesskapets relasjon $\mathbb{R}$, «minst like god som», er en ***komplett ordning***.

Dette er ett av to hovedkrav som man gjerne vil stille til preferansevalgsmetoder. Det betyr at $\mathbb{R}$ oppfyller *(i)*, *(v)* og *(vi),* dvs. er refleksiv, komplett og transitiv.

I tilfelle (1) er det nok at $\mathcal{F}$ gir en $\mathbb{R}$ der den tilhørende $\mathbb{I}$ har nøyaktig to indifferensklasser av ønsket størrelse, klassen av de som velges og klassen av de som ikke velges.

Tilfelle (2) forekommer f.eks. hvis det skal velges r representanter x_1, x_2, …, x_r uten innbyrdes rangering fulgt av s vararepresentanter x_{r+1}, x_{r+2}, … x_{r+s}; her er det tale om s+2 indifferensklasser (de valgte representanter, de som ikke velges til noe, og mellom dem s singleton-klasser med en vararepresentant i hver).

Tilfelle (3) kan forekomme når en komité skal innstille et visst antall søkere til en ledig stilling eller når sportsjournalistene skal kåre årets idrettsutøver.

Det første hovedkravet gjelder altså resultatet valgmetoden skal levere. En uspesifisert komplett ordning $\mathbb{R}$ er et minimumskrav av teoretisk interesse. Skal man f.eks. velge r representanter og s nummererte vararepresentanter, blir det detaljerte spesifikasjoner i tillegg. Det andre hovedkravet kalles gjerne **IIA («Independence of Irrelevant Alternatives»)**.
Utgangspunktet er at for et vilkårlig par av kandidater {p, q} skal nøyaktig ett av tre inntreffe:

$p\mathbb{P}q$, $q\mathbb{P}p$ eller $p\,\mathbb{I}\,q$,

Poenget med IIA er at for å avgjøre hvilken av disse tre muligheter som inntreffer, *skal all informasjon fra stemmesedlene om en tredje kandidat r være* ***irrelevant.***

Det kan oppfattes som et strengt forbud mot å ta usaklige hensyn. Det betyr at for avgjørelsen i paret {p, q} skal det ved opptellingen være nok å kjenne til den innbyrdes rangering av p og q fra hver enkelt velgers stemmeseddel. Man kan sortere stemmesedlene i tre bunker:

Bunke 1: stemmesedlene der $p\mathbb{P}_i q$;
Bunke 2: stemmesedlene der $q\mathbb{P}_i p$;
Bunke 3: stemmesedlene der $p\mathbb{I}_i q$.

Hvis IIA holder, er avgjørelsen i det parvise oppgjør mellom p og q bestemt utelukkende av de tre bunkenes sammensetninger.

Både i teori og i praktiske valgregler gjøres ofte den forenklende antagelse at hver enkelt velgerpreferanse $\mathbb{R}_i$ skal ha egenskap (iv), dvs. være antisymmetrisk. Da blir det ingen bunke 3. Dersom lik preferanse tillates i stemmesedlene, kan man for de fleste typer av preferansevalg oppnå en slik forenkling ved symmetrisering.

For avgjørelsen innenfor {p, q} trengs bare bunkenes sammensetning. IIA betyr at valget kunne telles opp som om det hadde vært en fullstendig «turnering» av valg med to kandidater om gangen.

Et motiv for å ønske en valgordning som oppfyller IIA er at de viktigste formene for strategisk stemmegivning da ville bli umulige.

2.4.4 Eksempel Strategi 1, 2 og 3 i 1.6.1 er umulige hvis IIA er oppfylt. Grunnen er at ingen velger som deltar i Strategi 1, 2 eller 3 endrer sin rangering innbyrdes av p = vinneren før endringen og q = vinneren etter endringen.

Strategi 1: Seieren går fra p=z til q=y, men ingen velger endrer rangering i paret {z,y}.
Strategi 2: Seieren går fra p=y til q=x, men ingen velger endrer rangering i paret {y,x}.
Strategi 3: Seieren går fra p=z til q=x, men ingen velger endrer rangering i paret {z,x}.

En vellykket anvendelse av Strategi 1, 2 eller 3 innebærer dermed at IIA ikke er oppfylt; q går jo forbi p uten at strategien fører til noen flytting mellom de tre bunkene.

Det viser seg å være en grunnleggende umulighet å lage en brukbar metode for preferansevalg som oppfyller begge hovedkravene, altså IIA og en komplett ordning. Dermed blir det et sentralt tema hvilke praktiske konsekvenser ulike brudd på kravene må antas å få og hvilke brudd man bør akseptere som de minste onder i en ufullkommen verden.

2.4.5 Symmetrikrav til en valgordning Det er vanlige rettferdighetskrav til en valgordning at $\mathcal{F}$ oppfyller to *symmetrikrav*, litt upresist formulert som at alle velgere behandles likt og at alle kandidater behandles likt. Men det er klart at ikke begge krav kan oppfylles samtidig dersom det skal være helt sikkert at $\mathcal{F}$ gir en entydig vinner.

$\mathcal{F}$ sies å være *«anonym»* dersom det er slik at hvis to velgere bytter stemmeseddel, blir fellesskapets relasjon $\mathbb{R}$ uforandret. Hvis alle velgere slipper sin stemmeseddel i samme urne, uten at seddelen har noen peker til velgeren, så må valgmetoden være anonym. Men også en avstemning i full offentlighet kan være anonym. Avstemninger der en møteleder har dobbeltstemme ved stemmelikhet er et praktisk eksempel på en *ikke-anonym* $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ sies å være *«nøytral»* dersom ombytte av kandidatene x og y på *alle* stemmesedler uten andre endringer i stemmesedlene kun resulterer i at x og y bytter plass i fellesskapsrelasjonen $\mathbb{R}$:

$$x\mathbb{R}y,\ x\mathbb{R}z \text{ og } w\mathbb{R}x \text{ før ombyttingen } \Leftrightarrow\ y\mathbb{R}x,\ y\mathbb{R}z \text{ og } w\mathbb{R}y \text{ etter ombyttingen:}$$

x og y bytter altså også roller i valgresultatet, og *det er ingen andre endringer*. Valg med lovpålagt kjønnskvotering er et praktisk eksempel på en *ikke-nøytral* $\mathcal{F}$. (Hvis kandidatene x_1, x_2, …, x_s er blitt valgt og kvoteringskravet er oppfylt, så ville nøytralitetsegenskapen medføre at x_i kunne skiftes ut med y_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, hvor alle y_i er av samme kjønn.)

Med ulike valgsituasjoner er det naturlig å sette ulike krav til valgmetoden $\mathcal{F}$, dvs. til den felleskapspreferansen $\mathbb{R}$ som $\mathcal{F}$ resulterer i. Et ønske om nøytralitet og anonymitet er forståelig i de fleste situasjoner. Men hvis $\mathcal{F}$ er både nøytral og anonym, kan preferanse-fordelingen hos velgerne være slik at alle kandidater nødvendigvis må settes likt, altså $x\mathrm{I}y$ for alle x og y. Det vil f.eks. være tilfelle hvis v=n! velgere rangerer n kandidater på alle n! måter som oppfyller kravene *(i)*, *(iv)*, *(v)* og *(vi).* For at $\mathcal{F}$ med sikkerhet skal gi en meningsfylt avgjørelse, må en opptellingsmetode som er både nøytral og anonym, i $\mathcal{F}$ være supplert med en regel for *«tie-break».*

Ved enkelte valg praktiseres loddtrekning mellom kandidater som står likt, men det introduserer et element av tilfeldighet som ikke dekkes av den generelle valgmodellen med en «deterministisk» $\mathcal{F}$. Men ved å etablere en rekkefølge blant kandidatene på forhånd, f.eks. ved loddtrekning, kan man benytte den til «tie-break» og dermed justere definisjonen av $\mathcal{F}$. F.eks. ved delt førsteplass i et pluralitetsvalg, kan man således alltid finne en enkelt vinner og likevel se på $\mathcal{F}$ som deterministisk.

3 Matrisesumsmetoder

Med matrisesumsvalg menes valg der hver velgers preferanse kan uttrykkes ved en nxn-matrise, der n er antall kandidater, og der valgresultatet bestemmes av matrisesummen **M**. Valgmetoder er generelt en «aggregering» over velgernes preferanser, og når det aggregeres via **M,** så får man et overblikk over sider ved valgets struktur som valgmetoden bygger på. Samtidig kan en del informasjon gå tapt. Bordavalg og en del Condorcetmetoder er matrisesumsvalg, men noen Condorcetmetoder krever informasjon som forsvinner når det aggregeres via **M**. Borda-opptellingen aggregerer faktisk videre til høyere nivå, og enda mer informasjon går tapt.

3.0.1 Eksempel Da Stortinget 8. oktober 1992 voterte over plasseringen av ny hovedflyplass, forelå fem forslag. Reelt sto striden mellom tre av dem: F = «delt løsning» (Fornebu og Gardermoen); G = Gardermoen; H = Hobøl. Partienes rangeringer var ganske klar. Ut fra debatten var det naturlig å regne med følgende preferansefordeling blant de v = 165 representantene:

FGH 0 representanter;
FHG 42 representanter (Sp/SV/KrF);
HFG 22 representanter (FrP);
HGF 37 representanter (Høyre);
GHF 1 representant (Aune, Finnmarkslisten);
GFH 63 representanter (Arbeiderpartiet).

Stortinget stemmer etter en *seriemetode*: *ja* eller *nei* til ett forslag om gangen. Metoden fører gjerne til at en Condorcetvinner blir valgt. Men hvordan ville det ha gått dersom denne preferansefordeling hadde ligget til grunn for et Bordavalg eller et Condorcetvalg med opptelling av stemmesedler? En matrisefremstilling av de mulige rangeringene gir en god oversikt. De 42 representantene i koalisjonen kunne ha levert hver sin stemmeseddel med en 3x3-matrise:

	F	G	H	Bordapoeng
F	**0**	**1**	**1**	**2**
G	**0**	**0**	**0**	**0**
H	**0**	**1**	**0**	**1**

Bordapoengene finnes ved addisjon i hver linje i 3x3-matrisen. Summen **M** av de 165 3x3 matriser viser hvordan det ville gått

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 42 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 22 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 37 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 63 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 64 & 105 \\ 101 & 0 & 64 \\ 60 & 101 & 0 \end{pmatrix} \text{ med Bordasummer } \begin{pmatrix} 169 \\ 165 \\ 161 \end{pmatrix}$$

M viser en Condorcet-sykel der F slår H (105 – 60), H slår G (101 – 64), mens G slår F (101 – 64). Slike «*roterende flertall*» (som utgjøres av forskjellige partier) er sjeldne, men viser bakgrunnen for det som skjedde 8. oktober 1992. Summering innen linjene innebærer ytterligere «aggregering» av de individuelle preferansene og lar F fremstå som Borda-vinner. Dermed skjules sykelen.

Flertallsavgjørelser kan være i konflikt med et rimelig ønske om rasjonalitet selv om hver enkelt velger har en klar rangering av kandidatene, og roterende flertall omtales ofte som *Condorcets paradoks.* Men forbindelsen mellom Bordavalg og Condorcetvalg er vel så viktig i normalsituasjonen, der det eksisterer en Condorcetvinner, og er tema for del 3.1.

Såkalte «*godtakelsesvalg*» kan oppfattes som spesielle Bordavalg. Ved å behandle dem med matrisesumsmetoden i del 3.2 (etter symmetrisering, omtalt i del 1.2), får vi grunnlag for å behandle alle poengmetoder på samme måte i del 3.3.

3.1 Condorcet og Borda

Den enkleste matrisesumsmetoden gjelder Condorcetvalg og Bordavalg, og viser hvordan disse to formene for preferansevalg er knyttet sammen i en normal situasjon med en Condorcet-vinner.

Vi illustrerer med et tenkt valg med v = 1000 velgere og n = 3 kandidater, a, b og c.

3.1.1 Eksempel

abc 226; acb 39; cab 160; cba 214; bca 62; bac 299.

Som i eksemplet fra Stortingsvoteringen, viser vi også her opptellingen på matriseform:

$$226 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 39 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 160 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 214 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 62 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 299 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 425 & 564 \\ 575 & 0 & 587 \\ 436 & 413 & 0 \end{pmatrix} \text{ med Bordasummer } \begin{pmatrix} 989 \\ 1162 \\ 849 \end{pmatrix}$$

Bordasummene er summene i hver linje i **M**; b er Borda-vinner og dessuten Condorcet-vinner, dvs. b vinner begge sine parvise oppgjør. En Condorcet-vinner behøver ikke ha best Bordasum, men det er likevel en forbindelse mellom de to metodene:

En Condorcet-vinner har alltid høyere Bordasum enn gjennomsnittet.

(Gjennomsnittet er 1000 Bordapoeng når (n, v) = (3, 1000).) Forbindelsen innser vi slik:

Hver velger deler ut i alt
(n-1) + (n-2) + … + 1 + 0 = n(n-1)/2 Bordapoeng til de n kandidatene.
De v velgerne deler derfor ut tilsammen vn(n-1)/2 Bordapoeng.
Gjennomsnittlig Bordasum for de n kandidatene er altså v(n-1)/2.
Men en Condorcet-vinner får over v/2 Bordapoeng i hvert av sine n-1 parvise oppgjør;
Condorcet-vinnerens linjesum i **M** overstiger dermed v(n-1)/2.

Denne forbindelsen ligger bak to kjente Condorcet-metoder.

3.1.2 Baldwins metode består i at man regner ut alle Bordasummene, eliminerer kandidaten med lavest Bordasum fra alle stemmesedler, og gjentar prosedyren inntil bare én kandidat gjenstår som Baldwin-vinner. I eksemplet elimineres c, hvoretter b vinner en «finale» mot a.

3.1.3 Nansons metode består i at man regner ut alle Bordasummene, eliminerer kandidatene med middels eller lavere Bordasum fra alle stemmesedler, og gjentar prosedyren inntil bare én kandidat gjenstår som Nanson-vinner. I eksemplet elimineres både a og c, og b blir vinner uten noen finale.

En sentral egenskap ved de to metodene er at en Condorcet-vinner aldri kan bli eliminert, og derfor må bli både Baldwin-vinner og Nanson-vinner. De to metodene har også en annen egenskap til felles: De kårer en vinner selv om det ikke eksisterer noen Condorcet-vinner. Med

Condorcet-metoder menes metoder som forener de to egenskapene. Hvis opptellingen etter Baldwins eller Nansons metode bare registrerer Borda-summene underveis, uten å beregne **M**, fremgår det ikke om vinneren faktisk også er Condorcet-vinner. Man kan altså kåre f.eks. en Nanson-vinner uten å vite om det eksisterer noen Condorcet-vinner.

– – – – – – – –

Borda-metoden er sårbar for Strategi 2, men i Eksempel 3.1.1 har a i utgangspunktet under middels Borda-sum, og kan derfor ikke komme ut på topp ved at noen velgere skifter fra abc til acb. Hvis derimot b, a og c er nr, 1, 2 og 3 i Borda-sum og a har Borda-sum over gjennomsnittet (i eksemplet over 1000) og dessuten har nok abc-velgere, er det mulig å bli Borda-vinner gjennom overføring fra abc til acb.

Med n>3 kandidater oppstår flere muligheter for Strategi 2, f.eks. å sette en sterk konkurrent på sisteplass. Dessuten kan «strategisk nominering» tillate en politisk gruppering å utnytte utflankeringseffekten (se del 1.3).

Condorcetmetodene, med sine parvise sammenligninger, gjør utflankering virkningsløs. Men mulighetene for å nå frem med Strategi 2 er et viktig tema.

Med et rimelig stort antall uavhengige velgere forekommer det uhyre sjelden at det ikke er noen Condorcet-vinner, og vi skal senere se at dersom det er en reell mulighet for en Condorcet-sykel, så er det tre kandidater med tre svært jevne parvise oppgjør. Valgresultatet blir da i alle fall avhengig av rene tilfeldigheter, og forsøk på Strategi 2 for en kandidat vil være til skade snarere enn til hjelp. Derfor bør man konsentrere en undersøkelse av Strategi 2 om normaltilfellene, der det er en klar Condorcet-vinner: Også teoretiske muligheter for å nå frem med Strategi 2 er av interesse, fordi de kan svekke velgernes tillit til valgmetoden.

Når det er en Condorcet-vinner w, kan ikke velgere som foretrekker en annen kandidat q bruke Strategi 2 og oppnå at q slår w i parvis oppgjør. Den eneste mulighet ligger i å få en tredjekandidat u som allerede beseires av q til å beseire w i parvis oppgjør gjennom en overgang fra qwu til quw. I så fall klarer velgerne til q å skape en Condorcet-sykel $u\mathrm{P}w\mathrm{P}q\mathrm{P}u$, men strategien lykkes bare hvis den spesielle Condorcet-metoden som er vedtatt i valgreglementet da også gjør q til vinner av sykelen.

3.1.4 Eksempel

I valget fra eksempel 3.1.1, er b Condorcet-vinner fulgt av a og c. Bare a kan ha håp om å vinne med Strategi 2, og det innebærer å flytte y velgere fra abc til acb. Det oppstår en ny matrise **M**,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 425 & 564 \\ 575 & 0 & 587-y \\ 436 & 413+y & 0 \end{pmatrix} \text{ med nye Bordasummer } \begin{pmatrix} 989 \\ 1162-y \\ 849+y \end{pmatrix}$$

Med Nansons metode er strategiprosjektet håpløst, for med Bordasum $\leqslant$1000 (gjennomsnittet), blir nemlig a omgående eliminert, uansett hva y er.

Med Baldwins metode lar det seg gjøre, for med y$\geqslant$174 oppnås at b får lavest Bordasum og blir eliminert; i finalen vinner så a over c med 564 mot 436.

Hvorfor bør vi se på Strategi 2 i Condorcetvalg som et viktig tema? Er det grunn til å tro at 174 av de 226 velgerne i eksemplets kategori abc vil skifte til acb i et Baldwin-valg? Strategi 2 i praksis kan sette urealistiske krav både til forhåndskunnskap om preferansefordelingen, til overtalelser og til gjennomføring av strategien.

Men med et demokratisk innsyn i valgopptellingen, ligger det åpent for kommentarer og kritikk, både saklig og usaklig. Uten Strategi 2 vinner b. Hvordan vil de velgere som stemte abc reagere når de får vite at ved å sette b foran c, så ødela de for sin egen favoritt, a? Vil velgere generelt bli redde for å rangere oppriktig? Velgernes tillit til en valgmetode kan svekkes hvis en analyse etter et valg kan fremstilles som at en velgergruppe er blitt straffet for å stemme oppriktig.

Det viser seg at enhver Condorcetmetode vil tillate at Strategi 2 fører frem i noen preferansefordelinger, men ulike metoder tillater det i svært ulik grad. Er Nansons metode mer robust enn Baldwins? Eksemplet kan tyde på det, men det eksisterer også preferansefordelinger der Nansons metode kan utnyttes til Strategi 2, mens Baldwins ikke kan utnyttes. På den annen side er det lett å se at hvis begge kan utnyttes, så krever Baldwins flere skift fra qwu til quw enn det Nansons gjør: Det skal flere skift til for å drive Condorcetvinneren w til dårligste Bordasum enn bare til en Bordasum under gjennomsnittet.

3.2 Godtakelsesvalg (Approval Voting)

3.2.1 Definisjon I et *godtakelsesvalg* pålegges hver velger å uttrykke en ganske spesiell ufullstendig preferanserelasjon: Velger j skal ha en refleksiv, komplett og transitiv R_j slik at indifferensrelasjon I_j har *nøyaktig to indifferensklasser*.

Definisjonen betyr at velgeren skal dele kandidatmengden i to klasser, klassen av *approberte* (godtatte) kandidater og klassen av *ikke-approberte* (ikke godtatte). En klar preferanse, $x\mathrm{P}_j y$, betyr at velger j approberer kandidat x men ikke kandidat y. At x er minst like god som y i parvis sammenligning, altså $x\mathrm{R}y$, betyr at

mengden $\{i|x\mathrm{P}_i y\}$ har minst like mange velgere som mengden $\{j|y\mathrm{P}_j x\}$.

Dette er ekvivalent med at x har minst like mange approberinger som y. Fellesskapets relasjon R rangerer kandidatene etter antall approberinger. Dermed er R transitiv, og parvise sammenligninger kan ikke gi Condorcet-sykler.

3.2.2 Noen egenskaper ved godtakelsesvalg

For hver enkelt av de n kandidatene må velgeren altså avgjøre om det skal approberes eller ikke approberes. Det gir i alt

$2^n - 2$ mulige stemmesedler.

Vi ser da bort fra mulighetene av å approbere alle eller ingen. Det gjør ellers ingen forskjell om en velger tillates å approbere alle eller ingen av kandidatene, for det bidrar jo ikke til å skille dem ad, og stemmen fra en slik velger fremstår for så vidt som en blank stemme. (Det kan saktens likevel være grunn til å registrere en slik velger som valgdeltaker, idet selve fremmøtet kan oppfattes som en ytring til støtte for at det avholdes valg.)

Hvordan godtakelsesvalg vil virke i praksis avhenger i høy grad av velgernes tilpasning til regelverket. I et tenkt ekstremtilfelle, der alle velgere approberer nøyaktig én kandidat, vil man få et pluralitetsvalg.

Velgere kan savne adgangen til å sette a klart foran b og samtidig b klart foran c. Men om man tillater tre indifferensklasser i velgernes preferanser, blir Condorcet-sykler mulige, som i valg med n=v=3. Muligheten forsvinner altså når velgerne pålegges å ha høyst to indifferensklasser.

3.2.3 Bordaopptelling ved godtakelsesvalg

La antall kandidater være n, og anta at en velger approberer k av dem. Hvordan håndteres en slik velgerpreferanse når det symmetriseres og telles etter Bordas metode? Symmetriseringen leder til at de k approberte kandidatene får i alt (n-1) + (n-2) + … + (n-k) poeng som de deler likt, mens de n-k ikke-approberte får resten, i alt (n-k-1) + (n-k-2) + … + 1 + 0 poeng som de deler likt. Vi starter med å observere hvor poengene fra en enkelt velger tar veien ved et lite antall kandidater, n = 6, når antall approberte er k = 1, 2, 3, 4, 5:

Antall approbert	Bordapoeng	Antall ikke approbert	Bordapoeng
1	5 p	5	$\frac{4+3+2+1+0}{5}$ = 2 p
2	$\frac{5+4}{2}$ = 4,5 p	4	$\frac{3+2+1+0}{4}$ = 1,5 p
3	$\frac{5+4+3}{3}$ = 4 p	3	$\frac{2+1+0}{3}$ = 1 p
4	$\frac{5+4+3+2}{4}$ = 3,5 p	2	$\frac{1+0}{2}$ = 0,5 p
5	$\frac{5+4+3+2+1}{5}$ = 3 p	1	0 p

Poengdifferensen mellom approbert og ikke-approbert er konstant lik 3 Bordapoeng,

uavhengig av hvor mange kandidater velgeren approberer.

Generelt, med n kandidater, hvorav k blir approbert av velgeren,

får hver av de approberte $\frac{(n-1)+\cdots+(n-k)}{k} = n - \frac{k+1}{2}$ poeng,

mens hver av de ikke-approberte får $\frac{(n-k-1)+\cdots+0}{n-k} = \frac{n}{2} - \frac{k+1}{2}$ poeng.

Poengdifferensen mellom approbert og ikke-approbert er altså generelt

konstant lik n/*2, uavhengig av verdien av k*.

Den enkelte velger gir hver av sine approberte kandidater en fordel på n/2 Bordapoeng i forhold til hver av sine ikke-approberte. Det betyr at

et godtakelsesvalg kan arrangeres som et Bordavalg med symmetrisering.

Det er antakelig mer praktisk å telle antall approberinger enn å telle Bordapoeng. Men ved å se på godtakelsesvalg som et Bordavalg med en betydelig innskrenkning av velgernes frihet til å velge preferanse, får man et middel til å forstå noen av egenskapene til godtakelsesvalg.

3.2.4 Godtakelsesvalg som matrisesumsmetode

Dersom en velger setter kandidatene x og y i samme indifferensklasse, så vil symmetrisering som beskrevet i del 1.2 gi et antall «ministemmesedler» med fullstendig rangering. Vi skal betrakte hver av dem som en Bordastemmeseddel, og bruker matriseformen. På halvparten av dem settes da x foran y, og på den andre halvparten settes y foran x. Når vi så igjen erstatter disse ministemmesedlene med deres matrisesum, får vi derfor ½ Borda-poeng i de to cellene (x,y) og (y,x). Med 6 kandidater, som i 3.2.2, blir det 5 typer av stemmesedler. Her vises én av hver type, med Borda-poeng lik summene innenfor de enkelte horisontale linjer:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&2&2&2&2&2\\0&0&1&1&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&1&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}5\\2\\2\\2\\2\\2\end{matrix}\qquad \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2&2&2&2\\1&0&2&2&2&2\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}4{,}5\\4.5\\1.5\\1.5\\1.5\\1.5\end{matrix}\qquad \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1&2&2&2\\1&0&1&2&2&2\\1&1&0&2&2&2\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}4\\4\\4\\1\\1\\1\end{matrix}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1&1&2&2\\1&0&1&1&2&2\\1&1&0&1&2&2\\1&1&1&0&2&2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}3.5\\3.5\\3.5\\3.5\\0.5\\0.5\end{matrix}\qquad \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&2\\1&0&1&1&1&2\\1&1&0&1&1&2\\1&1&1&0&1&2\\1&1&1&1&0&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}3\\3\\3\\3\\3\\0\end{matrix}$$

For oversiktens skyld vises bare en spesiell stemmeseddel-matrise innen hver type, der de approberte kandidater har lavere «startnummer» enn de ikke approberte. Det er altså 6, 15, 20, 15, 6 matriser med henholdsvis 1, 2, 3, 4, 5 approberte kandidater. Totalt antall muligheter er dermed 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 62 = 2^6 – 2.

Alle disse 62 matrisene har en ganske spesiell egenskap. La G med celler g(*a, b*) være en vilkårlig av dem, og mer generelt, en av de 2^n – 2 stemmeseddelmatrisene i et godtakelsesvalg med n kandidater. Velg to vilkårlige linjer i G, linjene *a* og *b*. Linjesummene L(*a*) og L(*b*) står i søylen med Bordapoeng. Resultatet av det parvise oppgjøret mellom kandidatene a og b leses av differensen g(*a, b*) – g(*b, a*). Generelt gjelder:

$$L(a) - L(b) = (n/2)\cdot[g(a,b) - g(b,a)] \qquad (*)$$

Det er bare to forskjellige tilfeller å verifisere. Det første tilfelle er at kandidatene a og b er i samme indifferensklasse, slik at g(*a, b*) = g(*b, a*) og dessuten L(*a*) = L(*b*). Begge sider blir 0, og likheten er bekreftet. Det andre tilfelle er at velgeren rangerer forskjellig, og setter a foran b. Da blir g(*a, b*) – g(*b, a*) = 1 og dessuten L(*a*) – L(*b*) = n/2 (=3 i de ovenstående matrisene), og likheten er dermed bekreftet.

Egenskapen (*) er viktig fordi den overføres til (veide) summer av stemmeseddelmatrisene. Vi ser spesielt på summen H av de fem matrisene med tilhørende Borda-poeng:

$$H = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&6&7&8&9&10\\4&0&6&7&8&9\\3&4&0&6&7&8\\2&3&4&0&6&7\\1&2&3&4&0&6\\0&1&2&3&4&0\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}20\\17\\14\\11\\8\\5\end{matrix} \qquad (**)$$

Som illustrasjon av (*) med n = 6 kan vi f.eks. ta

celledifferensen h(2,6) – h(6,2) = (1/2)·[9 – 1] = 4 og

differensen mellom linjesummene L(2) – L(6) = 17 – 5 = 12 = 3·4 = (n/2) · [h(2,6) – h(6,2)]

H svarer til at fem velgere sammen rangerer kandidatene med 5+3·(6-k) Bordapoeng til kandidat k. Man kan forestille seg at de alle hadde samme fullstendige rangering, men satte forskjellige skiller mellom «approbert» og «ikke approbert». Hvis alle velgerne organiserte seg i slike grupper på fem, ville det foreligge et Bordavalg der hver gruppe opptrer som en velger, selv om det altså brukes en annen type matriser enn i eksemplene 3.0.1, 3.1.1 og 3.1.4.

Også matrisesummen **M** får egenskapen (*), og i motsetning til de nevnte eksemplene, finner man derfor ikke Condorcet-relasjonen ved å se på differensen mellom celleparene (a,b) og (b,a).

Avhengig av hvordan velgerne tilpasser seg regelverket, kan altså et godtakelsesvalg arte seg på mange vis; både pluralitetsvalg og Bordavalg er blant mulighetene, i hvert fall teoretisk.

Mer realistisk, kan man tenke seg at en velger som ellers ville hatt en fullstendig rangering av kandidatene, bestemmer seg for å approbere sin høyest rangerte blant de kandidatene som antas å ha reell vinnersjanse, samt alle kandidater som velgeren rangerer høyere. Stemmeseddelen blir da et kompromiss mellom instrumentell og ekspressiv stemmegivning.

Frykten for å skade sin favorittkandidat ved også å approbere en man regner som en god nummer to kan influere på stemmegivningen, men Bordametodens incentiv til å lage en større poengforskjell er borte. Godtakelsesvalg er tatt i bruk i flere sammenhenger, bl.a. i noen store profesjonelle organisasjoner.

3.3 Andre poengmetoder

Alle poengmetoder kan arrangeres som matrisesumsvalg, og stemmeseddelmatrisene kan enkelt bygges opp av dem som i del 3.2 ble brukt til godtakelsesvalg. Det skal altså gis p_i poeng for plass i på stemmeseddelen, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$.
Her illustreres fremgangsmåten ved et eksempel kjent fra parlamentsvalg på Nauru:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Nauru	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6

Vi trenger differensene:

$P_1 - P_2$	$P_2 - P_3$	$P_3 - P_4$	$P_4 - P_5$	$P_5 - P_6$
60/120	20/120	10/120	6/120	4/120

Dernest adderer vi de fem matrisene i del 3.2 med disse differensene som vekter:

$$(1/120 \left\{ 30\cdot\begin{pmatrix} 0&2&2&2&2&2\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 0&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} + 10\cdot\begin{pmatrix} 0&1&2&2&2&2\\ 1&0&2&2&2&2\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 0&1&1&2&2&2\\ 1&0&1&2&2&2\\ 1&1&0&2&2&2\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. 3\cdot\begin{pmatrix} 0&1&1&1&2&2\\ 1&0&1&1&2&2\\ 1&1&0&1&2&2\\ 1&1&1&0&2&2\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&2\\ 1&0&1&1&1&2\\ 1&1&0&1&1&2\\ 1&1&1&0&1&2\\ 1&1&1&1&0&2\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= (1/120)\cdot\begin{pmatrix} 0&80&90&95&98&100\\ 20&0&60&65&68&70\\ 10&40&0&55&58&60\\ 5&35&45&0&53&55\\ 2&32&42&47&0&52\\ 0&30&40&45&48&0 \end{pmatrix}.$$

Merk at nøyaktig én av de fem matrisene i summen skaper forskjell mellom den først-rangerte og den andre-rangerte, nøyaktig én skaper forskjell mellom den andre-rangerte og den tredje-rangerte, osv. Summen er altså én av 6! = 720 mulige stemmeseddelmatriser ved et Nauruvalg med n = 6 kandidater. I parvise sammenligninger registrerer en velger 80/120 – 20/120 mellom sin først-rangerte og andre-rangerte kandidat, og 68/120 – 32/120 mellom sin andre-rangerte og femte-rangerte kandidat osv. Når de fem søylene med poengsummer adderes med samme vekter, får vi den tilsvarende poengsøyle:

$$\left(\frac{60}{120}\right)\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\2\\2\\2\\2\end{pmatrix}+\left(\frac{20}{120}\right)\cdot\begin{pmatrix}4.5\\4.5\\1.5\\1.5\\1.5\\1.5\end{pmatrix}+\left(\frac{10}{120}\right)\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\4\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{6}{120}\right)\cdot\begin{pmatrix}3.5\\3.5\\3.5\\3.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}+\left(\frac{4}{120}\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\\0\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{120}\right)\cdot\begin{pmatrix}103+360/1\\103+360/2\\103+360/3\\103+360/4\\103+360/5\\103+360/6\end{pmatrix}$$

Poengsøylen bekrefter at en stemmeseddelmatrise gir de rette forhold mellom poengsprangene nedover velgerens rankingliste. Om man gir 1/k poeng til rangert nr k eller a+b/k poeng, så blir valgresultat det samme når a og b er konstanter og b>0.

Ved et Nauruvalg er alle sprangene fra den førstrangerte og nedover langt større enn alle andre sprang; pluralitetsvinneren har en vesentlig større fordel enn ved Bordavalg.

Matrisesummen **M** illustrerer poengmetodenes generelle sårbarhet for Strategi 2. Anta kandidat w ligger an til å vinne, men er svært nær kandidat z i poengsum. Hvis $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$, så har alle velgere innflytelse på alle parvise oppgjør. Hvis avstanden mellom z og w er liten nok, så kan enhver velger som ikke allerede har w på sisteplass, få z til å slå w ved å flytte w én plass mot sisteplass. Men hvis kandidattallet n er stort og z og w er hovedmotstandere, og en velgergruppe flytter w fra andre til siste plass, så er virkningen stor og incentivet til å prøve strategi 2 betydelig.

3.3.1 Eksempel

Ulike poengvalg kan kombineres ved at den enkelte velger selv definerer hvilken poengskala $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$ som skal brukes på velgerens stemmeseddel. Det dreier seg altså om karaktersetting, som i noen idretter. For at dette skal få fornuftig mening, må det defineres en «range». I fremstillinger av *Range Voting* ser man ofte en karakterskala fra 0 til 99:

$$99 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 0$$

Stemmeseddelen fra en velger kan uttrykkes som en stemmeseddelmatrise bestemt av de poengene som velgeren har tatt i bruk. Ovenstående stemmeseddelmatrise for Nauruvalg passer med en «range» av lengde (1/1 – 1/6)·360/120. En skalering (multiplikasjon av matrisen med en passende konstant) gir den ønskede avstand mellom beste og dårligste karakter.

Dette betyr at også Range Voting er et matrisesumsvalg. F.eks. kan en velger influere på valgresultatet nøyaktig som i et Bordavalg ved å bruke en skala med jevne sprang, altså

$$p_1 - p_2 = p_2 - p_3 = \ldots = p_{n-1} - p_n$$

Velgeren har da samme adgang til Strategi 2 som i et Bordavalg. Men strategisk stemmegivning i Range Voting bør defineres slik at den også omfatter et lurt valg av karakterskala.

4 Sirkeldelingsmodeller

Modellene for preferansefordeling i kapittel 1 er tilpasset Blacks *entoppethet*. I Blacks modell kommer kandidatene i rekkefølge på en rett linje, og hver velger stemmer slik at ingen kandidat med en nabo på hver side rangeres etter begge to.

Det blir som om alle velgere er enige om kandidatenes rekkefølge på linjen, men ellers kan ha ulike oppfatninger om den nøyaktige plassering, og den enkelte velger så har sitt eget ståsted og rangerer kandidatene etter sin egen oppfatning av deres avstander fra velgerens ståsted. Resultatet blir at hvis kandidat b står mellom kandidatene a og c, så vil ingen velger rangere dem i rekkefølgene acb eller cab; fra ethvert mulig velgerståsted er jo avstanden til a eller til c større enn avstanden til b.

Blacks modell er naturlig hvis man legger til grunn at velgerne oppfatter det politiske landskap som én-dimensjonalt med kandidatene oppstilt på en rekke, f.eks. fra det politiske ytre venstre til det ytre høyre. Men velgere flest oppfatter nok det politiske landskap som flerdimensjonalt, og det er normalt at alle 6 rangeringer av et kandidattrippel {a, b, c} forekommer.

– – – – – – – –

For tre kandidater vil svært ofte en modell for *perfekt sirkeldeling* passe rimelig bra med en observert preferansefordeling. Vi tenker oss at kandidatene a, b, og c er plassert som punkt innenfor en sirkel S. Vi lar her S ha sentrum i (0,0) og radius 1. *Kandidatpunktene* er hjørner i et *kandidattriangel* og S deles så i 6 deler av de tre midtnormalene på kandidattriangelets sider. Midtnormalene danner korder i sirkelen og skjærer hverandre i ett punkt P. (P er sentrum for *den omskrevne sirkel* til kandidattrianglet). Vi tenker oss velgerne jevnt fordelt i sirkelen, og at hver velger rangerer a, b og c etter avstand fra sitt eget ståsted; kordene i Figur 4.0.4 (i) deler den i seks deler proporsjonale med antall velgere i hver kategori.

Åpenbart kan de tre kandidatpunktene plasseres på flere måter og gi nøyaktig de tre samme kordene idet kandidattrianglet kan forstørres eller forminskes mens kordene beholdes. Kordene i Figur 4.0.1 (i) er beregnet ut fra plassering av kandidatpunktene:

a i (-0.2, 0.3); b i (0.4, 0.2); c i (-0.2, -0.5).

Tilsvarende preferansefordeling i form av en *stemmevektor* er (i) i følgende tabell:

	abc	**acb**	**cab**	**cba**	**bca**	**bac**	**|T|/|S|**
(i)	1989	1289	2087	1313	965	2357	0.00000000014
(ii)	2389	989	2287	813	865	2657	0.001865
(iii)	2212	1166	2110	990	688	2834	0.00000000365

4.0.1 Tabell Stemmevektorer i, ii, iii som illustreres i Figur 4.0.4, avrundet til heltallskomponenter og v=10000 velgere. Vi tenker på (i) som en valgforutsigelse, og lar (ii) i tabellen være stemmevektoren som observeres ved valget. For tydelighets skyld forestiller vi oss avvik i hele hundretall i hver enkelt komponent. Observasjonen (ii) passer ikke særlig godt med noe kandidattriangel. Men (iii) er en approksimasjon til (ii) som bevarer antall førsteplasser og andreplasser for hver kandidat og som dessuten samsvarer godt med et passende kandidattriangel. Høyre kolonne gir et mål for hvor godt modellen med kandidattrippel og eksakt sirkeldeling passer.

Figur 4.0.4 (i) er en modell for *perfekt sirkeldeling* og litt ettertanke gjør det klart at modellen ikke kan ventes å passe med alle observerte data. Med et fast antall velgere, her v = 10000, er nemlig stemmefordelingen bestemt av *fem* uavhengige *parametre*, f.eks. antall velgere bak de fem rangeringene abc, acb, cab, cba, og bca; deretter kan vi regne ut hvor mange det er med rangering bac. Men den geometriske modellen i Figur 4.0.4 (i) beskrives av bare *fire* parametre. F.eks. kan første parameter være y-koordinaten for korden som er tegnet horisontalt i Figur 4.0.4 (i), andre parameter kan være x-koordinaten for kordenes fellespunkt P, tredje og fjerde parameter kan være vinklene mellom de to skrå-kordene og den horisontale korden. En modell med fire parametere kan ikke ventes å være fleksibel nok til å passe over alt i en mengde av mulige data som beskrives med fem parametere.

4.0.2 Piktogrammet Hvis vi derimot aksepterer å dele sirkelen med tre korder som skjærer hverandre parvis innenfor sirkelen, kan vi få seks deler langsmed periferien, som i areal er *eksakt proporsjonale* med stemmetallene, samt en *unntakstrekant* T avgrenset av kordene inne i sirkelen; denne figuren er éntydig bestemt av stemmevektoren. Vi skal kalle en sirkel med tre korder som skjærer hverandre inne i sirkelen, men ikke nødvendigvis i samme punkt, for et *piktogram*. Figur 4.0.4 (i, ii, iii) er piktogrammene for (i, ii, iii) i Tabell 4.0.1.

Bare i spesialtilfellet der T skrumper inn til et punkt P, er det *perfekt sirkeldeling*. Det er da lett å konstruere et tilsvarende kandidattriangel. Det er essensielt at de seks velgerkategoriene kommer i samme sykliske orden i piktogram som i en modell med et kandidattriangel. Området xyz, som svarer til velgerne med preferanse xyz, har som naboer yxz og xzy.

En algoritme for å bestemme piktogrammet for en gitt stemmevektor beskrives i del 4.1, og mer informasjon finnes i et appendiks.

Vår tenkte valgvektor (ii) er en temmelig stor perturbasjon av valgforutsigelsen (i), men unntaks-trekanten T i piktogrammet, Figur 4.03 (ii), dekker likevel bare en andel |T|/|S| = 0.001865 av sirkelen. Vi søker nå en stemmevektor med perfekt sirkeldeling som en approksimasjon til (ii), og setter da (|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|)

= (2389 – k, 989 + k, 2287 – k, 813 + k, 865 – k, 2657 + k)

Mens k varierer, bevares antall første-, annen- og tredje-stemmer for hver enkelt kandidat. F.eks. vil a's velgere omfordele seg litt når det gjelder deres subsidiære standpunkt og k av dem flytter fra abc til acb. Det bidrar til å klemme sammen unntakstrekanten T i Figur 4.0.4 (ii), og tilsvarende er det for velgerne til b og c. Vi undersøker så hvordan |T|/|S| varierer med k ved å bruke den nevnte algoritmen. Et utsnitt av resultatene er slik:

k	**50**	**150**	**177**	**200**	**300**
|T|/|S|	0.0009338	0.0000395	0.0000000036	0.0000300	0.0008954

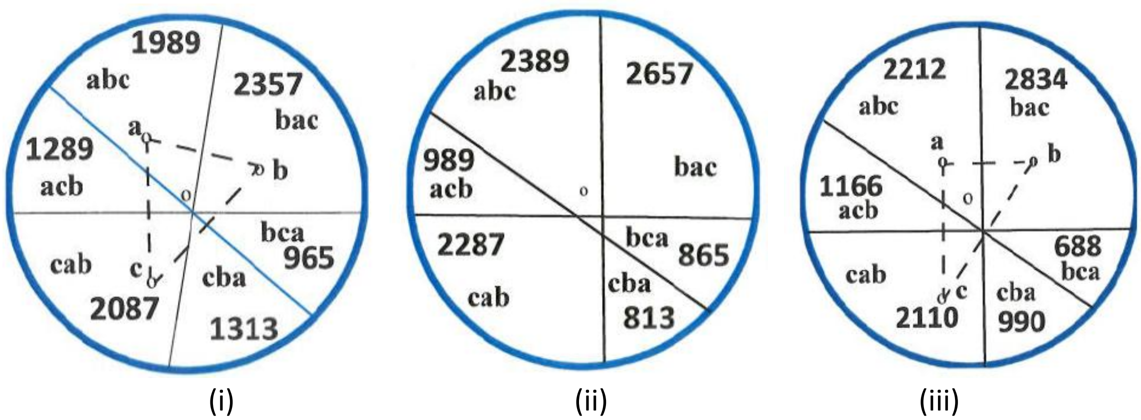
4.0.3 Tabell Med endring av k endres piktogram (ii) i Figur 4.0.3 gradvis. Spesialtilfellet perfekt sirkeldeling oppnås teoretisk nær k=176.741 og illustreres i Figur 4.0.4 (iii). Utsnittet her viser en strekning der forholdstallet |T|/|S| holder seg under en promille.

Stemmevektorene som gjennomløpes har unntakstrekanten T under horisontalkorden for k $\leqslant$ 176 og over horisontalkorden for k $\geqslant$ 177. Nærmest perfekt sirkeldeling er k=177, som gir (iii) i Tabell 4.0.1 og Figur 4.0.4. Over en ganske lang strekning av k-verdier får man piktogrammer som det er vanskelig å skille visuelt fra perfekt sirkeldeling, og det gir god mening å tilpasse et kandidattriangel.

Undersøkelsen illustrerer at perfekt sirkeldeling er ganske robust som modell: En stemmevektor (i) med perfekt sirkeldeling perturberes noe hardhendt og endres til (ii), men forholdet |T|/|S| er i følge Tabell 4.0.1 under 2 promille. Approksimasjonen (iii), hvor det igjen er (nær) perfekt sirkeldeling, har altså samme antall første-, annen- og tredje-stemmer samt Bordasum som (ii).

Ulike metoder for preferansevalg med n=3 kandidater, kan sammenlignes ved at man varierer et kandidattriangel systematisk og foretar opptellinger (etter reglene for hver metode) basert på den stemmevektor som oppstår.

Man får på den måten bare «ideelle» stemmevektorer med perfekt sirkeldeling. Men som Tabell 4.0.3 viser, sogner det til en slik idéell stemmevektor (Figur 4.0.4 (iii), k=177) mange andre stemmevektorer som har en unntakstrekant T og viktige valgdata felles med den idéelle representanten; hvis T er for stor må de anses som urealistiske. Tabell 4.0.3 viser at de alle kan legges på en linje, med den «idéelle» (Figur 4.0.4 (iii), k=177) som et skille mellom «∇-tilfellene» med T på undersiden av horisontalkorden (f.eks. Figur 4.0.4 (ii), k=0) og «Δ-tilfellene» med T på oversiden av horisontalkorden (k⩾178). Et kandidattriangel gir altså en idéell stemmevektor som ligger nær midten av en samling nærstående stemmevektorer.



4.**0.4 Figur** Kandidatpunktene i (i) er a (-0.2, 0.3); b (0.4, 0.2); c (-0.2, -0.5), og gir perfekt sirkeldeling. Kandidatene deler «velgerkaken» perfekt med tre rette kutt. Stemmevektoren i (ii) avviker synlig fra perfekt sirkeldeling: Kordene danner en trekant T som dekker 0.001865 av sirkelarealet, men de seks andre områdene er eksakt proporsjonale med stemmetallene. Stemmevektoren i (ii) hører til en familie av stemmevektorer som alle har viktig informasjon felles med stemmevektoren for perfekt sirkeldeling i (iii). Merk at hver kandidat har like mange førsteplasser og like mange andreplasser i (ii) som i (iii) (og dermed like mange tredjeplasser).

Stemmetallene er avrundet til heltall og v=10000 velgere. Da kan man ikke vente at en modell for perfekt sirkeldeling vil passe eksakt. Verdiene for |T|/|S| i tabell 4.0.1 finnes når man beregner piktogrammet på grunnlag av de heltallige stemmevektorene.

_ _ _ _ _ _ _ _

Piktogrammer med en unntakstrekant T viser seg å være et nyttig verktøy i studiet av Condorcet-sykler. I del 4.2 vises at sirkelsentret må tilhøre trekanten T hvis det foreligger en Condorcet-sykel; det må foreligge et avvik fra perfekt sirkeldeling! I del 4.3 presenteres ved hjelp av piktogrammer to gode grunner til at det er meget liten sannsynlighet for at et tilfeldig trippel av kandidater {x, y, z} i valg med mange uavhengige velgere skal være syklisk (xPyPzPx eller xPzPyPx): T er som oftest liten og dessuten sjelden sentralt plassert.

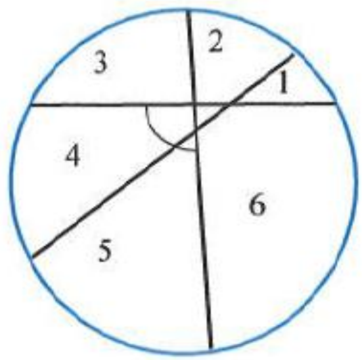
En generalisering av piktogrammene til n>3 kandidater måtte ta hensyn til n! mulige velgerkategorier, og da spørs det om en generalisering kan gjøres enkel nok til å bli et nyttig verktøy. I studier med n>3 får man heller studere alle eller utvalgte tripler {x, y, z} av kandidater.

4.1 Beregningen av et piktogram

La et valg ha v=21 velgere og n=3 kandidater, a, b og c, og stemmevektor:

(|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) = (2, 3, 4, 5, 6, 1)

Det tilsvarende piktogram er:



4.1.1 Figur En grunntanke i beregning av et piktogram er at to segmenter vris i forhold til hverandre slik at fellesarealet får riktig relativ størrelse. *Vridningsvinkelen* mellom de to segmentene 1+2+3 og 3+4+5 er beregnet slik at fellesarealet 3 blir nøyaktig halvparten av det minste segmentet (3/(1+2+3)) og nøyaktig fjerdeparten av det andre (3/(3+4+5)).

Trekanten T dekker en andel 0.0036706 av sirkelarealet. Hvis dette hadde vært kjent, kunne man ha laget piktogrammet som følger. De seks områdene som representerer velgere utgjør da en andel 1 – 0.0036706 = 0.9963294 av hele sirkelarealet på π (radius=1). Det betyr at

hver av de 21 velgerne svarer til et areal $\pi \cdot 0.9963294/21 = 0.1490505$

Dermed vet vi hvor store de tre segmentene er, som svarer til 1+2+3, 3+4+5 og 5+6+1. (De to siste er tilfeldigvis like store.) Vi bestemmer hvor stor bue av sirkelen de berører, nemlig

139.6080, 192.5294, 192.5294 grader

Vi tenker at vi klipper segmentene ut av papir, og skal legge dem ned riktig. Først vil vi at fellesområdet for de to første segmentene, med 3 velgere, skal få riktig areal. Det gjør vi ved å regulere den *vridningsvinkelen* som er vist i Figur 4.1.1 mellom de to tilsvarende kordene. Hvis vi øker vridningen, reduseres fellesarealet. Fellesarealet beregnes ut fra buene og vridningsvinkelen. Fellesareal svarende til 3 velgere oppnås

når vridningsvinkelen er 99.3400 grader.

I neste omgang vrir vi 5+6+1-segmentet i forhold til 3+4+5-segmentet. Fellesareal svarende til 5 velgere oppnås

når vridningsvinkelen er 122.0223 grader.

Til slutt vrir vi 1+2+3-segmentet i forhold til 5+6+1-segmentet. Fellesareal svarende til 1 velger oppnås

når vridningsvinkelen er 138.6377 grader.

Men har nå 1+2+3-segmentet igjen havnet der vi først la det ned? Ja, fordi

de tre vridningene til sammen er 99.3400 + 122.0223 + 138.6377 = 360.0000 grader.

Hvordan bestemmer vi så størrelsen av T?
Vi prøver en størrelse, og finner så segmentstørrelser og vridningsvinkler. Hvis vi prøver for stor T, blir alle segmentene for små og vridningsvinklene blir for små, og vi må da redusere T. Hvis vi har valgt for liten T, blir alle segmentene for store og vridningsvinklene for store, og vi må prøve en større T. Et program gjennomfører dette og velger T-størrelser som konvergerer og tilhørende vridningsvinkelsummer som konvergerer mot 360 grader.

Som et konkret eksempel ser vi på et forsøk med å la T dekke en andel 0.049649 av sirkelarealet, altså noe mer enn riktig verdi. Velgerne representeres da med en andel 1 – 0.049649 = 0.950351 av sirkelarealet.

Arealet som svarer til 1 velger er nå redusert til 0.1426959

I+2+3-segmentet får en sirkelbue på 136.8995 grader

3+4+5-segmentet får en sirkelbue på 187.7622 grader

Vridningsvinkelen mellom de to kordene blir på 95.6826 grader, altså for liten.

Når vi reduserer 1+2+3-segmentet og 3+4+5-segmentet i samme forhold ved å parallellforskyve kordene, ser vi av figuren at fellesområdet med 3 velgere beskjæres langs to korder; man kan bevise at fellesområdet alltid reduseres forholdsvis mer enn de to segmentene. Har vi prøvd for stor T, og for små segmenter, blir tilbakemeldingen altså at vridningsvinklene er for små og deres sum er < 360 grader.

Kravet om at vridningsvinkelsummen = 360 grader medfører at regneprosessen alltid vil lede frem til en entydig størrelse på T, og tilsvarende er hver vridningsvinkel entydig bestemt. Det betyr at piktogrammet er entydig bestemt av hvor store andeler av velgermengden som befinner seg i hver av de seks mulige kategoriene.

– – – – – – – –

Men det er fremdeles et skjær i sjøen. Vi prøvde 1+2+3, 3+4+5, 5+6+1 som segmenter, og fant et piktogram. Hvordan hadde det gått om vi hadde prøvd 2+3+4, 4+5+6, 6+1+2? Vi ville nok ha fått noe som ligner på piktogrammet i figur 4.1.1, men resultatet ville bli et «falskt piktogram» der de tre segmenter har fått en felles trekant i stedet for en «velgertom» T mellom seg.

Tolkningen av arealene i et falskt piktogram blir tungvint og nytteverdien tilsvarende liten; se Figur A1 i appendikset. Men akkurat når T skrumper inn til ett punkt, altså at det foreligger perfekt sirkeldeling, vil de to mulige definisjoner av segmentene gi samme resultat.

Det er fornuftig gjetning å velge 1+2+3, 3+4+5 og 5+6+1 til segmenter, slik vi gjorde, fordi de arealene som har et linjestykke felles med T ofte har større samlet areal enn de som bare har et punkt felles med T (2+4+6 > 1+3+5). Men det er mange unntak. Er man nær perfekt sirkeldeling, er åpenbart begge muligheter omtrent like sannsynlige. Bommer man med et valg, får man bare gjenta beregningen med den andre sammensetning av segmentene. Det er ikke helt opplagt, men det er rimelig greit å innse at dette andre forsøket vil føre frem, og resultere i et piktogram. Programmet, som finnes i appendikset, kontrollerer at segmentene er valgt korrekt.

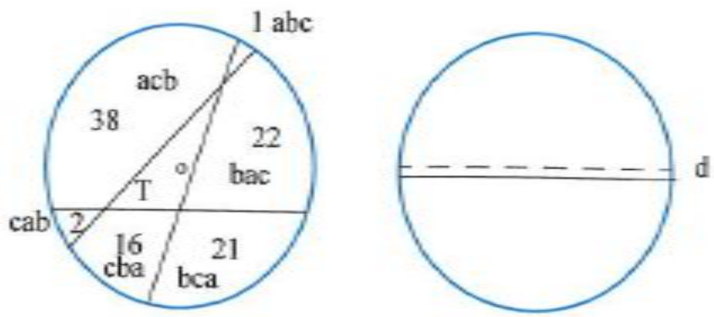
4.2 T og Condorcets paradoks

Normalt vil det være en Condorcetvinner blant tre kandidater. Figur 4.0.4(i) viser at a er Condorcetvinner: i parvise sammenligninger slår a både b (5365 – 4635) og c (5635 – 4465), mens b slår c (5311 – 4689). Det er geometrisk åpenbart at

når det er perfekt sirkeldeling, så vinnes en parvis
sammenligning av kandidaten som er nærmest sirkelens sentrum.

Condorcetrelasjonen blir i dette tilfelle en fullstendig ordning, aPbPc, svarende til at a er nærmest sentrum og c lengst vekk. Sirkelens sentrum befinner seg i området med de 1989 velgere som har rangeringen abc.

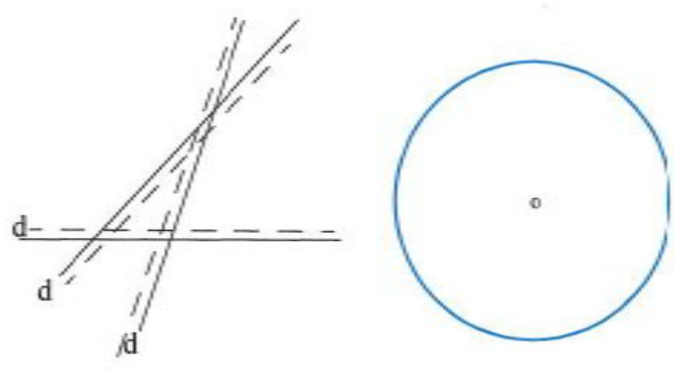
Også når man har et piktogram med en trekant T vil Condorcetrelasjonen avhenge av hvor sirkelens sentrum befinner seg, men det trengs noen hjelpelinjer parallelle med de tre kordene i piktogrammet. Avstanden mellom en korde i piktogrammet og parallellen er d, som vist i Figur 4.2.1; stemmevektor er (|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) = (1, 38, 2, 16, 21, 22):



4.2.1 Figur I piktogrammet til venstre utgjør T en andel 0.080149 av sirkelarealet. Samme sirkel er vist til høyre med en diameter og en stiplet parallell i avstand d slik at de to linjene skjærer ut en stripe av sirkelen med areal halvparten av T, altså her 0.0400745 av sirkelarealet.

De tre kordene forlenges og suppleres med stiplede paralleller i avstand d, som skjærer gjennom T; se venstre del av Figur 4.2.2; d er definert i Figur 4.2.1. Så tenker vi oss at sirkelen i Figur 4.2.2 kopieres på gjennomsiktig papir som beveges over venstre del, slik at det blir et variabelt piktogram. Som forklart i figurteksten, skifter vinneren i en parvis sammenligning hver gang sirkelsentret krysser en stiplet linje.

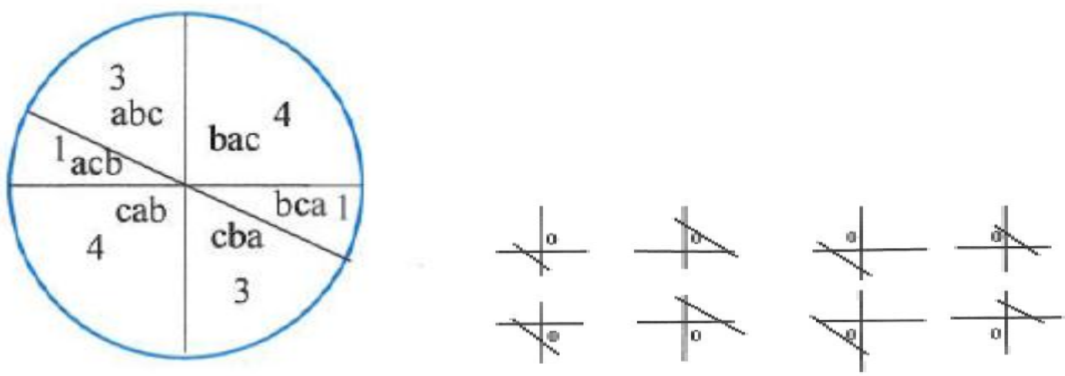
En Condorcet-sykel oppstår hvis og bare hvis
sirkelsentret er inne i den stiplede trekanten inne i T.



4.2.2 Figur Når høyre del av figuren føres over den venstre, men slik at T ligger inne i sirkelen, får vi et variabelt piktogram. (Både sirkelen og de heltrukne linjene til venstre er fra forrige figur.) Hvis sirkelsentret ligger på den heltrukne horisontallinjen, får kategoriene cab, cba og bca til sammen nøyaktig halvparten av sirkelarealet, og c vinner klart over a i parvis oppgjør. Men når sirkelsentret heves til den stiplede horisontallinjen, får a og c to like store arealer, begge svarende til 50 – 4.00745 prosent av sirkelarealet.
Den stiplede horisontallinjen markerer altså overgangen mellom aPc og cPa. Tilsvarende markerer de andre stiplede linjene overgangen mellom aPb og bPa og mellom bPc og cPb. Når sirkelsentret krysser den stiplede horisontallinjen på vei inn i den stiplede trekanten, blir fellesskapets Condorcet-rangering aPbPc erstattet av en Condorcet-sykel der aPb, bPc, og cPa.

Jo mindre T er i et piktogram, jo mindre er stripebredden d i Figur 4.2.2, og den del av T som skjæres vekk i Figur 4.2.2 blir mindre, også i forhold til T. Men i politiske valg der ulike rangeringer påvirkes av felles oppfatninger av det politiske landskap, er dessuten T gjerne så liten at en sykel er ganske urealistisk unntatt når alle tre parvise oppgjør er nær 50 – 50.

Figur 4.2.3 viser en perfekt sirkeldeling med stemmelikhet i alle tre parvise oppgjør. Hvis den skulle være en god beskrivelse av en reell situasjon med mange velgere, vil tilfeldigheter bare føre til en liten T nær sirkelsentret. Kan vi si noe om sannsynligheten for en Condorcet-sykel? En sykel forutsetter altså at T dekker sirkelsentret. Tilfeldighetene gjør at de tre kordene (diametere) erstattes av nærliggende korder, på den ene eller andre siden av sirkelsentret, slik at det dannes en liten trekant T. Av 8 mulige kombinasjoner, er det bare 2 som lar T dekke sirkelsentret; man må regne med at i de sjeldne situasjonene hvor forekomst av en sykel ikke er urealistisk, er det likevel mye større sannsynlighet for at det blir en Condorcet-vinner.



4.2.3 Figur Piktogrammet til venstre viser perfekt sirkeldeling og likhet i alle parvise sammenligninger. En tilfeldig perturbasjon fører til en liten forskyvning av hver korde (nesten parallellforskyvning) til den ene eller andre siden av dens opprinnelige stilling. Det blir da 8 mulige kombinasjoner, hvorav bare 2 leder til en T som dekker sirkelsentret, slik tegningene til høyre viser i detalj.

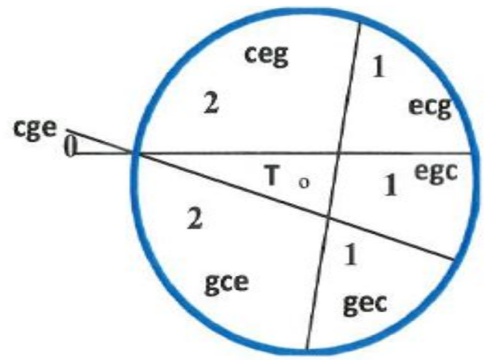
– – – – – – – –

Når et lite antall velgere fordeler seg på de seks mulige rangeringer av n=3 kandidater, er sannsynligheten større enn ellers for en stor unntakstrekant T og dermed også for en sykel. En slik situasjon foreligger også hvis partigrupper i en nasjonalforsamling samordner sine rangeringer. Venstre piktogram i Figur 5.4.1 er et kjent eksempel.

Fra et (konstruert) valg med n=v=7 i Eksempel 5.2.2 vises her det sykliske kandidattriplet {c,e,g}. Den tilsvarende stemme-vektoren er

(|ceg|, |cge|, |gce|, |gec|, |egc|, |ecg|) = (2, 0, 2, 1, 1, 1)

Man får en sykel cPePgPc, og unntakstrekanten utgjør en andel |T|/|S| = 0.069 av sirkelen. Alle par avgjøres med 4 stemmer mot 3, som vist i Figur 4.2.4:



4.2.4 Figur Når et lite antall velgere (her 7) fordeler seg på 6 mulige rangeringer, er sannsynligheten for en stor T og Condorcet-sykel relativt stor.

4.3 Piktogrammer og Blacks entoppethet

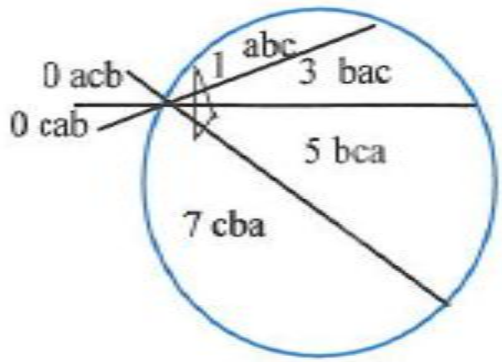
Dersom ingen velgere rangerer kandidat b etter både a og c, blir preferansefordelingen entoppet. Figur 4.3.1 viser tilfellet med stemmevektor

(|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) = (1, 0, 0, 7, 5, 3)

Som figuren illustrerer, er det perfekt sirkeldeling når to nabokategorier av velgere (acb og cab) er tomme. Her er det éntoppethet. Blacks tanke om entoppethet er ofte nyttig i en røff approksimasjon til virkelige data. Perfekt sirkeldeling ville også komme dersom ingen satte b først; men man må vente at en nominert kandidat har primær støtte fra noen velgere.

Et kandidattriangel er antydet i figur 4.3.1, og man ser det kan være vanskelig å innpasse et «troverdig» kandidattriangel innenfor sirkelen. Selvsagt kan man legge kandidatpunkt også utenfor sirkelen, men nytteverdien av det kan være tvilsom.

Litt nærmere virkeligheten kan det være å plassere kandidatpunktene innenfor sirkelen slik at midtnormalene har sitt fellespunkt utenfor sirkelen (eller er parallelle). En slik figur ville ikke være et piktogram, men den kan erstattes av et entydig piktogram som i figur 4.3.1.



4.3.1 Figur Entoppethet med n=3 kandidater gir et entydig piktogram der kordene møtes på sirkelperiferien. Dermed kan man tilpasse et kandidattriangel. Hvis man prøver tre vilkårlige punkt i sirkelen som kandidatpunkt, kan det være at midtnormalene møtes utenfor sirkelen; man får da en figur som ikke er et piktogram, men som deler sirkelen i fire deler svarende til f.eks. abc, bac, bca, cba og som kan erstattes av et entydig piktogram.

Man må regne med at i virkelige preferansevalg vil alle seks rangeringer av tre kandidater forekomme. Ulike velgergrupper kan ha ganske ulike oppfatninger av det politiske landskap. Det forhindrer ikke at et kandidat-triangel kan være et rimelig uttrykk for en gjennomsnittlig oppfatning. Vi tenker oss nå en velgermengde satt sammen av to grupper med hver sin preferansefordeling, knyttet til ulik oppfatning av det politiske landskap. En gruppe har preferansefordeling som i Figur 4.3.1 og en gruppe har preferansefordeling som i figur 4.2.3. Vi lar en andel x av velgermengden ha den entoppede preferansefordelingen fra Figur 4.3.1 og en andel 1-x ha fordelingen med likhet i alle de tre parvise oppgjørene fra Figur 4.2.2.

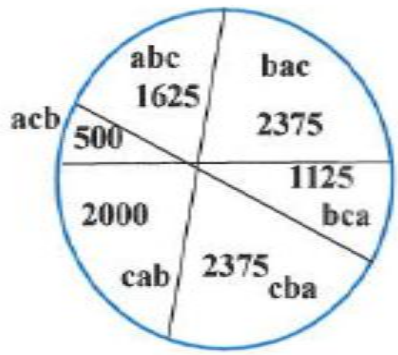
Velgergruppene abc, acb, cab, cba, bca, bac er da proporsjonale med

$1\cdot x+3\cdot(1-x)$, $0\cdot x+1\cdot(1-x)$, $0\cdot x+4\cdot(1-x)$, $7\cdot x+3\cdot(1-x)$, $5\cdot x+1\cdot(1-x)$, $3\cdot x+4\cdot(1-x)$

Begge endepunktene, x=0 og x=1, gir dessuten perfekt sirkeldeling: |T|/|S| (= T sin andel av sirkelen S) begynner og slutter altså med 0. Tabellen skalerer antall velgere opp til 10000, og viser fire mellomliggende blandingsforhold. Forholdet |T|/|S| viser at det er ganske nær perfekt sirkeldeling.

x	|T|/|S|	abc	acb	cab	cba	bca	bac
0.0	0.000000	1875	625	2500	1875	625	2500
0.2	0.000313	1625	500	2000	2375	1125	2375
0.4	0.000594	1375	375	1500	2875	1625	2250
0.6	0.000627	1125	250	1000	3375	2125	2125
0.8	0.000492	875	125	500	3875	2625	2000
1.0	0.000000	625	0	0	4375	3125	1875

Med f.eks. x=0.2 har blir piktogrammet slik:



4.3.2 Figur Som normalt ved politiske valg, er trekanten T liten. Piktogrammet viser dessuten at selv et beskjedent innslag av velgere fra Figur 4.3.1, som oppfyller Blacks entoppethetsbetingelse, er nok til å holde T rimelig langt vekk fra sirkelsentret, og derfor til å motvirke sykeldannelse.

To forhold bidrar til at meget få kandidattripler {a, b, c} er sykliske i politiske valg;

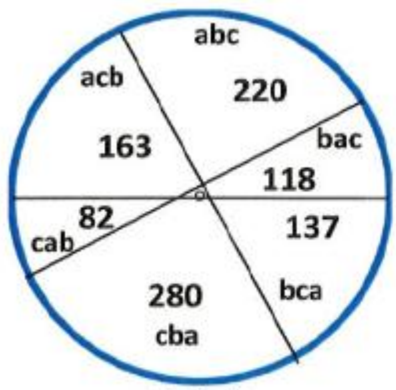
- *Felles trekk i store velgergruppers oppfatning av det politiske landskap gjør at T oftest er meget liten, og*
- *selv en forestilling om «endimensjonalitet» (f.eks langs en politisk skala venstre – høyre) som bare er én blant mange komponenter i velgernes oppfatning, kan være nok til å holde T rimelig langt unna sirkelsentret.*

5 Condorcets paradoks

To gode grunner til at en Condorcet-sykel er et sjeldent fenomen i vanlige politiske valg ble vist i del 4.3: Trekanten T i et piktogram er normalt meget liten, og selv når Blacks entoppethet er en oppfatning som bare finnes hos en liten velgergruppe, så kan det være nok til å holde T unna sirkelsentret. Muligheten for en sykel med tre kandidater er realistisk bare i sjeldne tilfelle, når alle tre parvise oppgjør er ganske jevne. Men da vil, som illustrert i Figur 4.2.3, rene tilfeldigheter påvirke utfallet, - og det vil helst gå bra i den forstand at det ikke oppstår noen sykel. Og uansett hvordan valgreglementet definerer vinneren av en sykel, vil tilfeldige endringer avgjøre når det står nesten likt mellom flere kandidater.

Et valgreglement må dekke alle mulige situasjoner, også at det ikke eksisterer noen Condorcet-vinner. Figur 5.0.1, med v=1000, n=3, viser en sykel der preferansefordelingen er gitt ved følgende *stemmevektor*:

$$(|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) = (220, 163, 82, 280, 137, 118)$$



cPbPaPc

5.0.1 Figur Fellesskapets preferanse er syklisk:

c slår b (525 – 475), b slår a (535 – 465), a slår c (501 – 499).

Den velgerfrie trekanten T utgjør 0.001753 av sirkelen. Metodene til Baldwin og Nanson kårer c til vinner: Borda-poengene til a, b og c er 966, 1010 og 1024; begge metoder medfører eliminasjon av a og en finale der c slår b. BPW og SV er Condorcet-metoder definert i del 5.1. Pluralitetsvinneren a er også SV-vinner i dette tilfelle, mens BPW alltid kårer den som slår pluralitetsvinneren direkte i sykelen; altså er b BPW-vinner.

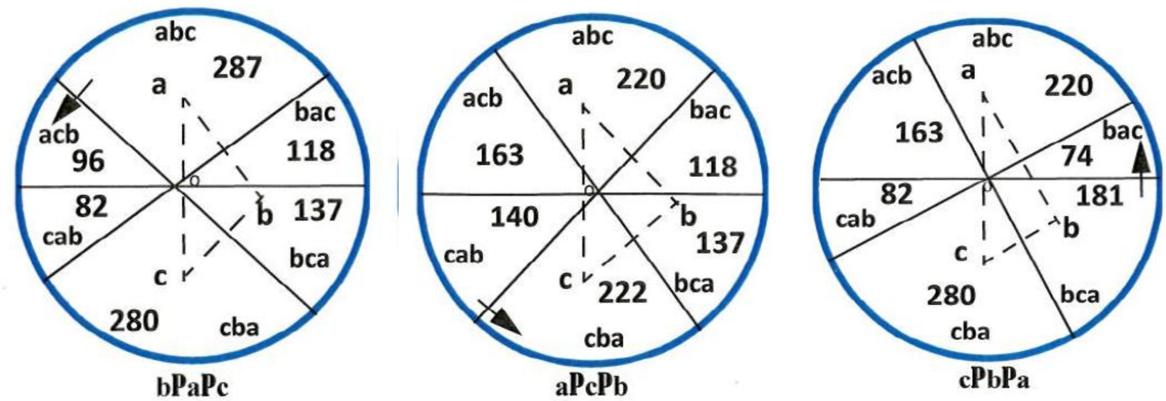
Ulike Condorcet-metoder gir ulike muligheter for å snappe seieren fra en Condorcet-vinner w med Strategi 2. Lar det seg gjøre å definere en Condorcet-metode som ikke gir noen slik mulighet i det hele tatt?

Svaret er nei, og det er nok å se på de tre piktogrammene i Figur 5.0.2. Stemmevektorene er (|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) =

(287, 96, 82, 280, 137, 118), (220, 163, 140, 222, 137, 118), (220, 163, 82, 280, 181, 74)

Alle viser en situasjon med Condorcetrangering: henholdsvis bPaPc, aPcPb og cPbPa.

I alle disse situasjonene kan nummer 2 skape nøyaktig den samme sykelen som i Figur 5.0.1: a flytter 67 velgere fra abc til acb; c flytter 58 velgere fra cab til cba; b flytter 44 velgere fra bca til bac. Poenget er at i nøyaktig én av situasjonene vil nummer 2 da vinne med Strategi 2: Hvis a er vinner i Figur 5.0.1, vil a da også vinne med Strategi 2 mot Condorcet-vinner b i første piktogram, Figur 5.0.2. På samme måte er det klart at hvis c (b) vinner i Figur 5.0.1, vil c (b) vinne med Strategi 2 mot Condortcet-vinner a i andre (c i tredje) piktogram i Figur 5.0.2.



5.0.2 Figur For en vilkårlig gitt Condorcet-metode vil nøyaktig ett av disse piktogrammene vise et mulig utgangspunkt for å vinne med Strategi 2 ved å skape sykelen i Figur 5.0.1: Den som vinner sykelen, vil som nummer 2 i Condorcet-rangeringen kunne skape sykelen (67 flytter fra abc til acb; 58 flytter fra cab til cba; 44 flytter fra bca til bac) og snappe seieren fra Condorcet-vinneren (a fra b, c fra a eller b fra c).

– – – – – – – –

Når det ikke eksisterer noen Condorcet-vinner og $n \geqslant 4$, foretrekker mange at bare kandidatene i *Smith-mengden* og deres innbyrdes oppgjør teller når man kommer til «cycle-break». Smith-mengden består av kandidater som vinner alle parvise oppgjør mot kandidater utenfor Smith-mengden, mens to kandidater x og y i Smith-mengden er slik at hvis $x P y$ så vil y slå x indirekte, dvs. at det eksistere andre kandidater z_1, z_2, …, z_k i Smith-mengden slik at $y P z_1 P z_2 P \ldots P z_k P x$.

I Condorcet-valg som oppfyller denne Smith-regelen er det, også når $n \geqslant 4$, *åpenbart* umulig å unngå enhver mulighet for å slå en Condorcet-vinner med Strategi 2. Dersom alle stemmesedler har de samme tre kandidater øverst men i vilkårlige rekkefølger, blir da situasjonen som for n=3.

– – – – – – – –

Dersom det ikke finnes noen Condorcet-vinner, er det rimelig om man vil kåre en vinner slik at vinnerens tapsmargin i parvis oppgjør minimeres. Det betyr å erklære c som vinner i Figur 5.0.1, i og med at c har det minste nederlag i parvise oppgjør. Men siden tapsmarginene i de tre parvise oppgjør i høy grad påvirkes av tilfeldigheter, er det ikke opplagt at en slik minimering er den eneste demokratisk forsvarlige metode.

Hvor sterkt kan vi begrense mulighetene for å slå en Condorcet-vinner ved hjelp av Strategi 2? En diskusjon av dette problemet finnes i del 5.1. Den leder oss til to Condorcet-metoder, BPW og SV. Oftest gir BPW og SV samme vinner, men anvendt på valget i Eksempel 5.0.1, blir b BPW-vinner og a blir SV-vinner. BPW-vinner er den i sykelen som slår pluralitetsvinneren.

Å ikke benytte en teoretisk anledning til å snappe seieren fra en Condorcet-vinner w med Strategi 2 er det samme som å gå glipp av seieren fordi man har hatt en så sterk kandidat som w på annenplass. Hvis erfaring viser at faren for en slik opplevelse er betydelig, kan det få velgere til å stemme uoppriktig.

BPW og SV er laget for å gi mindre anledning enn andre metoder, som Baldwins og Nansons, til å slå en Condorcet-vinner med Strategi 2. Forutsetningen for Strategi 2 i BPW er at pluralitetsvinneren a taper begge sine parvise oppgjør. Når det en sjelden gang skjer, har relativt få velgere a på annenplass, som i tredje piktogram i Figur 5.0.2. En slik situasjon tyder på en politisk polarisering, hvor en majoritet er splittet mellom to kandidater, mens minoriteten står samlet og dermed vil vinne et pluralitetsvalg. Strategi 2 ville da være et internoppgjør på majoritetens side, og for så vidt kanskje lite interessant for velgere flest.

5.0.3 No-Show

Et annet «spøkelse» synliggjøres i Figur 5.0.1. Anta at b allerede er kåret til vinner etter BPW-metoden. Valgstyret oppdager så en konvolutt med tre forhåndsstemmer som var blitt forlagt og ikke kommet med i opptellingen.

De tre stemmesedlene viser seg å ha samme rangering, nemlig bca. Alle støtter vinneren b. Så skulle b være blitt ytterligere styrket, og valgstyret kan puste lettet ut (?)

Men nei. Legg merke til den knepne seieren til a over c (501 – 499). De tre stemmene snur dette parvise oppgjøret til (501 – 502); c vinner paret og blir dermed Condorcet-vinner. En nøyaktig rettelse fra valgstyret må inneholde følgende:

Tre stemmer var levert og oversett; de hadde alle rangert bca.
Ny opptelling av 1003 stemmer viser derfor at vinneren ikke lenger er b, men c.

Spøkelset kalles "The No-Show paradox». Det hadde vært bedre for de tre velgerne om de ikke hadde avgitt stemme ved valget. Men No-Show manifesterer seg på to måter. Etter å ha gått ut med rettelsen oppdager valgstyret en konvolutt til. To nye stemmer bringer stemmetallet opp til 1005. De er begge i kategorien acb. Igjen vinner a i parvis oppgjør mot c, nå (503 – 502): Sykelen er der igjen; b slår fortsatt pluralitetsvinneren og blir BPW-vinner. Ny rettelse er nødvendig:

To stemmer til var levert og oversett; de hadde begge rangert acb.
Ny opptelling av 1005 stemmer viser derfor at vinneren ikke lenger er c, men b.

Første manifestasjon, der nye stemmer med foreliggende vinner w (her w=b) på topp fører til en ny vinner, er den *sterke* formen for No-Show. Men det er opplagt at sterk No-Show ikke kan ramme en Condorcet-vinner i et Condorcet-valg. Nye valgdeltakere som rangerer en foreliggende Condorcet-vinner w først, gjør jo bare seieren til w klarere i hvert par.

Andre manifestasjon, der foreliggende vinner w (her w=c) mister seieren til en kandidat som de nye velgere rangerer lavere enn w, mens w ikke selv har førsteplass på noen av de nye stemmesedlene, kalles den *svake* formen for No-Show. Eksemplet viser at svak No-Show kan ramme en Condorcet-vinner og dessuten gi seieren til *siste kandidat* hos de nye velgerne.

Begge former for No-Show innebærer at en velgergruppe ville ha fått et bedre resultat som «hjemmesittere». Moulin (1988) viste at uansett hvordan vinneren defineres når det er sykler på topp, vil det eksistere No-Show-situasjoner når $n \geqslant 4$. Moulins resultat bevises i del 5.3. Som forberedelse ser vi i del 5.2 på hvordan man kan realisere alle tenkelige Condorcet-relasjoner, eventuelt med spesifiserte vinstmarginer i hvert enkelt kandidatpar.

5.0.4 Voteringsløp i nasjonalforsamlinger

Votering over forslag i nasjonalforsamlinger skjer vanligvis i flere trinn. De to vanlige prosessene, eliminasjonsmetoden og seriemetoden, vil begge normalt lede til seier for et forslag som er Condorcet-vinner. Partivis samordning av standpunktene kan bidra til at Condorcets paradoks dukker opp hyppigere enn i normale valg; eksempel 3.0.1 er et kjent tilfelle med store marginer. Tema for del 5.4 er de problemer og muligheter som voteringsprosessen medfører; et viktig moment er om forsamlingen selv kan ta standpunkt til voteringsrekkefølgen.

5.1 Condorcet-metoder og Strategi 2

Vi ser nå på Condorcet-valg generelt med tre kandidater, a, b og c. La størrelsen av alle 6 stemmekategorier betegnes med brøker av velgertallet v, så de adderes til 1. La α, β og γ være avstanden opp til ½ for a, b og c:

5.1.1 Definisjon $\alpha = ½ - (|abc| + |acb|)$, $\beta = ½ - (|bca| + |bac|)$, $\gamma = ½ - (|cab| + |cba|)$

Hvis $\alpha < 0$, $\beta < 0$, eller $\gamma < 0$, får henholdsvis a, b eller c over halvparten av førstestemmene, og er en Condorcet-vinner som ikke kan rammes av Strategi 2. I det følgende er

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

Generelt gjelder at

$$\alpha + \beta + \gamma = ½ + ½ + ½ - (|abc| + |acb| + |cab| + |cba| + |bca| + |bac|) = ½ + ½ + ½ - 1 = ½$$

Altså har kandidatene følgende antall førsterangeringer:

$$\text{a har } |abc| + |acb| = ½ - \alpha = \gamma + \beta,$$
$$\text{c har } |cab| + |cba| = ½ - \gamma = \beta + \alpha,$$
$$\text{b har } |bca| + |bac| = ½ - \beta = \alpha + \gamma.$$

5.1.2 Eksempel

Stemmevektorene i Figur 5.01 og Figur 5.02 gir

$$\alpha = 0.117, \beta = 0.245, \gamma = 0.138.$$

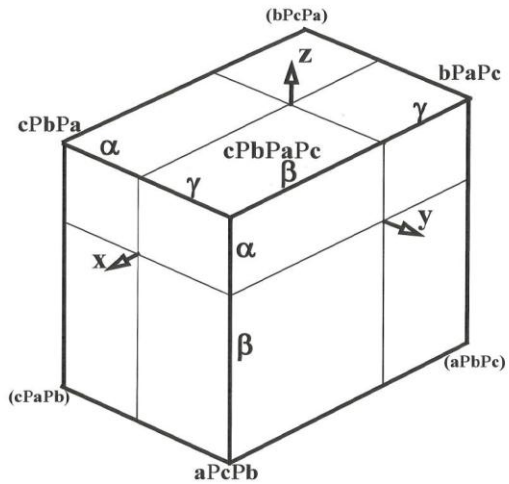
Opplysninger om førstestemmene finnes ikke i matrisesummen M, jf Eksempel 3.1.1; og metodene BPW og SV som defineres i 5.1.5 og 5.1.6 er derfor ikke matrisesumsmetoder.

5.1.3 Handlingsrommet

De mulige stemmevektorer med fastholdte førstestemmer $\beta+\gamma$, $\alpha+\beta$, $\gamma+\alpha$ er slik:

$$(|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) = (\beta\text{-x}, \gamma\text{+x}, \alpha\text{-z}, \beta\text{+z}, \gamma\text{-y}, \alpha\text{+y})$$
$$\text{med } -\gamma \leqslant x \leqslant \beta, \; -\beta \leqslant z \leqslant \alpha, \; -\alpha \leqslant y \leqslant \gamma.$$

Siden α, β og γ fastholdes, er stemmevektoren entydig bestemt av x, y og z.
I xyz-rommet fyller alle dis3333se stemmevektorene en rektangulær boks:



5.1.4 Figur Sidekantene i boksen svarer til førstestemmer for a (γ+β), b (α+γ) og c (β+α). Velgerne til a, b og c bestemmer henholdsvis x, y og z. I den positive oktant, altså hvor x > 0, y > 0, z > 0, blir Condorcet-relasjonen syklisk med cPbPaPc; den kan skapes med utgangspunkt i en av tre nabobokser. I den (usynlige) negative oktant, altså med x < 0, y < 0, z < 0 er syklene med motsatt rotasjon, cPaPbPc; de kan også skapes med utgangspunkt i en av tre nabobokser.

Hver av de tre velgergruppene bestemmer resultatet i nøyaktig ett kandidatpar, nemlig paret med de to motstanderne. F.eks. blir det jevnt mellom b og c når a-velgerne setter x=0 og fordeler seg med |abc| = β og |acb| = γ.

Endringer i Condorcetrelasjonen forekommer hvis og bare hvis et koordinatplan (x=0, y=0 eller z=0) krysses. Koordinatplanene deler den store boksen i 8 mindre bokser. Volumet
(γ+β)·(α+γ)·(β+α) er fordelt slik

β·γ·α; x > 0, y > 0, z > 0 Condorcet-paradoks cPbPaPc
γ·γ·α;; x < 0, y > 0, z > 0 Condorcet-rangering bPaPc (a-velgerne kan skape cPbPaPc)
β·α·α; x > 0, y < 0, z > 0 Condorcet-rangering cPbPa (b-velgerne kan skape cPbPaPc)
β·γ·β; x > 0, y > 0, z < 0 Condorcet-rangering aPcPb (c-velgerne kan skape cPbPaPc)
β·α·β; x > 0, y < 0, z < 0 Condorcet-rangering cPaPb (a-velgerne kan skape cPaPbPc)
γ·γ·β; x < 0, y > 0, z < 0 Condorcet-rangering aPbPc (b-velgerne kan skape cPaPbPc)
γ·α·α; x < 0, y < 0, z > 0 Condorcet-rangering bPcPa (c-velgerne kan skape cPaPbPc)
γ·α·β; x < 0, y < 0, z < 0 Condorcet-paradoks cPaPbPc

_ _ _ _ _ _ _ _

Det er svært sjelden i Condorcet-valg med mer enn f.eks. v=100 selvstendige velgere at de beste kandidatene er involvert i en Condorcet-sykel. Men regelen for hvordan en vinner skal kåres i disse sjeldne tilfellene er av betydning også i tilfellene med en Condorcet-vinner w og n=3, α > 0, β > 0, γ > 0. Når et valg analyseres etterpå, ser man at nr 2, kandidat q, kunne ha skapt en sykel, slik Figur 5.1.4 og piktogrammene i Figur 5.0.2 illustrerer. Hvis q dermed også kunne ha vunnet valget, så kan situasjonen for de velgerne som rangerte q først også formuleres slik:

Deres førstevalg q mistet seieren fordi for mange satte en sterk kandidat w på andreplass.

Hvis det skjer ofte at en velgergruppe går glipp av seieren fordi de oppriktig rangerer en sterk konkurrent på annenplass, kan det svekke tilliten til valgmetoden. Det er viktig for alle typer preferansevalg at en velger har liten grunn til å frykte at en sterk kandidat på annenplass kan skade den først-rangerte. Teknisk sett er det altså tale om at tilhengerne av q hadde en teoretisk mulighet til å slå w med Strategi 2, som ikke ble utnyttet.

Hvilke Condorcet-metoder begrenser best antallet teoretiske muligheter for å vinne med Strategi 2? De vanlige Condorcet-metoder krever annen informasjon enn α, β og γ for å bestemme hvem som vinner en sykel med n=3 kandidater. Men Figur 5.1.4 gir likevel innsikt i nettopp dette begrensningsspørsmålet.

5.1.5 BPW Hvordan begrense muligheten til å utnytte en gitt spesiell sykel, som tilsvarer ett punkt med $x>0$, $y>0$, $z>0$ i Figur 5.1.4? En gitt sykel av typen cPbPaPc kunne ha vært skapt

av velgerne til a med start fra γ mulige startpunkt (bevegelse i x-retningen),
av velgerne til b med start fra α mulige startpunkt (bevegelse i y-retningen),
av velgerne til c med start fra β mulige startpunkt (bevegelse i z-retningen).

Hvis $\alpha = \min(\gamma, \alpha, \beta)$, altså hvis a er pluralitetsvinner, så må man ut fra dette gi seieren til b, som altså slår pluralitetsvinneren i sykelen; vi kaller metoden *«Beat the Plurality Winner».* For begge sykel-retninger er det slik at

BPW-metoden gir seieren til den som slår pluralitetsvinneren i parvis oppgjør.

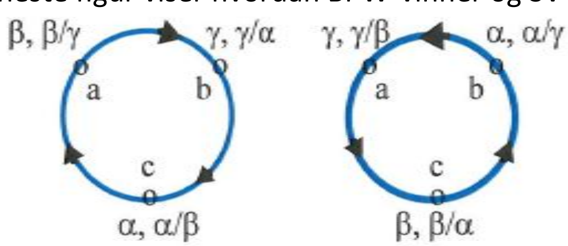
5.1.6 SV Men det er også naturlig å se på alle sykler som tilsvarer punkt med $x>0$, $y>0$, $z>0$ i Figur 5.1.4. De mulige startpunkt fyller nå hele startboksen. En eller annen sykel av typen cPbPaPc kunne ha vært skapt

av velgerne til a med start fra $\alpha\gamma^2 = \alpha\beta\gamma\cdot\gamma\beta^{-1}$ mulige startpunkt (bevegelse i x-retningen),
av velgerne til b med start fra $\beta\alpha^2 = \alpha\beta\gamma\cdot\alpha\gamma^{-1}$ mulige startpunkt (bevegelse i y-retningen),
av velgerne til c med start fra $\gamma\beta^2 = \alpha\beta\gamma\cdot\beta\alpha^{-1}$ mulige startpunkt (bevegelse i z-retningen).

Hvis $\gamma\beta^{-1} = \min(\gamma\beta^{-1}, \alpha\gamma^{-1}, \beta\alpha^{-1})$, så må man ut fra denne tolkning gi seieren til a som har minst boks med mulige startpunkt; vi kaller metoden «*Smallest Volume»*. For begge sykel-retninger er det slik at

SV-metoden gir seieren til den som har minst startboks for å lage en slik *sykel*.

Et sammendrag i form av neste figur viser hvordan BPW-vinner og SV-vinner finnes:



5.1.7 Figur α, β, γ er antall førstestemmer a, b, c mangler på 50%. Ved BPW-valg vinner den som i parvis oppgjør slår kandidaten som mangler minst. Ved SV-valg beregnes mangelen hos den konkurrent som kandidaten slår delt på mangelen hos den konkurrent som kandidaten taper for. For gitt α, β, γ vil én av omløpsretningene inkludere beregning av $\min(\alpha, \beta, \gamma)/\max(\alpha, \beta, \gamma)$, og da må BPW og SV gi samme resultat. Den andre omløpsretningen vil da noen ganger kåre én kandidat til SV-vinner og en annen til BPW-vinner.

Et valgreglement må dekke alle tenkelige muligheter. Dersom det er flere overlappende sykler, som vist i figur 5.2.3, kan man bestemme SV-vinner og BPW-vinner i hvert kandidattrippel og velge den som da vinner flest tripler.

5.1.5 Eksempel Figur 5.0.1 tilsvarer et punkt i sykelboksen (x$>$0, y$>$0, z$>$0) i Figur 5.1.4. Fra eksempel 5.1.2 ser vi at $\alpha = \min(\gamma, \alpha, \beta)$, slik at b blir BPW-vinner. Videre finner vi

$$\gamma\beta^{-1} = 0.138/0.245, \quad \alpha\gamma^{-1} = 0.117/0.138, \quad \beta\alpha^{-1} = 0.245/0.117.$$

Her er $\gamma\beta^{-1} = \min(\gamma\beta^{-1}, \alpha\gamma^{-1}, \beta\alpha^{-1})$; det er a som har minste startboks for å skape en $cPbPaPc$-sykel. Derfor blir pluralitetsvinneren a også SV-vinner.

5.2 Konstruksjon av en Condorcet-relasjon

Studiet av Condorcet-metoder innebærer at man prøver hvordan ulike metoder virker, ikke bare i normale valg, men også i mer ekstreme situasjoner, f.eks. når Condorcet-relasjonen inneholder et stort antall sykliske kandidattripler. Det er vanlig å se bort fra stemmelikhet i en parvis sammenligning, og i en del teoretiske undersøkelser konsentrerer man seg om valg hvor v = antall velgere er et oddetall.

Med n kandidater er det n(n-1)/2 kandidatpar. Med bare to utfall, dvs. ingen stemmelikhet i parvise oppgjør, kan valgresultatet beskrives ved matrisen for en av de i alt $2^{n(n-1)/2}$ turneringsrelasjoner. Med 7 kandidater, er det altså 2^{21} = 2097152 slike relasjoner. (Se kapittel 2.1.) Men det er ikke opplagt at enhver turneringsrelasjon kan oppnås som en Condorcet-relasjon. I en fotballturnering er det greit at enhver slik matrise kan oppnås, for alle kombinasjoner av utfall i de n(n-1)/2 kampene er mulige. Men hvis velger i sier xP_iy og yP_iz, så må velgeren også si xP_iz når det kreves transitive preferanser. Det er ikke opplagt at enhver turneringsrelasjon kan oppnås i et valg med velgere som alle må levere en fullstendig rangering av kandidatene.

I første omgang lar vi v = n =2k+1; velgertall og kandidattall er altså det samme oddetall. La en vilkårlig turneringsrelasjon være gitt på matriseform. En enkel metode gjør det lett å skrive ut n stemmesedler med fullstendig rangering slik at Condorcet-relasjonen får samme matrise. Idéen er å bruke et vanlig opplegg ved sjakkturneringer over 2k+1 runder, der det spilles k partier i hver runde. Forklaringen gis ved Figur 5.2.1 og Eksempel 5.2.2:

Plass	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**	**Plass**
1 – 2	**d□e**	**c□d**	**b□c**	**a□b**	**g□a**	**f□g**	**e□f**	**1 – 2**
3 – 4	**c□f**	**b□e**	**a□d**	**g□c**	**f□b**	**e□a**	**d□g**	**3 – 4**
5 – 6	**b□g**	**a□f**	**g□e**	**f□d**	**e□c**	**d□b**	**c□a**	**5 – 6**
7	**a**	**g**	**f**	**e**	**d**	**c**	**b**	**7**

5.2.1 Figur En sjakkturnering med 7 deltagere går over 7 runder; tre brett står oppstilt på et langbord. For hver ny runde flytter deltagerne/kandidatene seg en plass mot venstre. Med dette opplegget skrives ut en stemmeseddel per runde. De to ved øvre ende av langbordet plasseres som nr. 1 og 2, med parets vinner som nr. 1. Parets vinner finnes i en gitt turneringsmatrise. De to på nabobrettet blir nr. 3 (vinner) og 4 (taper). Generelt fortsetter utfyllingen til 2k plasser er opptatt, og kandidaten som har spillefri i runden kommer så på plass 2k+1 (=7 på figuren).

5.2.2 Eksempel La turneringsrelasjonen være gitt ved følgende matrise:

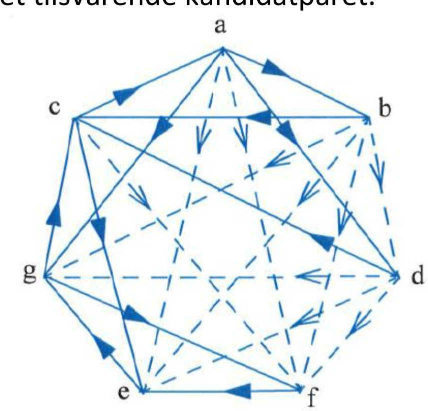
	a	b	c	d	e	f	g
a		1	0	1	1	1	1
b	0		1	1	1	1	1
c	1	0		0	1	1	0
d	0	0	1		1	1	1
e	0	0	0	0		0	1
f	0	0	0	0	1		0
g	0	0	1	0	0	1	

Når stemmesedlene fylles ut på grunnlag av matrisen og sjakkturneringsplanen fra Figur 5.2.1, får vi følgende stemmefordeling:

R1: decfbga; R2: dcbeafg; R3: bcadegf; R4: abgcdfe; R5: agbfced; R6: gfaebdc; R7: fedgcab

Resultatet i det innbyrdes oppgjør x mot y blir det samme i valgopptellingen som i den runden hvor de møtes i turneringsplanen fra Figur 5.2.1. Poenget er at i de 6 stemmesedlene fra de øvrige rundene må det være 3 med x foran y og 3 med y foran x. Valgopptellingen avgjør alle parvise sammenligninger med 4 stemmer mot 3, og generelt med k+1 stemmer mot k.

Turneringsrelasjon i Eksempel 5.2.2 kan visualiseres med en *rettet graf* som vist i Figur 5.2.3. Grafens 7 *noder* svarer til de 7 kandidatene, og en *rettet kant* mellom to noder er en pil som peker fra vinner til taper i det tilsvarende kandidatparet.



5.2.3 Figur Turneringsrelasjonen i tabellen visualisert som en *rettet graf* med en *node* for hver kandidat og en *kant* med retningsangivelse for hvert par av kandidater. Pilene peker fra vinner til taper. De 11 kanter som inngår i de 5 sykliske tripler er i hel strek, de 10 andre i stiplet strek.

Dersom man har en turneringsrelasjon med 2k kandidater, kan man realisere den som en Condorcet-relasjon ved å føye til en fiktiv kandidat, nr. 2k+1; resultatene til den nye kandidat kan velges vilkårlig. F.eks. kan man registrere nr. 2k+1 som taper i alle sine parvise oppgjør. Opplegget med sjakkturneringen gir 2k+1 stemmesedler. Man fjerner så den fiktive kandidat nr. 2k+1 fra samtlige stemmesedler, og opptellingen gir de ønskede parvise avgjørelser. En konklusjon er altså:

Enhver turneringsrelasjon med 2k eller 2k+1 kandidater
kan realiseres som en Condorcet-relasjon i et valg med 2k+1 velgere

– – – – – – – –

Eksempel 5.2.2 viser en generell metode for å realisere en gitt turnerings-relasjon som en Condorcet-relasjon med bruk av et sterkt begrenset antall velgere som alle er forpliktet til å velge en av de n! fullstendige rangeringer. Men den enkelte velger uttaler seg om i alt 21 parvise oppgjør, og bestemmer bare 3 av dem. Velgerens standpunkt til 18 par har bare som funksjon å kansellere det motsatte standpunkt fra en annen velger. Rundeskjemaet fra sjakkturneringen gir et opplegg som er enkelt å følge, men sløser med «velgerressursen».

5.2.4 Eksempel Turneringsrelasjonen i Eksempel 5.2.2 kan realiseres med 3 velgere, I, II og III:

Velger I: abdgcfe; Velger II: cabdfeg; Velger III: bdegcaf.

De parvise oppgjørene går da slik:

a slår b 2-1; c slår a 2-1; a slår d 2-1; a slår e 2-1; a slår f 3-0; a slår g 2-1;
b slår c 2-1; b slår d 3-0; b slår e 3-0; b slår f 3-0; b slår g 3-0;
d slår c 2-1; c slår e 2-1; c slår f 3-0; g slår c 2-1;
d slår e 3-0; d slår f 3-0; d slår g 3-0;
f slår e 2-1; e slår g 2-1;
g slår f 2-1.

Opptelling viser at det er 5 sykliske tripler, nemlig {a,b,c}, {a,c,d}, {a,c,g}, {c,e,g}, {e,f,g}. Antall sykliske tripler kan finnes indirekte. Poenget er at en kandidat som slår k av sine n-1 konkurrenter er Condorcet-vinner i k(k-1)/2 kandidattripler. Tabellen i Eksempel 5.2.2 viser da at a, b, c, d, e, f, og g vinner henholdsvis 10, 10, 3, 6, 0, 0 og 1 tripler. I alt 30 tripler har en Condorcet-vinner, og de gjenværende må være sykliske.

Etter hvert som kandidattallet n øker, oppstår det turneringsrelasjoner som krever flere velgere, og tvinger velgertallet v til å vokse mot uendelig, om enn mye langsommere enn n. Men 3 velgere er nok til å skape et maksimalt antall sykliske tripler i valg med et vilkårlig antall kandidater. Eksempel 5.2.5 viser v=3 velgeres uenighet om n=7 kandidater:

5.2.5 Eksempel Hvordan 3 velgere generelt kan skape et maksimalt antall sykler illustreres her av tilfellet med 7 kandidater. For å gjøre idéen klar, betegner vi kandidatene med tall. De tre velgerne har da følgende preferanser

Velger I: 1234567; Velger II: 7531642; Velger III: 6427531.

Tenk at kandidatene er nummerert etter stigende alder, og at oddetall (1,3,5,7) svarer til menn og partall (2,4,6) til kvinner. Velger I er kjønnsnøytral og mener yngre er bedre enn eldre. Velger II mener menn er bedre enn kvinner og velger III at kvinner er bedre enn menn; begge mener at innenfor hver kategori er eldre bedre enn yngre. Oppfatningene spriker sterkt.

Det gjenspeiles i opptellingen. Alle kandidater vinner 3 par og taper 3. Samtlige 21 par avgjøres med 2-1. F.eks. holder velgerne I og II kandidat 1 foran kandidat 2, mens velger III er uenig.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1		**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
2	**0**		**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
3	**1**	**0**		**1**	**0**	**1**	**0**
4	**0**	**1**	**0**		**1**	**0**	**1**
5	**1**	**0**	**1**	**0**		**1**	**0**
6	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**		**1**
7	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	

Det er i alt 14 sykliske tripler, som man kan finne ved inspeksjon av turneringsmatrisen:

{1,2,3}, {2,3,4}, {3,4,5}, {4,5,6}, {5,6,7}, {6,7,1}, {7,1,2},
{1,4,5}, {2,5,6}, {3,6,7}, {4,7,1}, {5,1,2}, {6,2,3}, {7,3,4}.

– – – – – – – –

Det kan også være behov for å konstruere Condorcet-relasjoner med tilleggskrav knyttet til marginene som det enkelte par skal vinnes med. I Eksempel 5.2.4 er det således 12 par som vinnes 2-1, altså med margin 1, og 9 par som vinnes 3-0, altså med margin 3. Hvis v = antall velgere er et oddetall, blir alle marginer odde, og hvis v er et partall, blir alle marginene også partall. Hvordan konstruerer man en velgersammensetning som gir en ønsket Condorcet-relasjon og samtidig spesifiserte marginer i hvert kandidatpar?

5.2.6 McGarveys konstruksjon

La en velger ha preferanse abcd…rs og en annen velger ha preferanse sr…dcab

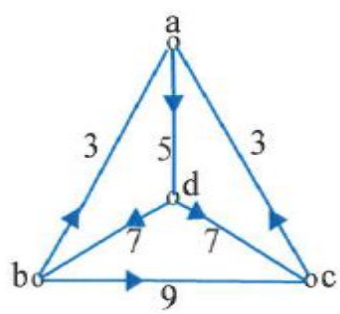
De to velgerne har *nesten* motsatte preferanser. Poenget er at de er enige om rangeringen i akkurat ett kandidatpar: Begge rangerer a foran b. De har forskjellig rangering i alle andre kandidatpar. De to velgerne lar a slå b 2-0 og lar det stå 1-1 i alle andre par. Vi vil kalle to slike velgere et *McGarvey-par* for (a, b).

Med k slike McGarvey-par for (a,b) bruker vi 2k velgere på å la a slå b 2k-0 (margin 2k) og la alle andre par stå k-k (margin 0).

Nå kan vi gjøre denne detaljkonstruksjonen for hvert enkelt kandidatpar og oppnå en spesifisert Condorcet-relasjon med spesifiserte marginer, vel å merke for et jamnt antall velgere. Hvis de gitte marginene er oddetall, får man starte med en enkelt velger, og så sette sammen velgere parvis etter McGarveys oppskrift.

McGarveys konstruksjon sløser med ressursene, men viser en enkel måte til å konstruere et Condorcet-valg som gir en spesifisert Condorcet-relasjon med spesifiserte marginer.

5.2.7 Eksempel Vi vil konstruere en Condorcet-relasjon for fire kandidater, a, b, c og d, slik at
b slår c med 9 stemmer, d slår b med 7 stemmer, d slår c med 7 stemmer,
a slår d med 5 stemmer, b slår a med 3 stemmer, c slår a med 3 stemmer.



5.2.8 Figur Problemet illustreres her med en rettet graf, der ønskede marginer er knyttet til de rettede kantene. Grafen har to sykliske tripler, aPdPbPa og aPdPcPa.

Oddetall som marginer kan bare forekomme med odde velgertall. Vi begynner med en velger 0 som stemmer adbc, og gjør resten med McGarvey-par. Disse parene skal da sørge for at
b slår c med 8 stemmer, d slår b med 6 stemmer, d slår c med 6 stemmer,
a slår d med 4 stemmer, b slår a med 4 stemmer, c slår a med 4 stemmer.

Velgerne 1 og 2 gjøres til et McGarvey-par som gir b 2 stemmer over c:

Velger 1: bcad og Velger 2: dabc.

Denne detaljkonstruksjonen gjøres så mange ganger som trengs for hvert kandidatpar. Vi bruker i alt 4 McGarvey-par for (b, c), 3 for (d, b), 3 for (d, c), 2 for (a, d), 2 for (b, a) og 2 for (c, a). Åpenbart anvender vi

$$1 + 2 \cdot (4+3+3+2+2+2) = 33 \text{ velgere.}$$

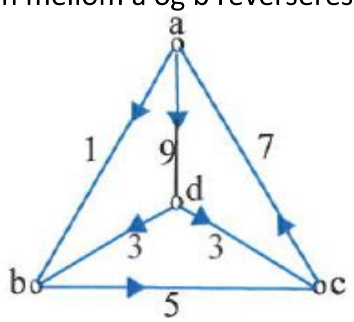
5.3 Moulins teorem

Moulin (1988) komponerte Condorcet-relasjonen med n = 4 kandidater a, b, c og d i Figur 5.2.8 med de spesielle seiersmarginene i de 6 kandidatparene. Vi skal se på to valg, som begge har Condorcet-relasjon med to sykliske tripler. Først gjør vi tre observasjoner av valget som illustreres av grafen i Figur 5.2.8:

1) Hvis c vinner valget, tillater Condorcet-metoden sterk No-Show:
   Anta 8 nye velgere stemmer cbda; b vinner alle sine par og blir Condorcet-vinner.
2) Hvis b vinner valget, tillater Condorcet-metoden sterk No-Show:
   Anta 6 nye velgere stemmer bdac; d vinner alle sine par og blir Condorcet-vinner.
3) Hvis d vinner valget, tillater Condorcet-metoden sterk No-Show:
   Anta 4 nye velgere stemmer dabc; a vinner alle sine par og blir Condorcet-vinner

Konklusjon: En Condorcet-metode som ikke tillater sterk No-Show må kåre a til vinner i Figur 5.2.8, siden b, c og d da sjaltes ut.

Men så kommer 4 nye velgere som stemmer cabd; dette er valg nummer to. Alle marginer i grafen endres med ±4 og kanten mellom a og b reverseres. Ny graf blir slik:



5.3.1 Figur Etter at 4 nye velgere har stemt cabd blir forrige graf endret til denne, som også har to sykliske tripler: aPbPcPa og aPdPcPa.

Også i denne nye graf gjør vi tre observasjoner:

1) Hvis d vinner valget, tillater Condorcet-metoden sterk No-Show:
   Anta 8 nye velgere stemmer dabc; a vinner alle sine par og blir Condorcetvinner.
2) Hvis a vinner valget, tillater Condorcet-metoden sterk No-Show:
   Anta 6 nye velgere stemmer acbd; c vinner alle sine par og blir Condorcet-vinner.
3) Hvis c vinner valget, tillater Condorcet-metoden sterk No-Show:
   Anta 4 nye velgere stemmer cbad; b vinner alle sine par og blir Condorcet-vinner.

Konklusjon: En Condorcet-metode som ikke tillater sterk No-Show må kåre b til vinner i Figur 5.3.1 siden a, c og d da sjaltes ut.

Nå kombinerer vi de to konklusjonene. Hvis Condorcet-metoden aldri tillater sterk No-Show, så har de fire nye velgerne som endret grafen demonstrert at metoden tillater svak No-Show: ved å stemme cabd har de nemlig fratatt a seieren og overdratt den til b.

Altså er Moulins teorem godtgjort:

En Condorcet-metode for fire kandidater
må tillate svak No-Show eller sterk No-Show eller begge deler.

Resultatet gjelder også når antall kandidater er $n \geqslant 5$. Det er nok å se på stemmefordelinger der alle velgere i de to valgene rangerer a, b, c, og d på de fire første plassene og så verifisere at beviset trinn for trinn går som før. Hvis en femtekandidat x skulle vinne, så ville de nye velgere under et vilkårlig av punktene 1), 2) eller 3) kunne rangere x foran a, b, c og d, og så gjøre a, b, c eller d til Condorcet-vinner, slik at metoden tillater sterk No-Show.

5.3.2 Kommentar Hvor mange velgere må til for at de to grafene skal kunne realiseres? Konstruksjonen i eksempel 5.2.7 fulgte et enkelt prinsipp, men brukte 33 velgere i det første valget. Moulin greide seg med 15 velgere. Så trengtes 4 velgere ekstra i det andre valget. I bevisførselen her antok vi at opptil 8 nye velgere kunne komme inn etter de 4, men det var logisk overflødig å sjalte ut d som vinner. Vi trengte bare å sjalte ut a og c. Strengt tatt gjorde Moulin bruk av 15+4+6 = 25 velgere**!**

– – – – – – – –

No-Show ble først beskrevet i forbindelse med stemmeoverføringsmetoder (Kapittel 6) som ikke åpner for Strategi 2. I enhver Condorcet-metode henger No-Show nøye sammen med Condorcet-paradokset. Sterk No-Show forutsetter at det ikke er noen Condorcet-vinner, og svak No-Show kan bare skade en Condorcet-vinner w ved at de nye velgere skaper en sykel som omfatter w, altså en klar likhet med Strategi 2.

Moulins resonnement var av kombinatorisk karakter, og etablerte et resultat av betydning for arbeidet med å utvikle bedrede Condorcet-metoder; No-Show kan ikke utelukkes fullstendig! Det finnes også ren kombinatorikk som naturlig blir presentert i en valgteoretisk språkdrakt, men hvor det ikke kan påberopes stor statsvitenskapelig betydning. Man får tro at de tre velgerne i eksempel 5.2.5 ikke alle representerer større velgergrupper. Velgernes uenighet er heldigvis som regel forenlig med felles trekk i deres oppfatning av det politiske landskap, trekk som naturlig gjør sykler til en sjeldenhet.

For Condorcet-metodene fremstår Strategi 2 som et viktigere problem enn No-Show. Oppdagelsen etter et valg av en ubenyttet teoretisk mulighet for en gruppe velgere til å vinne med Strategi 2 er en større grunn til bekymring. En ekvivalent formulering er nemlig at kandidat q, som er førstevalget hos denne velgergruppen, ville ha vunnet valget i stedet for den virkelige vinner w, hvis ikke så mange fra gruppen hadde rangert w på annenplass,

Når man arrangerer preferansevalg, bør man kunne si til velgerne at de har liten, og helst ingen, grunn til å frykte påvisning av en slik ubenyttet teoretisk mulighet når valgresultatet analyseres. Ikke vær redd for å rangere kandidaten du liker nestbest på annenplass**!** Moulin forutsetter altså et *manntall* på $\geqslant$ 25 personer (dvs. stemmeberettigede), hvorav 19 avlegger stemme.

Alle de vanlige stemmeoverføringsmetodene vil altså garantert utelukke slike opplevelser. Men, som vanlig, et gode har sin pris, og No-Show er bare en mindre del av prisen! Muligheten for Strategi 3 blir et viktig tema i kapittel 6.

5.4 Voteringsløp og Condorcet-sykler

Eksempel 3.0.1 fra en Stortingsavgjørelse i 1992 er en Condorcet-sykel med n=3 forslag og store marginer, som vist i første piktogram i Figur 5.4.1. En sykel inntreffer lettere i forsamlinger der partigrupper samordner standpunktene enn i valg med selvstendige velgere. De seks kategoriene reflekterer da ikke uavhengige velgeres oppfatning av sine posisjoner i det politiske landskap.

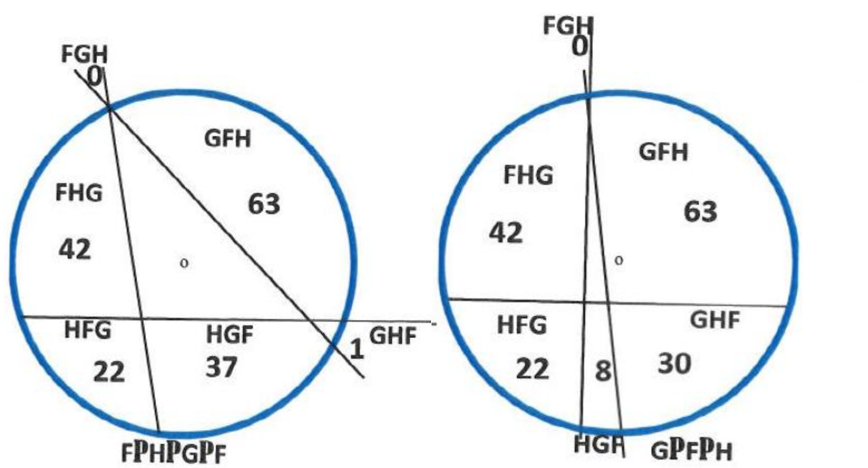
Hvis hver partigruppe plasserer seg i én av de seks mulige stemmekategorier, kan den velgerfrie trekanten T bli langt større enn ved vanlige politiske valg. Men også perfekt sirkeldeling kan forekomme.

Det første piktogrammet i Figur 5.4.1 viser at to av de seks kategoriene, FGH og GHF, har henholdsvis 0 og 1 stortingsrepresentanter, og de har nøyaktig én felles nabo som er stor, nemlig GFH med Arbeiderpartiets 63. Trekanten T får en lang grense mot GHF. Det er klart at T må bli stor. Man må da vente at T dekker sirkelens sentrum og at det foreligger en Condorcet-sykel.

Hvis derimot de to små kategoriene hadde vært plassert annerledes, så hadde T vært liten, og ville ha bestått av ett punkt hvis det var to tomme kategorier. Det kunne, for å tenke kontrafaktisk, ha skjedd på to måter:

● Hvis f.eks Arbeiderpartiet hadde fulgt Aune og plassert seg i GHF, så hadde nabokategoriene FGH og GFH vært tomme; det hadde medført éntoppethet, perfekt sirkeldeling, og piktogram som i Figur 4.3.1. (Det hadde gjort H til Condorcetvinner, og var sikkert ikke aktuelt.)

● Hvis i stedet *alle* Høyres 37 hadde sluttet seg til Aune, så ville to motsatte kategorier, FGH og HGF ha vært tomme. To korder ville da ha vært like og T ville ha bestått av ett punkt. Piktogrammet til høyre i Figur 5.4.1 viser situasjonen etter at 29 av de 37 har gått over. G er blitt Condorcet-vinner. Dette er likevel ikke rent kontrafaktisk, for storparten av Høyre stemte faktisk for G. Hvordan det gikk til, er neste del av historien.



5.4.1 Figur Piktogrammet til venstre viser stemmegruppene fra eksempel 3.0.1; det foreligger en sykel FPHPGPF. Trekanten T fyller 19.01 % av sirkelen. Piktogrammet til høyre viser hvordan det ville ha vært om 29 av Høyres 37 representanter hadde sluttet seg til Aunes 1-manns gruppe.

––––––––

Med Stortingets voteringsmetode, en serie med «ja-nei»-voteringer, ble en overgang fra HGF til GHF altså avgjørende. Kortversjonen er slik:

● Overgangen kom etter at representanter fra GFH og FHG sammen hadde besluttet et voteringsløp som formelt skulle starte med «ja» eller «nei» til G. Et nei-flertall for G, ville reelt føre til en situasjon der 105 representanter måtte antas å foretrekke F fremfor H. Når storparten av Høyres gruppe stemte ja til G, kan man se det som en anvendelse av Strategi 1.

● Men reelt sa Arbeiderpartiet (GFH) og koalisjonen SV/Sp/KrF (FHG) med beslutningen om å starte med G et klart «nei» til Høyres forslag H, allerede før første formelle votering. Høyre fikk reelt beskjed om å velge mellom G og F. Derfor kan den overgang som faktisk fant sted også sees som subsidiær stemmegivning fra Høyre etter at forslaget H reelt allerede var nedstemt.

_ _ _ _ _ _ _ _

Et parti behøver ikke gjøre sin subsidiære stemmegivning kjent på forhånd. Situasjonen kan ikke sammenlignes med et preferansevalg der velgerne skal informere om sine preferanser på stemmesedlene som grunnlag for en opptelling. Partigruppene forbereder seg på det voteringsløpet som skal komme. Voteringsløpet er et instrument for håndtering av situasjonen, og det er helt annerledes enn noen Condorcet-metode.

De prinsipale standpunkt alene sier ikke noe om muligheten for en sykel. Det er naturligvis tenkelig at et parti inntar et subsidiært standpunkt for å skape en sykel som antas å vise seg gunstig i voteringsløpet. Bare svært inngående kjennskap til partiets vurderinger kan gi grunnlag for en slik konklusjon.

Gjennom debatten var det imidlertid blitt klart hvor partigruppene hadde plassert seg. Med så klare marginer som i flyplassvoteringen, spiller det ingen rolle om enkelte representanter med avvikende syn kan tenkes å votere annerledes enn hva partiledelsen ønsker. Det forelå i alt fem forslag, men det ble ansett som klart at de to som kom under votering aller først ville få store «nei»-flertall, og slik gikk det også. Temaet her er håndteringen av sykelen FPHPGPF, og vi holder oss til disse n=3 forslag.

Stortinget følger tradisjonelt *seriemetoden* der ett og ett forslag kommer til votering i en rekkefølge som fastlegges på forhånd. Når forslagene er gjensidig utelukkende, avsluttes voteringen så snart det er flertall for «ja», men det er tenkelig at alle forslag møter et «nei» og at voteringsløpet da ender med status quo.

Før Stortingets votering i 1992 må det ha vært klart for aktørene at

hvis løpet med n=3 skulle starte med F, G, H, så ville «nei» bety seier for henholdsvis H, F, G.

Før avstemningen hadde Stortingets president Benkow lagt opp til å begynne løpet med forslag F (delt løsning). Men representantene har rett til selv å velge voteringsrekkefølgen.

Arbeiderpartiet (GFH) foreslo G som første avstemningstema og forslaget ble vedtatt med støtte fra koalisjonen SV/Sp/KrF (FHG). Høyre kunne så velge

(i) å stemme «nei» til G, hvilket ville være i tråd med den normale praksis at et parti stemmer «nei» inntil partiets eget forslag formelt kommer til votering, eller
(ii) å stemme «ja» til G, hvilket ville være normal subsidiær stemmegivning etter at Høyres eget forslag H reelt var nedstemt av Arbeiderpartiet og koalisjonen.

Et lignende dilemma ville ha vist seg for andre partier dersom man hadde startet med F (presidentens forslag) eller med H (en mulighet påpekt av Høyres gruppeleder, men ikke votert over). Om man antar at for Arbeiderpartiet gikk det største «nyttespranget» mellom nr. 1 G og nr.2 F, og for koalisjonen mellom nr. 1 F og nr.2 H, kan man se at den reelle eliminasjon av H ga både Arbeiderpartiet og koalisjonen større håp om å oppnå sitt ønskede resultat.

Etter at voteringsrekkefølgen med G var bestemt, ba Høyres gruppe om «time-out» fra det pågående plenumsmøtet til et eget gruppemøte. Der ble et flertall i gruppen enige om (ii), altså å sette realitet foran formalitet og å stemme (subsidiært) «ja» til G.

I forhold til den normale formelle fremgangsmåten (i) kan man klassifisere overgangen fra H til G som Strategi 1. Hvis f.eks. 29 av Høyres representanter ville stemme «ja» til G, uten andre endringer, så ville resultatet bli som i høyre piktogram i Figur 5.4.1 der man tenker seg en overgang til enmannsgruppen Aunes standpunkt GHF. Det er en helt normal aksept av et kompromiss, like naturlig som i pluralitetsvalg. De fleste i Høyregruppen voterte som om de tilhørte GHF, og oppnådde at G vant i stedet for F.

G ble så vedtatt med 96 mot 69 stemmer. Noen få representanter fra ulike partier stemte i strid med partiledernes forhåndserklæringer. Men med de store marginer som forelå, kan neppe partidisiplin ha vært blant partiledernes bekymringer.

Det er ikke helt lett å tolke og vurdere slike forhåndserklæringer, og kanskje særlig når det gjelder planlagt subsidiær stemmegivning i en koalisjon av tre partier. Men som bakgrunn for å skjønne voteringene, er det som deltagerne *hadde grunn til å tro* om preferansefordelingen viktigere enn hvordan den faktisk måtte ha vært.

– – – – – – – –

Nasjonalforsamlinger bruker gjerne seriemetoden eller *eliminasjonsmetoden* ved voteringer. Også ved eliminasjon foreligger en nummerering av forslagene; første avstemning er en parvis sammenligning av nr. 1 og nr. 2; vinneren går videre og sammenlignes med nr. 3; i avstemning j møtes vinneren av votering j-1 og forslag nr. j+1.

Eliminasjonsmetoden vil normalt «plukke opp» en Condorcet-vinner w som så vil vinne resten av voteringsløpet og bli stående med den endelige seier, hvis det da ikke stemmes strategisk. Det er nemlig tenkelig at en gruppe representanter vil bidra avgjørende til å eliminere w, hvis den foretrekker en gjenstående kandidat q som dermed blir ny Condorcet-vinner. Slik strategi er utelukket hvis w står sist på voteringslisten.

Seriemetoden er mer farefull for en Condorcet-vinner w. Det er etablert voteringskultur å stemme «nei» så lenge det gjenstår forslag fra ens eget parti (eller andre forslag man liker bedre enn w). Hvis w har under halvparten av førstestemmene i feltet av gjenværende kandidater, vil et «negativt flertall» da gi «nei» til w uten at noen voterer strategisk.

Men hvis Condorcet-vinneren kommer til slutt, er slik strategi ikke mulig. Å sette w sist i voteringsløpet er i tråd med en generell, men noe vag retningslinje om på ethvert trinn å la voteringen gjelde det mest «ekstreme» av de gjenstående forslag. Dette er nok i de fleste tilfeller mulig, og slike avstemninger blir saktens lite spennende. Voteringsløpet kan likevel være viktig for partier og representanter som vil fremføre sine standpunkter i offentlighetens lys.

– – – – – – – –

Voteringskultur kan sitte dypt. Det er forståelig at det ikke var helt enkelt for Høyre å støtte G, men selve forutsetningen om eksistens av en Condorcet-vinner var altså ikke oppfylt.

Sammenlignet med Condorcet-valg og opptelling av stemmesedler er begge former for voteringsløp interessante alternativ med sine muligheter for forhandlingsløsninger og annen tilpasning underveis i situasjoner hvor det ikke eksisterer noen Condorcet-vinner. Partiene tilpasser seg med sin «kardinale nytte» i tankene, slik Høyre gjorde i flyplassvoteringen, mens voteringsløpet i seg selv holdes enkelt med «ja-nei» eller eliminasjoner etter parvis sammenligning. For så vidt kan man hevde at flyplassvoteringen ga «riktig resultat» når kardinal nytte, dvs. preferansenes styrke legges til grunn. Det skjedde uten at partiene ga forslagene «karakterer» som i Range Voting, med kompliserende tilknyttede muligheter for strategi, se Eksempel 3.3.1.

Dersom Stortinget hadde brukt eliminasjonsmetoden, kunne Arbeiderpartiet og koalisjonen ut fra samme tankegang ha vedtatt at det først skulle voteres over paret {G, H}. Ved parseier for H ville så F vinne til slutt. Om man tenker kontrafaktisk, så ville Høyre fått et dilemma også med eliminasjonsmetoden:

(i) stemme $H\mathrm{P}_iG$, med konsekvensen $H\mathrm{P}G$ og så akseptere $F\mathrm{P}H$ i siste votering;
(ii) stemme $G\mathrm{P}_iH$, med konsekvensen $G\mathrm{P}H$ og så oppnå $G\mathrm{P}F$ i siste votering.

Når forsamlingen selv kan vedta voteringsplanen, får handlingsrommet en ekstra dimensjon i tillegg til tilpasningen runde for runde i voteringsløpet.

– – – – – – – –

Oppfattet alle partiene forslag F, *delt løsning*, på samme måte? Faktabildet inneholder trekk som faller utenfor en rent voteringsteknisk modell, men som likevel kan ha hatt betydning for voteringsløpet: Koalisjonen var en prinsipiell motstander av en storflyplass, men Arbeiderpartiet regjerte og kontrollerte prosjekteringen: Ville delt løsning bli prosjektert slik at man også la til rette for senere forslag og vedtak om videre utbygging og samling av all trafikk på Gardermoen?

6 Stemmeoverføringsmetoder

Preferansevalg som bygger på stemmeoverføring (STV = Single Transferable Vote) gjelder valg der v velgere skal velge s blant n kandidater, $s \geqslant 1$.

6.0.1 Det telles opp i flere runder. En runde avsluttes med at en kandidat erklæres for valgt, eller med at en kandidat elimineres, og en ledig plass i rangeringen på den enkelte stemmeseddel fylles ved opprykk blant de etterfølgende kandidatene.

6.0.2 Kun førstestemmer ligger til grunn når en kandidat velges. Velger j har en stemmevekt w_j som starter på 1 og reduseres hver gang j bidrar med sin førstestemme til å velge en kandidat. For hver kandidat som velges, reduseres den samlede stemmevekt med k, der

$$v/(s+1) < k \leqslant v/s$$

Reglene for hvordan den samlede reduksjon skal fordeles på de aktuelle velgere kan variere.

6.0.3 Kriteriet for å bli valgt er at kandidaten har fått førstestemmer med samlet vekt k. I følge reduksjonsregelen i 6.0.2 er den samlede opprinnelige stemmevekten dermed stor nok til å velge s kandidater fordi $sk \leqslant v$ men ikke stor nok til å velge s+1 kandidater fordi $(s+1)k > v$. Hvis ingen ny kandidat oppfyller kriteriet, så må en kandidat elimineres.

6.0.4 De vanlige STV-metodene baserer også eliminasjon på førstestemmene, og eliminerer kandidaten med lavest samlet stemmevekt.

– – – – – – – –

At både valg og eliminasjon bygger kun på førstestemmene betyr for den enkelte velger at skjebnen til de m første kandidater på velgerens stemmeseddel ikke kan påvirkes av omordninger blant kandidatene med rangering m+1, m+2, …, n. Grunnen er at så lenge en av de m første kandidatene i rangeringen fra velger j fremdeles er med i konkurransen, altså ikke valgt og ikke eliminert, så er opplysninger fra stemmeseddelen om rangeringene m+1, m+2, …, n ikke tilgjengelige for tellekorpset. Spesielt innebærer dette at Strategi 2 ikke kan virke i denne klassen av preferansevalg. I det følgende ser vi bare på STV-metoder som eliminerer kandidaten med færrest førstestemmer.

Også andre metoder for preferansevalg kan brukes for valg av flere kandidater. Det spesielle ved STV-metodene er reduksjonene av stemmevekten; en stor velgergruppe får redusert sin samlede stemmevekt ettersom de får valgt inn representanter, og en mindre velgergruppe slipper til. Da er det nødvendig at man kan identifisere hver enkelt stemmeseddel som har fått uttelling, dvs. har bidratt med sin førstestemme til å velge en kandidat, og kan lenke informasjon om redusert stemmevekt til stemmeseddelen.

Når flere kandidater skal velges, skjer det dels i situasjoner hvor man vil finne riktig balanse mellom velgergrupper med *ulike interesser* og dels i situasjoner hvor man vil ha en *saklig rangering* etter objektive kriterier. Avhengig av s = antall kandidater som skal velges – og i den grad stemmesedlene reflekterer en gruppeinndeling – gir STV en tilnærmet «proporsjonal» representasjon av ulike velgergrupper. Men dersom en komité av fagkyndige skal innstille søkere til en stilling, er det normalt at en stillingsbetenkning skal legges til grunn, og ikke gruppeinteresser. Da kan det være riktigere å bruke f.eks. en Condorcet-metode enn en STV-metode.

Noen land har en lang tradisjon for å bruke STV i politiske valg. Irland bruker STV i parlamentsvalg (s$>$1) og presidentvalg (s=1). STV med s=1 betegnes ofte *AV* (britisk-engelsk: *Alternative Vote*) eller *IRV* (amerikansk: *Instant Runoff Voting*). Betegnelsen IRV har som bakgrunn at mange land har presidentvalg i to omganger: Dersom ingen kandidat får 50% oppslutning i et pluralitetsvalg, holdes senere en «Runoff election» med de to sterkeste. Todagersvalg og IRV sammenlignes i del 6.1. I det følgende brukes den beskrivende betegnelsen IRV om STV-valg av s=1 kandidat. Blant andre land med tradisjon for STV er Malta og Australia.

«Contingent Vote» er en forenklet versjon av IRV med opptelling i to runder, der man beholder de to beste kandidatene etter første opptellingsrunde. *«Supplementary Vote»* er en ytterligere forenkling, idet den enkelte velger bare kan rangere to kandidater. Supplementary Vote brukes til valg av mayor i London, og ble også en tid brukt som forsøksordning ved direkte ordførervalg i noen norske kommuner.

– – – – – – – –

6.0.5 IRV med n=3; konstellasjoner og Strategi 3

To rangeringskriterier møtes i IRV. I første opptellingsrunde er kandidatene rangert etter førstestemmer: F_1 foran F_2 foran F_3, og F_3 blir eliminert. Annen runde er finalen med parvis sammenligning; Condorcet-relasjonen legges til grunn.

Anta $C_1 P C_2$ og $C_2 P C_3$ der P betegner streng preferanse i Condorcet-relasjonen. Nesten alltid gjelder da $C_1 P C_3$, men hvis $C_3 P C_1$, velger vi betegnelsene C_1, C_2, C_3 slik at $C_1 P C_2$ og $C_2 P C_3$, men C2≠F3.

Ved stemmelikhet anvendes en regel for tie-break, om nødvendig.

Enhver kandidat a har en plass i begge rangeringene: $a=C_i=F_j$. C_1, C_2 og C_3 kan bli rangert på seks måter etter førstestemmer. Det blir dermed seks mulige *konstellasjoner* av de to rangeringsprinsippene, som vises i Tabell 6.0.6:

	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3
C_1	x			x				x			x				z			z
C_2		y				z	y					z	x				x	
C_3			z		y				z	y				y		y		
		i			ii			iii			iv			v			vi	

6.0.6 Tabell De seks 3x3-tabellene viser de seks mulige *konstellasjoner* av Condorcet-rangering ($C_1 P C_2 P C_3$) og rangering etter antall førstestemmer (F_1, F_2, F_3). IRV-opptellingen er bestemt av konstellasjonen: x, y og z betegner henholdsvis IRV-vinneren, taperen i finalen, og den eliminerte kandidaten. Først elimineres kandidat $z=F_3$ (med færrest førstestemmer). Den kandidat x som deretter står øverst blir IRV-vinner etter finale mot y. Konstellasjon vi, med $x=C_2=F_2$, er eneste konstellasjon der IRV kårer en vinner som hverken er pluralitetsvinner eller Condorcet-vinner.

Tabellen visualiserer opptellingen: først strykes kandidat z lengst til høyre og så strykes den gjenstående kandidat y som står lengst ned; tilbake står da vinneren x. Dette gjelder også hvis det er en Condorcet-sykel, for da er C2≠F3.

Å bestemme konstellasjonen krever mer informasjon om velgerpreferansene enn det som fremkommer ved opptellingen. Bare førstestemmene og én av de tre parvise sammenligningene telles.

Når kan tilhengerne av y eller z snappe seieren fra x ved å stemme strategisk? Inspeksjon av Tabell 6.0.6 leder til følgende konklusjon:

Eneste mulighet for velgere med z eller y på førsteplass til å snappe seieren fra x ved å stemme strategisk, er i konstellasjon iii, der y noen ganger kan vinne med Strategi 3.

For å innse at en eventuell mulighet må være i konstellasjon iii, kan vi resonnere slik:

● Kandidat $z=F_3$ kan ikke passere F_2 ved endring i stemmesedler hvor z allerede har førsteplass; z må bli eliminert. Spørsmålet er derfor hvilke muligheter de velgere har som rangerer y først.

● Endring i stemmesedler med y først kan ikke endre at xPy; y må tape en finale mot x. Men velgerne til y kan kanskje påvirke eliminasjonen og sørge for finale mellom y og z.

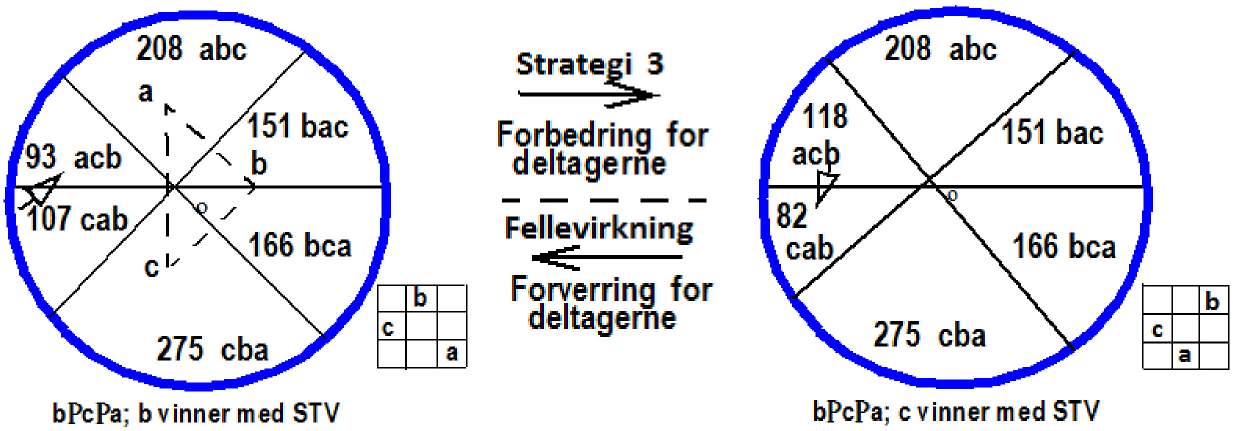
- I konstellasjonene i og ii er x også pluralitetsvinner ($x=F_1$), og har dermed over tredjeparten av førstestemmene; det er klart at y-velgerne ikke kan hindre x i å nå finalen.
- I konstellasjonene iv, v og vi er y sist i Condorcet-rangeringen, og kan ikke hindre tap i en finale, selv om det skulle være mulig å få z som finalemotstander.

● Dermed gjenstår konstellasjon iii, og en mulighet illustreres i Figur 6.0.7.

Betrakt da et valg med n=3 kandidater, v=1000 velgere og stemmevektor

(|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) = (208, 93, 107, 275, 166, 151).

Pluralitetsvinner c snapper seieren fra Condorcetvinner b; se venstre piktogram i Figur 6.0.7:



6.0.7 Figur Venstre piktogram viser konstellasjon iii i Tabell 6.0.6. Antall førstestemmer er $c=F_1$: 382; $b=F_2$: 317; $a=F_3$: 301. Etter eliminasjon av $a=F_3$ vinner $b=C_1$ mot $c=C_2$ i finalen med 525 mot 475.

Men c er klart foran a i Condorcet-rangering (548 mot 452), og har god råd til Strategi 3:

Hvis k velgere som vil delta i Strategi 3 endrer fra cP_iaP_ib til aP_icP_ib, ($16 < k < 48$),

så vil først $a=F_3$ passere $b=F_2$ i førstestemmer siden $(301+k) > 317$, og

i finalen vil c fremdeles vinne parvis sammenligning mot a siden $(548-k) > (452+k)$.

Strategi 3 har ført frem for c. Høyre piktogram viser valget etter at k=25 velgere har skiftet fra cab til acb; konstellasjon v i Tabell 6.0.6 er da oppstått med $b=C_1=F_3$, $c=C_2=F_1$, $a=C_3=F_2$.

Men det er minst like vesentlig å ta utgangspunkt i høyre piktogram. Anta 25 velgere vil endre fra aP_jcP_jb til cP_jaP_jb. For å stanse b kan de, i full oppriktighet, stemme *instrumentelt* for c, som slår a både i førstestemmer og i parvis sammenligning. Det er et forsøk på å unngå b med Strategi 1. Men da går de i en *felle*: Endringen leder til venstre piktogram. Ved å forfremme c til førsteplass på stemmeseddelen, har de 25 velgerne kommet i skade for å frata c den seieren som ellers var klar, og dessuten gjøre sin sist-rangerte b til IRV-vinner.

6.0.8 Feller i IRV

Høyre piktogram i Figur 6.0.7 viser en *felle* for velgerne: Anta 25 velgere, i all oppriktighet, skifter fra acb til cab. Det skulle bety ekstra støtte til c, som lå an til å vinne valget, men leder til venstre piktogram, der b blir IRV-vinner. I stedet for å sikre valget for sin nye favoritt c, har de 25 velgerne ødelagt for c. Og denne ulykken kom ikke alene, fordi de dessuten har gitt seieren til sitt sistevalg b. Overganger begge veier, som vist i Figur 6.0.7, vil forekomme kort før virkelige valg, men nettovirkningen av strategiforsøk og oppriktige stemmeendringer kan neppe skilles fra virkningen av tilfeldigheter i fremmøte, særlig hvis tre eller flere kandidater står ganske likt.

Tilfeldigheter og manglende detaljkunnskap om hva de øvrige velgere planlegger gjør det gjerne alt for risikabelt å organisere et forsøk på å bruke Strategi 3. En endring som den fra venstre til høyre piktogram vil nok i virkeligheten ikke skyldes snedig strategi, men at oppriktig økt støtte til a kan ha fått den uventede bivirkning at seieren gikk fra b til c. I praksis vil det nok være tale om hell og uhell.

Men IRV møter motstand, særlig fordi det kan eksistere feller. Og hva svarer et valgstyre på en henvendelse fra 25 cab-velgere etter valget i venstre piktogram? Etter at b vant, venter de et enkelt svar på sitt spørsmål:

Er det sant at c ville ha vunnet hvis vi ikke hadde skiftet fra acb til cab?

Må slikt forklares som uhell (for c-velgerne) og hell (for b-velgerne) og må det så bare aksepteres i en valgmetode, på linje med andre tilfeldigheter, fordi metodens mange gode sider betyr mer? Eller – er selve muligheten av å skade en kandidat (c) med en forfremmelse til førsteplass og å bli «straffet» i tillegg (valg av b) en så udemokratisk vederstyggelighet at IRV må forbys? Disse spørsmål har vært prøvd rettslig. Minnesotas Høyesterett fant (2009) at IRV ikke er *«unconstitutional»*, men striden fortsetter. Se del 6.3.

6.0.9 No-Show i IRV

Venstre piktogram i Figur 6.0.7 viser en situasjon der kandidat c kunne ha vunnet med Strategi 3, men også kunne ha blitt reddet uten innsats fra sine egne velgere. Redning kunne sågar ha kommet ved at h nyankomne velgere hadde møtt frem og stemt abc, $16 < h < 96$. Med økt velgertall, til n=1000+h, ville a da ha fått 301+h førsteplasser og passert b på 317; i finalen ville c så ha slått a med 548 – (452+h). De h uheldige nyankomne hadde c på sisteplass, men de forårsaket at c snappet seieren fra b. Det hadde vært bedre for de h nyankomne å sitte hjemme; dette kalles et *No-Show paradoks*. No-Show kan også forekomme ved Condorcet-valg, som omtalt i kapittel 5.

6.0.10 Hvor sannsynlige er feller og No-Show i IRV?

Selv for n=3 kandidater er det ikke opplagt hva spørsmålet betyr. Et presist svar krever at man legger til grunn en sannsynlighetsfordeling for (|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|), altså stemmevektoren. Flere rimelig håndterbare fordelinger er i bruk, både i teoretisk arbeid og i simulering (*IC = Independent Culture*, *IAC = Independent Anonymous Culture*), men de tjener andre formål enn å gjenspeile variasjonene i virkelige valg. Og man bør skille mellom to sannsynligheter, på den ene side sannsynligheten for at en felle eller No-Show-mulighet foreligger, på den andre side sannsynligheten for at et kritisk antall velgere så skal skal gå i fella eller dukke opp og skade sin egen sak.

6.1 To valgdager: primærvalg og finale

6.1.1 Todagersvalg Innføring av IRV-metoden begrunnes ofte med at den erstatter en annen fremgangsmåte med valg over to dager. Ved todagersvalg kommer først en avstemning som i pluralitetsmetoden (*nonpartisan primary election*) som omfatter alle kandidater, uansett eventuell partitilhørighet. Man stemmer bare for én kandidat, men de to første går så videre til en finale på et senere tidspunkt. Med *«instant rerun»* sparer IRV en dag; det synes arrangementsteknisk enklere og billigere, og velgerne stemmer bare én gang.

Men selvsagt kan mange se en fortsatt valgkamp begrenset til to hovedmotstandere som en nyttig avklaring av standpunktene. Og IRV legger en større byrde på velgerne enn et todagers valg gjør, for så vidt som at for å være sikre på at de får brukt stemmeretten fullt ut må de i IRV ta standpunkt i alle n(n-1)/2 parvise sammenligninger. I todagersvalg uttaler de seg derimot bare om n-1 kandidatpar første dag og om høyst 1 av de øvrige (n-1)(n-2)/2 par andre dag.

Men likheten mellom todagersvalg og IRV er betydelig. For $n \geqslant 4$ er Contingent Vote (se 6.0.4) i en mellomstilling. Ved opptelling brukes samme informasjon som i et todagersvalg, men stemmesedlene gir samme informasjon som ved IRV. Når det gjelder spørsmål om Strategi 3 og fellevirkning, er det forskjell: IRV og Contingent Vote er ikke *monotone* valgmetoder:

6.1.2 Monotonisitet (definisjon) Med monotonisitet menes at en fellevirkning er umulig: Når en kandidat *forfremmes* på én enkelt stemmeseddel, og dette er eneste endring som gjøres på noen stemmeseddel, så kan det aldri resultere i et *dårligere* resultat for kandidaten. Dette er ekvivalent med at Strategi 3 er umulig (skriv *degraderes* i stedet for *forfremmes* og *bedre* i stedet for *dårligere*).

I et IRV-valg, n=3, benyttes følgende informasjon ved opptellingen (tre tall er nok):

- alle førstestemmene (|abc|+|acb| og |cab|+|cba| er nok, for da kjenner vi F_1, F_2, F_3);
- annenstemmene fra velgerne til den eliminerte a (|abc| er nok, for da kjenner vi |acb|).

Men for å undersøke om stemmefordelingen var en felle eller tillot Strategi 3, trengs mye mer informasjon. Slik informasjon finnes etter et valg med IRV, men det er ikke alltid den frigis.

Etter opptelling av et todagers valg eksisterer ikke informasjon som tillater bestemmelse av konstellasjonen (tabell 6.0.6). Det har ingen mening å spørre om et todagers valg er monotont.

Likevel diskuteres nettopp det! Da tenker man seg, kontrafaktisk, hvordan stemmegivningen annen dag ville ha blitt dersom en annen kandidat hadde blitt eliminert.

6.1.3 Eksempel Det franske presidentvalg 2002

Første dag var det en klar ledertrio: Chirac 19.28%; LePen 16.86%; Jospin 16.18%. Andre dag vant Chirac 82.21% mot LePen 17.79%. Mange anser at venstresidens Jospin tapte på grunn av venstresidens oppsplitting; et relativt lite antall overganger fra andre venstresidekandidater til Jospin hadde vært nok til å gi sittende president Chirac en langt farligere finalemotstander enn LePen. Slike overganger ville ha krevd større kompromissvilje på venstresiden og ha svart til Strategi 1. I finalen mot LePen, oppfattet som kandidat for det ytre høyre, fikk Chirac stemmene fra venstresiden, sentrum og en stor del av høyresiden.

Stemte noen Chiractilhengere for LePen første dag for å få en lett finalemotstander? Det ville svare til Strategi 3. Tanken må utvilsom ha streifet noen av velgerne som stemte LePen første dag, men om det skjedde i slikt omfang at det kunne forklare utfallet, er vel heller tvilsomt. Dessuten, om så var tilfelle, er det umulig å påvise at slik støtte for LePen førte frem, fordi det ikke var innhentet opplysninger som kunne vise at Jospin ville ha vunnet finalen mot Chirac.

Etter et todagersvalg eksisterer ikke data som kan brukes til å *bevise* at adferd svarende til Strategi 3 (eller til Strategi 1) kunne ha ført frem. Bevis for at Strategi 3 var mulig i et IRV-valg, bygger på standpunkt som velgerne uttrykker på stemmesedlene, men som ikke brukes i opptellingen. I todagersvalg foreligger ikke flere standpunkt fra velgerne enn det som registreres i opptellingen.

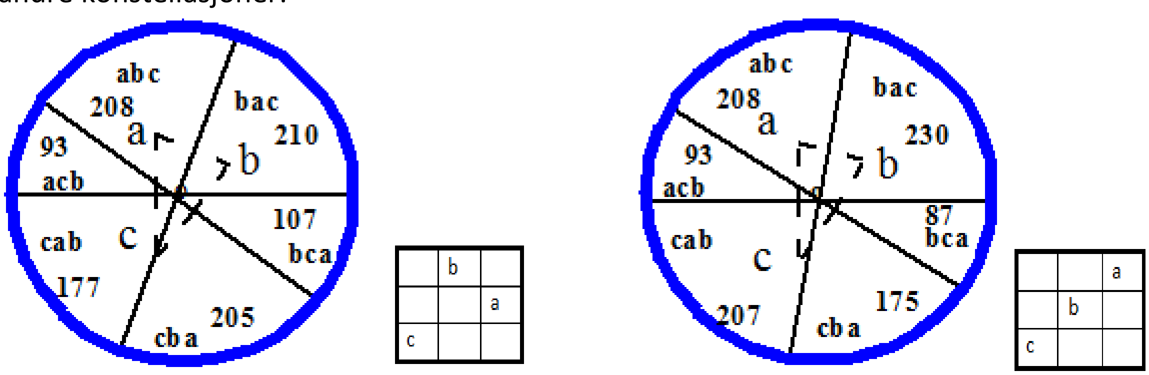
Det er selvsagt også en praktisk forskjell: Eventuelle lure Chirac-tilhengere som stemte LePen første dag, stemte naturligvis Chirac andre dag, men de c-tilhengere som vil gå fra cab til acb i Figur 6.0.7, venstre piktogram, må finne seg i å bli tellet til fordel for a i finalen; IRV kan således ha en større avskrekkende virkning enn todagers valg mot et slikt forsøk.

– – – – – – – –

Tallene fra opptellingen i et todagersvalg eller IRV (med n=3 kandidater), gjelder antall førstestemmer i et pluralitetsvalg (med to vinnere) samt én parvis sammenligning av de to vinnerne. Et annet utfall av pluralitetsdelen ville ha ledet til en annen parvis sammenligning i finalen, men tallene fra opptellingen sier ikke noe om hvordan det da ville ha gått.

I et todagers valg er slike opplysninger ikke engang innhentet. I IRV er de innhentet for sikkerhets skyld, fordi man ikke på forhånd vet hvilke kandidater som går til finalen. Det er på forhånd klart at en fullstendig stemmeseddel i IRV inneholder opplysninger som ikke vil bli brukt. Det kan for så vidt diskuteres om slike opplysninger bør frigis, og om en velgergruppe eventuelt ville misbruke dem ved å klage på at de var fanget i en felle.

Etter IRV-opptelling av valget i Figur 6.0.7, venstre piktogram, er det fremdeles ukjent hvordan annenstemmene var fordelt hos velgere med b eller c på førsteplass. Figur 6.1.4 viser to piktogram som altså gir nøyaktig samme opptelling som venstre piktogram i Figur 6.0.7, men gir to andre konstellasjoner:



6.1.4 Figur Både IRV og todagersvalg går nøyaktig likt i de to piktogrammene her og i venstre piktogram, Figur 6.0.7, som hadde konstellasjon iii og tillot Strategi 3. I alle tre vil primærdelen gi a: 301; b: 317; c: 382. Så blir a eliminert; i finalen blir annenstemmene fra a's velgere tellet for b og c:

b: 208 + 317 = 525; c: 93 + 382 = 475

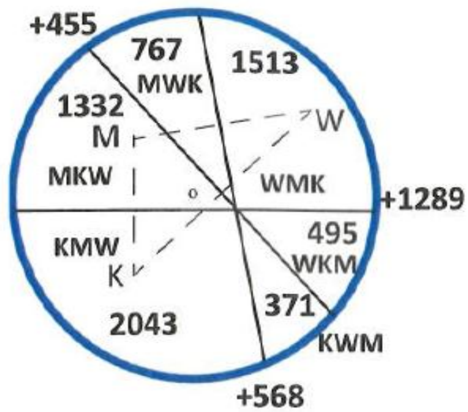
Opptellingen gjør ikke bruk av den videre rangering hos velgerne som ga førstestemme til b eller c. Men en fullstendig preferansefordeling, som i Figur 6.0.7, kan klassifiseres etter konstellasjon (Tabell 6.0.6), og det kan påvises om den er en felle eller tillater Strategi 3. Men konstellasjonen etter et todagersvalg er ikke definert; velgerne med b eller c først har ikke tilkjennegitt nok standpunkt.

Venstre piktogram har konstellasjon iv; det foreligger ingen felle, og Strategi 3 er ikke mulig.
Høyre piktogram, med konstellasjon vi, er en felle: Hvis h>81 velgere skifter fra cba til bca for å støtte b i kampen mot a, så fratar de b seieren som ellers var klar: Condorcet-vinner a slipper inn i finalen.

6.2 IRV-valget i Burlington 2009

Valget av mayor i Burlington, Vermont 3.mars 2009 fikk stor oppmerksomhet, og spesielt situasjonen da tre kandidater gjensto, se Figur 6.2.1. Stemmefordelingen er hentet fra Rangevotings nettsider: http://rangevoting.org/Burlington.html. De tre kandidatene var

(K, M, W) = (Bob **K**iss [progressive], Andy **M**ontroll [democrat], Kurt **W**right [republican]):



6.2.1 Figur Preferansefordeling i Burlingtonvalget. Velgerne kunne rangere så mange kandidater de ville. En stemmeseddel som uttrykkelig inneholdt preferansen $M P_i K$ og ikke nevnte W, ble behandlet som om den uttrykte $M P_i K P_i W$ osv. Dermed regnes f.eks. med 1332 MKW-velgere. Piktogrammet, med 6521 velgere, er nær perfekt sirkeldeling: |T|/|S|=0.00000019.

Tallene utenfor piktogrammet viser antallet velgere som bare støttet en av de tre kandidatene, uten å skille mellom de to andre, f.eks. 455 for M. Opptellingen ville gi samme resultat om disse ble behandlet med symmetrisering, altså 455/2 stemmer $M P_i K P_i W$ og 455/2 stemmer $M P_i W P_i K$.

For enkelhets skyld foretas her en heltallstilnærming når vi symmetriserer og fordeler velgerne utenfor piktogrammet i Figur 6.2.1. F.eks. fordeles de 455 M-velgerne med 227 til $M P_i W P_i K$ og 228 til $M P_i K P_i W$. Dermed har vi stemmevektoren

(|MWK|, |MKW|, |KMW|, |KWM|, |WKM|, |WMK|) = (994, 1560, 2327, 655, 1139, 2158)

Denne stemmevektoren er konstellasjon vi i Tabell 6.0.6:

$$M = C_1 = F_3,\ \ K = C_2 = F_2,\ \ W = C_3 = F_1$$

Condorcet-vinneren M elimineres, og i finalen vinner K mot W (høyre piktogram i Figur 6.1.2).

Men stemmevektoren er også en *felle*: Anta h velgere hadde skiftet fra WKM til KWM for å gi ekstra støtte til K i kampen mot M; K ble faktisk IRV-vinner også for h=0. Stemmevektoren ville ha blitt endret til:

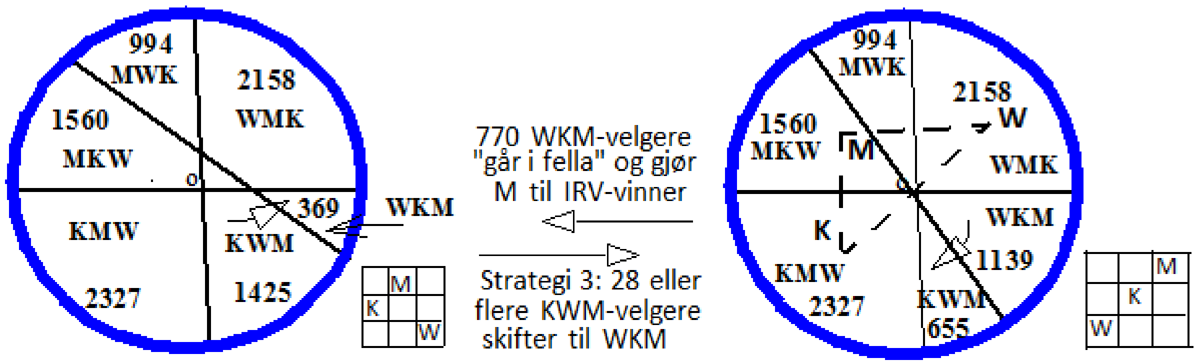
(|MWK|, |MKW|, |KMW|, |KWM|, |WKM|, |WMK|) = (994, 1560, 2327, 655+h, 1139-h, 2158)

Første opptellingsrunde ville ha bygget på førstestemmene:

M: 2554, K: 2982+h, W: 3297-h

Med 2554＞3297-h , dvs. h＞743, ville W ha blitt eliminert. I finalen ville så M ha vunnet mot K med 4712 mot 4121. Venstre piktogram i Figur 6.2.2 viser den stemmefordelingen som ville ha oppstått dersom h=770 velgere hadde skiftet fra WKM til KWM.

Stemmefordeling Burlington 2009



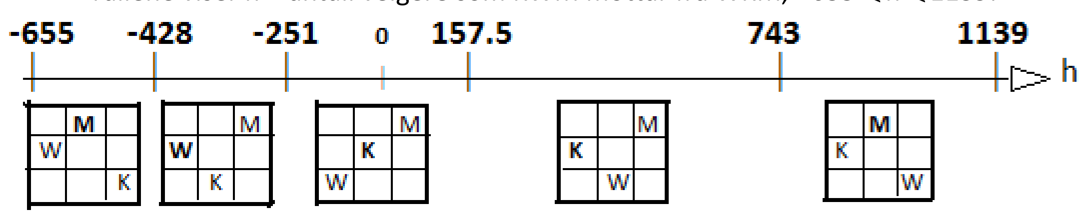
W elimineres; M blir IRV-vinner **M elimineres; K blir IRV-vinner**

6.2.2 Figur I høyre piktogram er stemmefordelingen fra Burlington 2009 (Figur 6.2.1) symmetrisert. Det er nær perfekt sirkeldeling: $|T|/|S|=0.000096$. M er klar Condorcet-vinner, men er sist i antall førstestemmer, som i konstellasjon vi i Tabell 6.0.6. En relativt stor velgergruppe oppfatter slett ikke M som noen kompromisskandidat; 655+1139 = 1794 av de 8833 velgerne rangerer M sist. For å unngå valg av M må de holde både K og W foran M i antall førstestemmer. Høyre piktogram viser to feller for de 1794 som setter M sist: ensidig satsing på W eller K kan føre til valg av M.

Men det skal store forskyvninger til mellom WKM og KWM før M blir IRV-vinner. Hvis 770 WKM-velgere skifter til KMW får man stemmefordelingen i venstre piktogram; W elimineres, og Condorcet-vinner M vinner finalen mot K. M kan også vinne ved endring i motsatt retning: Hvis mer enn 428 velgere i høyre piktogram skifter mot pilen, fra KWM til WKM, så blir K eliminert og M vinner finalen mot W. Unntakstrekanten T i venstre piktogram er større enn normalt i valg med mange velgere: $|T|/|S|=0.0098$. Det minner om at store (tenkte) overføringer mellom WKM og KWM kan lede til urealistiske stemmevektorer. Fellene i Burlingtonvalget fremstår ikke som særlig farlige.

Handlingsrommet for de 1794 velgere som setter kandidat M sist beskrives ved parameteren h og illustreres i Figur 6.2.3.

Tallene viser h = antall velgere som KWM mottar fra WKM, $-655 \leqslant h \leqslant 1139$:



6.2.3 Figur Konstellasjonen endres ved -428, -251, 157.5, 743. IRV-vinneren er fremhevet. Høyre piktogram i Figur 6.2.2 svarer til h=0. For at Condorcet-vinneren M skal bli IRV-vinner må det en stor endring til: $h>743$ eller $h<-428$. En tur langs linjen viser bl.a. hvordan feller og fordelinger som tillater Strategi 3 hører sammen:

$-655 \leqslant h \leqslant -429$: Konstellasjon iii. M er IRV-vinner. Strategi 3 er mulig for WKM-velgerne.
$-427 \leqslant h \leqslant -252$: Konstellasjon v. W er IRV-vinner. En felle: overgang fra KWM til WKM kan la M vinne.
$-250 \leqslant h \leqslant 157$: Konstellasjon vi. K er IRV-vinner. En felle, men langt unna faregrensene.
$158 \leqslant h \leqslant 742$: Konstellasjon v. K er IRV-vinner. En felle: overgang fra WKM til KWM kan la M vinne.
$744 \leqslant h \leqslant 1139$: Konstellasjon iii. M er IRV-vinner. Strategi 3 er mulig for KWM-velgerne.

For h = 0 oppstår høyre piktogram i Figur 6.1.2. altså stemmevektoren i Burlingtonvalget. Unntakstrekanten T i piktogrammet dekker en andel $|T|/|S|$ av sirkelen S som avhenger av h. For h-verdiene i Figur 6.2.3 angis andelen i en tabell:

h	-655	-428	-251	0	157,5	743	1139
|T|/|S|	0.0345	0.0064	0.0022	0.000096	0.00011	0.0089	0.0559

For alle h er M Condorcet-vinner, men for normale valg med et stort antall velgere er T sjelden mer enn noen få promille av S. Stemmevektoren i Burlingtonvalget, konstellasjon vi, svarer til h=0 og er oppnådd ved symmetrisering. Det er greit for opptellingens del, men handlingsrommet i Figur 6.2.3 omfatter dermed velgere som står utenfor piktogrammet i Figur 6.2.1.

Hvis handlingsrommet defineres snevrere, fra -371 til 495, nemlig for de 371+495 velgere som klart rangerte M sist i Figur 6.2.1, så virker stemmefordelingene etter symmetrisering realistiske.

Strategi 3 er vanskelig å anvende, men den samordner velgere som setter Condorcetvinneren sist (Figur 6.2.2). Muligheten bør kanskje ikke uten videre anses som en alvorlig defekt ved IRV!

6.3 Striden om IRV

6.3.1 IRV og ikke-monotonisitet

IRV har egenskapen *ikke-monotonisitet*, se definisjon 6.1.2. Det er nok den egenskap som oftest blir anført som innvending mot bruk av IRV. En kandidat *kan*, under (u)heldige omstendigheter få et bedre (dårligere) resultat når eneste endring er at kandidaten rykker et hakk tilbake (frem) på en enkelt stemmeseddel. I et politisk valg med mange velgere skjer det selvsagt nesten aldri at endring i en enkelt stemmeseddel kan endre utfallet.

Men når vi betrakter de 770 WKM-velgere som vi tenker oss skulle «marsjere utfor stupet» ved h=743 i Burlington-valget, Figur 6.2.3, så kan vi også tenke oss at de går en om gangen: De 742 første forårsaker ikke noen endring. Med nummer 743 må det gjøres tie-break. Senest med nummer 744 tar M finaleplassen fra W, og slår deretter K i finalen. Avhengig av regelen for tie-break, er det altså nummer 743 eller 744 som gjør at valget vipper fra K til M. Et tilsvarende stup ved h=–428 ligger nærmere stemmevektoren ved h=0.

For teoretiske resonnementer kan det være greit å tenke på en «pivotal» velger som alene får stemmevektoren til å krysse grensen mellom «territoriene» for to kandidater. Og når det gjelder Strategi 3 eller felle-effekten, krysses grensen i «gal» retning.

6.3.2 Et middel mot ikke-monotonisitet

For IRV-valg med n=3 kandidater kan vi skape monotonisitet ved en enkel endring i opptellings-reglene. Figurene 6.2.2 og 6.2.3 illustrerer idéen. Dersom Strategi 3 er mulig, tilhører stemmevektoren konstellasjon iii. I Figur 6.2.2, venstre piktogram, kan velgerne som støtter K hjelpe K med Strategi 3: Det er nok at 28 velgere skifter fra KWM til WKM; h reduseres og passerer verdien 743, W passerer M i førstestemmer, M elimineres og K vinner.

Man kan definere vinnerbegrepet slik at K vinner også når h$>$743; det er som om velgerne til K faktisk hadde utført Strategi 3, slik de teoretisk kunne ha gjort. Vi kan kalle det *«automatisk Strategi 3»*. Begrunnelsen er ikke at «K har fortjent det», men at det med automatisk Strategi 3 ikke eksisterer stemmevektorer som valgmetoden gjør til feller.

- **Automatisk Strategi 3, n=3 kandidater (definisjon)**

En pluralitetsvinner som kan vinne med Strategi 3, regnes som vinner av valget. Opptellingsresultatet er som om pluralitetsvinneren hadde gjennomført Strategi 3.

Hvis det kritiske antall velgere «går i fella» og skader sin egen først-rangerte kandidat, så oppstår en stemmevektor der Strategi 3 er mulig. Automatisk Strategi 3 leder så tilbake igjen til den konstellasjon v som ble forlatt, men ikke helt til konstellasjon vi når det gjelder stupet ved h=-428; se Figur 6.2.3.

For -655⩽h⩽-252 blir dermed W vinner og for -250⩽h⩽1139 blir K vinner.

Det er for øvrig ikke urimelig å anse at K fortjener å vinne foran W i konstellasjon vi, -250⩽h⩽157: W har nok flere førstestemmer enn K, men velgerne til den eliminerte M skal høres, og de bidrar i høy grad til å la K slå W i parvis sammenligning.

Man kunne tenke seg at K-velgere fra konstellasjon vi utløste fella til venstre (h=-428) ved overganger fra KWM til WKM; i så fall vil automatisk Strategi 3, som nevnt, ikke lede helt tilbake, men gjøre W til valgets vinner, hvilket kan sies å være en rimelig konsekvens av overgangene.

Men akk. Automatisk Strategi 3 bryter med et viktig prinsipp om at det i en runde skal treffes en endelig avgjørelse *på grunnlag av førstestemmene alene*. Og Strategi 2 dukker dermed opp!

– – – – – – – –

6.3.4 Strategi 2 som mottiltak fra Condorcetvinneren, n=3 velgere

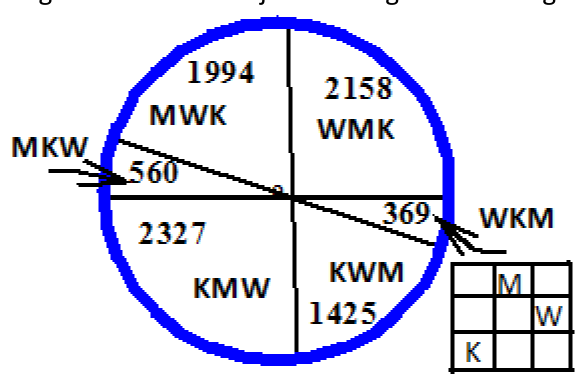
Stemmevektoren i venstre piktogram, Figur 6.2.2, viser at M kan forsvare seg mot automatisk Strategi 3 ved en anvendelse av Strategi 2: For et passende k overføres k velgere fra MKW til MWK. Figur 6.3.5 viser resultatet når k=1000. Poenget er å endre Condorcetstatus for konkurrentene,

fra $K = C_2$, $W = C_3$ til $K=C_3$, $W=C_2$

Med k$>$895 oppnår M at W slår K i parvis sammenligning:

$$(994+2158+369+k) > (1560+2327+1425–k)$$

Det leder fra konstellasjon iii til konstellasjon iv i Tabell 6.0.6. Med Strategi 2 hindrer M dermed K i å vinne med automatisk Strategi 3 idet konstellasjon iv ikke gir noen mulighet for Strategi 3.



6.3.5 Figur Automatisk Strategi 3 åpner for Strategi 2: Med start i venstre piktogram, Figur 6.2.2, har M overført k=1000 stemmer fra MKW til MWK. Konstellasjonen skifter fra iii til iv (Tabell 6.0.6). I konstellasjon iv er Strategi 3 ikke mulig, og pluralitetsvinner K kan ikke reddes. En overføring av 28 eller flere velgere fra KWM til WKM vil fremdeles hindre M i å vinne. Men med start i ovenstående piktogram, er det nå tale om Strategi 1 for å oppnå konstellasjon vi.

6.3.6 Betinget IRV

Det faktum at IRV ikke åpner for Strategi 2 anføres ofte som en stor fordel ved IRV fremfor mange andre metoder. Men Strategi 3 og feller er like klart betydelige ulemper ved IRV. Med automatisk Strategi 3 unngår man altså feller, men åpner for Strategi 2. Med en litt mer radikal reform, som vi skal kalle *«betinget IRV»,* kan man unngå både Strategi 2 og feller/Strategi 3:

● Betinget IRV, n=3 kandidater (definisjon)

Hvis kandidat F_2 har over en tredjedel av førstestemmene, blir det finale mellom F_1 og F_2, i motsatt fall erklæres pluralitetsvinner F_1 som vinner. Kandidat F_2 må *kvalifisere seg til finalen* med en tredjedel av førstestemmene. For øvrig er opptellingen som ved ordinær IRV.

Med betinget IRV er igjen Strategi 2 utelukket i og med at kun informasjon om velgernes førsterangering er tilgjengelig ved første avgjørelse; Strategi 3 er utelukket fordi pluralitetsvinner F_1 ikke har råd til å gi F_3 nok førstestemmer til å passere F_2; et forsøk ville bare gi den opprinnelige pluralitetsvinner posisjon som F_3 og lede til egen eliminasjon.

Det blir finale hvis og bare hvis F_2 har over tredjeparten av førstestemmene; det virker trolig at det er ca 50% sannsynlighet for en finale. Mulighetene er som følger:

● I konstellasjonene i og ii fra Tabell 6.0.6 vil Condorcet-vinneren C_1=F_1 med sikkerhet vinne selv om det blir finale.

● Også i konstellasjonene iii og iv vil en *eventuell* finale bli vunnet av Condorcet-vinneren, men pluralitetsvinner F1 har fått ekstrabeskyttelse gjennom kvalifikasjonskravet.

● I konstellasjonene v og vi vil en *eventuell* finale gå uten C_1. Opptelling i en finale mellom F_1 og F_2 vil vise om det er konstellasjon v eller vi. Konstellasjon v blir alltid vunnet av F_1=C_2, mens konstellasjon vi blir vunnet av F_2=C_2 dersom F_2 kvalifiserer seg for finale.

Seier i ordinær eller betinget IRV for en «tredjekandidat», som hverken er Condorcet-vinner eller pluralitetsvinner, kan åpenbart bare skje ved at kandidat F_2 = C_2 vinner i konstellasjon vi, og i betinget IRV må dette bli enda sjeldnere enn i ordinær IRV på grunn av tilleggskravet om en tredjedel av førstestemmene. Selv om C_1 er eliminert, gir betinget IRV enda bedre beskyttelse til F_1 idet F_2 må kvalifisere seg for finale med en tredjepart av førstestemmene.

Men i Burlingtonvalget ville betinget IRV gitt samme resultat som ordinær IRV, altså finale mellom W og K, med K som vinner, *idet K hadde over en tredjepart av førsteplassene*.

Tredjedelsregelen beskytter ikke F_1 mot faren i finaler mot en F_2 som også har vist styrke ved å få over en tredjedel av førstestemmene; F_1 ville ha vært klarere favoritt i de finaler som unngås med tredjedelsregelen enn i de finaler som beholdes. Betinget IRV atskiller seg derfor neppe vesentlig fra ordinær IRV.

_ _ _ _ _ _ _ _

Med n⩾4 kandidater kan man tenke seg å bruke ordinær IRV inntil tre kandidater gjenstår og avslutte med betinget IRV for n=3. Hvis høyst tre kandidater skiller seg ut som ledende, er det rimelig å tro at problemene rundt monotonisitet ikke er alvorlige. Men det er også mulig å forene monotonisitet med umulighet av Strategi 2 ved å innføre en *betinget finale allerede i annen opptellingsrunde*:

● Betinget IRV, vilkårlig n (definisjon)

En generalisering av betinget IRV til n kandidater kan man få ved å rangere kandidatene i rekkefølge etter førstestemmene F_1, F_2, F_3, … med antall førstestemmer $v_1 > v_2 > v_3 > \cdots$ og la F_1 og F_2 møtes i en finale *på den betingelse* at $(v_1 - v_2) < (v_2 - v_3)$. F_2 skal være nærmere første- enn tredjeplassen, og betingelsen generaliserer kravet om at F_2 må ha over tredjeparten av stemmene hvis n=3.

Finale allerede i annen opptellingsrunde finnes også i Contingent Vote, men hvis pluralitets-vinner F_1 ville tape en finale mot F_2 så kan F_1, når F_2 oppfyller betingelsen, aldri vinne ved å bringe F_3 (eller F_4, F_5, …) opp og forbi F_2 som i Strategi 3, fordi F_1 selv da ville bli eliminert.

_ _ _ _ _ _ _ _

Burlingtonvalget i 2009 fikk etterdønninger. I en egen avstemning om valgmetoden 2010 bestemte velgerne med 52% mot 48% å gå bort fra IRV. Om skuffelse hos de to tapende partier gjorde et velgerflertall mottakelig for kritikk av IRV er et naturlig spørsmål.

IRV er en metode hvor to enkle rangeringskriterier møtes: rangering etter førstestemmer og rangering etter parvise sammenligninger. I de fleste tilfelle vil da også IRV med tre jevnsterke kandidater enten bli vunnet av pluralitetsvinneren (W) eller av Condorcet-vinneren (M). Det er naturlig å se på et IRV-valg som en kamp mellom Condorcet-vinner og pluralitetsvinner dersom disse er to forskjellige kandidater.

Da har det også lett for å bli utlagt som en defekt ved valgmetoden når en tredjekandidat går foran både Condorcet-vinner og pluralitetsvinner. Men med tre jevnsterke kandidater, bør jo alle velgere være innstilt på at hvem som helst av dem kan vinne, og valgets vinner, kandidat K var endog den sittende borgermester, som ble gjenvalgt.

Valget av kandidat K ble mulig av to grunner:

- $M = C_1 = F_3$ (Condorcetvinneren sist i førstestemmer) og
- $W = F_1 = C_3$ (pluralitetsvinneren sist i Condorcet-rangeringen).

Dette medfører jo $K = C_2 = F_2$, altså konstellasjon vi i Tabell 6.0.6. Med IRV-metoden regnes da «to sølv» som bedre enn «gull og bronse». Det skulle dessuten ganske store forskyvninger til før K mistet en av sine «to sølv». Resultatet i Burlington illustrerer på god didaktisk vis IRV-metodens idégrunnlag: den oppfordrer kandidater både til å søke solid primærstøtte og til å fremstå som attraktive kompromisskandidater.

Med «betinget IRV» for n=3 kan man si at pluralitetsvinnerens «gull og bronse» i konstellasjon vi likestilles med «to sølv», i og med at avgjørelsen kan gå begge veier. I Burlingtonvalget hadde imidlertid K 33.76% av førstestemmene da tre kandidater gjensto, og «to sølv» ville ha gått foran «gull og bronse» også med betinget IRV for n=3.

Selv etter en reform som betinget IRV for n⩾4 ville K ha vunnet: I første runde hadde W, K, M henholdsvis 2951, 2585, 2063 førstestemmer (33%, 29%, 23%). Også med betinget IRV for n⩾4, som skaper monotonisitet og fortsatt respekterer velgernes rangeringer ved å gjøre Strategi 2 umulig, ville derfor K ha vunnet etter finale mot W.

Men konstellasjon vi kommer antagelig uventet på velgere flest, for de regner med at en IRV-vinner må være pluralitetsvinner eller Condorcetvinner når tre kandidater gjenstår. Og velgere flest tenker nok sjelden igjennom hvordan en vedtatt valgordning er begrunnet og hvordan den faktisk kan fungere. Kanskje er konstellasjon vi også svært sjelden.

– – – – – – – –

Burlington er bare én av mange arenaer for striden om IRV. Stor oppmerksomhet fikk en rettssak i Minnesota. *Minnesota Voter Alliance* og andre bekymrede borgere gikk til sak mot *The City of Minneapolis* som hadde vedtatt å bruke IRV i sine lokale valg. Organisasjonen *FairVote* som bl.a. arbeider for å innføre STV og IRV opptrådte som hjelpeintervenient for Minneapolis.

Saken ble avgjort i delstaten Minnesotas *Supreme Court* i 2009.

Saksøkerne anførte en avgjørelse fra *samme domstol* i 1915 som prejudikat: I 1915 fant *Supreme Court* ut at *Bucklins* valgmetode var *unconstitutional* (James W Bucklin 1856 – 1919). For å forstå avgjørelsen i 2009 er det nyttig å kjenne til Bucklins metode.

6.3.7 Bucklins valgmetode Velger j gjør et utvalg på k_j kandidater og rangerer dem, der k_j = antallet rangerte kan variere fra velger til velger. Metoden finnes i ulike varianter, men sentralt står en rundevis opptelling der velger j i runde r gir et «Bucklin-poeng» til den rangerte på plass t hvis $t \leqslant r$ og samtidig $t \leqslant k_j$.
Hver runde telles altså som en poengmetode (del 1.3) som vist i tabellen:

Bucklin-valg	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	····
Runde 1	1	0	0	0	····	····
Runde 2	1	1	0	0	····	····
Runde 3	1	1	1	0	····	····
etc						

La $N_r(x)$ være antall Bucklin-poeng kandidat x får i runde r:

$N_r(x)$ = antall stemmesedler med x *rangert* på en av de r første plassene.

Når en kandidat når v/2 Bucklinpoeng i en runde, avsluttes opptellingen, og kandidaten med flest Bucklinpoeng i runden vinner.

6.3.8 Eksempel Med stemmefordelingen fra Burlingtonvalget i Figur 6.2.1 (før symmetrisering), gir første runde etter Bucklins metode antall førstestemmer: 2554, 2982, 3297 for M, K, W.
Ingen har støtte fra over v/2 = 8833/2 velgere. I annen runde går det slik:

	110	**M**	**K**	**W**
767	MWK	**767**		767
455	M	**455**		
1332	MKW	**1332**	1332	
2043	KMW	2043	**2043**	
568	K		**568**	
371	KWM		**371**	371
495	WKM		495	**495**
1289	W			**1289**
1513	WMK	1513		**1513**
8833		**6110**	**4809**	**4435**

I første runde regnes bare de understrekede tall. I annen runde kom alle over v/2; M vinner klart.

Bucklinvalg kan likevel ikke klassifiseres som poengvalg, og heller ikke som matrisesumsvalg (Kapittel 3). Grunnen er at med en ny runde kan det bli endring i den informasjon om velgerens preferanse som skal influere på opptellingen: De 1332 MKW-velgere telles i runde 1 med indifferensklasser {M} og {K,W}, i annen runde med indifferensklasser {M,K} og {W}. Bucklins metode har likevel klar likhet med godtakelsesvalg. Også i et godtakelsesvalg har nemlig en velgerpreferanse to indifferensklasser: Velgeren velger et r og gir et «godtakelsespoeng» til de r første kandidatene; det svarer til Bucklin-tabellens linje for runde r. Men i et Bucklin-valg brukes en ny linje i tabellen for hver ny runde, og da samme linje for alle velgere.
En velger risikerer å skade sin først-rangerte kandidat med sine videre rangeringer. Bucklinmetoden gir incentiv til å prøve Strategi 2 eller å rangere bare én kandidat (k_i=1), og den gir grunn til å frykte at motstandere vil gjøre det samme.

_ _ _ _ _ _ _ _

Et annet underliggende faktum i rettssaken var den valgmetode som ble brukt før Minneapolis innførte IRV; det var todagersvalg, som er drøftet i del 6.1.

Bucklins metode er sårbar for Strategi 2, men ikke for Strategi 3. IRV er sårbar for ikke-monotonisitet på to måter: fellevirkning og Strategi 3, men IRV er ikke sårbar for Strategi 2. Med IRV samles inn mer data om velgerpreferanser enn i et todagersvalg, men ved n=3 kandidater gjør opptellingen ikke noen bruk av denne ekstra informasjon, og det er ikke meningen at den skal brukes. Derimot brukes eller misbrukes slike tilleggsdata til å dokumentere at det forelå en felle eller at Strategi 3 var mulig.

Også todagersvalg anses likevel for å være sårbare på samme måte som IRV er sårbar for Strategi 3, fordi kjennskap til det politiske landskap gjør at aktørene har oppfatninger om hva utfallet vil bli med ulike finalepar. Se presidentvalget i Eksempel 6.1.3. Motstykket til Strategi 3 er stemmegivning i primærdelen første dag for å skaffe egen kandidat en svak finalemotstander, men dette er en mulighet som kan virke for risikabel dersom den i det hele tatt blir oppfattet.

IRV skiller seg altså klart fra Bucklins metode, som var funnet grunnlovsstridig i 1915. Men saksøkerne anførte dommen fra 1915 som et prejudikat. IRV står nær metoden med todagersvalg, som hadde vært brukt før, som ikke var angrepet rettslig, og som dermed fremsto som alternativet hvis også IRV skulle bli funnet grunnlovsstridig.

Det er åpenbart vanskelig å formulere prinsipper som man mener er grunnlovsfestet og som Bucklins metode var felt for å bryte, og dernest begrunne den påstand at de samme prinsipper brytes også av IRV, men samtidig forklare hvorfor det da er greit med todagersvalg.

– – – – – – – –

En del av rettens bemerkninger gjelder grunnleggende forskjeller mellom IRV og Bucklins metode, og at de egenskaper som i 1915 ble ansett grunnlovsstridige, ikke var påvist i IRV.

Når det gjelder likhetene mellom IRV og todagersvalg, vises til at også todagers valg noen ganger gjør det mulig å vinne valget på en måte som svarer til Strategi 3. Men retten la vekt på hvor ofte ikke-monotonisitet ville gjøre seg gjeldende i IRV, og bevisbyrden lå hos saksøkerne:

> *«Second, a key issue in a challenge to voting regulations is whether the regulations impose a* severe *burden on the right to vote. … Although it is apparently undisputed that the IRV methodology has potential for a non-monotonic effect, there is no indication, much less a proof, of the extent to which it might occur, and so there is no way to know whether the alleged burden will affect any significant number of voters. Accordingly, appellants have not established that non-monotonicity imposes a severe burden on the right to vote."*

Det er ikke aldeles klart om retten med *"the extent to which it might occur"* sikter til hvor ofte en felle (som f.eks. i Figur 6.2.2, høyre piktogram) vil eksistere eller til hvor ofte fellen vil bli utløst (utløsning krever at over 742 av 1139 velgere gjør samme endring i Figur 6.2.2).

Retten refererte også til Arrows generelle umulighetsteorem (Kapittel 8), som gjør det klart at de to hovedkravene til preferansevalg, som omtales i 2.4.3, er uforenlige. Et annet umulighetsteorem (Gibbard og Satterthwaite) er en konsekvens, og gjør det klart at det vil alltid eksistere preferansefordelinger som gir mulighet for strategisk stemmegivning.

Begrepet strategisk stemmegivning er imidlertid svært omfattende, og umulighetsteoremene sier ikke noe konkret om at visse *former* for strategisk stemmegivning er uunngåelig. Men både teoremer og rettsavgjørelser er føringer i arbeidet med reglene for preferansevalg.

6.4 STV for s⩾2

For å telle opp et STV-valg med v velgere til s⩾2 *seter* etter reglene i 6.0.1 – 6.0.4, trenger man tre presiseringer.

- Man må ha fastlagt valgkriteriet k i samsvar med ulikhetene i 6.0.2;
- man må ha fastlagt hvordan betalingen skal fordeles i 6.0.3;
- man må ha fastlagt en tie-break-regel til bruk ved stemmelikhet.

Valgkriteriet til *Hare* ligger i en ende av det tillatte intervall og kriteriet til *Droop* nær den andre:

Hare: $k = v/s$; Droop: $k = 1+\mathrm{trunc}(v/[s+1])$

der trunc står for avrunding ned til "heltallsdelen", f.eks. trunc(2.99) = trunc(2.01) = trunc(2) = 2.

Betaling for valg av kandidat x fordeles i Eksempel 6.4.1 ved en *beskatning* med samme andel, t_x, av stemmevekten hos alle som bidrar til å oppfylle valgkriteriet for x. Det samlede bidrag, B_x, har to deler: $B_x = k + S_x$ der S_x er *overskuddet* (*surplus votes*). *Skattesatsen* t_x er slik at

$$k = B_x \cdot t_x = (k+S_x)\cdot t_x\,;\;\; S_x = B_x\cdot(1- t_x) = (k+S_x)\cdot(1- t_x)$$

Overskuddet S_x skal tilbakeføres til hver enkelt bidragsyter, proporsjonalt med bidraget. Etter tilbakeføring har en bidragsyter i behold en andel $(1- t_x)$ av stemmevekten før runden.

Som **tie-break** i eksemplet gis simpelthen fordelen til den som kommer først alfabetisk.

6.4.1 Eksempel En STV-opptelling med stemmefordelingen fra eksempel 1.5.2 går som følger med n=4 kandidater, s=2 seter, v=100 velgere.

For hver opptellingsrunde vises antall stemmesedler av hver type samt stemmevekten som telles for hver kandidat. To stemmesedler med samme rangering men ulik stemmevekt er av forskjellig type.

Hares valgkriterium (*quota*), k = 50

Runde 1		Runde 2		Runde 3		Runde 4	
Sedler	Tell.	Sedler	Tell.	Sedler	Tell.	Stemm.	Tell.
abcd 20	a 20	abc 20	a 20	ab 20	a 20		
bacd 15		bac 15					
bcad 10	b 25	bca 10	b 25	ba 25		b 45	
cbad 10							
cbda 10							
cdba 15	c 35						
dcba 20	d 20	cba 55	**c 55**	ba 55*	b 30	b 55*	**b 50**

I **runde 1** telles førstestemmene; ingen oppfyller valgkriteriet, og d elimineres etter tie-break**.**

I **runde 2** oppfyller c valgkriteriet og får første sete. De 55 velgerne som støtter c betaler med k=50 stemmeenheter. Overskuddet er $S_c = 5$. Betalingen fordeles med andelen $t_c = 50/55 = 10/11$ av hver velgers stemmevekt. Hver av de 55 bidragsytere går inn i runde 3 med stemmevekt 1–10/11 = 1/11.

I **runde 3** får b derfor 25·1 + 55·(1/11) = 30 stemmer *i veiet sum* fra 25 ba-velgere med full stemmevekt og 55 ba-velgere med sterkt redusert stemmevekt. Med *markeres redusert stemmevekt. Det er nå klart at b vil slå a, men, noe formalistisk, får man ta reglene bokstavelig, eliminere a og registrere en runde til:

I **runde 4** står b alene igjen og velges med 45·1+ 55· (1/11) = 50 stemmer (enstemmig) til andre sete.

Droops valgkriterium (*quota*), k = 34

Runde 1		Runde 2		Runde 3	
Sedler	Tell.	Sedler	Tell.	Sedler	Tell.
abcd 20	a 20	abd 20	a 20		
bacd 15					
bcad 10	b 25	bad 25		bd 45	
cbad 10		bad 10*			
cbda 10		bda 10*	b 25+4/7	bd 20*	**b 45+4/7**
cdba 15	**c 35**	dba 15*		db 15*	
dcba 20	d 20	dba 20	d 20+3/7	db 20	d 20+3/7

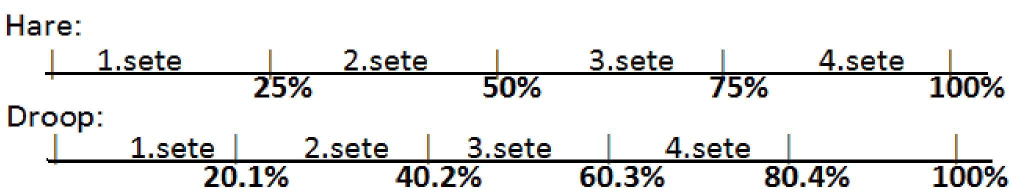
I **runde 1** telles førstestemmene; c oppfyller valgkriteriet og får første sete. De 35 velgerne som støtter c betaler med 34 stemmeenheter. Betalingen fordeles med 34/35 av hver velgers stemmevekt. Overskuddet på S_c = 1 stemme tilbakeføres, og hver av de 35 bidragsytere (merket *) går inn i runde 2 med stemmevekt 1–34/35 = 1/35.

I **runde 2** er det to slags bad-sedler og to slags dba-sedler på grunn av vektreduksjon. Dermed får a 20 stemmer, b får 25·1 + (10+10)·(1/35) = 25+(4/7) stemmer *i veiet sum* og d får 20 + 15·(1/35) = 20+3/7 stemmer *i veiet sum.* Ingen oppfyller valgkriteriet, og a elimineres.

I **runde 3** får b et stort nytt bidrag fra a-velgerne, og øker med 20 stemmer til 45+4/7. Dermed oppfyller b valgkriteriet og får andre sete.

____

I Eksempel 6.4.1 medførte kriteriene til Hare (Thomas Hare 1806-1891) og Droop (Henry Richmond Droop 1831-1884) at de samme to kandidatene ble valgt. Men de to kriteriene kan meget vel gi forskjellige resultater. Her er en visuell sammenligning for valg til s=4 seter:



Figur 6.4.2 Droops kriterium er beregnet for n=1000 velgere, altså 201 stemmer. For hvert sete som vinnes, brukes 25% av stemmene med Hares kriterium, 20.1% med Droops.

Det kan synes som om et lite parti, A, med håp om å få valgt én kandidat, kan ha større sjanse til å lykkes med Droops kriterium, for det kan være lettere å oppnå 20.1% enn 25% i bidrag. Stemmefordelingen *kan* også være slik at A får sitt mandat med Droop, men ikke med Hare.

Men Droop er generelt fordelaktig for et større parti, B, som håper på å vinne 2 eller flere seter: Bidrag f.eks. mellom 40.2% og 50%, eller mellom 60.3% og 75% lar B vinne flere seter med Droop enn med Hare. Og et ekstra sete til B betyr normalt at færre subsidiære stemmer fra Bs velgere vil komme til A.

Med Droop er den samlede stemmevekt som står ubrukt til slutt, altså uten å ha vært brukt til å velge noen kandidat, på 19.6%. Med Hare blir det formelt 0% ubrukt stemmevekt idet siste sete vinnes enstemmig av siste gjenstående kandidat. Men vinneren av 4.sete trenger reelt bare bidrag fra halvparten av de gjenstående 25%; det er nemlig nok å passere 12.5% av den samlede stemmevekt med reelle bidrag, altså mens flere kandidater fremdeles ikke er eliminert. Reelt kan da høyst 12.5% av samlet stemmevekt bli stående ubrukt med Hares kriterium.

Kandidater som elimineres under opptellingen for siste sete har til dels førsteplasser på de opprinnelige stemmesedler. Slike stemmesedler står altså igjen med stemmevekt 1, og deres videre rangering har ikke hatt noen innflytelse på valget.

Ved sammenligning av de to kriteriene, er det et argument i favør av Hares kriterium at det vil gjenstå mindre ubrukt stemmevekt.

6.4.3 Kommentar

Spørsmålet om «riktig» valgkriterium k i STV har et kjent motstykke i spørsmålet om «riktig» *første deletall* i en *modifisert Sainte-Laguë-metode*. Metoden brukes i en del land ved valg i et distrikt til flere seter i nasjonalforsamlingen. En velger må stemme på én partiliste (altså ikke egentlig preferansevalg). Den egentlige Sainte-Laguë-metode har delingstallene 1, 3, 5, 7, 9, … . Hvis fire partier A, B, C, D har 30870, 24255, 11025, 8820 stemmer, baseres setefordelingen på en tabell:

Deletall:	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
A:	**30870**	**10290**	**6174**	**4410**	**3430**
B:	**24255**	**8085**	**4851**	**3465**	**2659**
C:	**11025**	**3675**	**2205**	**1575**	**1225**
D:	**8820**	**2940**	**1764**	**1260**	**980**

Stemmetallene er delt på 1, 3, 5, 7, 9. Så listes tallene etter størrelse og $s \leqslant 10$ seter fordeles:

Sete nr:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	30870	**24255**	**11025**	**10290**	**8820**	**8085**	**6174**	**4851**	**4410**	**3675**
Vinner:	**A**	**B**	**C**	**A**	**D**	**B**	**A**	**B**	**A**	**C**

A tar setene 1, 4, 7, 9; B tar setene 2, 6, 8; C tar setene 3, 10; D tar sete 5.

I en *modifisert* Sainte-Laguë-metode er første deletall > 1. Ved fordeling av setene på Stortinget til partiene i et fylke er første deletall 1.4 (Valgloven § 11-4). Da endres første tabell til:

Deletall:	**1.4**	**3**	**5**	**7**	**9**
A:	**22050**	**10290**	**6174**	**4410**	**3430**
B:	**17325**	**8085**	**4851**	**3465**	**2659**
C:	**7875**	**3675**	**2205**	**1575**	**1225**
D:	**6300**	**2940**	**1764**	**1260**	**980**

Småpartienes største tall forbigås nå av flere tall i søylene til høyre. Setene vinnes i en ny rekkefølge:

Sete nr:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	22050	**17325**	**10290**	**8085**	**7875**	**6300**	**6174**	**4851**	**4410**	**3675**
Vinner:	**A**	**B**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**A**	**C**

Hvis «fylkesbenken» på Stortinget har 5 seter, mister D sitt sete. Hvis den har 3 eller 4 seter, mister C sitt sete. Modifikasjonen gjør metoden bedre for de store partiene.

– – – – – – – –

6.4.4 Gratispassasjerer (*free riders*)

I et STV-valg til $s \geqslant 3$ seter, betegner a kandidaten som vant sete 1 og b kandidaten som vant sete 2. I første runde etter at b ble valgt, betrakter vi to velgere:

Velger i har rangert abx..., og er belastet to ganger; beholdt stemmevekt er $(1\text{-}t_a)(1\text{-}t_b)$.

Velger j har rangert bay…, og er belastet kun for valg av b; beholdt stemmevekt er $1\text{-}t_b$.

De to velgerne har oppnådd det samme, nemlig valg av nr.1 og nr.2 på sine stemmesedler og, i hvert fall hvis setene er likeverdige, virker det urimelig at velger j har større stemmevekt i behold enn velger i etter valg av a og b. Velger j har fått en form for *free ride*, siden andre har betalt for valget av a.

6.4.5 Meeks opptellingsregel

Brian Meek foreslo i 1969 en opptellingsregel som bl.a. sørger for at velgerne i og j i 6.4.4 vil betale like mye. Det skjer ved at en ny runde, r, starter med ny beregning av skattesatsene til de kandidater som allerede er valgt. Beregningen er slik at skattesatsene aldri kan øke, fordi beskatningsgrunnlaget bare kan øke, og fordi eliminasjonene frigjør stemmevekt til overføring. Meeks regel kan kombineres med ethvert valgkriterium (Hare, Droop, etc). Idéen er å oppnå samme resultat som om man startet forfra,

men uten de kandidater som er blitt eliminert, og med de kandidater som allerede er valgt.

6.4.6 Eksempel Velger h har opprinnelig rangering $e_1a_1e_2e_3a_2e_4a_3z$… . Etter r-1 runder er

● bl.a. e_1, e_2, e_3, e_4 blitt eliminert (i en rekkefølge som ikke er vesentlig) og

● bl.a. a_1, a_2, a_3 blitt valgt (i en rekkefølge som ikke er vesentlig), med nedjusterte skattesatser fra runde r-1: t_1, t_2, t_3.

Ved ny justering av skattesatsene i runde r blir resultatet som om stemmeseddelen til velger h helt fra start hadde vært $a_1a_2a_3z$... . Velger h må derfor betale for a_1, a_2, a_3 før gjenstående stemmevekt $(1\text{-} t_1)(1\text{-} t_2)(1\text{-} t_3)$ kan overføres til z; h må altså også betale, i ettertid, for valgte kandidater som første gang oppfylte valgkriteriet uten støtte fra h.

Velgere som ikke har rangert noen valgte kandidater foran sitt førstevalg blant de gjenværende kandidater, står fortsatt med opprinnelig stemmevekt = 1.

Velger j fra 6.4.4 «faktureres» nå for valg av a før gjenværende stemmevekt = $(1\text{-}t_a)(1\text{-}t_b)$ kan overføres til y. Men første gang den valgte kandidat a kan fakturere velger j, økes skattegrunnlaget; a «går med overskudd», dvs. oppnår mer enn valgkriteriet k og kandidat a reduserer dermed skattesatsen t_a fra runden før.

Når én skattesats reduseres, får mange velgere litt «bedret økonomi» og gir litt større bidrag til oppfylling av valgkriteriet for andre kandidater. Det skaper igjen nye overskudd for kandidater som allerede er valgt og leder til nye skattekutt. Derfor blir det en prosess som i teorien er uendelig, men det er opplagt at skattesatsene konvergerer (de kan jo ikke bli 0). Det kan bevises at grensene er uavhengige av rekkefølgen av skattekuttene, av om alle valgte kandidater kutter samtidig, osv. I praksis gjentas kutt så lenge det finnes overskudd over en viss størrelse, f.eks. 10^{-8} stemmer. Deretter blir en ny kandidat valgt eller eliminert.

7. Arrows umulighetsteorem

De to hovedkravene til en valgmetode $\mathcal{F}$ i 2.4.3 var

7.0.1 Fellesskapets preferanse $\mathbb{R}$ blir alltid en komplett ordning.

7.0.2 $\mathcal{F}$ oppfyller IIA.

Det viser seg at begge kravene kan ikke være oppfylt samtidig for n⩾3 unntatt av noen praktisk ubrukelige valgmetoder. Det er likevel vanlig å kreve en *Paretobetingelse* i tillegg, og det forenkler resonnementene.

7.0.3 Pareto-betingelsene går ut på at hvis det er en form for enstemmighet om rangeringen innen et kandidat-par {x, y}, så må fellesskapets relasjon $\mathbb{R}$ i {x, y} være rimelig eller ikke alt for urimelig. Vi kan skille mellom

- **a:** $x\mathbb{R}_j y$ for alle velgere j og $x\mathbb{P}_i y$ for minst én i medfører $x\mathbb{P}y$.
- **b**: $x\mathbb{P}_j y$ for alle velgere j medfører $x\mathbb{P}y$.
- **c:** $x\mathbb{P}_j y$ for alle velgere j medfører $x\mathbb{R}y$.

Åpenbart er det følgende implikasjoner:

$$7.0.3a \Rightarrow 7.0.3b \Rightarrow 7.0.3c$$

Varianten 7.0.3a kreves ofte i velferdsøkonomien: Hvis alle får det minst like godt dersom y erstattes med x, og noen får det bedre, så bør fellesskapet sette x foran y.

Varianten 7.0.3b kan ikke være oppfylt ved et preferansevalg som bare skal sortere kandidatene i to indifferensklasser, de valgte og de ikke valgte. Grunnen er at av tre kandidater, x, y og z, må minst to komme i samme indifferensklasse (begge valgt eller begge ikke valgt). Altså gjelder

$$x\mathbb{I}y \text{ eller } x\mathbb{I}z \text{ eller } y\mathbb{I}z \quad (*)$$

Men hvis alle velgere sier $x\mathbb{P}_j y\mathbb{P}_j z$, så vil 7.0.3b medføre en motsigelse av (*):

$$x\mathbb{P}y \text{ og } x\mathbb{P}z \text{ og } y\mathbb{P}z.$$

Både 7.0.3a og 7.0.3b er dermed så strenge krav at helt alminnelige preferansevalg ikke kan oppfylle dem. Men 7.0.3c sier bare at enstemmighet ikke skal bli direkte motsagt av valgresultatet. Det er nok til å forenkle resonnementene, og man kan knapt tenke seg en valgordning i praktisk bruk som bryter med 7.0.3c. En metode som ikke oppfyller 7.0.3c må jo, i visse situasjoner, konkludere $y\mathbb{P}x$ selv om *alle* velgere stemmer $x\mathbb{P}_j y$.

_ _ _ _ _ _ _ _

Anta nå at det er n⩾3 kandidater, at hver velger har fritt valg mellom de n! fullstendige rangeringer, og at $\mathcal{F}$ oppfyller kravene 7.0.1, 7.0.2 og 7.0.3c. Da gjelder

7.0.4 Arrows teorem

***Enten* er $u\mathbb{I}v$ for alle kandidater u og v**

***eller* det finnes en velger d slik at $\mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_1, \ldots, \mathbb{R}_d, \ldots) = \mathbb{R}_d$.**

Velgeren d kalles gjerne en *diktator*: Den preferanserelasjon $\mathbb{R}_d$ som velger d bestemmer seg for, blir alltid også fellesskapets preferanserelasjon. Arrows teorem sier at det er umulig å oppfylle teoremets forutsetninger (7.0.1, 7.0.2, 7.0.3c) på andre måter enn enten ved *«total beslutnings-vegring»* der alle kandidater erklæres like gode uansett hvordan det stemmes, eller ved et *diktatur.* Hvis man ikke firer litt på forutsetningene, må løsningen bli «Scylla eller Charybdis».

Kenneth Arrows første versjon av teoremet i 1950 vakte stor oppmerksomhet for både innhold og metode. Størst utbredelse fikk nok mer eller mindre vellykkede populariseringer av innholdet: Forutsetningene for Arrows teorem fremstilles som rimelige krav til en valgmetode, og de fører med logisk nødvendighet til et oppsiktsvekkende og nedslående resultat, nemlig at valgmetoden må være håpløst udemokratisk.

At innholdet var oppsiktsvekkende må i noen grad ha berodd på at eldre innsikter var glemt. Med en utbredt kjennskap til Condorcets paradoks, ville Arrows resultat neppe ha vakt samme oppsikt. De som hadde reflektert litt over Condorcet-sykler, kan umulig ha blitt særlig overrasket, jf Eksempel 1.4.3: Det kan jo være uunngåelig at valgets vinner taper med stor margin for en konkurrent i innbyrdes oppgjør. Med IIA fokuseres jo nettopp på parvise oppgjør: Hva slags opptellingsregel konkluderer da $x\mathrm{P}y$ hvis y slår x med stor margin i parvis sammenligning?

Et arbeid av Duncan Black i 1948 innledet en annen angrepsmåte som grep fatt i hvordan velgernes preferanser er fordelt, og Black berømmes også for å ha presentert arbeider av bl.a. Condorcet og Borda for sine fagfeller.

Men en varig og viktig virkning av Arrows teorem skyldes *metoden*: den *aksiomatiske angrepsmåten* viste seg nyttig også i valgforskningen. Arrow studerte ikke forskjellige opptellingsregler, men så alle mulige metoder for preferansevalg under en felles, abstrakt synsvinkel: Metoder for preferansevalg beskrives ved *egenskaper* som de kan ha eller ikke ha. Egenskapene 7.0.1, 7.0.2 og 7.0.3b omtales ofte som *Arrows aksiomer*. I beviset for Arrows teorem i del 7.1 forutsettes imidlertid 7.0.3c i stedet for 7.0.3b.

En oppfølger til Arrows teorem er et annet umulighetsteorem funnet av Gibbard og Satterthwaite, uavhengig av hverandre 20 år senere: For en stor klasse av metoder for preferansevalg til ett sete, vil det alltid være preferansefordelinger som tillater noen å vinne med strategisk stemmegivning.

Angrepsmåten er aksiomatisk men den avhenger av en definisjon av strategisk stemmegivning som er egnet for bevisførsel. Definisjonen er meget vid, og inkluderer bl.a. Strategi 1, som av noen anses som et positivt virkemiddel i demokratiets tjeneste! Men også Gibbard-Satterthwaite er et faktum som studier av strategisk stemmegivning må ta i betraktning. Formulering og bevis følger i del 7.2.

7.1 Et bevis for Arrows teorem

Vi studerer en valgordning $\mathcal{F}$ som antas å oppfylle aksiomene 7.0.1, 7.0.2, 7.0.3c, og skal vise at $\mathcal{F}$ da må være som beskrevet i teoremet. Beviset er et tankeeksperiment med tenkte valg der det er nok informasjon til at man kan utlede noe om resultatet når det telles etter reglene i $\mathcal{F}$.

Dersom $u\mathrm{I}v$ for alle kandidater u og v er teoremets beskrivelse av $\mathcal{F}$ riktig. Opplegget er å vise at i motsatt fall må valgordningen være diktatorisk. Utgangspunktet er da

7.1.1 Det eksisterer en stemmegivning $(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \dots, \mathrm{R}_v)$ og to kandidater, x og y, slik at $x\mathrm{P}y$.

Velgermengden V deles nå inn i to undermengder A og B (Figur 7.1.3):

7.1.2 $V = A \cup B$ der $A = \{i \mid x\mathrm{P}_i y\}$ og $B = \{j \mid y\mathrm{P}_j x\}$.

A er *vinnerlaget* i oppgjøret x mot y mens B *er taperlaget*. På grunn av aksiom 7.0.2, altså IIA, trenger man ikke mer informasjon om valget for å konkludere at $x\mathbb{P}y$.

VALG 1:

A	B
xP_iy	yP_jx

7.1.3 Figur A er definert som vinnerlag og B som taperlag i oppgjøret mellom x og y.

Det er klart at A ikke er den tomme mengden, for hvis B=V, slik at alle velgere stemmer yP_jx, så er Paretoaksiomet 7.0.3c nok til å utelukke $x\mathbb{P}y$.
I denne situasjonen sier man at

7.1.4 A *kan nesten-bestemme* $x\mathbb{P}y$

Dersom $x\mathbb{P}y$ følger selv om noen eller alle velgere på taperlaget skifter standpunkt, har A noe større makt. I så fall sier man at

7.1.5 A *kan bestemme* $x\mathbb{P}y$

En åpenbar sammenheng er implikasjonen

7.1.6 A kan bestemme $x\mathbb{P}y$ $\Rightarrow$ A kan nesten-bestemme $x\mathbb{P}y$

7.1.7 Kommentar: Poenget med distinksjonen er at valgmetoden $\mathcal{F}$ kunne tenkes å tillate en form for strategisk stemmegivning som ligner på Strategi 3: noen av velgerne i B kunne *kanskje* hjelpe y til seier ved å sette y etter x. Det vil snart vise seg at aksiomene gjør dette umulig, og da behøver vi ikke lenger skille mellom «bestemme» og «nesten-bestemme».

I første del av beviset påvises at A har mye mer makt enn det som umiddelbart fremgår av definisjonen 7.1.2. La nå z være en vilkårlig tredjekandidat. Følgende delresultat er første trinn på veien, og viser hvordan IIA-forutsetningen kan utnyttes:

***(i) Hvis* A *kan nesten-bestemme* $x\mathbb{P}y$*, så kan* A *bestemme* $x\mathbb{P}z$**

Bevis for (i). Vi betrakter et valg der velgerne i A og B gir informasjon som vist i Figur 7.1.8:

VALG 2:

A	B
xP_iyP_iz	yP_jz og yP_jx

7.1.8 Figur I dette valget er det ikke spesifisert hvordan velgerne i B forholder seg til paret {x, z}. Det er viktig å trekke en konklusjon som er uavhengig av hva velgerne i B mener om x versus z.

Utgangspunktet for definisjonen av A og B er $x\mathbb{P}y$.
Alle velgere i V stemmer yP_iz; av aksiom 7.0.3c følger da $y\mathbb{R}z$.
Av $x\mathbb{P}y$ og $y\mathbb{R}z$ følger $x\mathbb{P}z$; det skyldes aksiom 7.0.1, nemlig at $\mathbb{R}$ er en komplett ordning jf 2.3.4(5).

Denne konklusjonen, $x\mathbb{P}z$, er ifølge aksiom 7.1.2 (dvs. IIA) bestemt av velgernes rangeringer innenfor {x, z}. Men vi har også funnet at konklusjonen ikke kan påvirkes av hvordan velgerne i B rangerer x og z innbyrdes, I VALG 2 har jo velgerne i B fremdeles full frihet til å stemme yP_jxP_jz eller yP_jzP_jx, og resonnementet frem til $x\mathbb{P}z$ vil fremdeles være gyldig.
Dermed er (i) etablert: A kan bestemme $x\mathbb{P}z$.

Neste delresultat er

***(ii) Hvis* A *kan nesten-bestemme* $x\mathrm{P}y$*, så kan* A *bestemme* $x\mathrm{P}y$**

Bevis for (ii): Ved hjelp av (i) og 7.1.6 følger

$$\text{A kan nesten-bestemme } x\mathrm{P}y \;\Rightarrow\; \text{A kan bestemme } x\mathrm{P}z$$
$$\Rightarrow\; \text{A kan nesten-bestemme } x\mathrm{P}z \;\Rightarrow\; \text{A kan bestemme } x\mathrm{P}y;$$

Når alle i A sier $x\mathrm{P}_i z$ og alle i B sier $z\mathrm{P}_j x$, så gjelder i følge (i) at $x\mathrm{P}z$; i den siste implikasjonen har z og y så byttet roller i delresultat (i). Dermed er (ii) godtgjort; vi trenger ikke å skille mellom «bestemme» og «nesten-bestemme» hvis $\mathcal{F}$ oppfyller aksiomene.

Dessuten har vi oppnådd et utskiftningsresultat:

***(iii) Hvis* A *kan bestemme* $x\mathrm{P}y$*, så kan* A *også bestemme* $x\mathrm{P}z$**

Bevis for (iii): Dette følger umiddelbart av 7.1.6 og delresultat (i).

I delresultat (iii) er det taperkandidaten y som skiftes ut med en vilkårlig tredjekandidat z. Neste steg er å oppnå et tilsvarende resultat om utskiftning av vinnerkandidaten:

***(iv) Hvis* A *kan bestemme* $x\mathrm{P}y$*, så kan* A *også bestemme* $z\mathrm{P}y$**

Bevis for (iv): Vi betrakter et valg der velgerne i A og B gir informasjon som vist i Figur 7.1.9:

VALG 3:

A	B
$z\mathrm{P}_i x\mathrm{P}_i y$	$y\mathrm{P}_j x$ og $z\mathrm{P}_j x$

7.1.9 Figur I dette valget er det ikke spesifisert hvordan velgerne i B forholder seg til paret {y, z}. Det er viktig å trekke en konklusjon som er uavhengig av hva velgerne i B mener om y versus z.

Utgangspunktet for definisjonen av A og B er $x\mathrm{P}y$.
Alle velgere i V stemmer $z\mathrm{P}_i x$; av aksiom 7.0.3c følger da $z\mathrm{R}x$.
Av $z\mathrm{R}x$ og $x\mathrm{P}y$ følger $z\mathrm{P}y$; det skyldes aksiom 7.0.1, nemlig at R er en komplett ordning jf 2.3.4(4).

Denne konklusjonen, $z\mathrm{P}y$, er ifølge aksiom 7.1.2 (dvs. IIA) bestemt av velgernes rangeringer innenfor {y, z}. Men vi har også funnet at konklusjonen ikke kan påvirkes av hvordan velgerne i B rangerer y og z innbyrdes, I VALG 3 har jo velgerne i B fremdeles full frihet til å stemme $y\mathrm{P}_j z\mathrm{P}_j x$ eller $z\mathrm{P}_j y\mathrm{P}_j x$, og resonnementet frem til $z\mathrm{P}y$ vil fremdeles være gyldig.
Dermed er (iv) etablert: A kan bestemme $z\mathrm{P}y$.

Utskiftningsresultatene (iii) og (iv) i kombinasjon viser at A «kan bestemme alt»:

***(v) Hvis* A *kan bestemme* $x\mathrm{P}y$*, så kan A også bestemme* $u\mathrm{P}v$ *for alle* u *og* v.**

Bevis for (v): En sekvens av utskiftninger (iii) eller (iv) viser at A kan bestemme $u\mathrm{P}v$ for

(u, v) = (x, y), (x, z), (y, z), (y, x), (z, x), (z, y).

Dette er alle muligheter for n=3 kandidater; sist i sekvensen står at A kan bestemme $z\mathrm{P}y$. Hvis w er en vilkårlig fjerdekandidat, gir utskiftning av y i (z,y) at A kan bestemme $z\mathrm{P}w$. Siden z og w er vilkårlige elementer utenom {x, y}, er alle mulige kombinasjoner (u, v) dekket.
Dermed er (v) etablert: A kan bestemme i alle parvise sammenligninger.

Neste delresultat er en enkel konsekvens av (v):

(vi) Valgmetoden $\mathcal{F}$ oppfyller Paretobetingelsen 7.0.3b

Bevis for (vi); Hvis uP_jv for alle $j\in V$, så gjelder jo spesielt uP_jv for alle $j\in A$, og siden A kan bestemme $u\mathbb{P}v$, må resultatet da bli $u\mathbb{P}v$.

Dermed er også (vi) etablert.

7.1.10 Kommentar Delresultat (vi) innebærer ikke at man like gjerne kunne ha forutsatt at $\mathcal{F}$ oppfyller Paretoversjonen 7.0.3.b. Så lenge man ikke vet at versjon 7.0.3b kan vises som en konsekvens av de tre aksiomene 7.0.1, 7.0.2, 7.0.3c, som vi her legger til grunn, så kan man heller ikke få vite om det finnes brukbare valgmetoder som oppfyller disse tre aksiomene men ikke oppfyller 7.0.3b.

Hittil har fokus vært på den spesielle velgermengden A som ble definert i 7.1.2; en valgordning $\mathcal{F}$ som oppfyller aksiomene må gi A stor makt. Hvis A er en singletonmengde, så har vi allerede funnet en diktator d, A = {d}. Neste tema er følgende spørsmål: Kan andre velgermengder enn A ha samme makt som A?

(vii) La* V = KUL *være en vilkårlig oppdeling av velgermengden* V *i

to ikke-tomme mengder* K *og* L *uten felles velgere. Da gjelder ett av to:

***Enten:* K *kan bestemme* $u\mathbb{P}v$ *for alle kandidatpar* {u, v}**

***Eller:* L *kan bestemme* $u\mathbb{P}v$ *for alle kandidatpar* {u, v}.**

Bevis for (vii): Betrakt et valg der $x\mathrm{P}_jy$ for alle $j\in K$ og $y\mathrm{P}_ix$ for alle $i\in L$. Siden fellesskapets relasjon $\mathbb{R}$ antas å være en komplett ordning, gjelder ett av tre; $x\mathbb{P}y$, $y\mathbb{P}x$ eller $x\mathbb{I}y$. Av aksiom 7.0.2, altså IIA-kravet, følger at hvilken av disse tre mulighetene som gjelder, ikke avhenger av annen informasjon om valget.

Første mulighet: Hvis $x\mathbb{P}y$, vil K, L, x, y passe i rollene som A, B, x, y i 7.1.2. Delresultatene (i)-(v) viser at K kan bestemme $u\mathbb{P}v$ for alle kandidater u og v.

Andre mulighet: Hvis $y\mathbb{P}x$, vil L, K , y , x passe i rollene som A, B, x, y i 7.1.2. Delresultatene (i)-(v) viser at L kan bestemme $u\mathbb{P}v$ for alle kandidater u og v.

Tredje mulighet: Hvis $x\mathbb{I}y$, oppstår en selvmotsigelse. For å innse det, la igjen z være en tredjekandidat, og se på et valg med informasjon som i Figur 7.1.11:

VALG 4:

K	L
$x\mathrm{P}_jy\mathrm{P}_jz$	$y\mathrm{P}_iz\mathrm{P}_ix$

7.1.11 Figur Av informasjonen her utledes $x\mathbb{P}y$, som viser at tredje mulighet, $x\mathbb{I}y$, ikke eksisterer.

Av $x\mathbb{I}y$ følger $x\mathbb{R}y$.

Siden $y\mathrm{P}_jz$ for alle $j\in V$, følger av (vi) og Paretobetingelsen 7.0.3b at $y\mathbb{P}z$.

Av $x\mathbb{R}y$ og $y\mathbb{P}z$ følger $x\mathbb{P}z$; det skyldes aksiom 7.0.1, nemlig at $\mathbb{R}$ er en komplett ordning jf 2.3.4(4).

Dermed passer K, L, x, z i rollene som A, B, x, y i 7.1.2. Delresultatene (i)-(v) viser at K kan bestemme $u\mathbb{P}v$ for alle kandidater u og v, og siden $x\mathrm{P}_jy$ for alle $j\in K$ må da resultatet bli $x\mathbb{P}y$. Dette er i strid med $x\mathbb{I}y$, og selvmotsigelsen godtgjør at tredje mulighet ikke foreligger.

Dermed er også (vii) etablert.

Hvis K og L velges så jevnstore som mulig, får man altså i følge delresultat (vii) en undermengde av V som kan bestemme alt, og som er så nær halve størrelsen av V som mulig (nøyaktig halvparten hvis det er et jamnt antall velgere). Ytterligere reduksjon av størrelsen kan oppnås på grunn av følgende delresultat:

> ***(viii) La* V = K∪L *være en oppdeling som i (vi) og anta* K *kan bestemme* uPv *for alle* u *og* v*; la* V = S∪T *være en annen oppdeling som i (vi) der både* K∩S *og* K∩T *er ikke-tomme; la S betegne den delmengden som kan bestemme* uPv *for alle* u *og* v *i følge (vi). Da kan* K∩S *bestemme* uPv.**

Bevis for (viii): Betrakt et valg med kandidater a,b, c og informasjon som i Figur 7.1.12:

VALG 5:

	K	L
S	aP_icP_ib	cP_kbP_ka
T	bP_jaP_jc	bP_ta

7.1.12 Figur Velgermengden K splittes opp i K∩S og K∩T; K∩S er en mindre mengde enn K, men kan også bestemme alt.

Alle i K sier aP_ic; siden K kan bestemme alt følger aPc.
Alle i S sier cP_ib; siden S kan bestemme alt følger cPb.
Av aPc og cPb følger aPb; det skyldes aksiom 7.0.1, nemlig at R er en komplett ordning jf 2.3.4(1).
Dermed passer K∩S, L∪T, a, b i rollene som A, B, x, y i 7.1.2; merk at alle i L∪T sier bP_ta.
Delresultatene (i)-(v) viser at K∩S kan bestemme uPv for alle kandidater u og v.
Dermed er delresultat (viii) etablert.

Avslutning:
Hvis en velgermengde K med to eller flere velgere kan bestemme alt, finnes i følge *(viii)* en ekte undermengde, K∩S, med færre velgere enn K, som også kan bestemme alt. Ved gjentatte anvendelser av *(viii)* når man frem til en mengde {d}, med en enkelt velger som kan bestemme alt, slik at $R = R_d$; d er altså en diktator. Dermed er Arrows teorem bevist.

_ _ _ _ _ _ _ _

Allerede i 1972 fant Robert Wilson hvilke løsninger som eksisterer når man bare forutsetter aksiomene 7.0.1 og 7.0.2, altså heller ikke krever den svake Paretobetingelsen 7.0.3c. At heller ikke 7.0.3c er oppfylt, betyr at det finnes minst ett kandidatpar {x, y} slik at selv om xP_iy for alle $i \in V$, så gjelder likevel yPx: Enstemmighet kan motsies.
Man bør ikke vente seg at noen praktisk valgmetode dukker opp når man åpner for en slik motsigelse av enstemmighet. Wilson fant imidlertid at de nye mulighetene uttømmes med to andre typer av ekstremt udemokratiske valgmetoder:

Den ene typen følger en «tradisjon» i den forstand at fellesskapsrelasjonen R er en konstant-funksjon, som altså overhodet ikke påvirkes av stemmegivningen. Et eksempel kunne være at kandidatene under R blir rangert etter alder. Den totale beslutningsvegring er den eneste tradisjonsløsning som oppfyller den svakeste Paretobetingelsen, 7.0.3c.

Den andre typen defineres ved at en av velgerne er «antidiktator»:

At velger a er *antidiktator* betyr at uPv hvis og bare hvis vP_au.

Valgresultatet er her stikk motsatt av hva a stemmer. En antidiktator som er klar over sin spesielle status vil rimeligvis ha et incentiv til å stemme strategisk og de facto bli diktator.

7.2 Gibbards og Satterthwaites umulighetsteorem

Resultatet til Gibbard og Satterthwaite gjelder valgordninger hvor den enkelte velger har fritt valg blant de n! lineære preferanser. Her står $\mathcal{F}$ for en slik valgmetode. Det forutsettes bare:

7.2.1 at $\mathcal{F}$ alltid kårer én vinner blant n kandidater, altså alltid sorterer kandidatene i to indifferensklasser, en vinnerklasse med 1 kandidat og en taperklasse med n-1 kandidater;
7.2.2 at enhver kandidat kan bli vinner ved en passende preferansefordeling.

En slik valgmetode kan ikke være både nøytral og anonym; hvis det f.eks. er v=n! velgere og hver mulig stemmeseddel forekommer én gang, vil jo nøytralitet og anonymitet medføre xIy for alle kandidater x og y. Men hvis en valgmetode suppleres med en bestemmelse om «tie-break», f.eks. at ved likhet går en eldre kandidat foran en yngre, eller en utpekt velger avgjør, så er det en regel som uhyre sjelden er nødvendig når v er stor, slik som ved vanlige politiske valg.

7.2.3 Definisjon Strategisk stemmegivning fra én velger.
La $\mathcal{R} = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_v)$ betegne preferansefordelingen, og la $w(\mathcal{R})$ være vinneren som $\mathcal{F}$ kårer ved en slik valgmetode. Anta nå at én enkelt velger, j, endrer sin preferanse fra R_j til R_j', og dermed endrer preferansefordelingen

$$\text{fra } \mathcal{R} = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_j, \ldots, \mathrm{R}_v) \text{ til } \mathcal{R}' = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_j', \ldots, \mathrm{R}_v)$$

Det kan tenkes at denne endringen leder til en ny $\mathcal{F}$-vinner, $w(\mathcal{R}')$, som velger j i utgangspunktet foretrekker fremfor den første vinner, $w(\mathcal{R})$, altså

$$w(\mathcal{R}')\ \mathrm{P}_j\ w(\mathcal{R})$$

Velger j kan da forbedre valgresultatet i følge R_j ved å *stemme strategisk* (eller *taktisk*) R_j'. Preferansen R_j er da bedre representert på stemmeseddelen ved R_j' enn ved seg selv.

En diktator i Arrows forstand, jf 7.0.4, får *fullt medhold*, altså $\mathrm{R} = \mathrm{R}_d$. Siden de valgmetoder vi tar i betraktning nå bare skal sortere kandidatene i to indifferensklasser, av størrelse 1 og n-1, er det naturlig å modifisere diktatorbegrepet:

7.2.4 Definisjon Velger d er en $\mathcal{F}$*-diktator* hvis $w(\mathcal{R})$ alltid er den *førstrangerte kandidat* i R_d.

Det er klart at hvis $\mathcal{F}$ er diktatorisk, så kan ingen velger forbedre resultatet ved strategisk stemmegivning. Men også det omvendte er sant:

7.2.5 Teorem (Gibbard 1973; Satterthwaite 1975)
> ***Hvis valgmetoden $\mathcal{F}$ aldri tillater noen velger å forbedre resultatet ved strategisk stemmegivning, så må det eksistere en $\mathcal{F}$–diktator.***

Bevis: Anta at $\mathcal{F}$ ikke tillater strategisk stemmegivning; det gjelder å utlede at da eksisterer en $\mathcal{F}$-diktator. Første tema er hvilke muligheter en enkelt velger har til å påvirke resultatet. Ut fra aksiom 7.2.2, eksisterer to preferansefordelinger, $\mathcal{S}$ og $\mathcal{T}$, som gir forskjellige vinnere, altså

$$w(\mathcal{S}) \neq w(\mathcal{T})$$

La $\mathcal{S}$ bli endret til $\mathcal{T}$ ved en sekvens av enkle endringer, slik at de velgere som endrer sin stemmegivning kommer i tur og orden. Det kan da bli ny vinner flere ganger på veien fra $\mathcal{S}$ til $\mathcal{T}$.

Betrakt så en situasjon der velger j, ved å endre preferanse fra $\mathrm{R_j}$ til $\mathrm{R_j}$', endrer fordelingen fra $\mathcal{R}$ til $\mathcal{R}$' og forårsaker at vinneren endres fra w($\mathcal{R}$) til w($\mathcal{R}$'). En av fire muligheter må da foreligge:

1 w($\mathcal{R}$') $\mathrm{P_j}$ w($\mathcal{R}$) og w($\mathcal{R}$') $\mathrm{P_j}$' w($\mathcal{R}$) – [forbedring iht. $\mathrm{P_j}$; forbedring iht. $\mathrm{P_j}$']

2 w($\mathcal{R}$') $\mathrm{P_j}$ w($\mathcal{R}$) og w($\mathcal{R}$) $\mathrm{P_j}$' w($\mathcal{R}$') – [forbedring iht. $\mathrm{P_j}$; forverring iht. $\mathrm{P_j}$']

3 w($\mathcal{R}$) $\mathrm{P_j}$ w($\mathcal{R}$') og w($\mathcal{R}$) $\mathrm{P_j}$' w($\mathcal{R}$') – [forverring iht. $\mathrm{P_j}$; forverring iht. $\mathrm{P_j}$']

4 w($\mathcal{R}$) $\mathrm{P_j}$ w($\mathcal{R}$') og w($\mathcal{R}$') $\mathrm{P_j}$' w($\mathcal{R}$) – [forverring iht. $\mathrm{P_j}$; forbedring iht. $\mathrm{P_j}$']

I tilfellene 1 og 2 kan velger j forbedre resultatet i følge sin opprinnelige rangering $\mathrm{R_j}$ ved endring fra $\mathrm{R_j}$ til $\mathrm{R_j}$, altså ved strategisk stemmegivning som definert i 7.2.3.

I tilfelle 3 kan velger j forbedre resultatet i følge $\mathrm{R_j}$' ved endring fra $\mathrm{R_j}$' tilbake til $\mathrm{R_j}$; også dette tilfelle viser at valgmetoden i visse situasjoner tillater strategisk stemmegivning.

Siden det forutsettes at valgmetoden $\mathcal{F}$ aldri tillater en velger å forbedre resultatet ved strategisk stemmegivning, følger at ingen av tilfellene 1, 2, 3 kan inntreffe.

Derfor kan velger j bare forårsake en endring av vinneren fra w($\mathcal{R}$) slik det skjer i tilfelle 4, altså ved å forfremme en kandidat, x, fra en posisjon etter til en posisjon foran w($\mathcal{R}$), og derved gjøre x til ny vinner, altså x = w($\mathcal{R}$').

Dermed er et sentralt hjelperesultat etablert:

7.2.6 Lemma

***I en sekvens av endringer vil den opprinnelige vinner* w($\mathcal{S}$) *fortsette å vinne så lenge ingen endring i noen velgerpreferanse lar minst én kandidat rykke opp og passere* w($\mathcal{S}$).**

I punktene *(i)* og *(ii)*, vises to egenskaper ved $\mathcal{F}$ som enkle følger av lemmaet. Man kan vel knapt tenke seg å bruke en valgmetode som ikke har disse egenskapene, men de er ikke formelt krevd som egenskaper ved $\mathcal{F}$, så bevisene er nødvendige.

***(i) Hvis kandidat* x *er først i alle* $\mathrm{R_j}$*, så vil* x *være* $\mathcal{F}$*-vinner, dvs.* x = w($\mathcal{R}$).**

Bevis for *(i)*: I følge krav 7.2.2 eksisterer det en preferansefordeling $\mathcal{S}$ som gjør x til $\mathcal{F}$-vinner, altså x = w($\mathcal{S}$). Før nå x frem til førsteplass i hver velgerpreferanse i $\mathcal{S}$. Deretter endres rekkefølgene etter x på hver stemmeseddel slik at man får den gitte preferansefordelingen $\mathcal{R}$. Ingen andre kandidater vil bli forfremmet fra en plass etter til en plass foran x i noen velgerpreferanse. I følge lemma 7.2.6 fortsetter derfor x å være $\mathcal{F}$-vinner: x = w($\mathcal{S}$) = w($\mathcal{R}$). Dermed er *(i)* etablert.

***(ii) Hvis* r *kandidater,* x_1, …, x_r, *opptar de* r *første plasser i alle velgeres preferanser, så er* $\mathcal{F}$*-vinneren i mengden* {x_1 , …, x_r}.**

Bevis for *(ii)*: Anta, om mulig, at $\mathcal{F}$-vinneren y ikke er blant de r kandidatene. Bring så x_1 til topps i alle velgerpreferanser uten å gjøre andre endringer. Da blir x_1 $\mathcal{F}$-vinner i følge *(i)*, men i følge lemmaet forblir y $\mathcal{F}$-vinner siden ingen rykker opp og passerer y i noen velgerpreferanse. Altså kan ikke kandidat y ha vært $\mathcal{F}$-vinner. Dermed er *(ii)* etablert.

En annen valgmetode $\mathcal{G}$ med fellesskapsrelasjon $S = \mathcal{G}(\mathcal{R})$, defineres så ved hjelp av valgmetoden $\mathcal{F}$:

7.2.7 Definisjon av valgmetoden $\mathcal{G}$ La x og y være to kandidater. I hver enkelt preferanse R_j flyttes x og y opp til første og annen plass, men uten at de bytter plass innbyrdes og uten andre endringer; la R_j* være den nye preferanse for velger j, og la $\mathcal{R}^* = (R_1^*, \ldots, R_v^*)$ være den nye preferansefordeling. F.eks. vil

R_i gitt ved $bP_i cP_i yP_i xP_i a$ endres til R_i^* gitt ved $yP_i^* xP_i^* bP_i^* cP_i^* a$;
R_j gitt ved $cP_j xP_j aP_j bP_j y$ endres til R_j^* gitt ved $xP_j^* yP_j^* cP_j^* aP_j^* b$.

Da skal xSy med $S = \mathcal{G}(\mathcal{R})$ bety at $x = w(\mathcal{R}^*)$.

Altså føres x og y til topps uten innbyrdes forskyvning, slik at preferansefordelingen blir $\mathcal{R}^*$; kampen om å bli $\mathcal{F}$-vinner står da i følge *(ii)* mellom x og y, og x blir $\mathcal{F}$-vinner: $x = w(\mathcal{R}^*)$.

Dessuten gjøres S refleksiv ved definisjonen zSz for alle z.

Opptelling med valgmetoden $\mathcal{G}$ gjøres dermed i to etapper for hvert par {x, y} av kandidater:
først endres velgerpreferansene (stemmesedlene) fra R_j til R_j^*;
dernest følger opptelling etter valgmetoden $\mathcal{F}$ der de nye preferanser R_j^* legges til grunn.
Det må altså endres og telles med $\mathcal{F}$ for hvert enkelt par {x, y}, i alt n(n-1)/2 ganger.

Neste fase i beviset er en utforskning av egenskapene til valgmetoden $\mathcal{G}$; det skal vise seg at $\mathcal{G}$ har egenskaper som, i følge Arrows teorem, 7.0.4, ikke kan være til stede samtidig uten at det eksisterer en diktator d i Arrows forstand. Endelig skal det vises at d også må være $\mathcal{F}$-diktator.

Sett nå $S = \mathcal{G}(\mathcal{R})$, og la Q være hjelperelasjonene til S for streng preferanse; se 2.2.

(iii) ***La* a *og* b *være to forskjellige kandidater. Da gjelder ett av to, enten* aQb *eller* bQa, dvs. S *er antisymmetrisk og komplett*.**

Bevis for *(iii)*: Når a og b forfremmes til å ta de to første plassene i hver velgerpreferanse, blir minst én av dem $\mathcal{F}$-vinner på grunn av *(ii)* med r = 2, og høyst én av dem på grunn av aksiom 7.2.1. Altså kåres en entydig $\mathcal{F}$-vinner, a eller b. Dermed er *(iii)* etablert.

(iv) **S er refleksiv**

Dette er en del av definisjon 7.2.7.

(v) ***Valgmetoden $\mathcal{G}$ oppfyller* IIA.**

Bevis for *(vi)*: La a og b være to kandidater; det gjelder å vise at hvorvidt aQb eller bQa er bestemt av inndelingen av velgermengden i A = {i|$aP_i b$} og B = {j|$bP_j a$}. Denne inndelingen forandres ikke når a og b forfremmes til de to første plassene i alle velgerpreferanser og danner preferansefordelingen $\mathcal{R}^*$. Enten a eller b blir så $\mathcal{F}$-vinner i følge *(ii)* med r=2, og i følge lemma 7.2.6 kan $\mathcal{F}$-vinneren deretter ikke forandres ved endringer på plassene 3, 4, …, n. Men slike videre endringer kan bringe $\mathcal{R}^*$ over på en standardform $\mathcal{R}^{**}$ med samme rekkefølge etter a og b.

Alle preferansefordelinger $\mathcal{R}$ som gir de samme mengder A og B vil derfor gi samme avgjørelse når det gjelder a$\mathbb{Q}$b eller b$\mathbb{Q}$a som standardfordelingen $\mathcal{R}$** gir. Dermed er også (v) etablert.

(vi) $\mathbb{S}$ ***er transitiv.***

Bevis for *(vi)*: Det skal påvises at hvis a$\mathbb{S}$b og b$\mathbb{S}$c, så følger a$\mathbb{S}$c. I tilfelle av en likhet er dette opplagt:

Hvis a=b, følger konklusjonen av b$\mathbb{S}$c. Hvis b=c, følger den av a$\mathbb{S}$b. Hvis a=c, er a$\mathbb{S}$c siden $\mathbb{S}$ er refleksiv i følge definisjon 7.2.7.

Hvis a, b, og c er forskjellige, er det nok å vise at det ikke kan foreligge noen sykel: Det gjelder å vise at a$\mathbb{S}$b, b$\mathbb{S}$c og c$\mathbb{S}$a sammen gir en selvmotsigelse. Forfrem da a, b, og c, uten innbyrdes ombytter, til de tre første plasser i alle velgerpreferanser. På grunn av (v) bevares $\mathbb{S}$ innenfor trippelet {a, b, c}.

I følge *(ii)* med r=3 er $\mathcal{F}$-vinneren i {a, b, c}; la a betegne $\mathcal{F}$-vinneren. Forfrem så a og c videre til de to første plasser uten endringer internt i {a,c}. Men c$\mathbb{S}$a betyr at denne videre forfremmelsen har gjort c til $\mathcal{F}$-vinner uten at noen har innhentet og passert forrige $\mathcal{F}$-vinner a i noen velgerpreferanse. Det er umulig i følge lemma 7.2.6. Antagelsen om en sykel har medført en selvmotsigelse. Dermed er også (vi) etablert.

(vii) $\mathcal{G}$ ***oppfyller Paretobetingelsen 7.0.3b*.**

Bevis for *(vii)*: Anta a$\mathbb{P}_i$b for alle i∈V. Når a og b forfremmes til de to første plassene, får a alle førsteplassene, og blir dermed $\mathcal{F}$-vinner i følge *(i)*; følgelig gjelder a$\mathbb{Q}$b. Dermed er *(vii)* etablert.

Avslutning:

Valgordningen $\mathcal{G}$ oppfyller med dette Arrows aksiomer:

7.0.1 (delresultatene (iii), (iv) og (vi) betyr at $\mathbb{S}$ er en komplett ordning),

7.0.2 (delresultat (v) er at $\mathbb{S}$ oppfyller IIA),

7.03c (delresultat (vii) er at $\mathbb{S}$ oppfyller 7.0.3b, som medfører 7.0.3c; se 7.0.3).

Det følger av Arrows teorem 7.0.4 sammen med 7.0.3b at valgmetoden $\mathcal{G}$ må ha en diktator d, fordi muligheten ”total beslutningsvegring” er i strid med 7.0.3b*.*

Det er nå nok å påvise at d også er diktator i valgmetoden $\mathcal{F}$.

Anta da, om mulig, at $\mathcal{R}$ er en preferansefordeling der y er den kandidat som $\mathcal{G}$-diktatoren d rangerer først, men at $\mathcal{F}$ likevel kårer en $\mathcal{F}$-vinner x = w($\mathcal{R}$) ≠ y.

I første del av $\mathcal{G}$-opptellingen forfremmes x og y til de to første plasser i alle velgerpreferanser. Ingen kandidater innhenter og passerer x i noen velgerpreferanse, så x forblir $\mathcal{F}$-vinner. Dette medfører x$\mathbb{Q}$y. Også valgordningen $\mathcal{G}$ lar dermed x slå y. Men x$\mathbb{Q}$y er i strid med at d er $\mathcal{G}$-diktator. Antagelsen x ≠ y har medført en selvmotsigelse.

Derfor må $\mathcal{F}$ være slik at x = w($\mathcal{R}$) = y.

Dermed er d også $\mathcal{F}$-diktator, og teoremet til Gibbard og Satterthwaite er bevist.

Appendiks. Et program for beregning og utskrift av piktogrammer

Kordene i et piktogram definerer seks segmenter. Unntatt ved perfekt sirkeldeling er det et entydig valg av tre segmanter som ikke omfatter trekanten T. I Figur 6.0.7, høyre piktogram, svarer segmentene til antall velgere som stemmer slik:

cP_ja (ca-segmentet med 82 + 275 + 166 = 523 velgere);
aP_jb (ab-segmentet med 208 + 118 + 82 = 408 velgere);
bP_jc (bc-segmentet med 166 + 151 + 208 = 525 velgere).

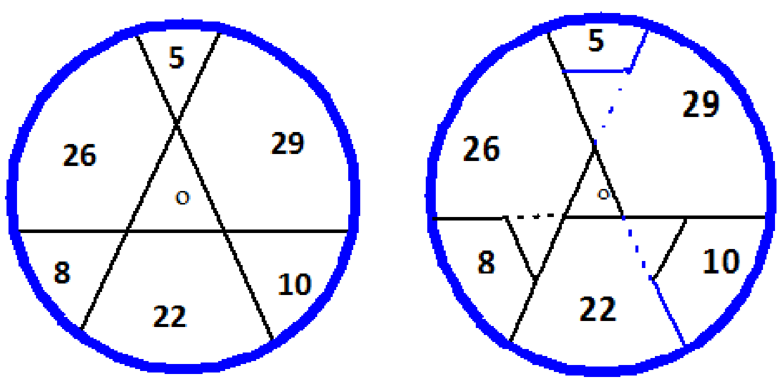
Den geometriske idéen bak beregningen beskrives i del 4.1. Programmet forsøker også å ta utgangspunkt i de tre andre segmentene, som er komplementære til ca, ab og bc:

aP_jc (ac-segmentet med 151 + 208 + 118 = 477 velgere);
bP_ja (ba-segmentet med 275 + 166 + 151 = 592 velgere);
cP_jb (cb-segmentet med 118 + 82 + 275 = 475 velgere).

Forsøket med et ca-segment osv. fører frem i og med at de tre kordene definerer en liten trekant T *som ikke tilhører noen av segmentene*. T dekker en andel på |T|/|S|= 0.000837 av sirkelen S.
Forsøket med et ac-segment osv. gir en figur hvor de tre segmentene definerer en liten trekant T’ *som tilhører alle tre segmentene*; man får et *falskt piktogram* som ligner på høyre piktogram i Figur 6.0.7, men T’ er mindre enn T og dekker en andel på |T’|/|S| = 0.000740 av sirkelen S.

Programmet forsøker begge mulighetene, og velger som default bort det segmentvalget som gir et falskt piktogram. Forskjellen på ekte og falskt piktogram blir klarere med større unntakstrekant T. La da stemmevektoren være:

(|abc|, |scb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|) = (5, 26, 8, 22, 10, 29)



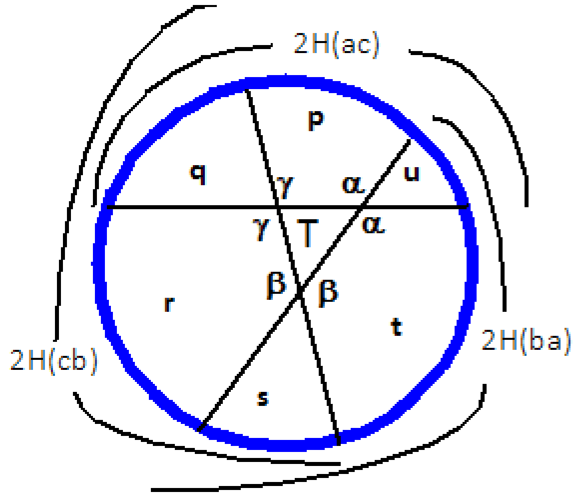
A1 Figur Ekte piktogram til venstre, falskt til høyre. Verdiene Lca= 0.449496 og Lac=- 0.305384, som forklares i teksten, viser at det er segmentene ca (8+22+10), bc (10+29+5)og ab (5+26+8), som gir et ekte piktogram. I det ekte piktogrammet har trekanten en andel 0.051757 av sirkelen.
I det falske piktogrammet overlapper segmentene ac (29+5+26), cb (26+8+22) og ba (22+10+29) i en trekant med andel 0.023816 av sirkelen. Velgergruppene med 26, 22 og 29 velgere er representert med områder som alle inkluderer trekanten T, og de tre mindre velgergruppene får dermed for store arealer. Et «jordskifte» som vist til høyre gir riktige proporsjoner.

– – – – – – – –

Inndata til programmet er ønsket nøyaktighet (**Digits** og **epsi**) og stemmevektoren

(p, q, r, s, t, u) = (|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac|).

I programmet står H(ac), H(cb), H(ba) og H(ca), H(bc), H(ab) for halve buelengden til de seks mulige segmentene. Vridningsvinklene er α, β, γ som vist i Figur A2.



A2 Figur Programmet regner med halvparten av sirkelbuen til et segment (vinkelmål): H(ac) for segmentet ac osv. Vridningsvinkelen mellom segmentene cb og ba betegnes β osv. Det falske piktogrammet ligner på det ekte, men trekanten T blir mindre og tilhører alle de tre segmentene: ca, bc, ab. Sammenhengen mellom arealer og komponenter i stemmevektoren blir mer komplisert; se Figur A1.

Programmet gjennomfører beregningen for begge mulige valg av segmenter, og beregner så

$\text{Lac} = \cos H(cb)\cdot\sin(\alpha) + \cos H(ac)\cdot\sin(\beta) + \cos H(ba)\cdot\sin(\gamma)$ (segmenter ac, cb, ba)

$\text{Lca} = \cos H(bc)\cdot\sin(\alpha) + \cos H(ca)\cdot\sin(\beta) + \cos H(ab)\cdot\sin(\gamma)$ (segmenter ca, bc, ab)

Perfekt sirkeldeling kjennetegnes ved Lac = Lca = 0.

Hvis segmentene ac, cb, ba gir et ekte piktogram er Lac$>$0, Lca$<$ 0.

Hvis segmentene ca, bc, ab gir et ekte piktogram er Lca$>$0, Lac$<$ 0.

A3 Om Lac og Lca Ligningene for de tre kordene i figur A2 er

ac: $y = \cos H(ac)$

cb: $-\sin\gamma \cdot x + \cos\gamma \cdot y = \cos H(cb)$

ba: $\sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y = \cos H(ba)$

Vi søker x-koordinatene for de to skjæringspunktene mellom horisontalkorden ac og de to andre kordene:

ac∩cb: $x_v = [\cos H(cb) - \cos H(ac)\cdot\cos\gamma]/(-\sin\gamma)$

ac∩ba: $x_h = [\cos H(ba) - \cos H(ac)\cdot\cos\alpha]/(\sin\alpha)$

For at T ikke skal ta areal fra segmentene ac, cb, ba, er det som Figur A2 viser, nødvendig og tilstrekkelig at $(x_h - x_v) > 0$, altså $(x_h - x_v)\cdot \sin\alpha\cdot\sin\gamma > 0$:

$$[\cos H(ba) - \cos H(ac)\cdot\cos\alpha]\cdot \sin\gamma + [\cos H(cb) - \cos H(ac)\cdot\cos\gamma]\cdot \sin\alpha > 0$$

Venstresiden kan skrives om, og forenkles ved at $\alpha + \beta + \gamma = 360$ grader:

$$\cos H(ba)\cdot \sin\gamma + \cos H(cb)\cdot \sin\alpha - \cos H(ac)\cdot[\cos\alpha\cdot\sin\gamma + \cos\gamma\cdot\sin\alpha] =$$
$$\cos H(ba)\cdot \sin\gamma + \cos H(cb)\cdot \sin\alpha - \cos H(ac)\cdot \sin(\alpha+\gamma) =$$
$$\cos H(ba)\cdot \sin\gamma + \cos H(cb)\cdot \sin\alpha - \cos H(ac)\cdot \sin(-\beta) =$$
$$\cos H(ba)\cdot \sin\gamma + \cos H(cb)\cdot \sin\alpha + \cos H(ac)\cdot \sin(\beta) = \text{Lac}.$$

– – – – – – –

A4 Arealformler Arealet av et segment, f.eks. ac i Figur A2, kan utrykkes ved halve sirkelbuen H(ac) eller hele sirkelbuen 2H(ac):

A4.1 Areal(segment ac) = H(ac) – sin H(ac) · cos H(ac) = ½ · [2H(ac) – sin(2H(ac))]

(Segmentarealet uttrykkes da som differensen mellom en sirkelsektor og en trekant.)

Arealet som er markert q (= |acb|) i Figur A2 bestemmes av to segmenter (ac og cb) samt vridningsvinkelen mellom dem, og uttrykkes ved hjelp av H(ac), H(cb) og γ: Areal(acb) =

A4.2 $\frac{1}{2}\cdot\{H(ac)+H(cb)-\gamma - \sin(H(ac)+H(cb)-\gamma) + [\cos(\gamma-H(ac)) - \cos H(cb)]\cdot[\cos(\gamma-H(cb)) - \cos H(ac)]/\sin\gamma\}$

En fremgangsmåte for å utlede A4.2 er visualisert i Figur A5.
De to segmentene er gitt ved den vertikale korden

$$x = \cos H(ac)$$

og skråkorden

$$\cos\gamma \cdot x + \sin\gamma \cdot y = \cos H(cb)$$

Man verifiserer lett at R = skjæringspunktet mellom kordene gis ved

$$R = \big(\cos H(ac),\ [\cos H(cb) - \cos\gamma\cdot\cos H(ac)]/\sin\gamma\big)$$

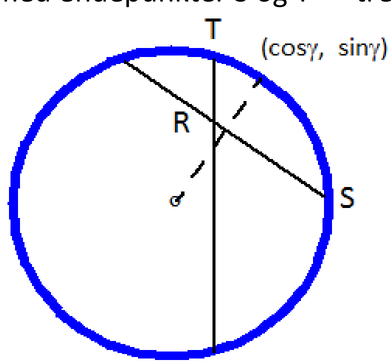
Fellesområdet avgrenses av sirkelbuen mellom S og T, der

$$S = \big(\cos(\gamma - H(cb)),\ \sin(\gamma - H(cb))\big)$$

$$T = \big(\cos H(ac), \sin H(ac)\big).$$

Det søkte fellesareal for de to segmentene beregnes så som en sum;

segmentet med endepunkter S og T + trekanten RST



A5 Figur De heltrukne linjene viser kordene med halvbuer H(ac) (vertikal) og H(cb) etter vridning γ. Det søkte fellesareal beregnes som et segment med sirkelbue fra S til T + trekanten RST; RT tas som grunnlinje i RST.

– – – – – – – –

A6 Hovedtrekk i programmet

Stemmevektoren normaliseres slik at p+q+r+s+t+u = 1 og antall velgere i hvert segment lagres i tabell/matrise S:

S =

ac=u+p+q	cb=q+r+s	ba=s+t+u
ca=r+s+t	bc=t+u+p	ab=p+q+r

Det skjer iterasjoner på to nivåer. Høyeste nivå gjelder *utnyttelsesgraden*: altså andelen av sirkelen utenfor unntakstrekanten. Den er i intervallet (0.5865, 1); minste verdi oppnås med stemmevektoren (1,0,1,0,1,0). Største verdi 1 er ved perfekt sirkeldeling. Størrelsene T(1) og T(2) er utnyttelsesgraden som finnes i to sideordnede prosesser der mulighetsintervallet halveres for hvert skritt: Én prosess bygger på segmentene ac, cb, ba, en annen på ca, bc, ab. Prosessen avbrytes når lengden av mulighetsintervallet er under verdien «epsi».

For hvert trinn på høyeste nivå kommer en prosess på grunn-nivå. Der bestemmes først halvvinklene for segmentene og deretter vridningene. Segmentstørrelser finnes ved formel A4.1 i en prosess med intervallhalveringer; de uttrykkes ved halvbuene H(xy) og oppdaterte verdier og resultater rapporteres i tabell/matrise T:

T =

H(ac)	H(cb)	H(ba)
H(ca)	H(bc)	H(ab)

Vridningene skjer så ved en ny halveringsprosess basert på formel A4.2. Oppdaterte verdier og resultatene rapporteres i tabell/matrise W:

W =

H(ac)	H(cb)	q	γ_1
H(cb)	H(ba)	s	β_1
H(ba)	H(ac)	u	α_1
H(ca)	H(bc)	t	γ_2
H(bc)	H(ab)	p	β_2
H(ab)	H(aa)	r	α_2

En linje inneholder informasjon nok til formel A4.2 for neste iterasjon i vridningsprosessen, nemlig halvbuene fra tabell T for de to segmentene som brukes, og informasjon om fellesområdet for segmentene. Vridningsvinkelen oppdateres i fjerde søyle av W.
Så beregnes summene $\gamma_1 + \beta_1 + \alpha_1$ og $\gamma_2 + \beta_2 + \alpha_2$; de sammenlignes med 2π radianer = 360^o og det avgjøres hvilken halvdel av leteintervallet som skal kuttes ut. Også iterasjonene på grunn-nivå fortsetter inntil leteintervallenes lengder er under «epsi».

_ _ _ _ _ _ _ _

A7 Utskrift av Maple-program

Beregning og utskrift av piktogram

Ønsket nøyaktighet spesifiseres med antall sifre (Digits) og epsi. Beregningene avsluttes når lengden av et intervall som inneholder størrelsen av unntakstrekanten T er under epsi (med sirkelarealet som enhet). Sørg for at det er nok sifre til den ønskede nøyaktighet.

```
> Digits:=16: epsi:=0.0000001:
```

Inndata er stemmevektoren (p, q, r, s, t, u) = (|abc|, |acb|, |cab|, |cba|, |bca|, |bac |) der |xyz| er antall velgere som rangerer x foran y foran z. Summen skrives ut for kontroll.

```
>    p:=994: q:=1560: r:=2327: s:=655: t:=1139: u:=2158:
Ss:=p+q+r+s+t+u;
```

$$Ss := 8833$$

Stemmevektoren standardiseres slik at p+q+r+s+t+u = 1

```
> p:=evalf(p/Ss): q:=evalf(q/Ss): r:=evalf(r/Ss): s:=evalf(s/Ss):
t:=evalf(t/Ss): u:=evalf(u/Ss):
```

Z(1) og Z(2) nærmer seg etter intervallhalveringer til *utnyttelsesgraden* = andelen av piktogrammet hvor det er velgere. Det er to halveringsprosesser som går samtidig; én bygger på segmentene ac, cb, ba og en annen på ca, bc, ab. Ved start settes intervallet til (0.5865, 1) idet |T|/|S|er høyst 0.4135.

```
> for i from 1 to 2 do Zmin(i):=evalf(1.-(3.^(1.5))/(4*Pi));
Zmax(i):=1.; Z(i):=0.5*(Zmax(i)+Zmin(i)); od: ac:=u+p+q: ca:=1-
ac: cb:=q+r+s: bc:=1-cb: ba:=s+t+u: ab:=1-ba: S(1,1):=ac:
S(1,2):=cb: S(1,3):=ba: S(2,1):=ca: S(2,2):=bc: S(2,3):=ab:
```

Iterasjonen på høyeste nivå starter her og en enkelt runde avsluttes med ny beregning av H. Den fortsetter så lenge et leteintervall for utnyttelsesgraden har lengde > epsi. Men instruksjonsgruppen består i all hovedsak av iterasjoner på grunn-nivå. En runde av denne avsluttes med od; od: , og hvis iterasjonene er over, beregnes Ta(1) og Ta(2) som summen av vridningsvinklene.

```
> H:=0.1: while H>epsi do   for i from 1 to 2 do for j from 1 to
3 do seg1:=0.; seg2:=evalf(Pi); k:=evalf(Z(i)*Pi*S(i,j)); while
(seg2-seg1)>epsi do x:=0.5*(seg1+seg2); tv:=x-sin(2.*x)/2.; if
tv<(k+epsi*0.001) then seg1:=x; fi; if tv>k then seg2:=x; fi; od:
T(i,j):=x;od; od;   W(1,1):=T(1,1); W(1,2):=T(1,2); W(1,3):=q;
W(2,1):=T(1,2) ; W(2,2):=T(1,3); W(2,3):=s; W(3,1):=T(1,3);
W(3,2):=T(1,1); W(3,3):=u; W(4,1):=T(2,1); W(4,2):=T(2,2);
W(4,3):=t; W(5,1):=T(2,2); W(5,2):=T(2,3); W(5,3):=p;
W(6,1):=T(2,3); W(6,2):=T(2,1); W(6,3):=r;    Zt(1):=Z(1);
Zt(2):=Z(1); Zt(3):=Z(1);  Zt(4):=Z(2); Zt(5):=Z(2); Zt(6):=Z(2);
for i from 1 to 6 do P:=W(i,1); Q:=W(i,2);
G:=evalf(Pi*Zt(i)*W(i,3)); mm:=abs(P-Q); MM:= min(P+Q,evalf(2*Pi-
P-Q)); while (MM-mm)>epsi do x:=0.5*(MM+mm); tw:=0.5*(P+Q-x-
sin(P+Q-x)+(cos(x-P)-cos(Q))*(cos(x-Q)-cos(P))/sin(x));  if tw>G
then mm:=x: fi; if tw<G then MM:=x; fi; W(i,4):=x; od;od:
Ta(1):=W(1,4)+W(2,4)+W(3,4); Ta(2):=W(4,4)+W(5,4)+W(6,4); if
Ta(1)<evalf(2*Pi) then Zmin(1):=Z(1); fi; if Ta(1)>evalf(2*Pi)
then Zmax(1):=Z(1); fi; if Ta(2)<evalf(2*Pi) then Zmin(2):=Z(2);
fi; if Ta(2)>evalf(2*Pi) then Zmax(2):=Z(2); fi; for i from 1 to
2 do Z(i):=0.5*(Zmax(i)+Zmin(i)); od; Hh(1):= Zmax(1)-Zmin(1);
Hh(2):= Zmax(2)-Zmin(2); H:=max(Hh(1),Hh(2)); od:
```

Lac og Lca beregnes, og fortegnet viser hvilken av de to mulige valg av segmenter som gir et (ekte) piktogram.

```
> Lac:= cos(W(1,1))*sin(W(2,4)) + cos(W(2,1))*sin(W(3,4)) +
cos(W(3,1))*sin(W(1,4)): Lca:= cos(W(4,1))*sin(W(5,4)) +
cos(W(5,1))*sin(W(6,4)) + cos(W(6,1))*sin(W(4,4)):
```

PLOTT og utskrift starter her. Sz1 og Sz2 er størrelsene av unntakstrekanten T med segmenter henholdsvis (ac, cb, ba) og (ca, bc, ab). Accsz er oppnådd nøyaktighet.

```
> if Lac>0 then Sz1:=1.-Z(1); Hac:= T(1,1)*180/evalf(Pi); Hcb:=
T(1,2)*180/evalf(Pi); Hba:= T(1,3)*180/evalf(Pi);
```

```
twists1:=W(1,4)*180/evalf(Pi), W(2,4)*180/evalf(Pi),
W(3,4)*180/evalf(Pi); fi; if Lca>0 then Sz2:=1.-Z(2); Hca:=
T(2,1)*180/evalf(Pi); Hbc:= T(2,2)*180/evalf(Pi); Hab:=
T(2,3)*180/evalf(Pi); twists2:=W(4,4)*180/evalf(Pi),
W(5,4)*180/evalf(Pi), W(6,4)*180/evalf(Pi); fi;  Accsz:=H;
```

$Sz1 := 0.0000961699493200$

$Hac := 93.00901472568502$

$Hcb := 91.27449452877043$

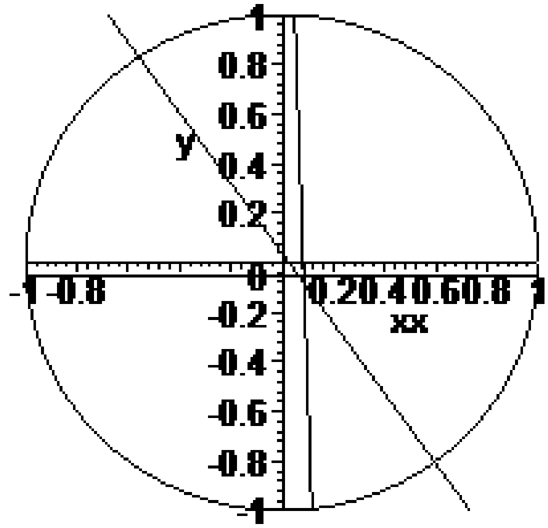
$Hba := 85.25246322154997$

$twists1 := 125.2830935835110 , 146.6379570128330 , 88.07898368984832$

$Accsz := 0.985852889\ 10^{-7}$

Vis det ekte piktogrammet. En mulighet for å se det falske piktogrammet gis til slutt.

```
> a:=cos(T(1,1)): b1:=W(1,4): c1:=cos(T(1,2)): b2:=-W(3,4):
c2:=cos(T(1,3)):  as:=-cos(T(2,1)): bs1:=W(4,4): cs1:=-
cos(T(2,2)): bs2:=-W(6,4): cs2:=-cos(T(2,3)): if Lac>0 then
plot([(1-xx^2)^(0.5),-(1-xx^2)^(0.5), a, tan(b1)*xx+c1/cos(b1),
tan(b2)*xx+c2/cos(b2)],xx=-1..1, y=-1..1,color=black); fi; if
Lca>0 then  plot([(1-xx^2)^(0.5),-(1-xx^2)^(0.5), as,
tan(bs1)*xx+cs1/cos(bs1), tan(bs2)*xx+cs2/cos(bs2)],xx=-1..1, y=-
1..1,color=black); fi;   Lac:=Lac; Lca:=Lca;
```



$Lac := 0.01646485368125311$

$Lca := -0.01611035753433912$

Ekstra informasjon. Skriv ut en stemmevektor i prosent med 4 desimaler. Angi Condorcet-relasjonen med følgende kode;   iCon = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 for sykelen aPbPcPa; bPcPa; cPaPb; cPbPa; aPbPc; bPaPc; aPcPb; sykelen aPcPbPa.

```
> Profile:= 0.0001*trunc(1000000*p+0.5),
0.0001*trunc(1000000*q+0.5), 0.0001*trunc(1000000*r+0.5),
0.0001*trunc(1000000*s+0.5), 0.0001* trunc(1000000*t+0.5),
0.0001*trunc(1000000*u+0.5); iac:=0: icb:=0: iba:=0: if
(u+p+q)>(r+s+t) then iac:=4:fi: if (q+r+s)>(t+u+p) then
icb:=2;fi: if (s+t+u)>(p+q+r) then iba:=1;fi: iCon:=iac + icb +
iba;
```

$$Profile := 11.2533, 17.6610, 26.3444, 7.4154, 12.8948, 24.4311$$

$$iCon := 6$$

For å se det falske piktogrammet, utfør tegnskifte og start påny ved instruksjonsgruppen PLOTT.

```
> Lac:=-Lac; Lca:=-Lca;
```

$$Lac := -0.01646485368125311$$

$$Lca := 0.01611035753433912$$

Referanser

En omfattende samling av referanser til arbeider i social choice styres av J S Kelly ved Syracuse University:

http://faculty.maxwell.syr.edu/jskelly/A.htm

Opptakten til umulighetsteoremene og til interessen for av preferansestrukturen kan man få et inntrykk av ved å se på disse arbeidene:

Arrow, Kenneth J.; "A Difficulty in the Concept of Social Welfare"; Journal of Political Economy; Vol. 58, No. 4; August, 1950; 328-346; #419.

Social Choice and Individual Values; 1st: New York; Wiley; 1951; 2nd: New York; Wiley; 1963.

Black, Duncan; "On the Rationale of Group Decision-Making"; Journal of Political Economy; Vol. 56, No. 1; February, 1948; 23-34.

The Theory of Committees and Elections; Cambridge University Press 1948

Gibbard, Allan F.; "Manipulation of Voting Schemes: a General Result "; Econometrica; Vol. 45, No. 3; April, 1973; 587-601.

Satterthwaite, Mark A.; "Strategyproofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions"; Journal of Economic Theory; Vol. 10, No. 2; April, 1975; 187-217.

En omfattende fremstilling av resultater om Condorcets paradoks finnes i:

Gehrlein, William V.; "Condorcet's Paradox" Springer 2006

Meeks forbedring av STV for tre eller flere seter ble foreslått her:

Meek, Brian L.; "Une nouvelle approche du scrutin transférable (fin). Le problème des votes non transférables"; Mathématiques et Sciences Humaines; No. 29; Spring, 1970; 33-39. (På engelsk i Voting Matters (Issue 1 1994; http://www.votingmatters.org.uk/)

En oversikt over hvordan ideene bak STV utviklet seg finnes i denne oversiktsartikkelen:

Tideman, T. Nicolaus; "The Single Transferable Vote"; The Journal of Economic Perspectives; Vol. 9, No. 1; Winter, 1995; 27-38.

Stoff til denne teksten er også hentet fra artikler av forfatteren:

Stensholt, Eivind; "Circle Pictograms for Vote Vectors"; SIAM Review; Vol. 38, No. 1; 1996; 96-119.

"Voteringens kvaler: flyplassaken I Stortinget 8. oktober 1992» Sosialøkonomen 4, 1999, 27-40.

"Beta Distributions in a Simplex and Impartial Anonymous Cultures"; Mathematical Social Sciences; Vol. 37, No. 1; 1999; 45-57.

"Single Transferable Votes with Tax Cuts"; SIAM Review; Vol. 46, No. 3; 2004; 417-442

"Voces Populi and the Art of Listening"; Social Choice and Welfare; Vol. 35, No. 2; 2010; 291-317.

"What shall we do with the Cyclic Profile?"; Social Choice and Welfare; Vol. 40, No.1; 2013; 229-262.