RISIKOPREMIER, REALRENTEN OG OPTIMAL KONSUM OG PORTEFØLJETEORI: HVA ER PROBLEMET? F

KNUT KRISTIAN AASE har doktorgrad fra University of California, Berkeley i 1979, og er professor ved Norges Handelshøyskole. Aases forskningsområder er statistikk, sannsynlighetsteori og økonometri.

SAMMENDRAG

Vi demonstrerer hvordan rekursive preferanser kan anvendes i økonomisk modellering, der kombinasjon av tid og usikkerhet er vesentlige elementer. Additiv og separerbar forventet nytteteori har vært den vanlige grunnpillaren i slike sammenhenger, men denne hypotesen har vesentlige mangler både empirisk og teoretisk. Vi påviser disse svakhetene, og demonstrerer noen sentrale resultater basert på en alternativ, rekursiv nytteteori. Vi forklarer hvordan risikopremier og realrenten ser ut i likevekt, og også hvordan optimalt konsum med tilhørende porteføljevalgteroi følger for en aktør som tar markedet som gitt. Dette gir helt andre resultater enn forventet nytte-basert teori, og i motsetning til hva som gjelder for sistnevnte, stemmer disse resultatene med data. Andre anvendelser nevnes også.

Nøkkelord: Rekursiv nytte, likevektsmodell, risikopremier, realrente, livssyklusmodellen, optimalt konsum, konsumglatting, optimal porteføljeteroi, konmsummysterier, risikopremiemysteriet, klimamodell

1 INNLEDNING

Rasjonelle forventninger, en hjørnestein innen moderne økonomi og finans, har vært under angrep i lengre tid. Er priser på risikable aktiva for volatile i forhold til informasjonsfl i markedet? Er meravkastningen på risikable aktiva ut over den risikofrie raten for stor? Er realrenten for lav? Er markedets risikoaversjon for høy? Er volatiliteten på aggregert konsum for høy? Er vekstraten i aggregert konsum for høy?

Noen av disse spørsmålene ble stilt etter arbeidet til Mehra og Prescott (1985), som påviste det kjente «Equity Premium Puzzle». Flere andre arbeider på denne tiden kom også fram til lignende resultater og tilsvarende spørsmålsstillinger. Problemet besto i at standardmodellen, som bl.a. bygger på at nytten til aktørene kan uttrykkes som en sum av diskonterte, forventede nytter, ikke var i stand til å forklare data uten at parametrene i nyttefunksjonen antok urimelige verdier. Dataene som ble testet besto av konsum- og markedsdata for USA for perioden 1889–1978.

Disse problemene har det vært arbeidet intenst med i de over 30 årene som er gått siden 1985. Det vil føre alt for langt å gå inn på alle disse arbeidene her, men referansene gir en viss pekepinn. I Aase (2016) gis klare svar på spørsmålene stilt ovenfor, og de er: Nei, nei, nei, nei, nei, og atter nei.

Alt dette og mer til er nå oppklart, og det er dette jeg vil fortelle litt om i denne artikkelen. Kort fortalt består løsningen i å skifte ut preferansene i standardmodellen med såkalt rekursiv nytte, dvs. slik at resten av standardmodellen beholdes. Fordelen med kun å forandre ett aspekt ved den rådende teorien er åpenbar: Dersom dette løser problemet vet vi hva som var feil, da har vi lært noe.

Denne teorien oppklarer også kontroverser i klimamodellen til Stern (2007), som diskuteres seinere i artikkelen. Problemet er at standardmodellen er konsistent med en egenkapitalpremie på rundt 1 prosent og en reell likevektsrente på rundt 4 prosent–5 prosent, mens den estimerte egenkapitalpremien er på rundt 6 prosent og det estimerte anslaget for likevektsrenten er på under 1 prosent, begge basert på data for mer enn 100 år (US-data).

For å få til et rimelig anslag på langtidsrenten, baserer Stern seg på standardmodellen, og utviser kreativitet med å strekke denne langt, der også visse empiriske fakta bekvemt neglisjeres. Økonomer har tydeligvis klokketro på modeller, men av og til med et tilhørende avslappet forhold til fakta (data). Det hadde, for eksempel, vært bedre å bruke det empiriske estimatet på renten, 0.008, enn all modelltorturen som tilslutt ga et renteanslag på 1.4 prosent.

Man kan si at mye som er gjort innen dynamisk økonomisk teori med usikkerhet nå er modent for en revurdering og oppjustering.

2 REKURSIV NYTTE

Rekursiv nytteteori startet med en artikkel av K.pdf og Porteus (1978), og ble videreført av Epstein og Zin (1989–91), som foreslo en spesiell parameterisering. Denne har vist seg svært nyttig i anveldelser, og er utvidet til modeller i kontinuerlig tid av Duffie og Epstein (1992a,b). Nylig, i Aase (2016), er denne modellen videreutviklet og kalibrert til dataene brukt av Mehra og Prescott (1985). Denne kalibreringen viser at rekursiv nytte løser «equity premium puzzle». Samtidig viser flere studier, for eksempel Aase (2015a), at andre empriske problemer også kan løses ved å innføre rekursiv nytte. Det gjelder optimalt konsum og porteføljevalg i livssyklusmodellen, noe som, for eksempel, har direkte anvendelser innen livs og pensjonsforsikring.

Man kan spørre hvorfor det har tatt så lang tid å oppdage dette. Kort fortalt skyldes dette i vesentlig grad en enkelt artikkel av Weil (1989), der forfatteren feilaktig hevdet at rekursiv nytte ikke løser risikopremiemysteriet: Denne teorien ga ikke, i følge forfatteren, bedre forklaringer enn standardteorien (forventet nytte). I tillegg fant forfatteren et nytt mysterium, som han kalte det risikofrie rente mysteriet (the risk-free rate puzzle).[1]

Rekursiv nytte ble først formulert i en modell med diskret tid. Hovedpunktene kan kort oppsummeres som følger: Vi betrakter en økonomi, der preferanser over konsumplaner $(c_0, c_1, \cdots, c_T)$ er karakterisert ved $U(c_t, c_{t+1}, \cdots, c_T) := V_T$, der

$$V_t = f(u(c_t), m_{t+1} = \left(\left(1 - \beta c_t^{1-\rho} + \beta\left(E_t(V_{t+1}^{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\rho}{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \qquad (1)$$

på tidspunkt t. Funksjonen f gir nytten av dagens og framtidens konsum samtidig! (tidsaggregator), også brukt av Koopmans (1960). I motsetning til hos Koopmans, har vi usikkerhet i modellen, og $m_{t+1}(\cdot)$ tolkes som en sikkerhetsekivalent, basert på den betingede sannsynlightesfordelingen over konsumsekvenser som startet på tid $t+1$.

Dersom sikkerhetsekvivalenten er basert på forventet nytte, som her, sies preferanserelasjonen å tilhøre K.pdf og Porteus-klassen. Denne spesielle aggregatoren er uavhengig av konsumhistorien til agenten, og ble først formulert og analysert av Epstein og Zin (1989–91).

Parameteren $\beta(0<\beta<1)$ β er nyttediskonteringsfaktoren, med tihørende utålmodighetsrate $\sigma = -\ln(\beta)$. Her er γ relativ risikoaversjon og ρ er tidspreferanseparameteren (kalt grensenyttefleksibiliteten av Ragnar Frisch), den inverse til EIS-parameren ψ, der $\psi = 1/\rho$ er den intertemporære substitusjonselastisiteten til konsum. Her tillates parameteren ρ å være forskjellig fra risikoaversjonen γ [2].

Viktig å merke seg her er at denne representasjonen altså separerer risikoaversjon fra tidssubstitusjon: $\gamma \neq \rho$. Ved forventet nytteteori er disse to

1 I Aase (2016) er det forklart hva som er galt i Weil (1989)-artikkelen. Kort fortalt hadde ikke forfatteren eksplisitte uttrykk for realrenten og risikopremiene, men foretok en numerisk analyse, basert på den samme to-tilstands Markov modellen anvendt av Mehra og Prescott (1985), der han prøvde å tilpasse parametrene i preferansen slik at han fikk overensstemmelse med data (sampel momenter). Problemet er her at det fins flere løsninger, og Weil (1989) oppdaget kun den uinteressante.

2 Tilfellene $\gamma = 1$ eller $\rho = 1$ håndteres separat med logaritmiske nyttefunksjoner.

egenskapene gitt ved samme preferanse-parameteren, dvs. $\psi = 1/\gamma$ og $\gamma = \rho$ ved forventet nytte.

Når parameteren β er stor, legger agenten mer vekt på framtiden og mindre vekt på nåtid.

At γ tillates forskjellig fra ρ gir opphav til følgende egenskaper: Dersom $\gamma > \rho$ foretrekker individet tidlig avklaring av usikkerhet foran sein, mens for $\gamma < \rho$ foretrekkes sein avklaring av usikkerhet foran tidlig. Ved likhet er individet indifferent, som altså er tilfellet for forventet nytte. Det understrekes at begge alternativene oppfattes som «rasjonelle»: I en finanssammenheng kan behovet for tidlig avklaring av usikkerhet synes som det mest rimelige, men en slik person kan i andre sammenhenger oppfattes som rastløs og nervøs. Planlegging er i seg selv verdifullt. Dersom man, for eksempel, forventer at noe godt skal skje i framtiden, kan ventetiden i seg selv være fylt med behag. Et eksempel kan være holdning til julefeiring: Det blir ikke helt det samme å få vite hva man får på forhånd. Forelskelse – den som venter på noe godt, venter ikke forgjeves – det er von i hangande snøre.

Rekursiv nytte har som nevnt en aksiomatisk plattform i en dynamisk sammenheng (K.pdf and Porteus (1978)). Det samme kan man for så vidt også si om forventet nytte. Her må vi imdlertid være nøye med kontekst. Teorien i von Neumann og Morgenstern (1947), eller de sju berømte postulatene til Savage (1954), gjelder kun i en-periodemodeller, dvs. i en atemporal kontekst. I slike modeller tenker man seg to tidspunkter, der konsum kun finner sted på slutten av perioden.

I flerperiodemodeller har også forventet, additiv og separerbar nytte et sett med aksiomer, for eksempel det velkjente resultatet for separabel kardinal nytte (se f.eks. Fishburn (1970)). Problemet består i at dersom konsumenten ønsker å flytte konsum mellom ulike tidspunkter og tilstander på en optimal måte, så fungerer ikke denne teorien. Dette ble bl.a. vist av Jan Mossin (1969), der han demonstrerte at ved optimal sparing i en en-periodemodell med konsum på begge tidspunkter og usikker formue på siste tidspunkt, vil ikke avledet preferanse på sluttidspunktet oppfylle substitusjonsaksiomet. Det er dette aksiomet som gir forventet nytteform, så da står denne teorien overfor en intern selvmotsigelse. Siden det stort sett er slike problemer vi er opptatt av innen økonomi, er dette et klart varsko om varsomhet – med forventet nytte brukt i en temporær sammenheng.

3 DEN ØKONOMISKE MODELLEN

Vi tar nå utgangspunkt i likevektsanalyse, og bygger da på Lucas (1978).

Vi tenker oss en agent i modellen med nyttefunksjon U av den typen omtalt ovenfor, som har en gitt konsumplan $e = \{e_0, e_1, \cdots, e_T\}$. Denne agentens antas da å løse følgende problem:

$$\max_c U(c) \text{ under budsjettetingelsen } E(\sum_{s=0}^{T} p_s c_s) \leq E(\sum_{s=0}^{T} p_s e_s) \quad (2)$$

der p er tilstandspris (Arrow-Debreu tilstandspris i enhet av sannsynlighet). Ved bruk av matematisk analyse (funksjonalanalyse) vises i Aase (2015) at $p_t = \lambda \pi_t$ der π_t er er knyttet til den marginale substitusjonsraten $M_{t+1} := \pi_{t+1} / \pi_t$ til nyttefunksjonen U, og der $\lambda > 0$ er en positiv konstant. Dette blir *første ordens betingelsene* for optimalt konsum for problemet (2).

Går vi tilbake til den rekusive nyttefunksjonen gitt i ligning (1), antas sikkerhetsekivalenten m_{t+1} å være på formen $m_{t+1} = h^{-1}\big(E_t(h(V_{t+1}))\big)$, der h er en strengt økende og konkav funksjon med derivert h^t, som altså tar seg av framtiden, mens u er en nyttefunksjon for nåværende konsum, også strengt økende og konkav med derivert u^t. Vi betegner med f_u og f_m de partiellderiverte av f med hensyn på første og andre argument. Vi finner at størrelsen π_t er gitt ved

$$\pi_t = f_u\big(u(c_t), m_{t+1}\big) u'(c_t) \prod_{s=0}^{t-1} \frac{f_m\big(u(c_s), m_{s+1}\big)}{h'(m_{s+1})} h'(V_{s+1}) \quad (3)$$

for $t = 0, 1, \cdots, T$. Siden $p_t = \lambda \pi_t$, har vi her tilstandprisene i økonomien på en konstant nær.

Her merker vi oss at tilstandsprisen (vi kaller fra nå av størrelsen π_t for tilstandsprisen) på tidspunkt t avhenger av hele historien fra tid 0 av, selv om nyttefunksjonen V_t på tid t kun er framoveskuende. Dette er en konsekvens av den rekursive formen på U. Til sammenligning er tilstandsprisen i standardmodellen gitt ved $\pi_t = u'(c_t, t)$ for $U(c) = E\Big\{\sum_{s=0}^{T} u(c_s, s)\Big\}$, altså nokså sneversynt i forhold til (3).

Vi trenger nå en modell for finansmarkedet. Denne er kort skissert i Appendix 1, og kan finnes i Aase (2017a).

3.1 RISIKOPREMIER OG REALRENTEN I LIKEVEKT.

Vi betrakter en bytteøkonomi med en representativ agent som har nyttefunksjon U beskrevet i avsnitt 2. Dette er en såkalt fruktøkonomi, der total avling konsumeres i hver periode. Løsnigen på agentens optimeringsproblem (2), kall den c^*, blir da lik agentens initialtildeling *e*, dvs., $c_t^* = e_t$ for alle *t* med sannsynlighet 1, og priser og realrenten blir da bestemt slik at dette er optimalt i henhold til agentens preferanser.

Hovedproblemet er altså å bestemme priser og realrenten. Dette er utført i detalj i Aase (2015b), som er en diskrettids variant av Aase (2016). Resultatene er gitt ved følgende uttrykk:

Risikopremiene er gitt ved

$$\mu_R(t) - r_t = \frac{\rho(1-\gamma)}{1-\rho}\sigma_{c,R}(t) + \frac{\gamma-\rho}{1-\rho}\sigma_{M,R}(t) \qquad (4)$$

for et vilkårlig risikabelt aktivum i økonomien, her kalt *R*[3]. Her er $\mu_R(t)$ den forventede periode *t*-avkastningen til det risikable aktivum *R*, mens $\sigma_{c,R}(t)$ er kovariansraten på tid *t* mellom det risikable aktivum og aggregert konsum (*ct* = *et* aggregert konsum på tid *t*) og $\sigma_{M,R}(t)$ er kovariansraten på tid *t* mellom markedet *M* og det risikable aktivum *R*. Den risikofrie renten er gitt ved

$$r_t = \delta + \rho\mu_c(t) - \frac{1}{2}\frac{\rho(1-\gamma\rho)}{1-\rho}\sigma_c(t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho-\gamma}{1-\rho}\sigma_M(t)^2 \qquad (5)$$

Her er $\mu_c(t)$ den forventede vekstraten på tid *t* til konsumet, og $\sigma_c(t)^2$ og $\sigma_M(t)^2$ er de tilsvarende variansratene til konsum og marked på tid *t*.

Til sammenligning, for den konvensjonelle, forventede nyttemodellen er disse uttrykkene gitt ved

$$\mu_R(t) - r_t = \gamma\sigma_{c,R}(t) \qquad (6)$$

og

$$r_t = \delta + \gamma\mu_c(t) - \frac{1}{2}\gamma(1+\gamma)\sigma_c(t)^2 \qquad (7)$$

som kan finnes fra formlene ovenfor ved å sette $\rho = \gamma$. Modellen i (6) er den konsumbaserte kapitalverdimodellen, CCAPM (se Breeden (1972)). Den ble opprinnelig utledet i kontinuerlig tid med diffusjonsdrevet usikkerhet basert på Brownske bevegelser[4].

3 Her har vi forenklet og rapportert uttrykkene for den tilsvarende modellen i kontinu- erlig tid. Uttrykkene i diskret tid kan finnes i Aase (2015b).

4 Vanligvis har de fleste resultater først kommet i diskret tid, men altså ikke dette resultatet.

4 KONSEKVENSER AV MODELLEN

Før vi ser på data, la oss betrakte formlene (4) og (5), og tenke oss at det risikable aktivum (R) er markedsporteføljen, som vi her benevner M. Risikopremien ved rekursiv nytte har to ledd, det første svarer til CCAPM, som er det eneste leddet i standardmodellen (6). Det andre leddet på høyre side i (4) svarer til den markedsbaserte kapitalverdimodellen (CAPM), men her i en dynamisk kontekst. Den vanlige kapitalverdimodellen er en en-periode likevektsmodell med konsum kun på slutttidspunktet, og har følgelig ingen konsumsubstitusjon knyttet til seg, og derfor ingen likevektsrente heller; renten i CAPM er kun en exogent gitt konstant.

Problemet med CCAPM i (6) er at den betingede kovariansraten mellom konsumvekstraten og avkastning på markedsporteføljen er så liten, at risikoaversjonen γ være svært stor for å forklare den observerte risikopremien i markedet. Med rekursiv nytte blir dette noe helt annet: Betrakt siste ledd i (4): Nærmest uavhengig av hvor liten den betingede kovariansraten mellom formuen i samfunnet og markedsporteføljen er, så lenge denne er positiv vil dette leddet kunne bli stort dersom risikoaversjon er større enn grensenyttefleksibilitet, dvs. $\gamma > \rho$ og $\rho < 1$, simpelthen ved å la ρ nærme seg 1 nedenfra. Eller alternativt, dersom $\rho > \gamma$ slik at representativ agent har preferanse for sein avklaring av usikkerhet, når $\rho < 1$ ser vi på samme måte at dette leddet kan bli stort ved å la ρ nærme seg 1 ovenfra. Med andre ord, et vidt spekter av verdier for risikopremier vil kunne la seg forklare av denne modellen med rimelige størrelser på preferanse-parametrene.

La oss nå se på renten i standardmodellen i (7). Den betingede variansen til konsumvekstraten er relativt liten, slik at siste leddet, som er negativt, ikke biddrar særlig til å få ned renten før γ blir ganske stor. Siden leddet $\gamma\mu_c$ er relativt stort, tvinges faktisk δ til å bli negativt selv for en urealistisk stor risikoaversjon γ. Her blir altså parameteren $\beta > 1$, noe som er urimelig. Det gir en negativ utålmodighetsrate, og betyr at agenten heller vil «ha en appelsin til neste år enn i dag».

En rask titt på renten i (5) ved den rekursive nyttemodellen avdekker at disse problemene med standardmodellen forsvinner. Dersom $\gamma > \rho$ og $\rho < 1$, som antas rimelig, vil siste ledd bli negativt, som vil hjelpe med å forklare den relativt lave historiske realrenten for rimelige verdier av preferanseparmetrene. (Tilsvarende effekt finner sted hvis $\gamma < \rho$ og $\rho > 1$).

TABELL 1 Nøkkeldata for period 1889–1978 i den amerikanske økonomien. Diskrettid.

	FORVENTNING	STANDARDAVIK	KOVARIANSER
Konsumvekst	1.8 prosent	3.6 prosent	cov(M, c) = .002
Avkastning S&P-500	7.0 prosent	16.5 prosent	cov(M, b) = .001
Statsobligasjoner	0.8 prosent	5.7 prosent	cov(c, b) = −.0002
Risikopremie	6.2 prosent	16.7 prosent	

Det fins altså flere konfigurasjoner av disse to parametrene, risikoaversjonen (γ) og grensenyttefleksibiliteten (ρ), både med $\gamma > \rho$, og med $\gamma < \rho$, som er gode kandidater til å forklare data, der standardmodellen er helt uten forklaringsmulighet.

4.1 KLIMARAPPORTEN TIL STERN: I

I den mye omtalte analysen til Nickolas Stern (se Stern (2007))[5] relatert til klimaøkonomi, ble (7) brukt til å finne et rimelig anslag på realrenten for diskonteringsformål langt fram i tid, av størrelsesorden 200 år. Stern satte β = 0.999 i sin rapport, altså en svært tålmodig representativ agent svarende til δ = 0.001, og i tillegg satte han γ = 1, dvs. en lav risikoaversjon. Med disse kunstgrepene (denne modellen er ikke konsistent med slike verdier, se nedenfor) fikk han spotrenten ned i 1.4 prosent. Dette er langt lavere enn hva denne modellen egentlig er konsistent med (som er over 4 prosent med rimelige parameterverdier, se f.eks. Nordhaus (1994) sine anslag). De «heroiske» valgene Stern gjorde må til skal man rettferdiggjøre å sette inn tiltak i dag som monner: Med 4.1 prosent realrente blir en milliard USD om 200 år verdt kun 274 700 USD i dag. Av dette følger at lite skal gjøres – «business as usual». Med 1.4 prosent derimot, blir en milliard USD of 200 år verdt hele 60.8 millioner USD i dag. Da begynner det å ligne på noe, så derfor blir konklusjonen at noe faktisk kan gjøres nå.

Det er nå naturlig å ta for seg de *lange* rentene. Normalt observerer man høyere lange renter enn korte; man oppnår en bedre avkastning når man investerer i langtids-obligasjoner enn når man investerer med en kortere tid til forfall. Men, det motsatte er også mulig, og standardmodellen kan gi lavere lange renter enn den korte renten dersom visse kriteria er oppfylt; (i) den forventede vekstraten i framtiden må være lavere enn i dag, og (ii) usikkerheten til denne vekstraten må være stor for å få rimelige resultater. Til det første: Stern (2007) anslo den framtidige konsumvekstraten til 1.2 prosent, som er langt lavere enn estimatet basert på data fra de siste 125 årene. Dernest er estimatet for usikkerheten til vekstraten stabilt og lavt; jo lenger estimeringsperiode som er brukt, jo *lavere* viser det seg at estimatet for volatiliteten til vekstraten blir. Disse to forholdene lover altså ikke godt for framtiden, dersom standardmodellen tas bokstavelig.

4.2 KALIBRERINGER

De to modellene vi betrakter inneholder mange størrelser, der vi kan hente noen fra data fra den virkelige verden, dvs. vi *kalibrerer* modellen til disse størrelsene, og der andre parametre blir konsekvenser av disse størrelsene og selve modellen.

Dersom vi utfører en slik kalibrering, her med de samme dataene som Mehra og Prescott (1985) brukte, vil det vise seg at standardmodellen ikke kan forklare visse essensielle parametre på en tilfredsstillende måte, mens den rekursive modellen kan forklare disse størrelsene.

I Tabell 1 presenterer vi en oppsummering av dataene til Mehra and Prescott (1985); av reell årlig avkastning til S&P-500 indeksen, her *M,* av annualisert konsum, *c*, og av statsobligasjoner, *b*[6].

Siden ligningene (4)–(7) er på logaritmisk form, må dataene oppsummert i Tabell 1 omformes til logavkastninger, noe som er gjort i beregningene[7].

5 Nå *Sir* Nickolas Stern.

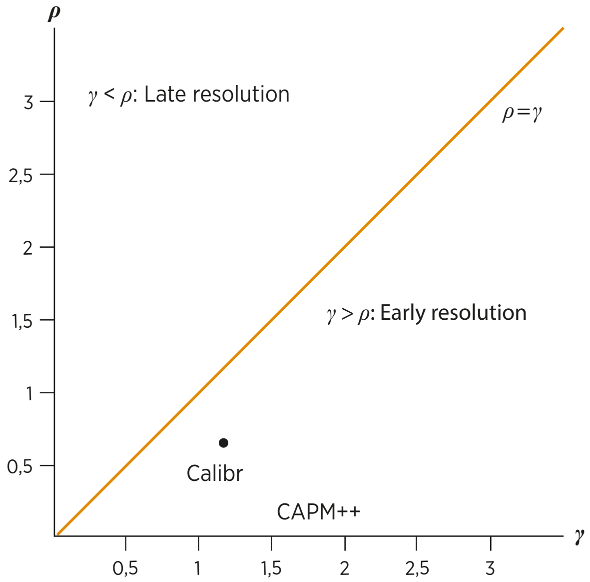
6 Det fins selvsagt nyere data, men vi skal forklare et puzzle», og må da bruke de opprinnelige dataene der dette mysteriet oppsto. Kan vi forklare dataene i Tabell 1, så kan vi antakelig også forklare nyere data. Dette demonstreres nedenfor på norske data.

7 Vi har fått det originale datasettet fra Professor R. Mehra.

TABELL 2 Ulike verdier av γ, ρ og δ konsistent med dataene i Tabell 1.

PARAMETERE	γ	ρ	EIS	δ
Den forventede nyttemodellen :				
β = 1.1	22.0	22.0	.05	–.08
Den rekursive modellen:				
β = .945	2.0	0.0	–	.06
β = .950	1.7	0.3	3.5	.05
β = .955	1.4	0.6	1.7	.05

FIGUR 1 Calibration points in the (γ, ρ)-space.



La oss anta at markedsporteføljen M kan brukes som representant (proxy) for formuesporteføljen. Da fortolker vi det risikable aktivum R som den verdiveide markedsporteføljen M, her svarende til S&P-500 indeksen. Vi har da to ligninger med to ukjente til å bestemme estimater for preferanseparametrene ρ og γ. Den statistiske metodikken brukt her kalles momentmetoden. Dette kan vi gjøre ved å gi utålmodighetsraten $\sigma = \ln(1/\beta)$ ulike verdier. Resultatene er gitt i Tabell 3.

Når β ligger mellom 0.945 and 0.955, har, for eksempel, de andre to parametrene rimelige verdier. Sammenligner vi med kalibreringene for den kontinuerlige modellen i Aase (2016), kan sistnevnte også forklare rimelige verdier for γ og ρ for lavere verdier av δ. For eksempel, når δ = 0.02 er dette konsistent med γ = 1.2 og ρ = 0.9. Disse resultatene er selvsagt oppmunt rende.

Legg merke til estimatene man ender opp med for standardmodellen: γ = 22.0 og δ = −0.08. Dette er det berømte Equity Premium Puzzle. Vi antyder nedenfor hvor urimelig en så stor verdi av γ er, og δ skal som før nevnt være positiv. I standardmodellen er som nevnt grensenyttefleksibiliteten ρ lik risikoaversjonen γ, og det leder til en verdi på *EIS* = 0.05, som er alt for lav.[8]

Figur 1 illustrerer den aktuelle regionen i (γ, ρ)-rommet. For den konvensjonelle modellen utgjør dette den viste 45°-linjen ($\rho = \gamma$). Vi har antydet et typisk kalibreringspunkt fra Tabell 3, kalt Calibr. Vi viser også hvor den dynamiske versjonen vår av kapitalmodellen passer inn, kalt Calibr++ (se avsnitt 3.5 nedenfor).

4.3 NORSKE DATA

Bruker vi denne metodikken på de norske dataene for perioden 1971 til 2014, som er presentert i Aase (2016), får vi for eksempel følgende: β = 0.99 (δ = 0.01), γ = 2.1 og ρ = 0.98. Dette er et rimelig sett med parametre[9], relativ risikoaversjon rundt 2 og *EIS* litt større enn 1; det siste er forøvrig konsistent med statistisk litteratur (se Dagsvik et al. (2006) som fant *EIS* til å ligge mellom 1 og 1.5 for norske data).

8 Weil (1989) hadde ikke til disposisjon uttrykkene (4) og (5) for egenkapitalpremien og realrenten, men brukte en to-tilstands Markovprosess og numeriske metoder til å kalibrere parametrene til de estimerte momentene. Han fant for eksempel parameterverdiene β=.95 , γ = 45, ρ = 10. Bruker vi samme data som Weil og vår metode, finner vi to mulige løsninger for β = .95: (γ = 0.9, ρ = 1.2) og (γ = 32.0, ρ = 14.3). Det er siste løsning som ligner mest på den Weil (1989) oppnådde. Dersom β = .94, er vår løsning (γ = 1.2, ρ = 0.7) med Weil sine data, og denne gir mening.

9 Med referanse til Weil (1989), vi får to løsninger i den rekursive modellen: Den første gir verdiene presentert ovenfor, mens den andre gir β = 0.993 (δ = 0.01), γ = 191.94 og ρ = 2.79. Typisk for Weil sin metodikk ville da være å kun komme fram til den andre løsningen, som knapt kan sies å være en forbedring fra det standardmodellen gir.

Her er estimatene for nasjonalformuen utarbeider av Statistisk sentralbyrå (2014), og er avgrenset til å inneholde følgende: (i) humankapital; (ii) realkapital; (iii) finansiell formue, og (iv) naturresurser. I hele perioden fra 1985 til 2013 er består 72–75 prosent av nasjonalformuen av arbeidsinntekt. Per kapita estimatene relatert til formuesporteføljen er, i logaritmisk form:

$$\mathrm{var}_t\left(\ln(R^W_{t+1})\right)=.0003, \quad E_t(\ln R^W_{t+1})=.02,$$

$$\mathrm{cov}_t(\ln R^W_{t+1}, \ln R^M_{t+1})=.0014,$$

$$\mathrm{cov}_t\left(\ln R^W_{t+1}, \ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)\right)=.0002$$

Standardmodellen gir derimot følgende resultat for disse dataene, og det er entydig: β = 1.91 (δ = −0.65) og γ = ρ = 51.22!

4.4 KLIMARAPPORTEN TIL STERN: II

Vi returnerer nå til Stern-rapporten omtalt ovenfor. Ved å ta utgangspunkt i uttrykket for realrenten gitt i (5), ser vi at Nickolas Stern med letthet kunne satt renten godt under 1.4 prosent, f.eks. lik 0.8 prosent som er den estimerte realrenten basert på 90 år med data i Tabell 1, og hatt rimelig modellstøtte for sitt anslag (selv om dette er den korte renten).

La oss gå litt tilbake og se nøyere på rentemodellen (7) ved forventet nytte. Bortsett fra realrenten, relaterer den seg kun til konsumdata. Ser man bort fra rentedataene over en periode på ca. 100 år, og bruker rimelige parametre for nyttefunksjonen, som for eksempel δ = 0.01 og γ = 2, gir denne modellen en rente mellom 4 prosent og 5 prosent. Derav anslaget til Nordhaus (1994). Da Rajnish Mehra ble intervjuet av Financial Times i 2008, og spurt hva rente og risikopremie ville bli året etter, var hans ansalg mellom 3 og 4 prosent for realrenten og 1 prosent for risikopremien. Det er selvfølgelig ingenting i veien for at dette kunne komme til å stemme rimelig bra for ett enkelt år, det fins tross alt en god del årlig usikkerhet, men projeksjonen stammer antakelig heller fra to forhold: (i) Klokketro på standardmodellen; og (ii) neglisjering av enkelte fakta (data) som ikke passer inn.

Angående siste punkt; det fins ledende markoøkonomer som tror at renten er, og har alltid vært høyere enn konsumveksten. Det er fordi de tar utgangspunkt i Ramsey-modellen $r = \delta + \rho g$, der g er vekstraten (Ramsey (1928)). Siden rimeligvis ρ er nær 1 og δ > 0, følger jo dette dersom man tar denne modellen bokstavelig; og med suveren neglisjering av fakta (data).

Dersom økonomer virkelig tror på slike verdier som de Mehra forfektet, ser de helt bort fra data for risikopremier og realrente, og dette er de dataene i Tabell 1 som er av høyest kvalitet. Dette gjelder ikke bare for USA, men lignende data har man for de fleste land i den vestlige verden. Standardmodellen for risikopremien i (6) gir en egenkapitalpremie på 0.5 prosent og ligning (7) gir en risikofri realrente på rundt 4 prosent–5 prosent med γ = 2 og δ lik 1 prosent, når estimatene i Tabell 1 brukes, *bortsett fra risikopremien og realrenten*. Dette er nok bakgrunnen for slike anslag. Men da ser man altså helt bort fra estimatene på realrenten og egenkapitalpremine i lange historiske dataserier, der kun estimatene på varianser og kovarianser blir brukt.

Følgende oppfatning ser ut til å råde grunnen: «Menneskene har til nå brukt ca. 140 år på irrasjonelle og merkelige økonomiske beslutninger, men når de bare engang får summet seg, vil de nok tilslutt ta til vettet. Dataene vil da gradvis 'tilstå ' og endelig begynne å stemme overens med standardmodellen».

I lys av dette kan man spørre: Hvor ville USA egentlig vært i dag med en avkastning på statsobligasjoner på 5 prosent og en meravkastning på å ta risiko på under 1 prosent, begge i et 140 års perspektiv? Hvor stor ville verdiskapningen ha blitt i et slikt samfunn? Hva med innovasjon og nyskapning? Er dette i det hele tatt forenlig med en økonomisk likevekt, slik vi kjenner verden[10]?

Tilbake til Stern-rapporten. Med en rente på 0.8 prosent vil en milliard USD om 200 år være verdt 201.8 millioner USD i dag, og da begynner det å monne. Det hadde altså holdt lenge for klimaøkonomer å støttet seg på data. Men nå har vi endelig en modell, tuftet på rasjonalitet, som i tillegg underbygger disse dataene. Da står i alle fall ikke lenger økonomisk *teori* i veien for å redde verden.

Men hva så med de lange rentene? Det er jo disse som til syvende og sist skal betraktes i et langtidsperspektiv. I Aase (2017) er terminstrukturen til renten beskrevet med en likevektsmodell, som gjør bruk av rekursiv nytte. Kort fortalt vil langtidslikevektsren-

10 Enkelte økonomer tror åpenbart mer på modeller enn på sunn fornuft, inkludert virkeligheten.

ten avta når $|\gamma-\rho|$ øker, dvs. når «avstanden» mellom standardmodellen og modellen basert på rekursiv nytte øker. Videre finner vi en relasjon mellom den lange renten (r^*) og den gjennomsnittlige vekstraten ($h\,\bar{h}$) til nasjonalproduktet, som sier at $r^*=\bar{h}-\sigma(\gamma,\rho)$, der siste ledd er positivt, og en funksjon av flere parametre, bl.a. usikkerheten i modellen. Som antydet er siste ledd også en funksjon av parametrene γ og ρ i den rekursive modellen, og dette leddet kan lett bli stort nok, med rimelige verdier for ρ og γ , til at langtidsrenten er *betydelig* lavere enn vekstraten.

Selv om den framtidige vekstraten ikke går mye ned ned, er leddet $\sigma(\gamma,\rho)$ stort nok til at r^* blir lav. For eksempel er et estimat for $\bar{h}$ av størrelsesorden

3.1 prosent, basert på et gjennomsnitt fra 1950 til 2015 i USA. Sammenholdes dette med et estimat for $\bar{h}$ på 3.7 prosent for perioden 1820 til 1986, indikerer dette et estimat for r^* på 0.2 prosent med data fram til 2015. Stern (2007) argumenterte for en rente på 1.4 prosent for klima-relaterte problemer, etter en rekke med heller heroiske antakelser basert på standardmodellen.

5 HVA BETYR EN RELATIV RISIKOAVERSJON PÅ OVER 10, ELLER 20?

Vi vil nå illustrere hva en relativ risikoaversjon på 10, eller 22 som ovenfor skulle bety. Betrakt et beøp w investert i en portefølje med risikabel avkastning X. Anta $EX = 0$. Da spør vi: Hvor stor andel av den opprinnelige formuen vil en person være villig til å betale for å kvitte seg med denne risikoen. Løsningen på dette problemet kalles den *relative* risikopremien p_r, som blir en enhetsfri størrelse.

For en en-periode nyttefunksjon u, er p_r dermed definet via følgende ligning

$$Eu(w(1+X)) := u(w(1-p_r)).$$

Anta at formuen til en person er utsatt for en risiko med gevinst eller tap på 20 prosent med sannsynlighet 1/2 hver. Ulike studier (se, for eksempel, Eeckhoudt et. al. (2005)) har vist at folk flest er villige til å betale mellom 2 prosent og 8 prosent av formuen. For CRRA-nyttefunksjonen

$$u(x)=\frac{x^{(1-\gamma)}}{1-\gamma}$$

TABELL 3 Relative risikopremier p_r til X for CRRA-nytte.

X	0.2 – 0.2
Sannsynlighet	0.5 0.5
γ = 1 γ = 2	pr = 0.02 pr = 0.04
γ = 4 γ = 10	pr = 0.08 pr = 0.14
γ = 22 γ = 108	pr = 0.17 pr = 0.19

svarer dette til et område for den relative risikoaversjonen γ mellom 1 og 4.

På den annen side, når γ = 10, svarer dette til p_r = 0.14, og når γ = 22 svarer dette til 17 prosent, begge godt utenfor det rimelige området. Følgelig vil en relativ risikoaversjon på 10 eller 22 begge synes heller ekstreme, og mange vil hevde umulige.

Legg merke til at når γ øker uten grenser, vil de tilhørende verdiene til p_r aldri overstiged 0.20 i dette eksempelet. Dette er det meste personen kan tape, men ved å akseptere lotteriet vil personen ha en 50 prosent sjanse til å *vinne* 20 prosent i formue i tillegg. Følgelig vil det å gi opp 20 prosent *med sikkerhet* representere en øvre grense for aversjon mot risiko: Mer risikoavers går det ikke an å være.

6 OPTIMAL KONSUM OG PORTEFØLJEVALG

Nå går vi over fra ren likevektsteori, der formålet var å bestemme relasjoner mellom priser på risikable aktiva og likevektsrenten, til å betrakte en person som befinner seg i en slik økonomi, der denne personens handlinger ikke påvirker prisene.

Vi er da interessert i optimalt konsumvalg med tilhørende optimalt porteføljevalg, der personen har anledning til å «flytte» konsum både i tid, og over de ulike tilstandene i økonomien. Det er dette markedene gir ham anledning til å gjøre på en optimal måte.

Vi ønsker å starter med å betrakte modellen beskrevet i Appendix 1, der vi antar at aktøren tar priser og rente for gitt, og søker optimalt konsum med tilhørende sparing.

Dynamikken tas som gitt, og er i overensstemmelse med standardmodellen; her bruker vi bl.a. teorien som stammer fra Black og Scholes (1973) sin banebrytende analyse av derivater. Også da tar man de underliggende priseprosesser som gitt, men bestemmer priser på derivater basert på disse prisprosessene, uten arbitrasjemuligheter.

Detaljene når det gjelder optimalt konsum kan man finne i Aase (2017a), så de hopper vi over her. Siden porteføljevalg er så viktig i Norge, med vårt store Statens Pensjonsfond-Utland, tar vi med dette i neste avsnitt.

6.1 OPTIMALT PORTEFØLJEVALG

Jan Mossin (1968) var en av de første til å studere optimale investeringer for en investor i et effektivt marked. Han betraktet to aktiva, et risikofritt og ett risikabelt, og så bort fra løpende konsum, bortset fra konsum på sluttidspunktet. Dersom vi kaller den optimale andelen av formuen holdt i det risikable aktivum på tid t for φ_t, vil denne tilfredsstille

$$\varphi_t \approx \frac{1}{\gamma}\frac{E_t(R_{t+1}-r_{t+1})}{E_t\left(R_{t+1}-E_t(R_{t+1})\right)^2} \approx \frac{1}{\gamma}\frac{\mu_R(t)-r_t}{\sigma_R(t)^2} \tag{8}$$

der $\left(\mu_R(t)-r_t\right)$ er risikopremien og $\sigma_R(t)^2$ er variansen til det risikable aktivum. Når avkastningene er uavhengige og stasjonære over tid, betyr dette at andelene φ_t skal holdes konstant i hver tidsperiode, noe som vil føre til aktiv handel (her ser vi bort fra transaksjonskostnader).

Mossin kaller situasjonen med CRRA-nyttefunksjonen for «komplett nærsynthet», fordi den beskriver en situasjon der investor sin sekvens av beslutninger oppnås som er rekke med enkeltperiodebeslutninger, der hver periode behandles som om den var den siste. Hans forsvar for å utelate løpende konsum i modellen var enkelt: Man må løse en ting om gangen. Men han gjorde det helt klart at det ikke er optimalt å ta beslutninger for en periode om gangen uten å se framover. Han mer enn antyder at dersom han hadde greidd å inkludere konsum i hver periode, ville han ventet et annet resultat.

Det viste seg at i den forventede nyttemaksimeringsmodellen holder resultatet (8) også når konsum tillates i hver periode (se Samuelson (1969)). Her overvurdete altså Mossin rasjonaliteten til denne modellen.

Den empiriske støtten til denne modellen er heller svak. Betrakt en gjennomsnittlig husholdning i tidsperioden dekket av Tabell 1. Dersom vi antar en relativ risikoaversjon rundt 2, får vi som resultat at den optimale andel i aksjer er 110–130 prosent. Her har vi antatt at det risikable aktivum er representert ved S&P-500 indeksen. Andre studier viser imidlertid at den typiske amerikanske husholdning holder mellom 6 prosent to 20 prosent av formuen i aksjer. Dersom vi avgrenser oss til de som faktisk er i aksjemarkedet, øker dette tallet til ca. 40 prosent i finansielle aktiva.

Ved rekursiv nytte får vi derimot noe helt annet. Ved begynnelsen av hver periode allokerer aktøren en viss andel av sin (optimale) formue til umiddelbar konsum, og deretter investerer han den gjenværende delen i de tilgjengelige aktiva for framtidig konsum. Følgelig er det naturlig at de optimale porteføljevektene vil avhenge av optimalt konsum[11].

La oss illustrere hvordan dette resultatet ser ut med de samme betingelser som for formelen (8). For ett risikabelt aktivum ser den ut som følger:

$$\varphi_t = \frac{1-\rho}{(\gamma-\rho)}\frac{\left(\mu_R(t)-r_t\right)}{\sigma_R(t)} - \frac{\rho(1-\gamma)}{(\gamma-\rho)}\frac{\sigma_R(t)\sigma_{c^*}(t)}{\sigma_R(t)^2}. \tag{9}$$

Her er $\sigma_R(t)$ volatiliteten til det risikable aktivum, mens σ_{c^*} er volatiliteten til optimalt konsum, og $\sigma_R(t)\sigma_{c^*}(t)$ er kovariansraten mellom risikabelt aktivum og optimalt konsum[12].

Husk nå at den typiske amerikanske husholdning holder mellom 6 prosent and 20 prosent i risikable aktiva for dataene oppsummert i Tabell 1. Den optimale rekursive strategien som er konsistent med $\varphi_t = 0.13$, kan for eksempel være $\gamma = 2.60$ og $\rho = .96$. Her har vi brukt estimatet for $\sigma_{c^*}(t)$ fra Tabell 2, som er 0.036, og den tilhørende kovariansraten som er 0.002.

Gitt at konsumenten deltar i aksjemarkedet, er forholdet $\varphi = .40$ relevant. Da er strategien ovenfor konsistent med dette forholdet dersom $\gamma = 2.5$ og $\rho = .78$. Forholdet $\varphi = .60$ har også vært nevnt som et rimelig anslag, når man tar hensyn til pensjonsfond som vanlige folk er eksponert mot. Dette kan, for eksempel, være konsistent med $\gamma = 2.0$ og $\rho = .67$. Den rekursive nyttemaksimeringsmodellen forklarer rett og slett data i motsetning til den forventede nyttemaksimeringsmodellen.

11 Dette skulle gjelde for alle modeller, men den forventede nyttemodellen fanger altså ikke opp dette, siden investoren oppfatter hver periode som den siste, og hever ikke blikket.

12 Denne versjonen av formelen har nøyaktig samme form som den kontinuerlige modellen med rekursiv nytte, se Aase (2016).

Interessante anvendelser av denne modellen er generell fondsforvaltning, der fond investerer offentlig eller privat formue på vegne av innbyggere i et land, eller medlemmer i en forening. Her tenker vi på forsikringsselskaper, investeringsfond, eller for Norges del, Statens Pensjonsfond-Utland, som investerer på vegne av oss alle her i landet. Her vil man lett kunne utarbeide rimelige estimater for konsumvolatiliteten σ_{c^*}, som trengs i denne sammenhengen.

7 KONKLUSJONER

Vi har demonstreret hvordan rekursive preferanser kan anvendes i økonomisk modellering, der tid og usikkerhet er vesentlige elementer. Additiv og separerbar forventet nytteteori har vært den vanlige grunnpillaren i slike sammenhenger, men denne modellen avslører vesentlige mangler, både av teoretisk og empirisk art. Vi har i korthet pekt på disse svakhetene, og demonstrert noen sentrale resultater basert på rekursiv nytteteori. Vi har forklart hvordan egenkapitalpremier og realrenten ser ut i likevekt. Vi har også demonstrert hvordan optimalt konsum, med den tilhørende optimale porteføljestrategi ser ut for en aktør som opererer i et slikt marked. Dette gir helt andre resultater enn forventet nytte-basert teori, og i motsetning til hva som gjelder for sistnevnte, stemmer disse resultatene med data. Det er altså ikke slik at realrenten og egenkapitalpremier nødevendigvis «skal noen steder». Vi har også kommet inn på anvendelser av denne teorien på klimaøkonomi.

8 APPENDIX 1

8.1 FINANSMARKEDET

I markedet har vi N risikable aktiva og ett risikofritt aktivum. Sistnevnte har prisprocess s_t, der

$$s_t = \beta_0 R_1^f R_2^f \cdots R_t^f ,$$

Hvor $R_{t+1}^f := \dfrac{s_{t+1}}{s_t}$ er «prisbrøken» (på engelsk: «gross rate of return») i perioden $(t, t+1)$ og $R_{t+1}^f := 1 + r_{t+1}^f$, der r_{t+1}^f er den tilsvarende aritmetiske avkastningen $(st+1 - st)/st$. Det risikofrie aktivum er karakterisert ved egenskapen at dets «avkastninger betinget ukorrelert med tilstandsprisen, dvs., $\mathrm{cov}_t(\pi_{t+1}, R_{t+1}^f) = 0$ for alle $t \in \{0, 1, \cdots, T\}$

Vi lar S_t være prisprosessen (eventuelt den justerte prisprosessen) til et vilkårlig risikabelt aktivum i denne økonomien, med tilsvarende prisbrøk

$$R_{t+1}^R := \frac{S_{t+1}}{S_t} .$$

Siden vi har antatt at det eksisterer en tilstandspris π, så fins det ingen arbitrasjemuligheter i denne økonomien hvis og bare hvis $S_t \pi_t$ er det ingen arbitrasjemuligheter i denne økonomien hvis og bare hvis $S_t \pi_t$ er en martingale. Dette impliserer at

$$S_t = \frac{1}{\pi_t} E_t\{\pi_{t+1} S_{t+1}\}, \text{ som igjen gir at}$$

$$E_t\{M_{t+1} R_{t+1}^R\} = 1 \tag{10}$$

hvor $M_{t+1} := \dfrac{\pi_{t+1}}{\pi_t}$. Fra definisjonen på kovarians følger nå at

$$-\frac{\mathrm{cov}_t(M_{t+1}, R_{t+1}^R)}{E_t(M_{t+1})} = E_t(R_{t+1}^R) - R_{t+1}^f \tag{11}$$

forutsatt at vi fortolker $E_t(M_{t+1})$ på følgende måte:

$$R_{t+1}^f := \frac{1}{E_t(M_{t+1})}$$

Fra (11) ser vi at denne tolkningen er korrekt; ved bare å erstatte R_{t+1}^R med R_{t+1}^f får vi

$$\mathrm{cov}_t(M_{t+1}, R_{t+1}^f) = 0$$

som er definisjonen på risikofri avkastningsprosess nevnt ovenfor. Høyresiden i (11) er selvsagt *risikopremine* til det risikable aktivum vi betrakter.

Vi antar at finansmarkedet er komplett, men har ellers få restriksjoner på avkastninger og aggregert konsum, bortsett fra at vi trenger en form for ergodisitet for at statistisk estimering skal være meningsfull.

Formuen W_t til agenten på tid t er gitt ved

$$W_t = \frac{1}{\pi_t} E_t\left(\sum_{s=t}^{T} \pi_s c_s\right). \tag{13}$$

Denne definisjonen på formue inkluderer nåværende konsum (dividende), slik at avkastningen på formuesporteføljen i perioden $(t, t+1)$ er

$$R_{t+1}^W := \frac{W_{t+1}}{W_t - c_t} \tag{14}$$

REFERANSER

[1] Aase, K.K. (2016). Recursive utility using the stochastic maximum principle.» *Quantitative Economics* 7, 859–887.

[2] Aase, K.K. (2015a). «Life insurance and pension contracts II: The life cycle model with recursive utility.» *Astin Bulletin* 46(1), 71–102.

[3] Aase, K.K. (2015b). *Recursive utility and the equity premium puzzle: A discrete-time approach.* Working paper no 3, Department of Business, Norwegian School of Economics, Bergen, Norway.

[4] Aase, K.K. (2017a). «Economics of uncertainty and time: Optimal consumption and portfolio choice with recursive utility.» *Finance in Society*. An Anthology in Honour of Thore Johnsen (eds: M. Bjørndal, F. Gjesdal and A. Mjøs), pp 212–225, 2017. Cappelen Damm Akademisk.

[5] Aase, K.K. (2017b). *The term structure in an intertemporal equilibrium model: The case of recursive utility.* Working paper (to appear), Department of Business, Norwegian School of Economics, Bergen, Norway.

[6] Black, F., and M. Scholes (1973). «The pricing of options and corporate liabilities.» *Journal of Political Economy* 81, 637–654.

[7] Breeden, D. (1979). «An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities.» *Journal of Financial Economics* 7, 265–296.

[8] Dagsvik, J.K., S. Strøm, and Z. Jia (2006). «Utility of income as a random function: Behavioral characterization and empirical evidence.» *Mathematical Social Sciences* 51, 23–57.

[9] Duffie, D. and L. Epstein (1992a). «Asset pricing with stochastic differential utility.» *Review of Financial Studies* 5, 411–436.

[10] Duffie, D. and L. Epstein (1992b). «Stochastic differential utility.» *Econometrica* 60, 353–394.

[11] Epstein, L., and S. Zin (1989). «Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework.»*Econometrica* 57, 937–69.

[12] Fishburn, P.E. (1970). «Utility Theory for Decision Making.» New York: John Wiley and Sons.

[13] K.pdf, D., and E. Porteus (1978). «Temporal resolution of uncertainty and dynamic choice theory.» *Econometrica* 46, 185–200.

[14] Lucas, R. (1978). «Asset prices in an exchange economy.» *Econometrica* 46, 1429–1445.

[15] Merton, R. (1973). «An intertemporal capital asset pricing model.» *Econometrica* 41, 5, 867–887.

[16] Mehra, R., and Prescott, E.C. (1985). The equity premium: A puzzle.» *Journal of Monetary Economics* 22, 133–136.

[17] Mossin, J. (1968). «Optimal Multiperiod Portfolio Policies». *Journal of Business*, 41, 215–229.

[18] Mossin, J. (1969). «A Note on Uncertainty and Preferences in a Temporal Context.» *The American Economic Review* 59, 1, 172–174.

[19] Nordhaus, W.D. (2008). *«A question of balance: Economic modeling of global warming.»* Yale University Press.

[20] Ramsey, F.P. (1928). «A Mathematical theory of saving». *Economic Journal* 28 (128), December, 543–559.

[21] Ross, S. (1976). «Arbitrage theory of capital asset pricing.» *Journal of Economic Theory* 13, 341–360.

[22] Samuelson, Paul A. (1969). «Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming». *Review of Economics and Statistics*, 51(3), 239–246.

[23] Savage, L.J. (1945). *«The Foundations of Statistics»*. New York, John Wiley & Sons, Inc, London, Chapman & Hall, Limited.

[24] Stern, N. (2007). *The Economics of Climate Change.* Cambridge University Press.

[25] Von Neumann, J. and O. Morgenstern (1947). *Theory of Games and Economic Behavior.* (Second edtion). Princeton, Princeton University Press.

[26] Weil, P. (1989). «The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle.» *Journal of Monetary Economics* 24, 501–521.