

Dynamiske CO_2 -avgifter. En modell med endogent bestemt avgiftsperiode.

av

Sigurd Aanestad¹, Leif K. Sandal² og Gerhard Berge¹

15. desember 2003

¹Matematisk institutt, Universitet i Bergen.

²Institutt for foretaksøkonomi, NHH.

I denne artikkelen presenteres og analyseres en modell for velferdsoptimerende uttak av fossilt brensel i global målestokk. Modellen tar hensyn til forringelsen av miljøet knyttet til bruk og utvinning. Velferds målet som sådan er knyttet til det å maksimere produsent og konsumentoverskuddet i markedet for fossilt brensel. Det kan ellers være verdt å nevne at modellen anvender avgift som virkemiddel for å oppnå et velferds maksimerende uttaksnivå, og at løsningen finnes numerisk.

Tidsperspektivet er uendelig, og vi antar at “ren” teknologi etterhvert blir mer lønnsom enn tradisjonell energiutvinning. Tidspunktet for teknologiskiftet som da kommer inngår endogent i modellen.

I lignende modeller er det vanlig å bruke en lineær funksjon som representant for naturens egen rensning av CO_2 fra atmosfæren. Dette arbeidet har ikke denne begrensningen. Lineær rensfunksjon overvurderer naturens egen evne til å rense opp. Det viser vi ved å demonstrere at en ikke-lineær og ikke-monoton rensfunksjon gir en langt mer restriktiv miljøpolitikk.

1 Innledning

Oppsamling av drivhusgasser i atmosfæren har i årtier blitt betraktet som et av de største miljøproblemer jorden står overfor. Det synes nå å være bortimot unison enighet blant forskerne om at utslipp av CO_2 , hovedsaklig fra bruk og utvinning av fossilt brensel, har bidratt til å heve gjennomsnittstemperaturen på jorden. Mange er bekymret for de negative konsekvenser dette kan få for miljøet vårt.

I denne artikkelen vil vi se nærmere på hvordan riktig skattenivå på forurensende produksjon, kan justere likevektsprisen for fossilt brensel til et nivå som gjør produsentenes optimale produksjonsnivå optimalt også for samfunnet som helhet. Å bestemme et slikt skattenivå er et komplekst problem. Først og fremst fordi mange av de datastørrelser man trenger for å beregne velferdsgevinsten ved ulike produksjons- og forurensningsnivåer er høyst usikre. Blant annet vil den samfunnsøkonomiske velferdsvirkningen av atmosfærisk CO_2 være en usikker størrelse. Dessuten er det vanskelig å tallfeste hvor sterkt naturens egen renssevne gjør seg gjeldende i forhold til CO_2 -nivået i atmosfæren.

I eksisterende økonomisk litteratur antas stort sett en lineær rensfunksjon. Denne antagelsen reduserer de matematiske utfordringene når en skal finne et optimalt skattenivå, men gjør også modellene mindre realistiske. Dersom rensfunksjonen virkelig var lineær, ville vi vært i en situasjon der uendelig stor forurensning også ville gitt uendelig renssevne. Men tvert imot vet man at en øket CO_2 -mengde i atmosfæren øker temperaturen, og dermed også mengden av CO_2 som frigjøres fra havet. Faren for å komme inn i en ond sirkel er derfor til stede. Mye tyder på at rensfunksjonen ikke bare flater ut, men også avtar og går helt i null for høye forurensningsnivå. Dette åpner muligheten for dommedagsscenarioer med irreversibel forurensning.

Farzin og Tahvonen [7] modellerer rensfunksjonen ved å anta to typer karbonbeholdninger i atmosfæren. En type med lineær rensning og en type som naturen ikke klarer å redusere. Dette må antas å gi et brukbart bilde av virkeligheten. Dessuten har Salo og Tah-

vonen [8] gitt ut en artikkel der forurensningen er skapt ved uttak av en fornybar ressurs. I den er rensefunksjonen forsøkt gjort mer realistisk ved at den er strengt økende og konkav for lave forurensningsnivåer og avtagende og konveks for høye nivåer.

Foruten de allerede nevnte, hører Sandal og Steinshamn ([10], [9], [12], og [11]) blant dem som har jobbet med modeller der det åpnes for ikke-lineære tilnærminger til rensesfunksjonen.

Vi bruker i dette arbeidet en rensesfunksjon som er både ikke-lineær og ikke-monoton. Den er konveks i visse deler og konkav i andre deler. I seksjon 2 estimerer vi denne rensesfunksjonen basert på historiske data for utslipp av CO_2 og for aggregert mengde i atmosfæren. I tillegg sammenligner vi med en lineær estimering basert på de samme data.

Flere har påpekt at like viktig som avgiftsstørrelsen er utviklingen over tid - om avgiften er avtagende eller økende. (jfr. Ulph og Ulph [4] og Sinclair [13]). I denne sammenheng blir en realistisk rensesfunksjon avgjørende. Dessuten er det svært viktig at man tar hensyn til at fossilt brensel er en ikke-fornybar ressurs som bare kan "høstes" i et endelig tidsperspektiv. Mange gjør ikke dette, og antar derfor at CO_2 -nivået utvikler seg mot en likevekt der tilførselen av ny forurensning er lik rensesevnen fra naturen. (W. Nordhaus [3] og K. Stollery[14]). Dermed forutsetter de at uttaket av fossilt brensel og den aggregerte mengde av drivhusgasser før eller siden stabiliserer seg på et bestemt nivå - et nivå som kanskje aldri nås.

Selv om optimeringsproblemet vårt strekker seg over uendelig tid, tenker vi oss at vi bare tar ut fossilt brensel over en viss periode. Etterhvert overtar en alternativ ren energikilde (f.eks hydrogen brensel-celler), som med dagens teknologinivå og dagens "lave" mengde av drivhusgasser i atmosfæren, enda ikke er lønnsom å ta i bruk.

Tidspunktet for teknologiskiftet, $t = T$, finnes endogent i modellen vår. I T kan vi tenke oss to scenarier. Enten har optimal politikk vært å bruke opp hele ressursen av fossilt brensel, eller så er der fremdeles mer igjen. Matematisk vil vi behandle dette som to adskilte tilfeller.

I tilsvarende modeller antar man typisk T som en eksogen størrelse fordi det gjør modellene betydelig enklere. (Se f.eks Ulph og Ulph [4]). Dessverre kan skatteprofil og uttaksnivå av fossilt brensel endres vesentlig som følge av en slik forenklingen. Ved modellering ser man at relativt små endringer i modellstørrelser, f.eks. funksjonen for etterspørsel etter fossilt brensel, kan gi svært stor endring i T når denne størrelsen finnes endogent. I vår modell er T derfor en endogen størrelse.

2 Beskrivelse av modellen

Vi innfører følgende parametere:

- $a(t)$: Mengden av CO_2 i atmosfæren.
- $y(t)$: Uttak av fossilt brensel.
- $s(t)$: Gjenværende uttakbar mengde fossilt brensel.

Videre lar vi funksjonen $f(a)$ representere naturens egen renseevne av CO_2 fra atmosfæren ved CO_2 - nivå a .

Tradisjonell produksjon medfører reduksjon i velferden på grunn av forurensning. Vi tenker oss denne produksjonen som lineært avhengig av uttaket av fossilt brensel. Likeledes antar vi at oppsamlingen av forurensning i naturen er lineært avhengig av dette uttaket. Dermed får vi³

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \mu y(t) - f(a(t)), & \mu > 0 \\ \dot{s} &= -y(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Dette blir dynamiske “tilstandsligninger” for det optimeringsproblem vi etterhvert skal formulere.⁴

Vi antar at ressursen med fossilt brensel før eller siden brukes helt opp eller blir ulønnsom, og at en ny ren teknologi overtar. I denne siste perioden er tilstandsligningene våre på formen

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -f(a) \\ \dot{s} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Velferden i perioden med alternativ ren teknologi, tenker vi oss som differansen mellom en kjent “profittfunksjon” $\hat{\pi}(t)$ og skadefunksjonen $D(a)$. I første periode vil profitten være summen av produsentoverskudd, konsumentoverskudd og (verdens)statens eller “administratorens” overskudd, $(PS + CS + GS)$, i markedet for fossilt brensel. Dette vil i vår modell kun avhenge av uttaket av fossilt brensel og aggregert CO_2 -nivå i atmosfæren. (Se fig. 1).

“Uttakeren” av ressursen er bare opptatt av å maksimere produsentoverskuddet (PS), og er derfor blind for de velferdsdempende faktorene (utslipp/forurensning) knyttet til uttaket y . Likeledes kan vi ikke forvente at samfunnets etterspørsel gjenspeiler alle de negative sider ved bruken av ressursen. Derfor ønsker vi å finne et avgiftsnivånivå som forskyver likevekten mellom “produksjonskostnad” (tilbud) og etterspørsel slik at denne reduseres til det som er det velferdsoptimerende nivå for samfunnet som helhet. Det vil si at vi skal maksimere $PS + CS + GS$. Uten aktiv skatteinngripen ville markedsaktørene delt overskuddet seg imellom. De ville med andre ord ha maksimert $CS + PS$ uten hensyn til miljøet. Uttaket ville da blitt y_1 . (Se fig. 1).

Ved hjelp av moms eller annen type avgift på prisen av fossilt brensel, kan man imidlertid justere markedslivekten slik at den velferdsoptimerende likevekten (y^*, p^*) oppnås.

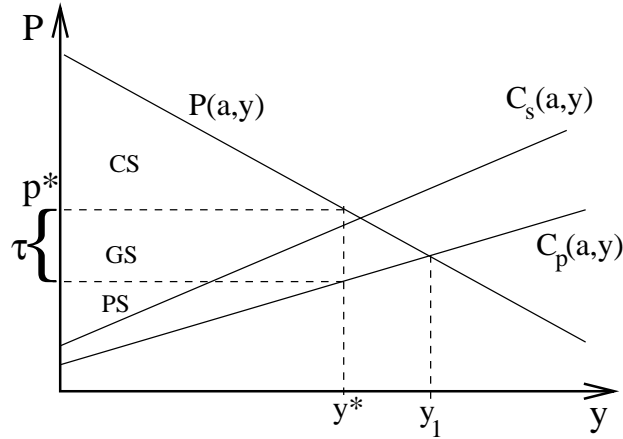
I modellen vår har vi valgt å skille mellom to typer eksternaliteter, nemlig flytkostnader (flow) og oppsamlingskostnader (stock). Flyteksternalitetene er de umiddelbare miljøkostnader forbundet med bruk og utvinning av fossilt brensel. Disse er gitt som differansen mellom den sosiale kostnadskurven, $C_s(a, y)$, og den private kostnadskurven, $C_p(a, y)$.

Oppsamlingskostnadene representerer de dynamiske kostnadene i modellen vår. Dette er de samfunnsmessige kostnadene ved at CO_2 blir lagret i atmosfæren og skader

³Punktumet over a og s markerer her henholdsvis de tidsderiverte $\frac{da}{dt}$ og $\frac{ds}{dt}$, slik vanlig er i økonomisk litteratur.

⁴I fortsettelsen vil det være underforstått at $a = a(t)$, $y = y(t)$ og $s = s(t)$.

miljøet også i fremtiden. Disse kostnadene er representert med skadefunksjonen, $D(a)$, som vi har satt til å være kvadratisk i a . Denne formen på $D(a)$ er imidlertid ikke kritisk når det gjelder det å finne en numerisk løsning av modellen vår. Vi tar en kort gjennomgang



Figur 1: Skisse av markedsliekevekten som gir sosialt optimum. Skatten τ forskyver likevekten fra $(y, p) = (y_1, p_1)$ til $(y, p) = (y^*, p^*)$.

av størrelser og funksjoner i fig. 1:

- $p(y, a) = p_0(a) + p_1(a)y$: Invers etterspørselsfunksjon. ($p_0 > 0$ og $p_1 < 0$)
- $c^p(y, a) = c_{p0}(a) + c_{p1}(a) \cdot y$ og $c^s(y, a) = c_{s0}(a) + c_{s1}(a) \cdot y$: Henholdsvis den private og den sosiale inverse tilbudskurve/kostnadskurve. Den sosiale kostnadskurven tar opp i seg flyt- (flow) relaterte kostnader produsenten er blind for. Vi har $0 \leq c_{p0} \leq c_{s0} \leq p_0$ og $c_{p1} \leq c_{s1}$.
- Skatt: $\tau(a, y) = P(a, y) - C_p(a, y)$.
- Konsumentoverskudd: $CS = \int_0^{y^*} P(a, x) dx - y^* \cdot (\tau(a, y^*) + C_p(a, y^*))$.
- Produsentoverskudd: $PS = y^* \cdot C_p(a, y^*) - \int_0^{y^*} C_p(a, x) dx$.
- Statens overskudd: $GS = \tau \cdot y^* - D(a) - \int_0^{y^*} (C_s(a, x) - C_p(a, x)) dx$

Summen av $PS + CS + GS$ blir kvadratisk i y^* . Dette er summen av vår nyttefunksjon, som representerer sosial velferd generert av aktivitetene. La oss også definere “profittfunksjonen”:

$$\pi(a, y) = \int_0^y [p(a, x) - c_s(a, x)] dx = \beta(a)y + \gamma(a)y^2. \quad (3)$$

Her er

$$\beta(a) \equiv p_0(a) - c_{s0}(a) \quad \text{og} \quad \gamma(a) \equiv \frac{1}{2}[p_1(a) - c_{s1}(a)]. \quad (4)$$

Dersom vi går til fig. 1 vil $\pi(a, y)$ være arealet mellom P - akse og kurvene $P(a, y)$ og $C_s(a, y)$. Vi kan si at dette er den sosiale velferden dersom det bare tas hensyn til "flow" (flyt-) eksternalitetene i modellen. Imidlertid skal vi også ta hensyn til "stock" (mengde)eksternaliteter, altså den dynamiske skaden ved oppsamlingen av drivhusgasser i atmosfæren.

Vi stiller nå spørsmål om hva som er det "riktige" nivå på uttaket. Vi tenker oss at staten innfører en skatt som skifter markedslivekten fra y_1 til y^* , som vi regner som velferdsmaksimerende y -nivå ved forurensningsnivå a . (Jfr. fig. 1). Det kan da lett vises at

$$CS + PS + GS = \pi(a, y^*) - D(a).$$

Dersom vi lar $\Phi(a(T), T) \equiv \int_T^\infty e^{-rt}(\hat{\pi}(t) - D(a))dt$, kan vi formulere vårt to-periode-optimeringsproblem som et en-periode-problem med "skrapverdi". Velferdsmaksimum er da gitt ved:

$$\max_{y, T} \left\{ \int_0^T e^{-rt}(\pi(a, y) - D(a)) dt + \Phi(a(T), T) \right\} \quad (5)$$

under bibetingelse:

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} y - f(a) \\ -y \end{bmatrix}, & \text{når } t < T. \\ \begin{bmatrix} -f(a) \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{når } t \geq T. \end{cases} \quad (6)$$

(I forhold til ligning (1) har vi skalert både y og s slik at vi kan sette $\mu = 1$ i ligning (6)). Skattnivået som korresponderer med det optimale uttaksnivået y^* blir da $\tau(a, y^*) = P(a, y^*) - C_p(a, y^*)$, mens tilhørende ad-valorem skatt blir:

$$\theta(a, y^*) = \frac{P(a, y^*) - C_p(a, y^*)}{C_p(a, y^*)}. \quad (7)$$

I henhold til prinsippene for optimal kontrollteori, se f.eks. [6], er optimeringsproblemet gitt ved (5) og (6) uttrykt ved første ordens betingelser til nåverdi-hamiltonfunksjonen gitt som

$$\mathcal{H}(a, y, t) = \begin{cases} \pi(a, y) - D(a) + m(y - f(a)) - ny, & t \leq T \\ \hat{\pi}(t) - D(a) - mf(a), & t > T, \end{cases} \quad (8)$$

med tilhørende første ordens betingelser:

$$\dot{m} = rm - \mathcal{H}_a \quad (9)$$

$$\dot{n} = rn - \mathcal{H}_s \quad (10)$$

$$\mathcal{H}_y = 0, \quad (11)$$

der $m(t)$ er “skyggepris” (kofaktor) for a og $n(t)$ er “skyggepris” for s . I fortsettelsen vil vi referere til (9) og (10) som henholdsvis *multiplikatorligning 1* og *multiplikatorligning 2*, mens (11) benevnes som *kravet for indre optimum*.

Når det gjelder transversalitetsskravene til dette maksimeringsproblemet, nøyer vi oss med å nevne at dersom man ser på (5) som et endelig horisonts problem med “skrapverdi”, blir transversalitetsskravet svarende til at ressursen er endelig:⁵

$$n(T)s(T) = 0, \quad s \geq 0, \quad n(T) \geq 0. \quad (12)$$

Filipov-Cesaris eksistensteorem, som vi finner i Seierstad-Sydsæther [5], sikrer oss eksistens av en optimal løsning for problemet vårt. (Se appendiks A.1). En formulering av hvordan vi har løst optimeringsproblemet i (5) og (6) følger i appendiks A.2.

Rensefunksjonen og andre størrelser i modellen

Modellen vår som er formulert under avsnitt 2 inneholder blant annet rensefunksjon $f(a)$. Denne funksjon tenker vi oss som naturens nettorensning av CO_2 fra atmosfæren.

I eksisterende litteratur antas $f(a)$ oftest lineær. Vår alternative ikke-lineære rensefunksjon er mer realistisk. Med denne avtar rensningen og stopper helt opp for høye atmosfæriske CO_2 -nivåer. Modellen vår åpner dermed for dommedagsscenarier med irreversibel forurensning.

Vi velger følgende rensefunksjon:

$$f(z) = k_1 \max\{0, e^{-k_2(z-1)^2} - e^{-k_2}\}, \quad (13)$$

der $z = \frac{a}{625}$.

Konstantene k_1 og k_2 har vi funnet ved å kallibrere rensefunksjonen med data for atmosfærisk CO_2 -nivå (se [1]) og tilsvarende utslipp (se [2]). Vi fant $k_1 = 10.885$ og $k_2 = 2.610$.

Resultatene av denne rensefunksjonen skal vi i seksjon 3 sammenligne med resultatene fra den lineære tilnærming som er kallibrert med de samme data. (Se [1] og [2]).

$$f_{lin}(a) = 0.017a \quad (14)$$

Legg merke til at vi både for den lineære og den ikke-lineære rensefunksjonen har $f(0) = 0$. Vi har med andre ord foretatt skaleringen $a \rightarrow a - \tilde{a}$, der \tilde{a} er pre-industrielt a -nivå. I tiden før den industrielle revolusjon var nemlig CO_2 -nivået i atmosfæren relativt stabilt, iallefall mellom istidene. I 1997 var det steget til 360 ppm (≈ 2812 Gt CO_2). Dersom vi skalerer med $\tilde{a}_0 = 2187$ Gt CO_2 , (det pre-industrielle nivå), får vi de meteorologiske data som er presentert i tab. 1. Med unntak av $\tilde{\pi}$ og $\hat{\pi}(t)$ er disse størrelser stilt til disposisjon av “Nansen-senteret” i Bergen.

Skadefunksjonen henter vi fra Sandal og Steinshamn [10]. Vi setter

$$D(a) = \frac{a^2}{100000}. \quad (15)$$

⁵En mer generell diskusjon av transversalitetsskrav finner man i [6] og [5].

Parameter	verdi	parameter	verdi
$f(a_o)$	11.7	a_o	625
y_0	21.9	$\tilde{\pi}$	136.9
s_0	7000	$\hat{\pi}_0$	70

Tabell 1: Meteorologiske data (Gt CO_2).

For den tidsavhengige alternative profitten benytter vi

$$\hat{\pi}(t) = 140 - 70 \cdot e^{-0.07t}. \quad (16)$$

Når det gjelder tidsskalaen, lar vi $t = 1$ tilsvare ett år. Dette er et naturlig valg ettersom vi genererte $f(a)$ på grunnlag av årlige gjennomsnittstall for utslipp og rensning.

Vi har i modellen vår antatt generell a -avhengighet i markedet for fossilt brensel. Dermed gir vi rom for at miljøbevissthet blant forbrukerne kan påvirke etterspørselen. Vi undersøker et tilfelle uten a -avhengig etterspørsel og et tilfelle med a -avhengig etterspørsel. I tilfellet med a -avhengighet valgte vi $p_0(a) = 16 - 0.0012 \cdot a$. Dette er ingen sterk avhengighet, men i 3.2 skal vi se at den likevel får en del å si for forurensningsnivået og teknologiskiftetidspunktet.

De andre parametrene for etterspørsels- og kostnadskurver finner vi i tabell 2.

Markedslikevekt	Parameter	verdi	parameter	verdi
avhengig av a	p_0	$16 - 0.0012 \cdot a$	p_1	-0.6
uavhengig av a	p_0	15.3	p_1	-0.6
	c_{0s}	1	c_{1s}	0.09
	c_{0p}	1	c_{1p}	0.02

Tabell 2: Benyttede verdier for parameterne i etterspørsels- og kostnadsfunksjonen.

3 Resultater

3.1 Lineær versus ikke-lineær rensning

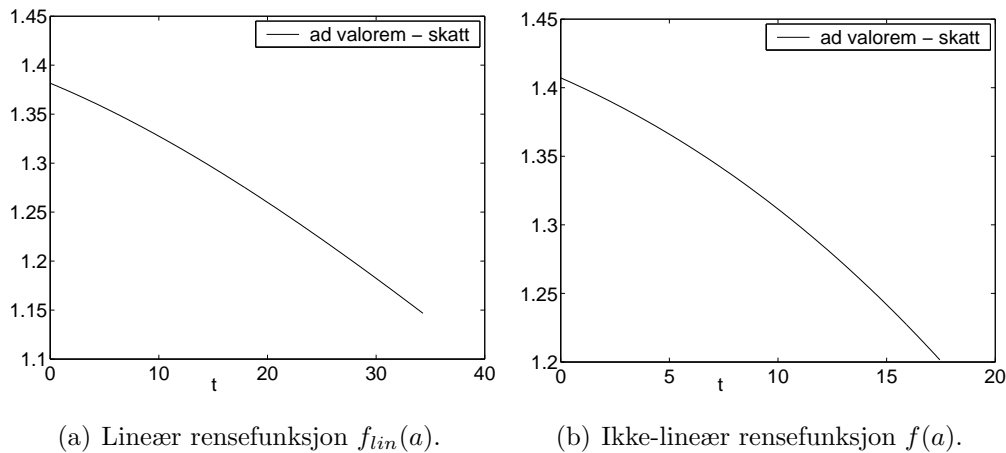
I denne seksjonen skal vi se hvilken betydning formen på rensfunksjonen har for optimeringsproblemet vårt.

Diskonteringen har vi satt til $r = 0.05$, og vi undersøker både tilfellet der den alternative profitten er konstant og tilfellet der den er variabel. Dessuten har vi holdt oss til den a -avhengige markedslikevekten. (Se tabell 2).

Konstant alternativ profitt: Både tabell 3 og fig. 2 viser tydelige forskjeller i forhold til hvilken type rensfunksjon vi bruker. Tiden frem til teknologiskiftet halveres når vi går over fra lineær til ikke-lineær rensfunksjon. Dessuten ser vi at skattetrykket er høyere når $f(a)$ er ikke-lineær. Særlig ser vi denne forskjellen når vi nærmer oss teknologiskiftet og

a øker. Vi konkluderer med at uttak og forurensningen blir større dersom skattepolitikken styres av en optimeringsmodell med lineær rensefunksjon.

Det som “redder oss” i dette eksemplet er at vi ser på tilfellet med idealistiske marked-saktører. For det andre tilfellet gir den lineære rensefunksjonen mer urovekkende resultater. Ved diskontering $r = 0.05$ viste det seg umulig å finne tidspunktet for teknologiskiftet. Årsaken er at løsningen nærmer seg likevekten $y = f(a)$. Det vi likevel kan si, er at teknologiskiftet ikke kommer før ressursen er helt oppbrukt. I lang tid før dette finner sted, vil uttaksnivået være svært høyt. På grunn av antagelsen om at rensningen er lineær, vil den være så stor at vi er i en slags likevekt selv om utslippene er formidable. Når det fossile brenselet tar slutt, renser naturen seg selv igjen etter kort tid dersom den virkelige rensefunksjonen er lineær. Men dersom rensefunksjonen er ikke-lineær og avtagende for store a -verdier, vil vi være virkelig ille ute. Da kan den oppsamlede forurensning ha blitt så stor at grensene for naturens egen renseevne er overskredet.



Figur 2: Ad-valorem skatt, $\theta(t)$.

Tidsavhengig alternativ profitt: Når vi lar den alternative profitten være avhengig av tiden viser tabell 3 at endringene ikke blir særlig dramatiske. Teknologiskiftene kommer noe senere og forurensningen blir noe høyere. Årsaken er ganske enkelt at $\hat{\pi}(t)$ ikke passerer $\hat{\pi} = 136.9$ før etter $44\frac{1}{2}$ år. Vi konkluderer med at størrelsen på den alternative profitten er avgjørende for når teknologiskiftet vil inntreffe. Dersom man har nok viten om hvordan den virkelige $\hat{\pi}(t)$ utvikler seg med tiden, er det derfor åpenbart en modellforbedring å gjøre den tidsavhengig.

I det følgende har vi brukt den tidsavhengige alternative profitten.

Alt. profitt	Rensefunksjon	$y(0)$	$y(T)$	$a(T)$	$s(T)$	T	$\theta(0)$	$\theta(T)$
Konstant $\hat{\pi} = 136.9$	Lineær	19.870	19.920	871.60	6318.81	34.313	1.3816	1.1467
	Ikke-lineær	19.814	19.920	807.76	6965.37	17.451	1.4072	1.2015
Tidsavh. $\hat{\pi}(t)$	Lineær	19.857	19.858	901.26	6190.60	41.070	1.3876	1.1497
	Ikke-lineær	19.459	19.451	940.03	6447.26	28.569	1.5733	1.3049

Tabell 3: Randstørrelser. Lineær versus ikke-lineær rensefunksjon.

3.2 Virkning av diskontering og "idealistisk" marked

Vi skal nå se hvilken innvirkning ulike verdier på diskonteringen har for modellen vår. Dette skal vi teste ut både for tilfellet med og tilfellet uten a -avhengig etterspørsel. (Henholdsvis idealistisk marked og ikke-idealistisk marked).

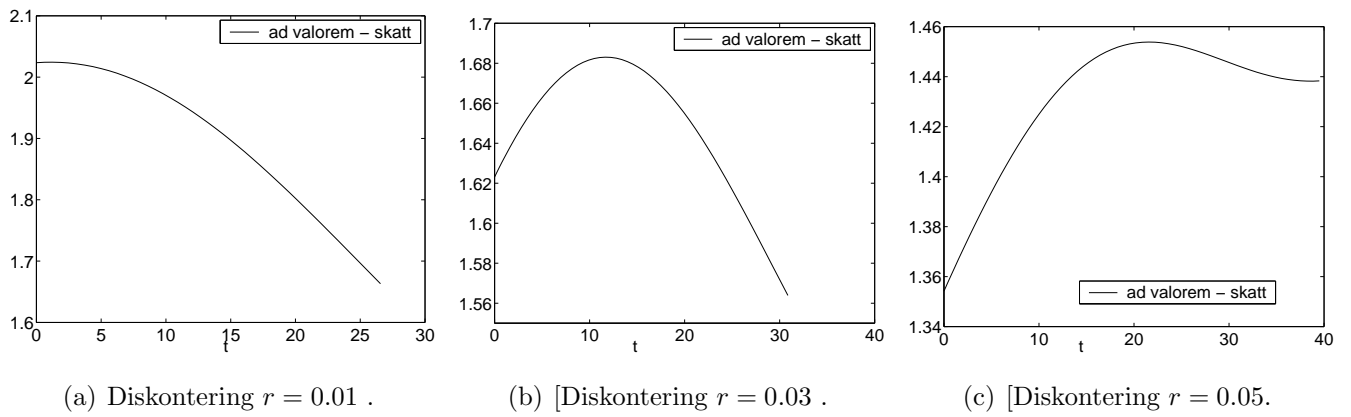
Ingen miljøbevissthet i markedet: Av tabell 4 fremgår det tydelig hvordan diskonteringen virker inn på resultatene i modellen vår. Med lav diskontering ($r = 0.01$) ser vi at teknologiskiftet kommer allerede etter $26\frac{1}{2}$ år. Skattetrykket er da veldig høyt initielt (over 200%), men avtar mye etterhvert som tiden går. (166% i $t = 26.57$). Når vi øker diskonteringen ser vi at teknologiskiftet kommer senere og skattetrykket blir lavere. (Se fig. 3). Vi ser også at vi får en flatere skatteprofil. Det er ikke lenger så stor forskjell mellom skatten de første årene og slik den blir når vi nærmer oss teknologiskiftet.

Fig. 4 viser resultatene av optimal skatt. Vi ser at en diskontering på 5 % gir adskillig høyere forurensning enn det 1 % gjør.

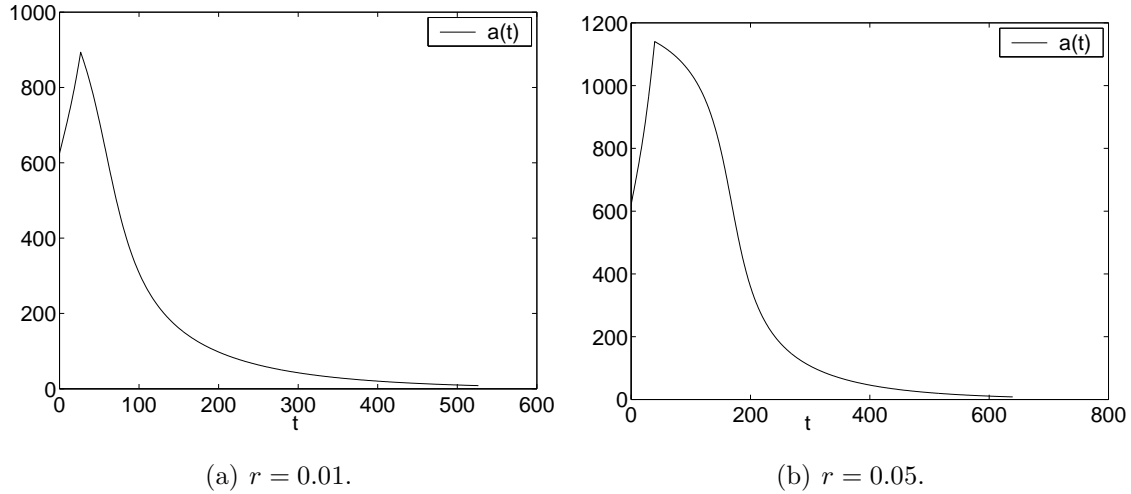
Idealistisk marked: Når vi innfører et idealistisk marked, dvs. etterspørselskurve som avtar med økende forurensning, er virkningen på den optimale politikken markert. Vi ser av tabell 4 at forurensning og uttaksperiode avtar klart for alle diskonteringsverdier. Dersom vi studerer figurene i 5 legger vi også merke til noe annet interessant. Disse figurene tydeliggjør hvordan avgiftsprofilen endres når vi antar et idealistisk marked. Vi ser at den a -avhengige etterspørselskurven reduserer skatten for høye a -nivåer. Årsaken er at den nedgangen i etterspørsel som skyldes miljøbevissthet i noen grad overtar avgiftens rolle i forhold til å redusere uttaket av fossilt brensel.

Marked	Diskontering	$y(0)$	$y(T)$	$a(T)$	$s(T)$	T	$\theta(0)$	$\theta(T)$
Ikke - ideal- istisk	$r = 0.01$	18.5876	19.3442	893.60	6499.18	26.57	2.0235	1.6631
	$r = 0.03$	19.4293	19.5556	975.39	6401.81	30.87	1.6231	1.5639
	$r = 0.05$	20.0064	19.8248	1140.31	6216.26	39.50	1.3542	1.4383
Ideal- istisk	$r = 0.01$	18.2161	19.1623	850.75	6558.92	23.71	2.1666	1.5171
	$r = 0.03$	18.9675	19.3353	898.60	6497.02	26.41	1.8053	1.3945
	$r = 0.05$	19.4586	19.4507	940.03	6447.26	28.57	1.5733	1.3049

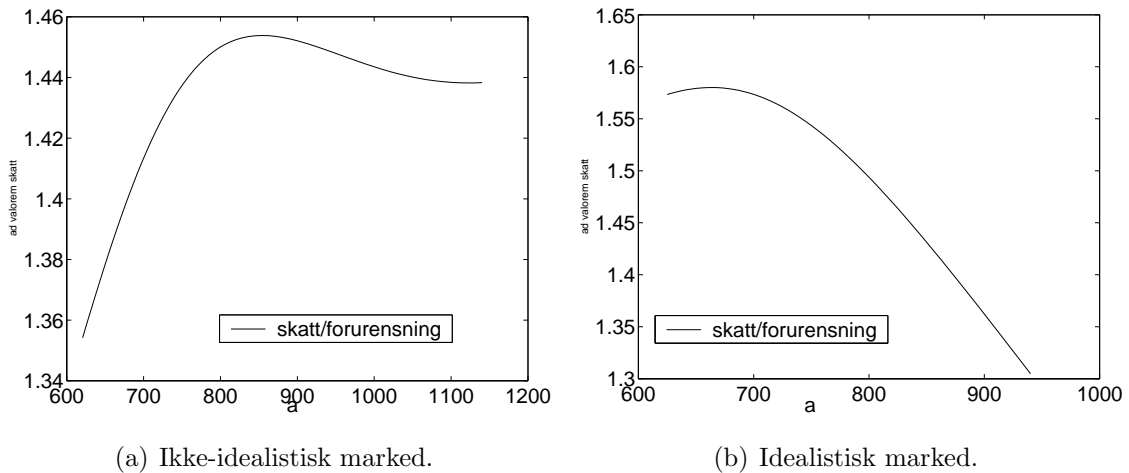
Tabell 4: Randstørrelser. Diskonteringsens virkning i to typer marked.



Figur 3: Ad-valorem skatt, $\theta(t)$, for ulike diskonteringsverdier.



Figur 4: Agg. forurensning $a(t)$ for ulike diskonteringsverdier.



Figur 5: Skatt som funksjon av forurensning ($\theta(a)$) når $r = 0.05$.

4 Avslutning

I dette arbeidet har vi blant annet vist at formen på naturens egen rensefunksjon er avgjørende for optimal miljøpolitikk. Det viser seg at antagelsen om en lineær rensefunksjon resulterer i langt lavere avgifter på uttak av fossilt brensel enn det vi får dersom vi bruker en ikke-lineære funksjon av den typen vi har brukt. Dette til tross for at både den lineære og den ikke-lineære funksjonen er kallibrert fra de samme data. Da vi betraktet tidshorisonten frem til teknologiskiftet for de to tilfellene, såg vi at forskjellene kunne bli svært store. Med “idealistisk marked” var de to løsningene likevel sammenlignbare, men tok vi bort “idealismen” som stabiliseringsfaktor, kom vi for nær likevekt til å beregne løsningen for det lineære tilfellet. Vi vet imidlertid at løsningen i dette tilfellet ville vært stabil omkring likevektsnivå inntil ressursen hadde blitt helt uttappet. I motsetning brukes svært lite av ressursen opp for det ikke-lineære tilfellet, og teknologiskiftet kommer relativt tidlig. Alt i alt er det nærliggende å konkludere med at det å bruke en lineær tilnærming til rensefunksjonen er urealistisk og misvisende når en skal si noe om den virkelige verden.

I modellen vår fant vi tidspunktet frem til teknologiskiftet endogent. Den store forskjellen i T for de ulike variantene av optimeringsproblemet vi testet ut, viser hvor avgjørende det kan være å bestemme T endogent. En eksogen tilnærming gir rom for store feil.

Ellers brukte vi en tidsavhengig alternativ profitt, og viste at det lot seg gjøre å bestemme den optimale løsning med a -avhengig etterspørsel (“idealistisk marked”). Begge deler kan være med og gjøre modellen mer realistisk. Når det gjelder den relativt lave a -avhengigheten vi testet ut, fant vi at denne markant påvirker resultatene. Aggregert mengde CO_2 i atmosfæren ble langt lavere når etterspørselen i markedet var negativt korrelert med den aggregerte mengden av CO_2 i atmosfæren.

Det kan også være verdt å nevne at den numeriske løsningsmetoden vår konvergerer

når diskonteringen går mot null, og at resultatene er svært følsomme for diskontering slik vi normalt kunne forvente.

A Appendiks

A.1 Eksistensbevis

Vi skal her vise at det alltid eksisterer løsning for optimeringsproblemet definert i (5) og (6). I den sammenheng begrenser vi oss til å vise at betingelsene i *Filipov-Cesaris eksistensteorm*, som vi finner som teorem 6.18 i Seierstad-Sydsæther [5], er oppfylte.

Kravet om at mengden $N(a, y, t)$ er konveks, utgjør sammen med kravet om en øvre grense for tilstandsvariablene, de eneste ikke-trivielle betingelser stilt i dette teoremet. Når det gjelder det siste kravet har vi at $\dot{a} + \dot{s} = y - f(a) + (-y) = -f(a) \leq 0$, slik at $0 \leq a + s \leq a_0 + s_0$. Følgelig er dette tilfredsstillt.

Teoremet forutsetter at mengden

$$N(a, y, t) = \{(e^{-rt}[\pi(a, y) - D(a)] + \gamma, y - f(a), -y) : \gamma \leq 0, y \in [0, \hat{y}]\} \quad (17)$$

er konveks for alle $(a, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$. (I (17) er \hat{y} gitt ved $\pi_y(a, \hat{y}) = 0$).

Bevis: Fikser (a, t) , la $z_i \equiv e^{-rt}[\pi(a, y_i) - D(a)] + \gamma$ og la y_3, z_3 være en konveks kombinasjon av y_1, y_2 og z_1, z_2 .

Vi får $\lambda(z_1, y_1 - f(a), -y_1) + (1 - \lambda)(z_2, y_2 - f(a), -y_2) = (\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 - f(a), -\lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2) = (z_3, y_3 - f(a), -y_3)$. Konkaviteten til $\pi(a, y)$ gir $z_3 = e^{-rt}[\lambda\pi(a, y_1) + (1 - \lambda)\pi(a, y_2) - D(a)] + \lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 \leq e^{-rt}[\pi(a, y_3) - D(a)] + \lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \leq \lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 \leq 0 \Rightarrow (z_3, y_3 - f(a), -y_3) \in N(a, y, T)$.

A.2 Formulering av modell

I det følgende viser vi først i seksjon A.2.1 hvordan vi kommer frem til en “feedback-differensialligning” for den optimale kontrollen, y . (uttak, y , som funksjon av aggregert forurensning, a). Deretter gjør vi i seksjon A.2.2 rede for hvordan vi benytter oss av denne differensialligningen til å finne en numerisk løsning av modellen.

Optimeringsproblemet i ligningene (5-6) kan formuleres slik at det strekker seg over to perioder - før og etter teknologiskiftet. Kontrollvariabelen er uttaket, y . Vi har et såkalt “tilpasningsproblem”, (“matching-problem”), i tidspunkt T .

Hamiltonfunksjonen med tilstandsligninger, multiplikatorligninger og det indre optimalitetskravet er oppsummert i tab. 5. Vi krever at denne funksjonen, samt tilstandsvariablene og multiplikatorene er kontinuerlige i $t = T$.

Multiplikatorligning 2: Løser vi multiplikatorligning 2 i tabell 5, får vi

$$n(t) = n_0 e^{rt}, \quad \text{der } n_0 = n(0). \quad (18)$$

Dette kombinerer vi med (12) og får to muligheter for skyggeprisen $n(t)$:

Tilfelle 1: $s(T) > 0$ og $n(t) = 0$ for alle t .

Tilfelle 2: $s(T) = 0$ og $n(t) = n_0 e^{rt}$.

Beskrivelse	Første periode	Sluttperiode
Tid	$0 \leq t \leq T$	$T < t \leq \infty$
produksjon	$y > 0, \quad y(T) = y_T > 0$	$y = 0$
Sosial velferd	$\pi(a, y) - D(a)$	$\hat{\pi}(t) - D(a)$
Tilstandsligning 1	$\dot{a} = y - f(a)$	$\dot{a} = -f(a)$
Tilstandsligning 2	$\dot{s} = -y$	
Hamilton	$\mathcal{H} = \pi(a, y) - D(a) + m(y - f(a)) - ny$	$\mathcal{H} = \hat{\pi}(t) - D(a) - mf(a)$
Indre optimum	$\mathcal{H}_y = 0 \Leftrightarrow m - n = -\pi_y(a, y)$	
Kofaktor 1	$\dot{m} = (r + f'(a))m - \pi_a(a, y) + D'(a)$	$\dot{m} = (r + f'(a))m + D'(a)$
Kofaktor 2	$\dot{n} = rn$	$\dot{n} = rn, ns = 0$ og $n, s \geq 0$

Tabell 5: Førsteordens betingelser.

A.2.1 Feedback-formulering

I det følgende skal vi utlede en 1. ordens differensialligning for “feedback-kurven” til y under *tilfelle 1* og *tilfelle 2*.

La oss først anta en generell autonom nåverdihamiltonfunksjon $\mathcal{H} = e^{rt}H(\mathbf{x}, y, \mathbf{p}) = w(\mathbf{x}, y) + \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}$, for et problem med diskontering. For at denne funksjonen skal representere vårt problem lar vi \mathbf{x} og \mathbf{p} være to-dimensjonale vektorer svarende til tilstandsligningene og deres tilhørende multiplikatorligninger, mens y er kontrollvariabel og $w(\mathbf{x}, y) \equiv \pi(a, y) - D(a)$. Antar vi indre løsning gir den generelle teori

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, y) \\ \dot{\mathbf{p}} &= r\mathbf{p} - \mathcal{H}_{\mathbf{x}} \\ \mathcal{H}_y &= 0.\end{aligned}$$

Vi totalderiverer:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{H} &= r\mathcal{H} + e^{rt}\frac{\delta H}{\delta t} = r\mathcal{H} + e^{rt}\frac{\delta w}{\delta t} + \mathbf{p}^T\frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} \\ &= re^{rt}w + r\mathbf{p}^T\mathbf{g} + \frac{\delta}{\delta t}(e^{rt}w) - re^{rt}w + \mathbf{p}^T\frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} \\ &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} + r\mathbf{p}^T\mathbf{g} = r\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{x}}.\end{aligned}\tag{19}$$

Dette skal vi bruke til å utlede en feedback for de to tilfellene, men først setter vi kravet om indre løsning, se tab. 5, inn i hamiltonfunksjonen. Vi får

$$\mathcal{H}(a, y) = \pi(a, y) - D(a) - y\pi_y - mf(a).\tag{20}$$

Tilfelle 1: $s(t) > 0$ og $n(t) = 0$ for alle t . La oss sette $m(t) = \tilde{M}(a, y)$ og $n(t) = \tilde{N}(a, y)$. Vi kan da definere

$$\begin{aligned}P(a, y) &\equiv \mathcal{H}(a, y, m = \tilde{M}(a, y), n = \tilde{N}(a, y)) \\ &= \pi(a, y) - D(a) + \tilde{M}(a, y)(y - f(a)) - \tilde{N}(a, y)y.\end{aligned}\tag{21}$$

Innsatt i (19) sammen med betingelsen $n = 0$ gir dette:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} \right] \dot{a} = r \tilde{M} \dot{a}.$$

Hvis $\dot{a} \neq 0$ (dvs. utenom i likevekt) får vi dermed

$$\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} = r \tilde{M}. \quad (22)$$

De kjente størrelsene innsatt i (22) gir da ⁶

$$y'(a)(y - f)\pi_{yy} = \pi_a - D' - (y - f)\pi_{ay} + (r + f')\pi_y. \quad (23)$$

Hvis vi forutsetter at der ikke er noen mangel på fossilt brensel, vil dette være “feedback-differensialligningen” for optimalt uttak.

Tilfelle 2: $s(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$ og $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}_0 e^{rt}$ I dette tilfellet blir feedback-formen mer komplisert. Kravet om indre løsning innsatt i (19) gir

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} \right] \dot{a} = r m \dot{a} + r n \dot{s} = r(y(m - n) - mf) = -r(y\pi_y + mf). \quad (24)$$

Vi setter inn (20) og får

$$y'(a) = \frac{(\pi_a - D' - y\pi_{ay} - mf)(y - f) + r(y\pi_y + mf)}{y\pi_{yy}(y - f)} \equiv G_1(a, y, m), \quad (25)$$

der vi antar $y - f \neq 0$.

Vi kjenner ikke verdien på m , og trenger derfor den første multiplikatorligningen i tabell (5), nemlig $\dot{m} = (r + f')m - \pi_a + D'$. I denne setter vi $y = y(a)$ og $m(t) \equiv M(a)$ slik at vi kan skrive $\dot{M} = \frac{dM}{da} \dot{a}$. Dette gir:

$$\dot{M} = (r + f')M - \pi_a + D' \iff \frac{dM}{da} \dot{a} = (r + f')M - \pi_a + D',$$

eller

$$\frac{dM}{da} = \frac{(r + f')M - \pi_a + D'}{(y - f)} \equiv G_2(a, y, M), \quad \text{når } y \neq f. \quad (26)$$

Ligning (25) sammen med (26) er et “feedbackligningssystem” for tilfellet med knapphet på ressursen.

Vi kan også enkelt gjøre systemet (25) og (26) tidseksplisitt igjen. Vi har nemlig

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{y} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - f(a) \\ G_1(a, y, m)(y - f(a)) \\ (r + f'(a))m + D'(a) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

(Merk at vi i (27) har satt inn $G_2(a, y, m)(y - f(a)) = (r + f'(a))m + D'(a)$).

⁶I resten av A.2.1 er det underforstått at $\pi = \pi(a, y)$, $f = f(a)$ og $D = D(a)$.

A.2.2 To randverdiproblem

I seksjon A.2.1 fant vi “feedback”-differensialligninger for optimale løsningskurver for hvert av de to spesialtilfellene av optimeringsproblemet vårt. Nå skal vi finne tilhørende randbetingelser tilstrekkelige for å finne løsningskurvene for hvert av tilfellene.

Fremgangsmåten blir i praksis at man først antar at der ikke er noen ressursknapphet, altså *tilfelle 1*. Man finner tilhørende optimale løsningskurver for dette tilfellet og kontrollerer at uttaket gir $s(T) \geq 0$. Deretter søker man en løsning hvor ressursen brukes helt opp (*tilfelle 2*). Hvis der eksisterer potensielle løsninger for begge de to tilfeller, må man sammenligne overskuddet knyttet til løsningene. (Se appendiks A.2.4).

Tilfelle 1: $s_T > 0$ og $n(t) = 0$ for alle t . I dette tilfellet er randkravene *initialbetingelsen* $a(0) = a_0$, samt betingelsene i $t = T$, som vi benevner *overgangsbetingelser*. Siden $n(t) = 0$, er hamiltonfunksjonen vår $\mathcal{H} = \pi(a, y) - D(a) + m(y - f(a))$.

Multiplikatorligning 1 sammen med betingelsen $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$, det indre optimalitetskravet og kravet om kontinuerlig hamilton-funksjon gir oss følgende betingelser i teknologiskiftetidspunktet: (Se appendiks A.2.3 for utledning av disse ligninger).⁷

$$m_T = m(\infty) + \int_0^{a_T} \frac{dm}{da} da \equiv G(a_T), \quad t \geq T \quad (28)$$

$$\mathcal{H}_y = 0 \Leftrightarrow \pi_y(a_T, y_T) + m_T = 0 \quad (29)$$

$$\hat{\pi}(T) + \gamma(a_T)y_T^2 = 0. \quad (30)$$

Størrelsene som skal bestemmes er T , a_T , y_T og m_T . I tillegg til de tre overgangsbetingelsene i teknologiskiftetidspunktet, (28)-(30), krever vi at initialbetingelsen er oppfylt. Vi har dermed fire randkrav og fire ukjente størrelser. Siden vi har eksplisitt tidsavhengighet i den alternative profittfunksjonen, $\hat{\pi}(t)$, lønner det seg å bruke eksplisitt tidsavhengighet også når vi skal finne de optimale løsningskurvene for y og a . Vi har

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y - f(a)) \\ y'(a)(y - f(a)) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

der $y'(a)$ er gitt ved (23) og vi har randkravene (28 - 30) samt $a(0) = a_0$.

Det viser seg at $\frac{dY}{dt}$ er numerisk ustabil når man integrerer fra $t = 0$ til $t = T$. Går man motsatt vei fra $t = T$ til $t = 0$ blir systemet stabilt.

Siden man har randkrav både i $t = 0$ og $t = T$, er det ikke et trivielt problem å løse (31) med tilhørende randkrav. Vi ble nødt for å utvikle en egen “shooting”-metode som kunne håndtere dette randverdiproblemet numerisk.

⁷Vi har i det følgende brukt $a(T) = a_T$, $y(T) = y_T$, $s(T) = s_T$ og $m(T) = m_T$.

Tilfelle 2: $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}_0 e^{rt}$ og $\mathbf{s}(T) = \mathbf{0}$ Vi bruker følgende randkrav:

$$\begin{aligned} a(0) - a_0 &= 0 \\ \hat{\pi}(T) + \gamma(a_T)y_T^2 &= 0 \\ m_T - M(a_T) &= 0 \\ s(T) &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Dessuten innfører vi parameteren $\Omega(t)$ med initialkrav $\Omega(0) = 0$. Denne betegner samlet neddiskontert overskudd ved tidspunkt t , og er tatt med fordi differensialligningene våre med tilhørende randkrav i noen tilfeller kan ha flere løsninger slik at vi må sammenligne dem for å skille ut hvilken som er den beste. (Se appendiks A.2.4). Antall mulige løsninger vil avhenge av a -avhengigheten i γ (Se andre ligning i (32)). Dette vil vi imidlertid ikke komme noe mer inn på her.

I tillegg til de nevnte randkravene har vi $m_T - n_T = -\pi_y(a_T, y_T)$, men dette kravet bidrar ikke med noe nytt siden det innfører en ny ukjent, nemlig n_T .

Differensialligningssystem (27) utvider vi med uttrykk for \dot{s} og $\dot{\Omega}$. Dermed får vi:

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{y} \\ \dot{m} \\ \dot{s} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - f(a) \\ G_1(a, y, m)(y - f(a)) \\ (r + f'(a))m + D'(a) \\ -y \\ e^{-rt}(\pi(a, y) - D(a)) \end{bmatrix}, \tag{33}$$

Vi ser at vi har fem randkrav og fem differensialligninger. Dette randverdi-problemet er like komplisert som tilsvarende problem under *tilfelle 1*. Vi brukte en såkalt kollokasjonsmetode for å løse problemet numerisk.

A.2.3 Overgangsbetingelser i teknologiskiftetidspunktet

Vi skal se at vi finner uttrykket i (28) ved å ta utgangspunkt i $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ og *multiplikatorligning 1*.

La $M(a(t)) \equiv m(t)$. Vi betrakter *multiplikatorligning 1* for $t > T$:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= (r + f'(a))m + D'(a) \implies \\ M'(a) &= \frac{-1}{f(a)}[(r + f'(a))M(a) + D'(a)], \quad \text{når } t > T \text{ og } f(a) \neq 0. \end{aligned} \tag{34}$$

(I overgangen nyttet vi at $\frac{dm}{dt} = \frac{dM}{da} \frac{da}{dt}$ og $\frac{da}{dt} = -f(a)$ når $t > T$).

Vi krever at $|M'(0)| < \infty$. Dermed gir (34)

$$\begin{aligned} (r + f'(0))M(0) + D'(0) &= 0 \implies \\ M(0) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-D'(a)}{r + f'(a)} \quad \vee \quad (r + f'(0))M(0) = D'(0) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Ved å bruke l'Hôpital finner vi også

$$M'(0) = \frac{f''(0)M(0) + D''(0)}{r + 2f'(0)}. \quad (36)$$

Tilsammen gir (34) - (36) oss $m(t)$ for alle $t > T$. Vi har

$$m_T = M(a(\infty)) + \int_0^{a_T} M'(a) da = M(0) + \int_0^{a_T} M'(a) da. \quad (37)$$

$M'(a)$ er her gitt ved (34) og $M(a(\infty)) = M(0)$ er gitt ved (35).

Overgangsbetingelsen fra krav om kontinuerlig Hamilton og indre optimum:

Kravet om kontinuerlig Hamiltonfunksjon i teknologiskiftetidspunktet gir

$$\pi(a_T, y_T) - D(a_T) + m_T(y_T - f(a_T)) - n_T y = \widehat{\pi}(T) - D(a_T) - m_T f(a_T).$$

Setter vi inn kravet om indre optimum, altså $m_T - n_T = -\pi_y(a_T, y_T) = -(\gamma y_T^2 + \beta y_T)$, får vi $\widehat{\pi}(T) + \gamma(a_T)y_T^2 = 0$. Dermed har vi funnet (30).

A.2.4 Sammenligning av løsninger

Når vi løser optimeringsproblemet vårt ender vi opp med et system av differensialligninger med tilhørende randkrav. Systemet vil i noen tilfeller ha flere mulige løsninger. Vi er bare interesserte i løsningen, (y^*, T^*) , som tilfredsstillter

$$\max_{y, T} J(y, T) \equiv \max_{y, T} \int_0^T e^{-rt} (\pi(a, y) - D(a)) dt + \int_T^\infty e^{-rt} (\widehat{\pi}(t) - D(a)) dt. \quad (38)$$

Strategien for å finne den beste løsning er enkel og intuitiv. La to mulige løsninger være:

$$L_1 : (y_1(t), T_1), \quad t \in [0, T_1] \quad \text{gir} \quad a(T_1) = a_{T_1}. \quad (39)$$

$$L_2 : (y_2(t), T_2), \quad t \in [0, T_2] \quad \text{gir} \quad a(T_2) = a_{T_2}. \quad (40)$$

Vi beregner nå differansen $\mathcal{J}(y_1, y_2, t_1, t_2) \equiv J(y_1, T_1) - J(y_2, T_2)$ for å finne (y, T) - paret som maksimerer (38). Å beregne $J(y, T)$ ville vært umulig i tilfeller uten diskontering, siden vi da med sikkerhet ville hatt divergens i siste integral. Differansen \mathcal{J} er imidlertid mindre problematisk. Diskonteringen og rensefunksjonen avgjør om vi får konvergens eller divergens i \mathcal{J} . (Se 41). Skulle vi få divergens, er problemet likevel løsbart. Det er nemlig tilstrekkelig å finne ut om \mathcal{J} er positiv eller negativ. La oss anta $T_2 > T_1$ og at $(a_i(t), y_i(t))$ gir løsningskurvene for løsning nummer i . ($i=1,2$).

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(y_1, y_2, T_1, T_2) &= J(y_1, T_1) - J(y_2, T_2) \\ &= \int_0^{T_1} e^{-rt} (\pi(a_1, y_1) - D(a_1)) dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-rt} [\widehat{\pi}(t) - D(a_1)] dt + \int_{T_2}^\infty e^{-rt} [\widehat{\pi}(t) - D(a_1)] dt \\ &\quad - \left(\int_0^{T_2} e^{-rt} (\pi(a_2, y_2) - D(a_2)) dt + \int_{T_2}^\infty e^{-rt} [\widehat{\pi}(t) - D(a_2)] dt \right) \\ &\equiv \omega_1(y_1, T_1, y_2, T_2) + \int_{T_2}^\infty e^{-rt} [D(a_2(t)) - D(a_1(t))] dt \end{aligned} \quad (41)$$

Her er ω_1 konvergent og enkel å finne numerisk når vi har løsningskurvene y_1 og y_2 samt T_1 og T_2 .

La oss også definere

$$\omega_2(T, t, a_1, a_2) \equiv \int_T^t e^{-rt} [D(a_2(t)) - D(a_1(t))] dt,$$

slik at $\mathcal{J} = \omega_1(y_1, T_1, y_2, T_2) + \omega_2(T, \infty, a_1, a_2)$. Integralet ω_2 , er ikke nødvendigvis konvergent dersom $r = 0$. Dog er det mulig å finne fortegnet til $\omega_1 + \omega_2$ selv om integralet divergerer. Vi kan dele problemet opp i fire tilfeller:

1. $\omega_1 > 0$ og $a_1(T_2) < a_2(T_2)$

I dette tilfellet trenger vi ikke regne ut ω_2 . Siden $D'(a) < 0$ og $a'(t) = -f(a) < 0$ for alle t , vet vi at $\omega_2 > 0$. Følgelig er $\mathcal{J} = \omega_1 + \omega_2 > 0$, og L_1 er beste løsning uavhengig av om ω_2 konvergerer eller divergerer.

2. $\omega_1 < 0$ og $a_1(T_2) > a_2(T_2)$

Heller ikke i dette tilfellet trenger vi å regne ut ω_2 . Vi har $\omega_2 < 0$ siden $a_1(T_2) > a_2(T_2)$. Dermed har vi $\mathcal{J} < 0$ og L_2 er beste løsning uavhengig av om ω_2 er konvergent eller divergent.

3. $\omega_1 > 0$ og $a_1(T_2) > a_2(T_2)$

Her får vi $\omega_2 < 0$. Dermed må vi begynne å beregne størrelsen på $\omega_2 < 0$ før vi kan si noe om fortegnet til \mathcal{J} .

Istedenfor å beregne $\omega_2(t, \infty, a_1, a_2)$, beregner vi $\omega_2(T, t^*, a_1, a_2)$, der t^* er første t -verdi hvor ett av følgende to "stopp-kriterier" er tilfredsstillt:

(i) $|a_2(t) - a_1(t)| < \delta$, hvor $\delta > 0$ er svært nær 0.

(ii) $\omega_1 + \omega_2(\hat{T}, t) < 0$.

Dersom (i) er stoppkriteriet som iverksettes, må vi anta konvergens av ω_2 . Dette er dessverre intet bevis for konvergens, men siden dette kun er et spesialtilfelle som neppe vil bli aktuelt under løsningssøk, går vi ikke grundigere inn på problemstillingen konvergens/divergens av dette integralet.

Dersom ω_2 konvergerer og $\omega_1 + \omega_2 > 0$, har vi $\mathcal{J} > 0$ og L_1 er beste løsning. Stoppkriterium (ii) gir derimot $\mathcal{J} < 0$ og L_2 som beste løsning uavhengig av eventuell konvergens i ω_2 .

4. $\omega_1 < 0$ og $a_1(T_2) < a_2(T_2)$

I dette tilfellet må vi beregne $\omega_2(T, t^{**}, a_1, a_2)$ før vi kan si noe om fortegnet til \mathcal{J} .

Her er t^{**} første tidspunkt hvor enten $\omega_1 + \omega_2(T, t, a_1, a_2) > 0$ eller (i) inntreffer.

Dersom $\omega_1 + \omega_2(T, t^{**}, a_1, a_2) > 0$, så vil $\mathcal{J} > 0$ og L_1 vil være beste løsning uavhengig av konvergens i ω_2 . I motsatt fall antar vi konvergens med L_2 som beste løsning.

Referanser

- [1] Data for aggregert mengde CO_2 i atmosfæren. Tilgjengelig på <http://cdiac.esd.ornl.gov/ftp/maunaloa-co2/maunaloa.co2>.
- [2] Globalt menneskeskapt utslipp av CO_2 fra 1751 - 2000. Tilgjengelig på <http://cdiac.esd.ornl.gov/ftp/ndp030/global00.ems>.
- [3] W. Nordhaus. How Fast Should We Graze the Global Commons. *The American Economic Review*, pages 242–246, 1982.
- [4] A. Ulph og D. Ulph. The optimal time path of a carbon tax. *Oxford Economic Papers*, pages 857–868, 1994.
- [5] A. Seierstad og K. Sydsæther. *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1987.
- [6] I. Kamien og N. L. Schwarz. *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Second Edition*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1991.
- [7] Y. H. Farzin og O. Tahvonen. Global Carbon Cycle and the Optimal Time Path of a Carbon Tax. *Oxford Economic Papers*, pages 515–536, 1996.
- [8] O. Tahvonen og S. Salo. Nonconvexities in Optimal Pollution Accumulation. *Journal of Environmental Economics and Management*, pages 160–177, 1996.
- [9] Leif K. Sandal og Stein I. Steinshamn. Dynamic corrective taxes with flow and stock externalities: A feedback approach. *Natural resource modelling*, 1998.
- [10] Leif K. Sandal og Stein I. Steinshamn. Dynamiske adaptive miljøavgifter. *SNF Rapport*, 2000.
- [11] Leif K. Sandal og Stein I. Steinshamn. A Simplified Feedback Approach to Optimal Resource Management. *Natural Resource Modelling*, 2001.
- [12] Leif K. Sandal og Stein I. Steinshamn og R. Quentin Grafton. "More is Less": The Effects of Ignoring Flow Externalities. *Resource and Energy Economics*, 2003.
- [13] P. J. N. Sinclair. On the Optimum Trend of Fossil Taxation. *Oxford Economic Papers*, pages 869–877, 1994.
- [14] Kenneth R. Stollery. Constant Utility Paths and Irreversible Global Warming. *The Canadian Journal of Economics*, 31:730–742, 1998.