SNF-rapport nr. 21/04

PRISING AV FORSIKRINGSKONTRAKTER MED RENTEGARANTI

av

Roger F. Pettersen
Eirik M. Samnøy

SNF-Prosjekt nr. 7000

SAMFUNNS- OG NÆRINGSLIVSFORSKNING AS
Bergen, November 2004

ISBN 82-491-0333-5
ISSN 0803-4036

Forord

Denne rapporten avslutter vårt Høyere avdelingsstudium ved NHH og omhandler prising av forsikringskontrakter med rentegaranti. Ideen til rapporten fikk vi etter å ha tatt FIN415 Forsikringsøkonomi høsten 2003. Videre synes vi dette er et meget spennende fagområde, og relativt dagsaktuelt i forbindelse med den nye pensjonsreformen.

Vi vil takke professor Kristian R. Miltersen for hjelp der hvor vi stod fast, og for å ha utvidet kunnskapsbasen vår gjennom kurset FIN421 Risikostyring.

Bergen, august 2004

Roger F. Pettersen Eirik M. Samnøy

Innholdsfortegnelse

Innledning

I denne rapporten tar vi for oss forsikringskontrakter med rentegaranti. Dette er en type livsforsikring hvor forsikringsavkastningen er knyttet opp til verdiutviklingen til det underliggende aktivumet, som i vårt tilfelle er en portefølje bestående av risikable aktiva, som aksjer, risikable obligasjoner, eiendommer m.m. Forsikringskontraktene blir dermed et avledet aktivum, med porteføljen som underliggende aktivum. Siden det i denne type kontrakter er en garantert minsteytelse bærer ikke forsikringstaker hele risikoen alene. En slik rentegaranti fungerer som en sikkerhet for forsikringstaker siden han gjennom dette blir kvitt nedsiderisikoen som er betraktelig når vi snakker om denne type portefølje. Denne type forsikring eksisterer i mange varianter, men de to hovedtypene er en rentegaranti over hele perioden (forfallsgaranti) og en periodevis garanti.

Denne type forsikringskontrakter inneholder opsjonselementer. Nærmere bestemt er det rentegarantien som gjør at verdien på forsikringskontraktene blir en portefølje som hovedsakelig består av opsjoner. Dermed benytter vi opsjonsprisingsteori for å prise disse kontraktene. Mer spesielt benytter vi oss av prising både i diskret og kontinuerlig tid. I kontinuerlig tid analyserer vi verdiene både med og uten stokastisk rente. Modellen i diskret tid antar vi at følger en binomisk multiplikativ random walk, mens vi i kontinuerlig tid antar at prisprosessen til underliggende aktivum følger en geometrisk Wienerprosess når renten antas å være deterministisk. I tilfellet hvor renten er stokastisk benytter vi en stokastisk prosess som også inneholder korrelasjonen mellom aktivaavkastningen og renten, og dermed også inneholder to Wienerprosesser. Disse modellene er eksogent gitt. Alternativt kunne vi brukt en likevektsmodell hvor prismodellene utledes endogent.

Analysene våre er basert på blant annet Martingale-prisingsteori. I dette ligger det en forutsetning om at det underliggende aktivumet, her den risikable porteføljen, følger en gitt prisprosess, en stokastisk prosess, som gjør det mulig å duplisere det avledede aktivumets kontantstrømmer ved hjelp av passende plasseringer i den risikable porteføljen og risikofritt innlån eller utlån. Det risikofrie inn- eller utlånet skjer ved kjøp eller salg av statsobligasjoner. På bakgrunn av ingen arbitrasje teori kan dermed verdien på det avledede aktivumet finnes som den initialinvesteringen som må til i risikabel portefølje og risikofritt aktivum for å duplisere det avledede aktivumets kontantstrøm. Det underliggende aktivumet er som nevnt over den risikable porteføljen mens det avledede aktivumet er forsikringskontraktene. Disse forsikringskontraktene har en nominell verdi som er lik forsikringstakernes andel innskutt i den risikable porteføljen. Gitt denne nominelle verdien og diverse andre forutsetninger om parametere i modellene våre finner vi ut hva forsikringstaker faktisk skal betale for denne kontrakten, markedsverdien, og hva egenkapitalen skal skyte inn. Grunnet rentegarantien og en eventuell bonus blir denne markedsverdien høyere enn den nominelle verdien.

Administrasjonskostnader ser vi i denne rapporten helt bort fra. Disse kostnadene må fordeles på de enkelte forsikringene ut fra teori om fordeling av faste kostnader på enkeltprodukter. Det betyr at de resultater vi får i denne rapporten er nettoresultater og administrasjons-kostnader kommer i tillegg til disse resultatene.

Vi antar også at økonomien er friksjonsfri. Det innebærer at det ikke eksisterer transaksjons-kostnader ved kjøp og salg av verdipapirer og at det ikke er noen restriksjoner på short-salg av disse verdipapirene.

Vi ser kun på forsikringer med overlevelsesrisiko. Det betyr at dersom forsikringstaker blir ufør i løpet av forsikringsperioden så dekkes ikke dette inn i våre kontrakter. Denne risikoen må dekkes inn ved å tegne en egen uføreforsikring. I praksis er det vanlig at slike kontrakter kombineres, slik at uføreforsikring er dekket inn av livsforsikringskontrakten. Slik uføre-forsikring behandler vi imidlertid ikke i denne rapporten.

1. Forsikring

For referanser til kapittel 1, henviser vi til Persson (1992), Aase (1996) og Finansdepartementets nettsider.

En forsikringskontrakt beskrives av to elementer:

- P = premien forsikrer betaler når kontrakten inngås
- X = den kompensasjonen forsikrer mottar hvis gitte hendelser inntreffer under kontraktstiden. X er en tilfeldig variabel og må beskrives gjennom en sannsynlighetsfordeling F(X).

Utfordringen i forsikringsteori er å bestemme sammenhengen mellom disse to, dvs. hvordan P avhenger av egenskapene til sannsynlighetsfordelingen F(X).

Forsikringsvirksomheten i Norge er delt i tre hovedgrupper, livsforsikring, skadeforsikring og kredittforsikring. Livsforsikringsselskapene har bare med livsforsikring, livrente og pensjonsforsikring å gjøre. Kredittforsikringsselskapene dekker tap som oppstår ved at debitor misligholder sine forpliktelser. Skadeforsikringsselskapene har alle de andre formene for forsikring. Årsaken til at bransjen er delt i tre, er at det i livsforsikring foregår en betydelig oppsparing av penger. Dette er forsikringstakernes midler (forklares nærmere senere), og de skal ikke under noen omstendigheter kunne brukes til for eksempel å dekke et eventuelt underskudd i et skadeforsikringsselskap. I denne rapporten vil vi kun ta for oss livsforsikring.

1.1 Livsforsikring

En livsforsikring er en avtale mellom en forsikringstaker og et forsikringsselskap. Enhver kontrakt spesifiserer[1]:

[1] Vi skal senere se at en kontrakt i tillegg spesifiserer en bonusplan, men vi holder foreløpig dette utenfor diskusjonen.

- forsikringstilfellet
- forsikringsperiode
- forsikringsytelse
- premieplan

Forsikringstilfellet spesifiserer hvilken hendelse/begivenhet som må inntreffe for at forsikringsytelsen skal utbetales. I livsforsikring finnes kun to forsikringstilfeller:

1. Forsikringstaker overlever forsikringsperioden
2. Forsikringstaker dør i forsikringsperioden

Forsikringsperioden vil vanligvis være et bestemt antall år (for eksempel antall år til forsikringstaker oppnår en bestemt alder)

Forsikringsytelsen er det forsikringstaker mottar fra selskapet dersom forsikringstilfellet inntreffer. Ytelsen kan være et engangs pengebeløp som utbetales dersom forsikringstilfellet inntreffer, eller en pensjon som utbetales regelmessig i en fastsatt periode dersom forsikringstaker er i live og forsikringstilfellet inntreffer.

Premieplanen spesifiserer hvordan forsikringstakeren skal betale for ytelsen. Premien kan være en engangspremie eller en løpende premie som betales i hele eller deler av forsikringsperioden, f.eks månedsvis.

Det er vanlig å dele livsforsikring inn i to hovedgrupper etter hva som er forsikringstilfellet:

i) *Forsikring med dødsrisiko*. Da utbetales ytelsen ved forsikringstakers død i forsikringsperioden (dødsfall). Denne forsikringsformen oppstod fordi mange personer ønsket å trygge sine etterlatte dersom en ulykke skulle ramme dem. Forsikringstakeren ønsker altså å forsikre seg mot tidlig død som reduserer de etterlattes fremtidige inntekter og forbruksmuligheter.

ii) *Forsikring med opplevelsesrisiko*. Forsikringssummen utbetales dersom forsikringstaker overlever forsikringsperioden. I henhold til aktuarisk terminologi utbetales forsikringen ved *livsfall*. Denne formen oppstod fordi mange personer ønsket å trygge sin alderdom. Forsikringstakeren ønsker altså å forsikre seg mot ikke å ha tilstrekkelig inntekt eller formue til å opprettholde ønsket konsum dersom han skulle leve lenger enn forventet. Vi vil sannsynligvis oppleve en økning i denne type forsikring ved innføring av den nye pensjonsreformen.

Det er to faktorer som bestemmer forholdet mellom forsikringsytelsen og premieplanen:

- renten selskapet oppnår på forvaltet kapital
- dødelighetssannsynligheten til forsikringstaker

I motsetning til mange skadeforsikringskontrakter, vil en livsforsikringskontrakt vanligvis være en langvarig kontrakt. Det er således naturlig at renten som forsikringsselskapet oppnår på den forvaltede kapitalen spiller en stor rolle. Fastsettelse av premien forutsetter at selskapet plasserer innbetalte premier til forrenting. Den delen av kapitalavkastningen som er trukket inn ved premieberegningen, kalles ofte grunnlagsrenten. Denne kan tolkes som en garantert minsteavkastning på fondsmidlene uavhengig av hva renten er ellers i økonomien. Størrelsen på denne minsteavkastningen vil avhenge av hvordan midlene plasseres.

Det er fornuftig å anta at dødelighetssannsynligheten avhenger av en rekke faktorer som kjønn, alder, yrke, helsetilstand, sykdom i familien osv. Livsforsikringsselskapenes erfaringer tyder på at for folk med normal helse vil sannsynligheten i all vesentlighet avhenge av kjønn og alder. Kvinner lever gjennomsnittlig lenger enn menn, noe som er ekvivalent med en lavere dødelighetssannsynlighet. Selskapene korrigerer for denne forskjellen ved å anta at en kvinne har samme dødelighet som en x år yngre mann (i Norge er x lik 2).

1.2 Ekvivalensprinsippet

Ekvivalensprinsippet er grunnlaget for all forsikringsteori. Dette går i korthet ut på at nåverdien av den fremtidige premien selskapet mottar skal være lik nåverdien av den fremtidige utbetalingen under kontrakten (inklusive kostnader). En sentral størrelse i forbindelse med bruk av ekvivalensprinsippet vil være gjenværende levetid for en typisk forsikringstaker. Alternativt ser man på dødssannsynlighetene som tidligere nevnt. Disse sannsynlighetene er sentrale ved beregning av nåverdi, og vil inngå på samme måten som diskonteringsrenten ved slike beregninger.

Eksempel 1.1:

Forsikringskontrakt:
Forsikringstilfellet: Forsikringstaker dør
Forsikringsperiode: Fra forsikringen tegnes
Forsikringsytelse: Y, utbetales til arvingene det året forsikringstaker dør.
Premieplan: Premien, P, betales hvert år så lenge forsikringstaker er i live.

La videre q(t) være sannsynligheten for at forsikringstaker dør i år t og l(t) sannsynligheten for at han er live på tid t. Disse sannsynlighetene har en åpenbar sammenheng og avhenger selvsagt av forsikringstakers alder.

Vi vet at $\sum_{t=1}^{\infty} q(t) = 1$

For å finne nåverdien må vi diskontere fremtidige kontantstrømmer. La ν være diskonteringsfaktoren, $0 < \nu < 1$.
Premien, P, bestemmes da i følge ekvivalensprinsippet ved ligningen:

$$P\left[1 + \sum_{t=1}^{\infty} \nu^t l(t)\right] = Y \sum_{t=1}^{\infty} \nu^t q(t)$$

Et enda mer generelt prinsipp kan formuleres som følger: Markedsverdiene til premieinnbetalingene og utbetalingene skal være lik

1.3 Kort om rammebetingelser for livsforsikring

Et livsforsikringsselskap er enten organisert som et gjensidig selskap eller som et aksjeselskap.

Et aksjeselskap er dannet ved at aksjeeierne har skutt inn en aksjekapital som er grunnlaget for selskapets drift. Hver aksjeeier står ansvarlig for sin del av aksjekapitalen, og forsikringstakerne har ikke noe ansvar for selskapets drift.

I et gjensidig selskap er det forsikringstakerne som eier selskapet sammen. Alle som tegner en forsikring blir automatisk medeiere i selskapet. Til gjengjeld er alle forsikringstakerne ansvarlig for selskapets drift. Dersom et gjensidig selskap går med underskudd, kan samtlige forsikringstakere motta krav om å være med å dekke dette. I praksis skjer dette imidlertid svært sjelden. I Norge skjedde det sist gang i forbindelse med den store bybrannen i Ålesund, 25. januar 1904.

I teoretiske arbeider er det vanlig å anta at målet til et aksjeselskap er å maksimere verdien av selskapet, som er det samme som å maksimere aksjonærenes fortjeneste. Dersom et livsforsikringsselskap er organisert som et aksjeselskap og aksjonærgruppen ikke er den samme som gruppen av forsikringstakere, kan det derfor tenkes at dette selskapet har en annen målsetting enn gjensidige selskaper. Denne problemstillingen vil ikke bli tatt opp i denne rapporten.

Livsforsikringsselskapene er underlagt flere offentlige reguleringer. Ettersom det inngår sparing i flere typer livsforsikringskontrakter, vil det si at store deler av den kapital selskapene forvalter egentlig er penger som tilhører forsikringstakerne. Derfor er det fastsatt regler for hvordan disse midlene kan plasseres, slik at selskapene ikke kan spekulere fritt med dem.

I Norge er det Kredittilsynet som har tilsyn med forsikringsbransjen. Nye livsforsikringskontrakter som skal lanseres av selskapene, må meldes til Kredittilsynet. Det kontrollerer at anslagene for rente, dødelighet og administrasjonskostnader er forsvarlige. Tilsynet skal sikre betryggende soliditet, risikobevissthet og styring og kontroll i foretakene.

De lovene som regulerer forsikring i Norge er:

a. Lov om forsikringsvirksomhet av 10.06.1988
b. Lov om forsikringsavtaler av 16.06.1989
c. Lov om adgang av penge- og kredittforholdene av 1965

1.4 Premiereserven

Et sentralt forsikringsbegrep er *premiereserven*. Premiereserven til en kontrakt på et bestemt tidspunkt er lik verdien av premieinnbetalinger med tillegg av avkastning på innbetalte midler. For selskapet representerer premiereserven det beløpet selskapet bør ha satt til side, i gjennomsnitt for et stort antall like og uavhengige kontrakter, for å møte sine forpliktelser. Premiereservene til samtlige forsikringskontrakter i et forsikringsselskap kalles forsikringsfondet. Dette er forsikringstakernes tilgodehavende i selskapet og føres derfor opp i balansen til selskapet som en gjeldspost.

Det er to måter å beregne premiereserven på, *prospektiv* eller *retrospektiv* metode.

Med den prospektive betraktningsmåten beregnes premiereserven som nåverdien av framtidige utgifter fratrukket nåverdien av framtidige inntekter. Selskapet ser altså fremover og beregner differansen mellom forventede, diskonterte utgifter og inntekter. Det er altså en enkelkontrakt som betraktes.

Den retrospektive betraktningsmåten kan defineres på følgende vis; vi tenker oss at vi har et stort antall likelydende forsikringskontrakter for personer i samme alder x, og betrakter bestanden på tidspunkt t etter tegning. Selskapet beregner nåverdien (på tid t etter tegning) av de premier selskapet har mottatt fra forsikringstakerne, fratrukket nåverdien av de forsikringsutbetalinger det har foretatt. Selskapet betrakter altså hva som har skjedd fra tidspunktet forsikringene ble inngått til det tidspunkt premiereservene beregnes. For å finne premiereservene for *den enkelte*, gjenværende forsikringskontrakt på tid t i bestandens liv, divideres beløpet fremkommet ved å betrakte hele bestanden, på antall gjenlevende på tid t (i alder x+t) Dersom beregningsgrunnlaget har slått til (dødelighet og rente), vil, på grunn av store talls sterke lov og ettersom vi bruker ekvivalensprinsippet, den retrospektive måten å beregne premiereserven på falle sammen med den prospektive.

Premiereserven er i prinsippet den forsikredes eiendom som han kan kreve utbetalt. En forsikringsavtale vil dermed ha en gitt avbruddsverdi gitt ved størrelsen på premiereserven.
Dersom den forsikrede avbryter forsikringskontrakten, vil det imidlertid som regel gjøres visse fradrag, bl.a. på grunn av administrative kostnader. Det beløpet den forsikrede kan få

utbetalt kalles polisens *gjenkjøpsverdi.* Denne verdien er langt mindre enn summen av innbetalte premier, ettersom risiko- og kostnadsdelen av premien er brukt opp og ikke kan tilbakebetales. Alternativt kan den forsikrede avbryte premieinnbetalingen, men ellers fortsette forsikringskontrakten med en mindre forsikringssum. Denne reduserte forsikrings-summen kalles *fripoliseverdien.*

Forsikringsavtalen kan ikke – uten i helt ekstraordinære situasjoner – sies opp av selskapet. Selskapet kan ikke ”legge på prisen” hvis driftsresultatet blir dårligere enn forventet. Dette er betryggende for forsikringstakerne, men det kan være vanskelig for selskapene å finne frem til en riktig premie, fordi kontraktene oftest har lang varighet. Forandringer i dødelighet, rente eller omkostninger gjør det tidvis nødvendig å sette opp nye premietabeller. Disse vil dog kun gjelde *nye* forsikringer.

Premiene i livsforsikring blir ofte lagt til ”den sikre siden”, slik at sannsynligheten for overskudd på selskapets hånd er stor. Det overskuddet som på denne måten oppstår, skal føres tilbake til de forsikrede i form av garanterte tillegg til forsikringssummen. Tillegget utbetales når forsikringssummen forfaller, enten ved død eller oppnådd alder. Tilleggene garanteres av forsikringsselskapet for en periode fremover på maksimum 5 år.

1.5 Hvorfor eksisterer forsikring?

For referanser til avsnitt 1.5 viser vi til kursene MET400 (Høst 2002) og FIN415 (Høst 2003)

Den vanligste forklaringen på at det eksisterer forsikring er risikoaversjon.

Definisjon av risikoaversjon:

> *I valg mellom et sikkert og et usikkert alternativ med samme forventede utfall foretrekkes alltid det sikre alternativet.*

Eksempel 1.2:

Man kaller gjerne slike beslutningsvalg som over for valg mellom ulike lotterier. I valget mellom disse to alternativene vil et individ med risikoaversjon alltid foretrekke L_1.

$$L_1 \succeq L_2$$

Et risikonøytralt individ vil være indifferent mellom de to alternativene, mens et risikosøkende individ vil foretrekke L_2.

Gitt at et individs preferanser kan representeres ved en Bernoulli nyttefunksjon u(x), følger det direkte av definisjonen på risikoaversjon at beslutningstakeren er risikoavers hvis og bare hvis

$$(1.1) \qquad Eu(X) \leq u(EX)$$

Denne ulikheten kalles Jensens ulikhet, som tilsier konkav nyttefunksjon.

Forventet nytte-teoremet sier at gitt at individets preferanser for lotterier er komplette og transitive, kontinuerlig og oppfyller uavhengighetsaksiomet, så kan dets preferanser representeres gjennom en nyttefunksjon på forventet nytteform.

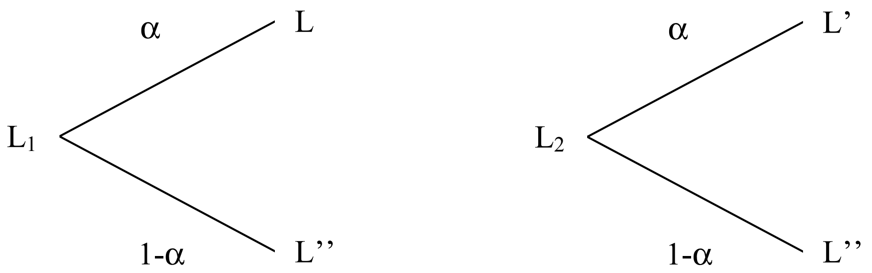
Komplett betyr at man er i stand til å velge, mens transitiv betyr at hvis A foretrekkes fremfor B og B foretrekkes fremfor C, så foretrekkes også A fremfor C.

$$A \succeq B \quad \text{og} \quad B \succeq C$$
$$\Rightarrow A \succeq C$$

Med kontinuerlig menes det at små endringer i sannsynligheter ikke endrer rangeringen mellom to lotterier.

Uavhengighetsaksiomet:

For vilkårlige lotterier i L, L’, betrakt sammensatte lotterier med et tredje alternativ L’’.



Preferansene mellom disse sammensatte lotteriene skal være uavhengige av hvilket alternativ L’’ som inngår og av sannsynligheten α. Foretrekker et individ L fremfor L’ må individet også foretrekke lotteriet L_1 fremfor L_2.

$$L \succeq L' \Rightarrow L_1 \succeq L_2$$

Hvis disse tre betingelsene er oppfylt gjelder nytteforventningsteoremet og individene oppfører seg som om de maksimerer forventet nytte. Dvs. at hvis et individ står overfor valget mellom to risiki, X_1 og X_2 (tilfeldige variabler), foretrekker individet X_1 fremfor X_2 kun hvis dette lotteriet har høyere forventet nytte.

$$X_1 \succeq X_2$$

hvis og bare hvis

$$E(u(X_1)) \geq E(u(X_2))$$

Funksjonen u(x) tolkes som nytten av å motta mengden penger x. Det er naturlig å anta at mer penger foretrekkes fremfor mindre penger:

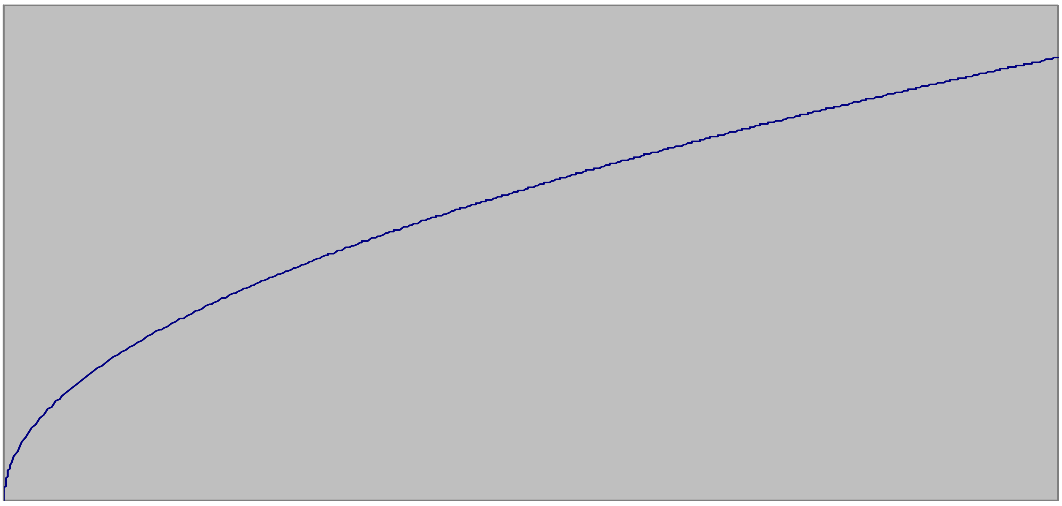
(i) u(x) er monotont økende, dvs u'(x)>0 for alle x.

Antar vi i tillegg at individene er risikoaverse:

(ii) u(x) er konkav, dvs u''(x)<0 for alle x.

Eksempel 1.3: Risikoaversjon ved powernytte:

$$u(X) = \frac{1}{1-\gamma} X^{1-\gamma}$$



Figur 1.1 Nyttefunksjon med powernytte, $\gamma = 0.7$

Men vi må også kunne måle grad av risikoaversjon. Dette gjøres hovedsakelig gjennom Arrow-Pratts risikoaversjonskoeffisienter for absolutt og relativ risikoaversjon.

Definisjon absolutt risikoaversjon:

Gitt en to ganger deriverbar Bernoulli nyttefunksjon $u(\cdot)$ *over penger er Arrow-Pratt absolutt risikoaversjonskoeffisient definert som*

(1.2) $$r_A = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Eksempel 1.4: Absolutt risikoaversjon ved powernytte:

$$u(X) = \frac{1}{1-\gamma} X^{1-\gamma}$$
$$u'(X) = X^{-\gamma}$$
$$u''(X) = -\gamma X^{-\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \qquad r_A = -\frac{-\gamma X^{-\gamma-1}}{X^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{X}$$

Ser at et individ med powernytte har avtakende r_A. Dvs at hvis individets formue øker, vil dets r_A gå ned. Det betyr at individets absolutte beløp investert i risikabelt aktivum er økende i formue.

Definisjon relativ risikoaversjon:

Gitt en to ganger deriverbar Bernoulli nyttefunksjon $u(\cdot)$ *over penger er Arrow-Pratt relativ risikoaversjonskoeffisient definert som*

$$(1.3) \qquad r_R = -\frac{u''(x)}{u'(x)} x$$

Eksempel 1.5: Relativ risikoaversjon ved powernytte:

$$u(X) = \frac{1}{1-\gamma} X^{1-\gamma}$$

$$\Rightarrow \qquad r_R = \gamma$$

Et individ med powernytte har konstant relativ risikoaversjon. Dvs at individets andel investert i risikabelt aktivum er uavhengig av formue. Hvis formuen øker må også beløp investert i risikabelt aktivum økes for å holde konstant andel.

Antar vi at individene er risikoaverse kan vi dermed analysere bakgrunnen for at forsikring finnes gjennom forventet nytte. Ser først på forventet nytte for forsikringstaker og deretter forventet nytte for forsikrer.

1.5.1 Forsikringstaker

$$W = w - X$$

hvor w er sikker og X er en tilfeldig variabel. Forventet nytte uten forsikring blir da:

$$E\{u(w - X)\}$$

Antar vi at individet har muligheten til fullt ut å forsikre seg mot risikoen X blir forventet nytte med forsikring:

$$E\{u(w - p - X + X)\} = u(w - p)$$

hvor p er premien som må betales for denne fullforsikringen. Indifferenspremien p_i er den premien som gjør forsikringstakeren indifferent mellom fullforsikring og ingen forsikring:

$$(1.4) \quad E\{u(w - X)\} = u(w - p_{i1})$$

Siden forsikringstakeren er antatt risikoavers kan vi bruke Jensens ulikhet:

$$Eu(Y) \leq u(EY)$$

Velger Y = w – X

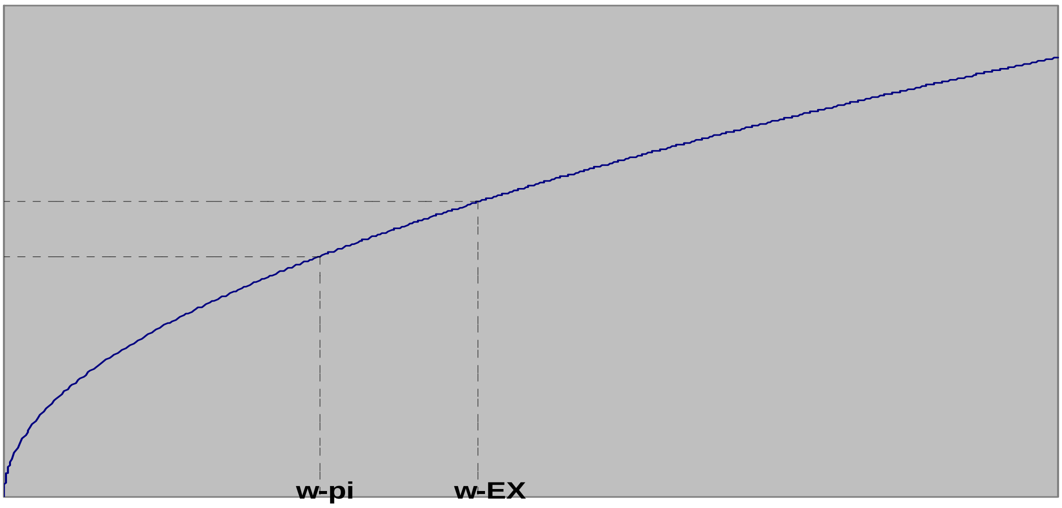
$$Eu(w - X) \leq u(E(w - X))$$

Siden

$$E\{u(w-X)\}=u(w-p_{i1})$$

har vi at

$$u(w-p_{i1})\leq u(w-EX)$$



Figur 1.2 Nytte av sikkerhetsekvivalent og forventning.

Siden nyttefunksjonen u er monotont økende må dermed

$$w-p_{i1}\leq w-EX$$
$$\Rightarrow p_{i1}\geq EX$$

Hvis forsikringstaker ikke er risikonøytral, men strengt risikoavers, vil vi ha at

$$p_{i1}>EX$$

Dette tilsier at det eksisterer kontrakter med premier $p \in (EX, p_{i1})$, slik at forventet nytte med forsikring er høyere enn forventet nytte uten forsikring. Dvs

$$u(w-p)>Eu(w-X)$$

Eksempel forsikringstaker:

p	0,95	0,04	0,01
x	0	2	5

Tabell 1.1 Sannsynlighetsfordelingen til X

Individet har initialformue lik 5 og står overfor risikoen X med sannsynlighetsfordeling som i tabell 1. Individet har powernytte på formen:

$$u(X) = \frac{1}{1-\gamma} X^{1-\gamma}$$

Gitt risikoaversjonsparameter gamma: $\gamma = 0{,}5$

gir (1.4) oss en indifferenspremie lik 0,188, mens EX er lik 0,16. Altså $p_{i1} > EX$.

1.5.2 Forsikrer

Har initialformue lik w_0 og kan enten tilby forsikring eller la være å tilby forsikring.
Nytten av ikke å tilby forsikring:

$$v(w_0)$$

Forventet nytte av å tilby forsikring:

$$Ev(w_0 + p - X)$$

Betrakter på samme måte som for forsikringstaker hvilken premie som gjør forsikrer indifferent mellom å tilby forsikring og ikke å tilby forsikring:

$$Ev(w_0 + p_{i2} - X) = v(w_0)$$

Bruker igjen Jensens ulikhet:

$$Ev(w_0 + p_{i2} - X) \le v(E(w_0 + p_{i2} - X))$$

som gir

$$v(w_0) \le v(E(w_0 + p_{i2} - X))$$
$$\Rightarrow p_{i2} \ge EX$$

Antar vi at også at forsikrer er strengt risikoavers blir

$$p_{i2} > EX$$

Ser her at det finnes premier p > EX som gir høyere forventet nytte for både forsikringstaker og forsikrer enn uten forsikring. Indifferenspremiene til forsikringstaker og forsikrer er sjelden identiske.

<u>Eksempel forsikrer:</u>

Vi har sannsynlighetsfordelingen til X fra tabell 1.1:

p	0,95	0,04	0,01
x	0	2	5

Forsikrer har initialformue lik 5 og kan velge å tilby forsikring mot risikoen X eller la være.

Antar at forsikrers preferanser også kan representeres gjennom powernytte:

$$u(X) = \frac{1}{1-\gamma} X^{1-\gamma}$$

Indifferenspremien p_{i2}:

$$Ev(w_0 + p_{i2} - X) = v(w_0)$$

Antatt risikoaversjonsparameter gamma:

$$\gamma = 0,5$$

gir indifferenspremie p_{i1} lik 0,173, mens EX er lik 0,16. Altså $p_{i2} > EX$

1.6 Tidsforskjell mellom premieinnbetalinger og eventuelle utbetalinger

Det overnevnte resonnementet er basert på en-periode modell. Dvs. at det ikke eksisterer tidsforskjeller. Det vil videre si at det ikke er tatt hensyn til forskjell i tid mellom innbetaling og eventuell utbetaling. Premien betales vanligvis på forskudd og forsikringsselskapet kan få renteinntekter av premien inntil de eventuelle erstatningene forfaller til utbetaling.
Nåverdiprinsippet tilsier dermed at verdien i dag er lik forventningen til den framtidige diskonterte kontantstrømmen:

$$P(t) = E_t\left(m(t,s)\,X(s)\right)$$

hvor

P(t) er prisen på tid t
m(t,s) er stokastisk diskonteringsfaktor
X(s) er den framtidige utbetalingen

$E_t\left(m(t,s)\,X(s)\right)$ er forkortet notasjon for $E\left(m(t,s)\,X(s)\,|\,I_t\right)$, dvs. forventet verdi gitt all relevant informasjon tilgjengelig på tidspunkt t.

Et enkelt marginalinvesteringsargument over to perioder uten usikkerhet i konsumvekst gir følgende verdi: (FIN428, høst 2003)

$$P(t) = \beta\left(\frac{c(t+1)}{c(t)}\right)^{-\gamma} E_t\left[X(t+1)\right]$$

Ser her at premien blir høyere enn forventet skadeutbetaling kun hvis

$$\beta\left(\frac{c(t+1)}{c(t)}\right)^{-\gamma} > 1$$

β må være <1. Hvis ikke denne er mindre enn 1 vil det innebære at det er bedre å få en krone i morgen enn å få en krone i dag, hvilket er ulogisk. Dette tilsier at konsumveksten må være negativ og veie opp for β <1 for at premien skal være større enn forventet skadeutbetaling.

En variant av denne prisingsmodellen under gitte forutsetninger er:

$$p_{premie} = \frac{E(\,forsikringsutbetalinger)}{1+r(t)}$$

Siden r(t) > 0 blir premien lavere enn forventede forsikringsutbetalinger. Utfordringen her er å finne den riktige diskonteringsfaktoren.

1.7 Notasjon

1.7.1 Sannsynlighetsbegreper

(Ω,Ψ,P)	sannsynlighetsrom
Ω	tilstandsrom, sett av mulige utfall
P	sannsynlighetsmål på Ω
Ψ	delmengde av Ω, σ-felt, som P er definert på
X, Y	vilkårlige, stokastiske variable definert på samme sannsynlighetsrom
E[X]	forventning til X
Var[X]	varians til X
P(X ≤ x)	kumulativ sannsynlighet til X; sannsynligheten for at X tar verdier mindre enn eller lik x

$P(X \leq x \mid \omega)$ betinget sannsynlighet; sannsynligheten for at X tar verdier mindre enn eller lik x gitt begivenheten $\omega \subseteq \Omega$

1.7.2 Rentenotasjon

1.7.2.1 Forsikring

r	periodisk, diskret rente i prosent
ν	periodisk, diskret diskonteringsfaktor
R	1 + periodisk avkastning
δ	renteintensitet i kontinuerlige modeller

(1.5) $\nu = \dfrac{1}{1+r}$

(1.6) $R = 1 + r$

Hvis r og δ skal gi samme periodiske avkastning, må

(1.7) $\delta = \ln(R)$

Diskontering:

Betegner $NPV(X_t)$ = nåverdien til et beløp, X_t, som utbetales på tid t

Diskret tid: $NPV(X_t) = \nu^t X_t$

Kontinuerlig tid: $NPV(X_t) = e^{-\delta t} X_t$

1.7.2.2 Finans

(1.8) $r = \ln(R)$

1.7.3 Elementer i en forsikringskontrakt

x forsikringstakers alder når kontrakten inngås

P(t) Premie som forsikringstaker betaler til selskapet på tid t. Dersom denne er uavhengig av tiden, betegnes den P.

Y(t) forsikringsytelsen som forsikringstaker mottar fra selskapet på tid t.

1.7.4 Dødelighetssannsynligheter

T_x stokastisk variabel for en x år gammel typisk forsikringstakers gjenværende levetid

$F_x(t)$ kumulativ sannsynlighetsfordelingsfunksjon til T_x: $F_x(t) = P(T_x \leq t)$

$L_x(t)$ opplevelsessannsynlighet, sannsynligheten for at $T_x > t = 1 - F_x(t) = P(T_x > t)$

l_x kalles dekrementfunksjonen, og den kan tolkes som følger: l_x er lik forventet antall i alder x av et kull på l_0 nyfødte, der l_0 er lik en passende konstant.

q_x ettårig dødssannsynlighet, dvs. sannsynligheten for at en person som er x år skal dø innen han fyller x+1 år.

Man kan vise at sannsynligheten for at en forsikringstaker er i live på tidspunkt t gitt at han er i live når han er x år, er gitt ved:

(1.9) $$L_x(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\Rightarrow \quad L_0(x) = \frac{l_x}{l_0} \qquad \Rightarrow l_x = l_0 L_0(x)$$

Dermed har vi at :

(1.10) $$F_x(t) = P(T_x \leq t) = 1 - L_x(t) = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

Den ettårige dødelighetssannsynligheten kan skrives som:

(1.11) $$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = F_x(1)$$

1.7.5 Dødelighetssannsynligheter diskret og kontinuerlig tid

1.7.5.1 Diskret tid

Definer:

$Q_x(t)$ punktsannsynligheten for at forsikringstaker dør i perioden (t-1,t] gitt at han er i live når han er x år (når forsikringen tegnes)
t = 1,2……

$Q_x(t)$ kan betraktes som en sammensatt begivenhet: Først overlever forsikringstaker periode t-1, for så å dø i neste periode. Vi får altså følgende:

$$(1.12)\quad Q_x(t) = L_x(t\text{-}1)q_{x+t\text{-}1} = \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x}$$

Vi har at $Q_x(1) = q_x$ ettersom $L_x(0) = 1$
Ettersom vi har en diskret tidsmodell antar vi at død kun kan inntreffe på tidspunktene
t = 1,2, …. , T. Da gjelder:

$$(1.13)\quad \sum_{s=1}^{t} Q_x(s) + L_x(t) = 1$$

Ettersom første ledd er sannsynligheten for å dø i perioden (0,t], og andre ledd er sannsynligheten for å overleve perioden (0,t], er det klart at disse må summere seg til 1.

1.7.5.2 Kontinuerlig tid

La

$f_x(t)$ sannsynlighetstettheten til $F_x(t)$

$\mu_x(t)$ dødsintensiteten

$F_x(t)$ og $L_x(t)$ er deriverbare mhp. T $\Leftrightarrow$ $f_x(t)$ antas å eksistere

Har altså at

$$F_x(t) = \int_0^t f_x(s)ds = P\left[T_x \le t\right]$$

(1.14)

$$dF_x(t) = f_x(t)dt \Leftrightarrow f_x(t) = \frac{dF_x(t)}{dt}$$

Dødsintensiteten defineres som

(1.15) $\mu_x(t) = \dfrac{f_x(t)}{1 - F_x(t)}$

La oss tolke (1.15)

Gitt at levetiden $T_x > t$, la oss finne sannsynligheten for at døden inntreffer i neste tidsintervall (t, t+dt). Den er

$$\frac{P\left[(T_x \in (t, t+dt)) \mid T_x > t\right]}{P(T_x > t)} =$$

$$\frac{P\left[(T_x \in (t, t+dt)) \cap T_x > t\right]}{P(T_x > t)} = \frac{P\left[(t < T_x < t+dt) \cap (T_x > t)\right]}{P(T_x > t)} = \frac{P\left[t < T_x < t+dt\right]}{P(T_x > t)} \approx \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)}$$

Dermed er tolkningen klar:

$$\mu_x(t)dt \approx P\left[(T \in (t, t+dt)) \mid T > t\right]$$

Altså er $\mu_x(t)dt$ tilnærmet lik den betingede sannsynligheten for at en person som i alder x tegnet forsikring, skal dø i tidsintervallet (t, t+dt) gitt at han ble x+t år gammel.

Merker oss at $\mu_x(t)$ ikke er noen sannsynlighetstetthet, siden normalt vil $\int_0^\infty \mu_x(s)ds \ne 1$

Dødsintensiteten kan videre defineres som:

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)} = \frac{\frac{d}{dt}F_x(t)}{1 - F_x(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}l_{x+t}}{l_{x+t}}$$

Av dette følger at vi kan skrive $\mu_x(t) = \mu(x+t)$, noe som virker rimelig under våre antakelser; dødsintensiteten avhenger kun av alder, ikke av når forsikringen ble tegnet underveis.

Integrasjon av $\mu_x(t) = \dfrac{\frac{d}{dt}F_x(t)}{1-F_x(t)}$ gir oss

$$\int_0^t \mu_x(s)ds + k = -\ln(1-F_x(t))$$

t = 0 → $F_x(0)$ = 0 → k = 0

$$\Rightarrow F_x(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu_x(s)ds} = 1 - e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds},$$

og ettersom $F_x(t) = 1 - \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$, får vi relasjonen

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds}$$

for alle x, t ≥ 0. Setter vi nå x = 0 og t = x i dette uttrykket får vi formelen:

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu(s)ds}$$

Fra (1.9) og (1.14) har vi videre at

$$(1.16) \quad f_x(t) = -\frac{l'_{x+t}}{l_x}$$

Ettersom dekrementfunksjonen l_{x+t} er avtagende, er $-l'_{x+t}$ positiv slik at tettheten $f_x(t) \geq 0$, for alle t. Får også et annet uttrykk for $f_x(t)$:

$$(1.17) \quad f_x(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}\mu_{x+t}$$

Dette kan tolkes:

$$f_x(t)dt \approx P[T_x \in (t, t+dt)]$$

Dvs. sannsynligheten for at forsikringstakers død inntreffer i intervallet (t, t+dt) gitt at han er i live når forsikringen tegnes.

$\frac{l_{x+t}}{l_x}\mu_{x+t}dt$ er tilnærmet sannsynligheten for at en x år gammel forsikringstaker er i live etter tid t (i alder x+t), multiplisert med den betingede sannsynligheten for at døden inntrer i tidsintervallet (x+t, x+t+dt) gitt at vedkommende var i live i alder (x+t).

Ser at vi lett kan utlede formelen for den ettårige dødssannsynligheten q_x fra (1.16):

$$P(T_x \leq 1) = \int_0^1 \left(-\frac{l'_{x+s}}{l_x}\right)ds = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = q_x$$

Oppsummert har vi at :

	Diskret tid	Kontinuerlig tid
Betinget dødssannsynlighet/intensitet	q_x	μ_x
Dødssannsynlighet	$Q_x(t)$	$f_x(t)$

1.8 Ulike forsikringskontrakter

Vi vil i det følgende beskrive fem ulike livsforsikringskontrakter. Beskrivelsen vil ikke være uttømmende, men gi en forklaring på de ulike kontraktene, og vi vil vise hvordan engangs-premiene beregnes ut fra ekvivalensprinsippet. De fem er:

-oppsatt kapitalforsikring
-livrente/pensjonsforsikring
-enkel livsforsikring
-dødsrisikoforsikring
-sammensatt livsforsikring

En generell forsikringskontrakt i kontinuerlig tid skal i følge ekvivalensprinsippet tilfredsstille følgende betingelse:

$$(1.18) \qquad \int_0^\infty P(t)e^{-\delta t}L_x(t)dt = \int_0^\infty Y(t)e^{-\delta t} f(t)dt$$

Hvor P(t) er premien og Y(t) er ytelsen (utbetalingen fra selskapet)

f(t) er en sannsynlighetstetthet for forsikringstilfellet;
$f(t) = f_x(t)$ dersom forsikring utbetales ved dødsfall
$f(t) = L_x(t)$ dersom forsikringen utbetales ved livsfall.

Vi skal her beregne engangspremier slik at venstresiden av (1.18) reduserer seg til en konstant engangspremie, A:

$$A = \int_0^\infty Y(t)e^{-\delta t} f(t)dt$$

Vi vil i det følgende få bruk for størrelsen D_x, der
(1.19) $D_x = l_x e^{-n\delta}$ i kontinuerlig tid
(1.20) $D_x = l_x(1+r)^{-x} = l_x R^{-x}$ i diskret tid
D_x kalles for det "diskonterte antall levende", og er tabellert i de fleste forsikringsmatematiske tabellverk. Størrelsen forenkler en del formler for oss.

1.8.1 Oppsatt kapital

Forsikringskontrakter kan tenkes oppbygd av enklere forsikringskontrakter. En oppsatt kapitalforsikring er en slik viktig byggestein. Her utbetales det et beløp etter en bestemt tid såfremt forsikringstakeren er i live. (Dvs. utbetaling ved livsfall)

Vi tenker oss følgende kontrakt:

Forsikringstilfellet:	Forsikringstaker overlever (livsfall)
Forsikringsperiode:	(0,n) n kalles oppsettelsestiden
Forsikringsytelse:	1
Premieplan:	Engangspremie, ${}_nE_x$

Sannsynligheten for utbetaling blir da

$$P(T_x > n) = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

I kontinuerlig tid har vi da at forventet nåverdi av utbetalingen, eller premien blir:

$$_{n}E_x = L_x(n)e^{-n\delta} = \frac{l_{x+n}}{l_x} e^{-\delta n}$$

Uttrykt ved hjelp av D_x får vi:

$$_{n}E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x} e^{-\delta n} = e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s})ds}$$

Engangspremien på en oppsatt kapitalforsikring kan dermed uttrykkes som.

$$(1.21) \quad _{n}E_x = e^{-\int_0^n (\delta + \mu_{x+s})ds} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Vi ser her forskjellen mellom en oppsatt kapitalforsikring og vanlig banksparing. I bank ville man (med sikkerhet) fått:

$$A = e^{-\int_0^n \delta ds} = e^{-\delta n}$$

Hvor den siste likheten forutsetter konstant rente i hele perioden (0,n)

Vi vet at dødsintensiteten $\mu_{x+s} > 0 \ \forall \ x,s$. Dermed er $_{n}E_x < e^{-\delta n}$, så avkastningen på en oppsatt kapitalforsikring er høyere enn ved sparing i bank med samme renteintensitet δ, gitt at forsikringstaker faktisk overlever tiden n. Sett på denne bakgrunn får dødsintensiteten en rentetolkning.

Vi merker oss at ytelsene ved en oppsatt kapitalforsikring og banksparing ikke er de samme. Ved død i tidsrommet (0,n) vil forsikringsselskapene i første omgang beholde hele premiebeløpet med rente og renters rente, mens banken betaler dette ut til dødsboet. Ettersom

vi antar at forsikringsselskapene følger ekvivalensprinsippet, vil de i neste omgang betale ut disse tilbakeholdte beløpene til de som faktisk overlever kontraktsperioden, derav den høyere renten til disse. ”En manns død er en annen manns brød” er en passende beskrivelse her.
Merk at vi ikke kan konkludere at en oppsatt kapitalforsikring er bedre enn banksparing basert utelukkende på forventet avkastning. Her er det flere faktorer som må inkluderes, herunder personenes preferanser over sannsynlighetsfordelinger.

I diskret tid har vi tilsvarende resonnement som over og vi får:

$$(1.22) \quad {}_nE_x = L_x(n)R^{-n} = \frac{l_{x+n}}{l_x}R^{-n} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

1.8.2 Livrente

En livrente er en forsikring som utbetaler et fast beløp hvert år i en bestemt periode, dersom forsikringstaker er i live. Således vil en livrente være en sum av oppsatte kapitalforsikringer med varierende forsikringstider.

Det er vanlig å anta at annuiteten løper kontinuerlig, som en konstant strøm slik at i et intervall med lengde (s, s+ds) utbetales et beløp ds. De samlede utbetalingene i tidsintervallet (0,t) blir dermed :

$$\int_0^t ds = t$$

Forsikringskontrakt:

Forsikringstilfellet:	forsikringstaker er i live (livsfall)
Forsikringsperiode:	en bestemt periode, fra x til x+n
Forsikringsytelse:	konstant strøm, i hver periode med lengde 1 utbetales 1
Premieplan:	engangspremie, $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$

Kontrakten gir altså en forsikringstaker som er x år når tegning skjer, rett til å få utbetalt en konstant strøm opp til tidspunkt n gitt at han er i live.
Vi definerer T = min $\{T_x, n\}$, og får

$$P(T>t) = \begin{cases} \dfrac{l_{x+t}}{l_x}, & t < n \\ 0 & t \geq n \end{cases}$$

I kontinuerlig tid blir dermed engangspremien:

$$(1.23) \quad \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta s} \frac{l_{x+s}}{l_x} ds = \int_0^n \frac{D_{x+s}}{D_x} ds$$

Vi kan også tenke oss en livrente som er evigvarende, dvs. at det utbetales en konstant strøm så lenge forsikringstaker er i live.

Engangspremien blir da:

$$(1.24) \quad \bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta s} \frac{l_{x+s}}{l_x} ds = \int_0^\infty \frac{D_{x+s}}{D_x} ds$$

I diskret tid betegnes engangspremien for en livrente som starter å løpe ett år etter tegning $a_{x:\overline{n}|}$. Dette er ikke noe annet enn en sum av oppsatte kapitalforsikringer og finnes ved:

$$(1.25) \quad a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

Dersom vi ikke har noe stopptidspunkt på kontrakten, blir engangspremien:

$$(1.26) \quad a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

1.8.3 Enkel livsforsikring (Whole life insurance)

En enkel livsforsikring karakteriseres ved at forsikringsbeløpet utbetales ved forsikringstakers død (uavhengig av dødstidspunktet) Det må nevnes at denne type forsikring er lite utbredt i Norge.

Betrakter følgende kontrakt:

Forsikringstilfellet:	forsikringstaker dør (dødsfall)
Forsikringsperiode:	fra forsikringen tegnes
Forsikringsytelse:	1
Premieplan:	Engangspremie, $\overline{A}_x$

Kontinuerlig tid:

Engangspremien gis ved ekvivalensprinsippet:

$$\overline{A}_x = E[1 \cdot e^{-\delta T_x}] = \int_0^\infty e^{-\delta s} f_x(s)ds$$

Vi bruker (1.16) og får

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta s} - \frac{l'_{x+s}}{l_x} ds$$

Ved delvis integrasjon får vi

$$(1.27)\quad \overline{A}_x = -e^{-\delta s} \frac{l_{x+s}}{l_x}\bigg|_0^\infty - \delta \int_0^\infty e^{-\delta s} \frac{l_{x+s}}{l_x} ds = 1 - \delta \overline{a}_x$$

Siste ledd er forventet nåverdi av en kontinuerlig strøm i det usikre tidsintervallet $[0, T_x]$, som utbetaler δ pr. tidsenhet. Ved kontinuerlig forrenting kan derfor leddet $\delta\overline{a}_x$ tolkes som forventet nåverdi av å betale rente på en krone så lenge forsikringstaker lever. Høyre side representerer altså den forventede nåverdien av en avtale om at forsikringstaker skal få en enhet utbetalt med en gang, mot å betale renter av denne så lenge han lever. Denne forventede nåverdien er naturlig nok den samme som forventet nåverdi av en enhet som først utbetales ved forsikringstakers død.

Diskret tid:

Engangspremie: A_x

$$A_x = E\left[R^{T_x}\right] = \sum_{t=1}^{\infty} R^{-t} Q_x(t)$$

$$A_x = \sum_{t=1}^{\infty} R^{-t} \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x} = R^{-1} - (1 - R^{-1}) \sum_{t=1}^{\infty} R^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Vi bruker (1.26) ved hjelp av (1.22)

$$(1.28) \quad A_x = \frac{1}{R} + \frac{1-R}{R} a_x$$

Observer at med diskret tid kan første utbetaling av kontrakten tidligst skje om en periode.

Nåverdien av dette er $\frac{1}{R}$

(1.28) er således av samme form som (1.27)

1.8.4 Dødsrisikoforsikring (Term Insurance)

Ved en ren dødsrisikoforsikring utbetales forsikringssummen bare ved død innen en bestemt tid n.

Kontrakten kan settes opp som følger:

Forsikringstilfellet: forsikringstaker dør (dødsfall)

Forsikringsperiode: en bestemt periode, fra x til x+n

Forsikringsytelse: 1

Premieplan: Engangspremie, $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$

Kontinuerlig tid:

Engangspremien finnes ved ekvivalensprinsippet:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left[e^{-\delta T_x} Y(T_x)\right]$$

som i henhold til kontrakten blir:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta s} f_x(s)ds + \int_n^\infty 0 \cdot e^{-\delta s} f_x(s)ds = \int_0^n e^{-\delta s} - \frac{l'_{x+s}}{l_x} ds = 1 - \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{l_{x+n}}{l_x} e^{-\delta n}$$

Siste ledd fåes ved delvis integrasjon som under den enkle livsforsikringen.
Har altså at engangspremien:

$$(1.29) \quad \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

I tolkningen av engangspremien kan det være nyttig å betrakte en ”alternativ kontrakt” Forsikringstaker får straks utbetalt en enhet men må betale rente for denne i forsikringstiden. I tillegg må han *betale enheten tilbake* dersom han overlever forsikringsperioden. Siste ledd i (1.29) representerer altså den forventede nåverdien av ”å levere tilbake” en enhet dersom forsikringstaker overlever forsikringsperioden. De to første leddene kan tolkes på samme måte som (1.27).

Diskret tid:

Engangspremie: $A^{1}_{x:\overline{n}|}$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left[R^{-T_x} Y(T_x)\right]$$

som i henhold til kontrakten blir:

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} R^{-t} Q_x(t) + \sum_{t=n+1}^{\infty} 0 \cdot R^{-t} Q_x(t)$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} R^{-t} \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x} = R^{-1} - (1 - R^{-1}) \sum_{t=1}^{n-1} R^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x} - R^{-n} \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Dermed får vi at:

$$(1.30)\quad A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{R} - \frac{R-1}{R} a_{x:\overline{n-1}|} - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Dette uttrykket kan tolkes tilsvarende som uttrykket under kontinuerlig tid.
Husker at med diskret tid kan utbetaling først skje om en periode.

1.8.5 Sammensatt livsforsikring (Endowment Insurance)

Ved en sammensatt livsforsikring utbetales et bestemt beløp ved død eller senest på et bestemt tidspunkt (n) etter tegning, forutsatt at den forsikrede da er i live. Denne kontrakten er med andre ord sammensatt av en dødsrisikoforsikring og en oppsatt kapitalforsikring.

Kontrakten kan beskrives slik:

Forsikringstilfellet:	forsikringstaker dør, forsikringstaker overlever
Forsikringsperiode:	en bestemt periode, fra x til x+n
Forsikringsytelse:	1
Premieplan:	Engangspremie, $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$

Kontinuerlig tid:

Vi finner engangspremien ved å kombinere (1.21) og (1.29):

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_{n}E_{x} = 1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = 1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

Altså:

$$(1.31)\quad \bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

Diskret tid:

Engangspremien betegnes $A_{x:\overline{n}|}$

$$(1.32)\quad A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_{n}E_{x}$$

Som gir oss:

$$(1.33)\quad A_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{R} - \frac{R-1}{R} a_{x:\overline{n-1}|}$$

2. Teori for prisingsformål

Vi vil i dette kapitlet ta for oss den teorien som er nødvendig for å kunne prise forsikringskontraktene. Vi starter med å definere hva en opsjon er og viser put-call pariteten. I avsnitt 2.2. viser vi hvordan opsjoner prises i diskret tid, mens vi i avsnitt 2.3 går nærmere inn på finans i kontinuerlig tid og vi viser hvordan en callopsjon prises i kontinuerlig tid.
For referanser til opsjonsprising i diskret tid viser vi til kurset FIN420 (Høst 2002) og Hull (2003). For prising i kontinuerlig tid viser vi til kurset FIN421 (Vår 2004) og Hull (2003).

2.1 Opsjoner

En opsjon er et derivat. Et derivat kan defineres som et finansielt instrument hvis verdi avhenger av verdien av andre, mer grunnleggende underliggende variabler. Det er to basistyper av opsjoner, nemlig kjøps- og salgsopsjoner. Videre har man en mengde ulike opsjoner, men de vi vil benytte i rapporten er enten av europeisk eller bermudansk type. Hvis det ikke er eksplisitt gitt at vi behandler en bermudansk opsjon, kan leseren anta at opsjonen er av europeisk type.

En kjøpsopsjon (call) er en rett, men ikke en plikt til å kjøpe et underliggende aktivum innen eller på et gitt tidspunkt i fremtiden til en pris som er avtalt på forhånd. Den avtalte prisen benevnes kontraktspris/utøvelsespris/strike price, og det gitte tidspunktet kalles forfallsdatoen.

En salgssopsjon (put) er en rett, men ikke en plikt til å selge et underliggende aktivum innen eller på et gitt tidspunkt i fremtiden til en pris som er avtalt på forhånd.

Bermudaopsjoner kan utøves på gitte tidspunkt fra og med utstedelsesdato til og med forfallsdato (dvs. i løpet av løpetiden). En europeisk opsjon kan kun utøves på forfallsdatoen.

I det følgende antar vi at det underliggende aktivumet er en aksje.

Bruker følgende notasjon:

C	verdien av en europeisk opsjon på å kjøpe en aksje
P	verdien av en europeisk opsjon på å selge en aksje
S(t)	Aksjepris i dag
K	Kontraktsprisen til opsjonen
T	Forfallstidspunktet til opsjonen
S(T)	Aksjepris ved forfall

Opsjonens payoff er det samme som verdien ved forfall. For en kjøpsopsjon har vi at dersom aksjen har steget til over kontraktsprisen er opsjonen verdt forskjellen mellom aksje- og kontraktsprisen. Dersom aksjeprisen er under K, forfaller opsjonen verdiløs. Har altså:

$$\text{Call payoff} = \begin{cases} S(T) - K & hvis\ S(T) \geq K \\ 0 & hvis\ S(T) \leq K \end{cases}$$

(1.1) C(T) = max (S(T) – K, 0)

En put virker motsatt og vi får:

$$\text{Put payoff} = \begin{cases} 0 & hvis\ S(T) \geq K \\ K - S(T) & hvis\ S(T) \leq K \end{cases}$$

(1.2) $P(T) = max\ (K - S(T), 0)$

2.1.1 Put-Call paritet

Vi utleder nå en viktig sammenheng mellom P og C. Betrakt følgende to porteføljer på tid t:
Portefølje A: en europeisk kjøpsopsjon pluss et pengebeløp lik $Ke^{-r(T-t)}$
Portefølje B: en europeisk salgsopsjon pluss en aksje

Ved forfall (tid t = T) har vi dermed:

Portefølje A: $max(S(T) - K, 0) + K = max(S(T), K)$

Portefølje B: $max(K - S(T), 0) + S(T) = max(S(T), K)$

Ettersom opsjonene er europeiske, kan de ikke utøves før ved forfall. Porteføljene må derfor ha samme verdi i dag. (Loven om en pris) Dette betyr at

$$(1.3) \quad C(t) + Ke^{-r(T-t)} = P(t) + S(t)$$

Dette forholdet er kjent som put-call paritet. Dersom denne relasjonen ikke holder, eksisterer det arbitrasjemuligheter.

2.2 Opsjonsprising i diskret tid

2.2.1 Binomisk prising

En nyttig og meget populær teknikk for å prise aksjeopsjoner innebærer å konstruere et binomisk tre. Dette er et diagram som representerer ulike mulige veier som aksjeprisen kan gå i løpet av opsjonens levetid.

Fra duplisering/"ingen lønnsom arbitrasje" kan det utledes prising *som om* det er risikojustering av sannsynligheter (equivalent martingale measure), slik at pris fremkommer som ved risikofri diskontering av "forventede" verdier.

Vi har følgende notasjon:

Fremtidige tilstander:

Oppgang:	u
Nedgang:	d
Sannsynlighet for oppgang:	p
Risikojustert sannsynlighet for prisoppgang:	q

Underliggende aktivum (her: aksje)

Antas å føle en multiplikativ, binomisk random walk.

Pris før endring:	S = S(t)
Pris etter oppgang:	$S(t+1) = S_u = uS$
Pris etter nedgang:	$S(t+1) = S_d = dS$

Risikofritt aktivum

Risikofri rentesats: r

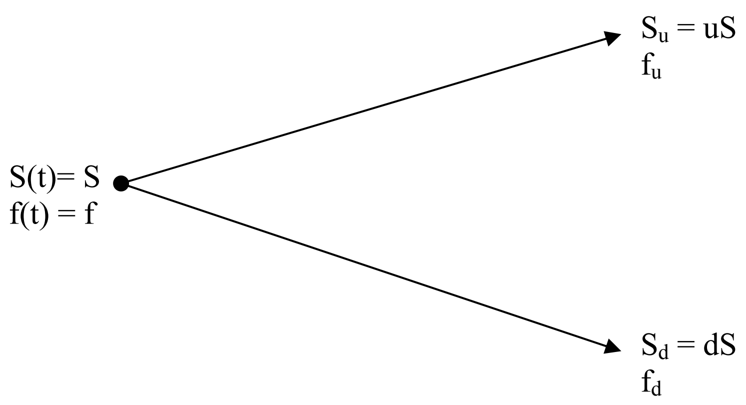
Avledet aktivum:

Verdi før prisoppgang: $f(t) = f$

Verdi hvis prisoppgang: $f(t+1) = f_u$

Verdi hvis prisnedgang: $f(t+1) = f_d$

I et binomisk tre:



Sikker rente:

$1 \quad \rightarrow \quad 1e^{r(T-t)}$

Renten antas altså konstant og individene kan låne og låne ut så mye de ønsker til denne renten.

Forutsetter ingen dividende.

Vi finner verdien på det avledete aktivet ved duplisering:

Anta at vi kjøper inn Δ enheter av underliggende aktivum og låner inn et beløp B risikofritt. Disse velges slik at strategien dupliserer avledet aktivum etter prisendring på underliggende aktivum.

Duplisering ved prisoppgang: $\Delta uS - Be^{r(T-t)} = f_u$

Duplisering ved prisnedgang: $\Delta dS - Be^{r(T-t)} = f_d$

Ingen lønnsom arbitrasje: $\Delta S - B = f$

Ved hjelp av disse uttrykkene får vi at antall enheter kjøpt inn av underliggende aktivum blir:

$$(1.4) \qquad \Delta = \frac{f_u - f_d}{(u-d)S}$$

Med kjent Δ gir duplisering, prisoppgang: $B = e^{-r(T-t)}\left[\Delta uS - f_u\right]$

Innsatt for Δ blir lånebeløpet

$$(1.5) \qquad B = \frac{df_u - uf_d}{(u-d)e^r}$$

Verdien f av avledet aktivum finnes ved å sette inn Δ og B i ”ingen lønnsom arbitrasje”-betingelsen, f = ΔS – B. Dette gir:

$$f = e^{-r(T-t)}\left[\left(\frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}\right)f_u + \left(\frac{u - e^{r(T-t)}}{u-d}\right)f_d\right]$$

Vi kan nå definere:

$$(1.6) \qquad q \equiv \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d} \Rightarrow 1-q \equiv \frac{u - e^{r(T-t)}}{u-d}$$

Vi ser at q alltid vil være større enn null og mindre enn 1, slik at den har egenskapene til en sannsynlighet. Faktisk er q den verdien p ville hatt i likevekt dersom investorene var risikonøytrale.

Får da:

$$(1.7) \qquad f = e^{-r(T-t)}\left[qf_u + (1-q)f_d\right]$$

Ser at klammeparentesuttrykket gir oss ”forventet” sluttverdi, slik at

$$f = f(t) = e^{-r(T-t)}E_t^q\left[f(T)\right]$$

Disse generelle uttrykkene for avledete aktiva kan brukes til å fastsette verdien av en kjøps- eller salgsopsjon. f_u blir da verdien til opsjonen ved oppgang.

Vi ser altså at verdien av opsjonen kan uttrykkes som forventningen til den diskonterte verdien i en risikonøytral verden. q benevnes ofte som en risikojustert sannsynlighet og tilsvarer det ekvivalente martingale målet. (se senere i rapporten for en nærmere forklaring) Vi kan merke oss at u > e^r > d. Dersom dette ikke er tilfellet, vil det eksistere arbitrasje-muligheter som kun involverer aksjen og risikofritt lån/utlån.

2.2.2 Generell binomisk modell

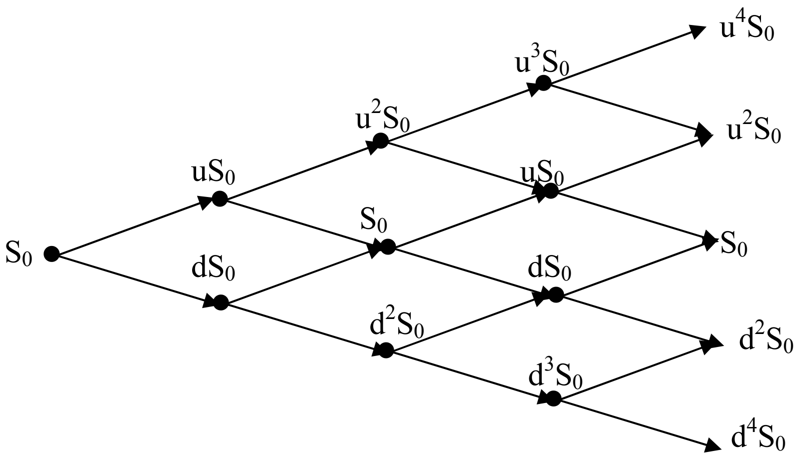
Vi har vist hvordan vi kan bruke binomiske trær til å verdsette europeiske og amerikanske opsjoner. Disse ett- og tostegs trærne er imidlertid meget upresise modeller av virkeligheten. En mer realistisk modell er en som antar at bevegelsene i aksjeprisen består av et mye større antall små binomiske bevegelser.

Med utgangspunkt i artikkelen til Cox, Rubinstein og Ross (1979) får vi et rekombinerende tre med følgende opp- og nedgangsfaktorer:

(1.8) $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$

(1.9) $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$

Vi illustrerer ved å sette opp et binomisk tre:



Figur 2.1 Tre brukt til å prise en opsjon

På tid 0 er aksjeprisen kjent og lik S_0. På tid Δt er det to mulige aksjepriser, og på tid 2Δt er det tre mulige aksjepriser.

Generelt har vi at antall priser i treet på tid iΔt er lik i +1. Disse er:

$$S_0 u^j d^{i-j}, \qquad j = 0, 1, \ldots\ldots, i$$

I en generell binomisk modell har vi:

Antall uavhengige forsøk:	N
Antall ”suksesser”:	j
Sannsynlighet for suksess i ett enkelt forsøk:	p

Sannsynlighet for akkurat j suksesser i N uavhengige forsøk, ved sannsynlighet p for suksess i ett enkelt forsøk:

$$\Pr[j; N, p] = \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}$$

Sannsynligheten for *minst a* suksesser i *n uavhengige* forsøk, ved sannsynlighet p for suksess i ett enkelt forsøk:

$$\Pr[j \geq a; N, p] \equiv B(a; N, p) \equiv \sum_{j=a}^{j=N} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}$$

hvor $\binom{N}{j} = \dfrac{N!}{(N-j)!\,j!}$

I vår binomiske verden får vi da følgende situasjon:

Forsøk:	prisendring på aksjen i løpet av en enkelt periode
Antall forsøk:	antall gjenværende perioder N av opsjonens løpetid
Suksess:	prisoppgang på aksjen (u)
Suksess-sannsynlighet:	p

Risikojustert sannsynlighet: $q = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$

Justert sannsynlighet som brukes i prisingsformål:

$$(1.10) \quad q' \equiv \frac{u}{e^{r\Delta t}} q$$

For en kjøpsopsjon har vi at kritisk antall prisoppganger for at kjøpsopsjonen skal utøves $(S_N \geq K)$: a

slik at: $u^a d^{N-a} S \geq K$

mens: $u^{a-1} d^{N+1-a} S < K$

Fra første betingelse får vi:

$u^a d^{N-a} S \geq K$

$\Leftrightarrow a(\ln u - \ln d) + N \ln d \geq \ln(\frac{K}{S})$

$\Leftrightarrow$

(1.11) $a \geq \dfrac{\ln\left(\dfrac{K}{Sd^N}\right)}{\ln\left(\dfrac{u}{d}\right)}$

Vi får da følgende:

$$c = e^{-rN} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} \cdot \max\left[S_0 u^j d^{N-j} - K, 0\right]$$
$$= e^{-rN} \sum_{j=a}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} \left[S_0 u^j d^{N-j} - K\right]$$
$$= S_0 \sum_{j=a}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} u^j d^{N-j} e^{-rj} e^{-r(N-j)} - e^{-rN} K \sum_{j=a}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j}$$
$$= S_0 \underbrace{\sum_{j=a}^{N} \binom{N}{j} (q')^j (1-q')^{N-j}}_{B(a;N,q')} - e^{-rN} K \underbrace{\sum_{j=a}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j}}_{B(a;N,q)}$$

$\Rightarrow$

(1.12) $C = S \cdot B(a; N, q') - e^{-r(T-t)} K \cdot B(a; N, q)$

2.3 Opsjonsprising i kontinuerlig tid

2.3.1 Stokastisk prosess

En stokastisk prosess er en samling tilfeldige variabler

$$\{X(t)\}_{t\in T}$$

definert over et sannsynlighetsområde (Ω,Ψ,P) og antar verdier i $\mathbf{R}^n$.

For enhver t∈ T holdt fast har vi en tilfeldig variabel

$$\omega \rightarrow X_\omega(t); \omega \in \Omega$$

hvor ω er en tilstand som er med i hele tilstandsrommet Ω.

Men holder vi fast $\omega \in \Omega$ har vi funksjonen

$$t \rightarrow X_\omega(t); t \in T$$

som kalles en sti til X(t). På samme måte som tilstanden må være med i tilstandsrommet må tidspunktet t tilhøre hele tidsrommet T.

2.3.2 Wienerprosess

En Wienerprosess med variansparameter σ^2 er en stokastisk prosess, W(t), som antar reelle verdier og tilfredstiller:

1. W(0) = 0
2. For enhver $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \cdots \leq s_n \leq t_n$, er de randomiserte variablene $W(t_1) - W(s_1)$, …… , $W(t_n) - W(s_n)$ uavhengige. Dvs. uavhengige inkrementer.
3. For enhver s < t , er den randomiserte variabelen W(t) – W(s) normalfordelt med forventning 0 og varians $(t - s)^2$. Dvs. W(t) – W(s) ~ $N(0,(t-s))$.
4. W har kontinuerlige stier, dvs. at funksjonen $t \mapsto W_t(\omega)$ er en kontinuerlig funksjon av t.

$W(t) \sim N(0,t)$

(1.13) $dW(t) \sim N(0,dt)$

$dW(t) = \varepsilon\sqrt{dt}$, hvor $\varepsilon \sim N(0,1)$

2.3.3 Generalisert Wienerprosess

1. X(0) = X
2. For enhver $s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2 \le \cdots \le s_n \le t_n$, er de randomiserte variablene

$X(t_1) - X(s_1)\ldots\ldots, X(t_n) - X(s_n)$ uavhengige. Dvs. uavhengige inkrementer.

3. $X(t) - X(s) \sim N(\int_s^t \mu(v)dv, \int_s^t \sigma^2(v)dv)$, hvor $\mu(\cdot)$ og $\sigma(\cdot)$ er kjente funksjoner.
4. X har kontinuerlige stier, dvs. at funksjonen $t \mapsto X_t(\omega)$ er en kontinuerlig funksjon av t.

Normalt skrives en generell Wienerprosess på følgende måte:

(1.14) $dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$

eller

$$\int_0^t dX(v) = \int_0^t \mu(v)dv + \int_0^t \sigma(v)dW_v$$
$$X(t) = X + \int_0^t \mu(v)dv + \int_0^t \sigma(v)dW_v$$

2.3.4 Itô-prosesser

Et spesialtilfelle hvor μ og σ er stokastiske er Itô-prosessen:

(1.15) $dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$, hvor μ og σ er kjente funksjoner og X(0) = X.

På integrasjonsform:

$$\int_0^t dX(v) = \int_0^t \mu(v, X(v))dv + \int_0^t \sigma(v, X(v))dW(v)$$
$$X(t) = X + \int_0^t \mu(v, X(v))dv + \int_0^t \sigma(v, X(v))dW(v)$$

2.3.5 Itôs lemma

Hvis (t , X) → f (t , X) er en funksjon som er to ganger deriverbar med hensyn på X og en gang deriverbar med hensyn på t, og hvis disse partiellderiverte er kontinuerlig med hensyn på (t , X), (dvs. at f er en funksjon i klassen $C^{1,2}$), blir Itôs lemma som følger:

$$df\left(t, X(t)\right) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(t, X(t)\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}\left(t, X(t)\right)dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t, X(t)\right)\left(dX(t)\right)^2 \tag{1.16}$$

eller på integrasjonsform:

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) = {} & f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s))ds \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\left(dX(s)\right)^2 \end{aligned}$$

hvor $dt \cdot dt = dt \cdot dW(t) = dW(t) \cdot dt = 0, dW(t) \cdot dW(t) = dt.$

Har vi at

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

blir

$$
\begin{aligned}
(dX(t))^2 &= (\mu(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t))\mu(t,X(t)dt + \sigma(t,X(t))dW(t)) \\
&= \mu(t,X(t))dt \cdot \mu(t,X(t))dt + 2\mu(t,X(t))dt \cdot \sigma(t,X(t))dW(t) \\
&\quad +\sigma(t,X(t))dW(t) \cdot \sigma(t,X(t))dW(t) \\
&= \sigma^2(t,X(t))dt
\end{aligned}
$$

Som gir

$$
\begin{aligned}
df(t,X(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))(\mu(t,X(t))dt \\
&\quad +\sigma(t,X(t))dW(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))\sigma^2(t,X(t))dt \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))\mu(t,X(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))\sigma^2(t,X(t))\right]dt \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))\sigma(t,X(t))dW(t)
\end{aligned}
$$

2.3.6 Geometrisk Brownsk bevegelse

En geometrisk Brownsk bevegelse er et spesialtilfelle av en Itô-prosess, hvor:

$$
\begin{aligned}
\mu(X(t),t) &= \mu(t)S(t) \\
\sigma(X(t),t) &= \sigma(t)S(t)
\end{aligned}
$$

som gir følgende ligning:

(1.17) $dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)$

eller på integrasjonsform:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t dS(s) &= \int_0^t \mu(s)S(s)ds + \int_0^t \sigma(s)S(s)dW(s) \\
S(t) &= S(0) + \int_0^t \mu(s)S(s)ds + \int_0^t \sigma(s)S(s)dW(s)
\end{aligned}
$$

Bruker vi Itôs lemma på denne prosessen får vi:

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))(\mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2(t)S(t)dt \\ &= (\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\mu(t)S(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2(t)S(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\sigma(t)S(t)dW(t) \end{aligned}$$

2.3.7 Aksjens prisprosess

Prisprosessen til aksjen er en geometrisk brownsk bevegelse:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)$$

Definerer så en ny prosess:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \ln S(t) \\ Y(t) &= f(S(t), t) \\ f(S,t) &= \ln S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{1}{S} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Innsetting i Itôs lemma gir:

$$\begin{aligned} dY(t) &= 0dt + \frac{1}{S(t)}dS(t) - \frac{1}{2S^2(t)}\left(dS(t)\right)^2 \\ &= \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt + \sigma(t)dW(t) \end{aligned}$$

$$\int_0^t dY(s) = \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW(s)$$

Antar konstant rente og volatilitet:

$$Y(t) - Y(0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(t - 0) + \sigma\big(W(t) - W(0)\big)$$

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)} \right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t)$$

(1.18) $S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$

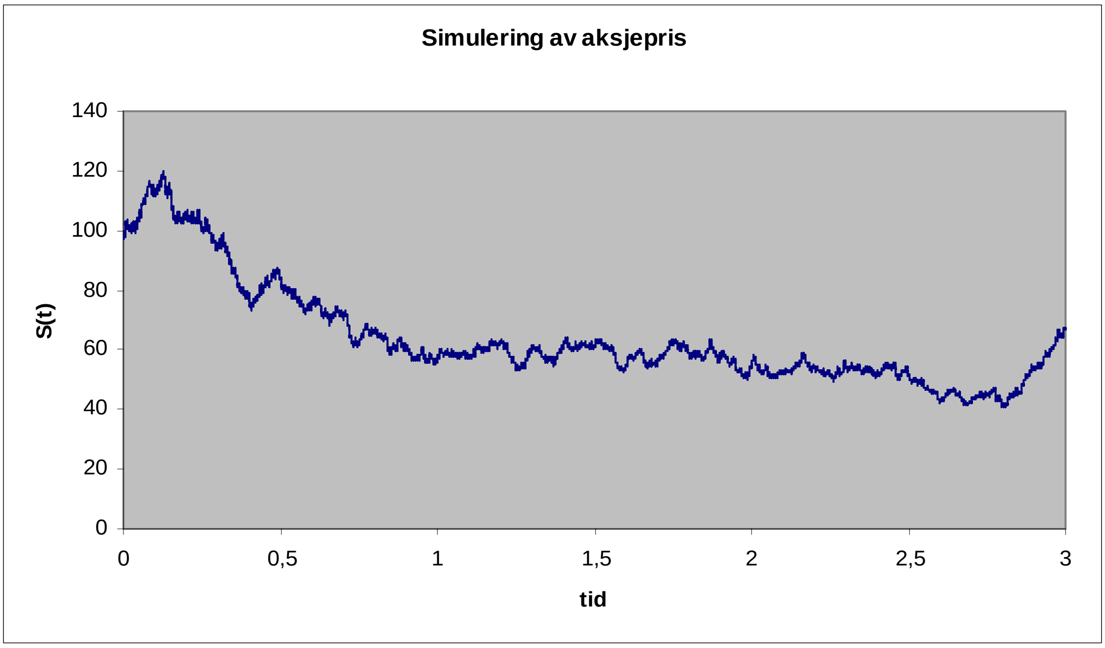
Kan dermed beregne forventninger og varians:

$$E\big(S(t)\big) = E\left(S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)} \right) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$$

$$E\left(\ln \frac{S(t)}{S(0)} \right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t$$

$$Var\left(\ln \frac{S(t)}{S(0)} \right) = \sigma^2 t$$

En mulig sti for aksjeprisen kan være denne:



Figur 2.2 Simulering av aksjepris med S_0=100, σ=0,3, μ=0,08, dt=1/1000

Vi vet at $\varepsilon \sim N(0,1)$ For å generere ε i Excel, har vi valgt å bruke Box-Müller-transformasjon. Den går ut på at vi har to uavhengige og identisk fordelte variabler på [0,1], nemlig U_1 og U_2. Da kan ε_1 skrives som: $\varepsilon_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\cdot\sin\left(2\pi U_2\right)$ og $\varepsilon_2 = \sqrt{-2\ln U_1}\cdot\cos\left(2\pi U_2\right)$ Da er ε_1 og ε_2 uavhengige normalfordelte variabler med forventning 0 og varians 1, $\varepsilon \sim N(0,1)$. (Box, G. E. P. og Muller, M. E., 1958)

I våre utregninger, både for figur 2.2 og i senere utregninger,, har vi brukt ε_1.

2.3.8 Risikofritt aktivum

Introduserer et risikofritt aktivum:

(1.19) $D(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$

som er verdien på tidspunkt t av å investere 1 på tidspunkt 0

$$dD(t) = r(t)D(t)dt$$

2.3.9 Martingale

Definisjon: En stokastisk prosess er en martingale hvis $E\left(M\left(t\right)\right)<\infty$ for alle t og hvis, for enhver s ≤ t, $E(M\left(t\right)|\Psi\left(s\right))=M\left(s\right)$

Det vil si at den betingete forventningen til en martingale på et framtidig tidspunkt t er lik verdien til (realisasjonen av) prosessen på tidspunkt s for t > s og alle s og t.
For Wienerprosessen har vi:

$$\begin{aligned}E(W\left(t\right)|\Psi\left(s\right)) &= E_s(W\left(t\right)) \\ &= E_s(W\left(t\right)-W\left(s\right)+W\left(s\right)) \\ &= E_s(W\left(t\right)-W\left(s\right))+E_s(W\left(s\right)) \\ &= W\left(s\right)\end{aligned}$$

Altså er Wienerprosessen selv en martingale.

En Itô-prosess

$$dY\left(t\right)=\mu\left(Y\left(t\right),t\right)dt+\sigma\left(Y\left(t\right),t\right)dW\left(t\right)$$

er en martingale hvis og bare hvis

(1.20) $\mu\left(Y\left(t\right),t\right)=0$ for alle Y og t.

2.3.10 Ekvivalent Martingale mål

Sannsynlighetsmålet P er det subjektive sannsynlighetsmålet til investorene. Dette sannsynlighetsmålet modellerer investorers fremtidsforhåpninger, og det er dette sannsynlighetsmålet de bruker for å beregne forventninger, varians, kovarians og andre egenskaper ved fremtidige priser og avkastninger. Et ekvivalent Martingale mål er et annet sannsynlighetsmål, Q, som brukes for prisingsformål. Det er et fiktivt sannsynlighetsmål på den måten at det vanligvis ikke representerer investorenes fremtidsforhåpninger, men kun er nyttig for prisingsformål. Investorer har kun Q som subjektivt sannsynlighetsmål hvis de er risikonøytrale. Man antar vanligvis at investorer er risikoaverse og at de for prisingsformål risikojusterer for sin risikoaversjon ved hjelp av sannsynlighetsmålet Q. Q kalles av denne grunn også for et risikojustert sannsynlighetsmål. Et ekvivalent sannsynlighetsmål er et sannsynlighetsmål, ekvivalent til P, slik at:

$$\text{(1.21)} \quad \frac{C(t)}{D(t)} = E_t^Q\left(\frac{C(T)}{D(T)}\right)$$

for enhver t, slik at $0 \le t \le T \le \tau$, og for enhver prisprosess, C. Med ekvivalent menes at hvis P(A)=0 eller Q(A)=0, så er P(A)=Q(A)=0. Navnet Martingale mål kommer av at det ekvivalente martingale målet gjør alle diskonterte prisprosesser martingale under sannsynlighetsmålet Q.

Hvis det eksisterer et ekvivalent martingale mål så eksisterer det ingen arbitrasje. La (φ, ϕ) være en selvfinansierende portefølje slik at:

$$\varphi(\tau)S(\tau)+\phi(\tau)D(\tau)\ge 0$$

og strengt større enn 0 med positiv sannsynlighet. For å bevise at det ikke eksisterer arbitrasje må vi bevise at:

$$\varphi(0)S(0)+\phi(0)D(0)>0$$

Bruker (1.21)

$$\varphi(0)S(0)+\phi(0)D(0)=E_t^Q\left(\frac{\varphi(\tau)S(\tau)+\phi(\tau)D(\tau)}{D(\tau)}\right)$$

Fordi de to sannsynlighetsmålene er ekvivalente er $\varphi(\tau)S(\tau)+\phi(\tau)D(\tau)\ge 0$ med positiv sannsynlighet også under Q. Dermed blir forventingen positiv og følgelig er $\varphi(0)S(0)+\phi(0)D(0)>0$.

2.3.11 Tilstandspris

En tilstandspris er prisen på et aktivum, på tid t, som gir utbetaling, på tid T, kun hvis en gitt tilstand inntreffer. F.eks er prisen på et aktivum som utbetaler 1 kun hvis aksjeprisen er over 100 gitt ved:

$$P(t) = D(t) E_t^Q\left(\frac{1}{D(T)} 1_{\{S(T)>100\}}\right)$$

Antar vi deterministisk rente:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{D(t)}{D(T)} E_t^Q\left(1_{\{S(T)>100\}}\right) \\ &= e^{-\int_t^T r(s)ds} Q\left(S(T) > 100 \mid \psi_t\right) \end{aligned}$$

Ser at tilstandsprisen er lik sannsynligheten for at tilstanden skal inntreffe diskontert med den deterministiske renten.

Med et diskret tilstandsrom, dvs Ω har endelig mange elementer, ω, kan vi tildele tilstands-priser til enhver ω. Disse tilstandene kalles normalt for Arrow-Debreu priser.

2.3.12 Price kernel

Å kunne skifte mellom sannsynlighetsmål er ofte nyttig i prising av derivater. Dette skiftet kan gjøres ved hjelp av såkalte Radon-Nikodym derivat. Hvis vi vil ta forventningen til en stokastisk variabel, X(T), under Q kan vi gjøre som følger:

(1.22) $E^Q\left(X(T)\right) = E^P\left(\frac{dQ}{dP} X(T)\right)$

hvor $\frac{dQ}{dP}$ kalles et Radon-Nikodym derivat. Radon-Nikodym derivatet kan representeres på følgende måte:

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^\tau \lambda(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^\tau \lambda^2(s)ds}$$

λ_t er markedsprisen på risiko. For å forkorte notasjonen kan vi definere:

$$Y(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(s)ds}$$

$$Y(t) = e^{-z(t)}$$

hvor

$$z(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(s)\,ds + \int_0^t \lambda(s)dW(s)$$

$$dz(t) = \frac{1}{2}\lambda^2(t)\,dt + \lambda(t)\,dW(t)$$

$$Y_t = f(z,t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -e^{-z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{-z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Bruker Itôs lemma:

$$\begin{aligned} dY(t) &= -e^{-z(t)}\left(\frac{1}{2}\lambda^2(t)\,dt + \lambda(t)\,dW(t)\right) + e^{-z(t)}\frac{1}{2}\lambda^2(t)\,dt \\ &= -Y(t)\,\lambda(t)\,dW(t) \end{aligned}$$

Ser her at Y(t) er en martingale under P. Vi bruker (2.38) og får:

$$C(t) = E_t^P\left(\frac{D(t)}{D(T)}\frac{Y(T)}{Y(t)}C(T)\right)$$

Den stokastiske prosessen $\frac{D(t)}{D(T)}\frac{Y(T)}{Y(t)}$ kalles prisingskjernen i økonomien. Stokastisk diskonteringsfaktor.

Med denne definisjonen kan vi skrive betingede forventinger:

(1.23) $$E_t^Q\left(X(T)\right) = \frac{1}{Y(t)} E_t^P\left(Y(T)X(T)\right)$$

2.3.13 Girsanovs teorem

Likning (1.23) gir oss muligheten til å beregne betingede forventninger under forskjellige sannsynlighetsmål. Skifte mellom sannsynlighetsmål endrer ikke den stokastiske prosessen. En stokastisk prosess er en samling av stier, en for hver ω, og disse stiene endrer seg ikke når sannsynlighetene endres. Men Wienerprosessen som vi brukte under P er ikke lenger den samme når vi skifter sannsynlighetsmål til Q. Dette problemet løses ved hjelp av Girsanovs teorem:

Hvis W^P er en wiener prosess under P, så er W^Q en wiener prosess under Q hvor:

(1.24) $$\begin{aligned} W^Q(t) &= W^P(t) + \int_0^t \lambda(s)\,ds \\ dW^Q(t) &= dW^P(t) + \lambda(t)\,dt \end{aligned}$$

2.3.14 Endring av numeraire - endring av mål

Q^B kalles et prisingsmål relatert til aktivum B hvis følgende tre betingelser er oppfylt:

1. Prisprosessen til B, $\{B_t\}_{t\in[0,\tau]}$, er positiv på hvert tidspunkt og aktivumet ikke betaler ut dividende.
2. Q^B er ekvivalent til P.
3. For ethvert handlet aktivum er den diskonterte aksjeprisprosessen en martingale under Q^B.

$$S^{*B}(t) = \frac{S(t)}{B(t)}$$
$$S^{*B}(t) = E_t^{Q^B}\left(S^*(T)\right)$$

hvor $\{S_t\}_{t\in[0,\tau]}$ er aktivumets prisprosess.

Aktivumet B, som brukes som diskontering, kalles numeraire. Når risikofritt aktivum brukes som numeraire blir det tilsvarende martingale prisingsmålet det ekvivalente martingale målet. Merk at hvis vi vil bruke et dividendeutbetalende aktivum som numeraire så må vi bruke aktivumet når dividenden reinvestes i aktivumet.

2.3.15 Forwardmålet

Et spesielt interessant aktivum å bruke som numeraire er en nullkupongobligasjon med forfall på tid T, for enhver T>t. Dette kan bare brukes på å prise derivat med utbetalinger før eller på tidspunkt T. Prisprosessen til en nullkupongobligasjon med forfall på tid T skrives som $\{P(t,T)\}_{t\in[0,T]}$. Dvs at P(t,T) er prisen på tid t av å motta 1 pengeenhet på tid T. Bruk av nullkupongobligasjonen som numeraire gir:

$$\begin{aligned} C(t) &= P(t,T)\,E_t^{Q^{P(.,T)}}\left(\frac{C(T)}{P(T,T)}\right) \\ &= P(t,T)\,E_t^{Q^T}\left(C(T)\right) \end{aligned}$$

Det tilhørende prisingsmålet $Q^{P(.,T)} = Q^T$ kalles tid T forwardmålet. Hvis vi har deterministiske renter så er alle forwardmålene like og lik det ekvivalente martingale målet.

2.3.16 Europeisk Call-opsjon

Utbetalingsprofil på tid T:

$$\begin{aligned}\max\left(S(T)-K,0\right) &= 1_{\{S(T)>K\}}\left(S(T)-K\right)\\ &= \underbrace{1_{\{S(T)>K\}}S(T)}-\underbrace{1_{\{S(T)>K\}}K}\\ &= C^1(T)-C^2(T)\end{aligned}$$

For C^1 bruker vi aksjen som numeraire:

$$dS(t)=\mu(t)S(t)dt+\sigma(t)S(t)dW(t)$$

$$\begin{aligned}C^1(t) &= S(t)E_t^{Q^S}\left(\frac{1_{\{S(T)>K\}}S(T)}{S(T)}\right)\\ &= S(t)E_t^{Q^S}\left(\frac{1_{\{S(T)>K\}}S(T)}{S(T)}\right)\\ &= S(t)Q^S\left(S(T)>K\right)\end{aligned}$$

For C^2 bruker vi forwardmålet som numeraire:

$$\begin{aligned}C^2(t) &= P(t,T)E_t^{Q^T}\left(1_{S(T)>K}K\right)\\ &= P(t,T)KQ^T\left(S(T)>K\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad C(t)=S(t)Q^S\left(S(T)>K\right)-P(t,T)KQ^T\left(S(T)>K\right)$$

Tar først prisprosessen til aksjen under Q^S:

Definerer en ny relativ prosess som skal være en martingale under Q^S:

$$X(t) = \frac{P(t,T)}{S(t)}$$

Med deterministisk rente får vi at:

$$= \frac{e^{\int_0^t r(v)dv}}{S(t)} = f\left(S(t),t\right)$$

$$f(S,t) = \frac{e^{\int_0^t r(v)dv}}{S}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = -f(S,t)\frac{1}{S}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 2f(S,t)\frac{1}{S^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = rf(S,t)$$

Bruker Itôs lemma:

$$\begin{aligned}
dX(t) &= r(t)\, f\left(S(t),t\right)dt - f\left(S(t),t\right)\frac{1}{S(t)}dS(t) \\
&\quad +2\frac{1}{2} f\left(S(t),t\right)\frac{1}{S^2(t)}\left(dS(t)\right)^2 \\
&= r(t)\, f\left(S(t),t\right)dt - f\left(S(t),t\right)\left(\mu(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\right) \\
&\quad + f\left(S(t),t\right)\sigma^2(t)\,dt \\
&= \left(r(t) - \mu(t) + \sigma^2(t)\right) f\left(S(t),t\right)dt - f\left(S(t),t\right)\sigma(t)\,dW(t)
\end{aligned}$$

Girsanovs teorem:

$$dW(t) = dW^S(t) - \lambda(t)\,dt$$

som gir prosessen under sannsynlighetsmålet Q:

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \left(r(t)-\mu(t)+\sigma^2(t)\right) f\left(S(t),t\right)dt \\
&\quad - f\left(S(t),t\right)\sigma(t)\left(dW^S(t)-\lambda(t)dt\right) \\
&= \left(r(t)-\mu(t)+\sigma^2(t)+\sigma(t)\lambda(t)\right)X(t)dt-\sigma(t)X(t)dW^S(t)
\end{aligned}
$$

Som gir markedsprisen på risiko:

$$
\lambda(t)=\frac{\mu(t)-r(t)-\sigma^2(t)}{\sigma(t)}
$$

Setter inn i aksjeprisprosessen:

$$
\begin{aligned}
dS(t) &= \mu(t)S(t)dt+\sigma(t)S(t)\left(dW^S(t)-\lambda(t)dt\right) \\
&= \left(\mu(t)-\lambda(t)\sigma(t)\right)S(t)dt+\sigma(t)S(t)dW^S(t) \\
&= \left(\mu(t)-\frac{\mu(t)-r(t)-\sigma^2(t)}{\sigma(t)}\sigma(t)\right)S(t)dt+\sigma(t)S(t)dW^S(t) \\
&= \left(r(t)+\sigma^2(t)\right)S(t)dt+\sigma(t)S(t)dW^S(t)
\end{aligned}
$$

Definerer vi en ny prosess, som er logaritmen til S, integrerer og løser denne får vi:

$$
\begin{aligned}
&Y(t)=\ln S(t) \\
&dY(t)=\left(r(t)+\sigma^2(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt+\sigma(t)dW^{Q^S}(t) \\
&dY(t)=\left(r(t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt+\sigma(t)dW^{Q^S}(t) \\
&\int_t^T dY(s)=\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds+\int_t^T\sigma(s)dW^{Q^S}(s) \\
&\ln\left(\frac{S(T)}{S(t)}\right)=\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds+\int_t^T\sigma(s)dW^{Q^S}(s) \\
&S(T)=S(t)e^{\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds+\int_t^T\sigma(s)dW^{Q^S}(s)}
\end{aligned}
$$

Kan dermed beregne sannsynligheten for at aksjeprisen er høyere enn kontraktsprisen ved forfall under sannsynlighetsmålet Q^S:

$$
\begin{aligned}
Q^S\left(S(T)>K\right) &= Q^S\left(S(t)e^{\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds+\int_t^T\sigma(s)dW^S(s)} > K \right) \\
&= Q^S\left(\int_t^T \sigma(s)dW^S(s) > \ln\frac{K}{S(t)} - \int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds \right) \\
&= Q^S\left(\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}\,\varepsilon > \ln\frac{K}{S(t)} - \int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds \right) \\
&= Q^S\left(\varepsilon > \frac{\ln\frac{K}{S(t)} - \int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}} \right) \\
&= Q^S\left(\varepsilon < \frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}} \right) \\
&= N(d_1)
\end{aligned}
$$

Deretter finner vi aksjeprisprosessen under Q^T. Her definerer vi følgende nye relative prisprosess, som skal være en martingale under Q^T.

$$X(t) = \frac{S(t)}{P(t,T)}$$

Vi antar at renten er deterministisk. Dvs. at alle forwardmålene er like og identisk med det ekvivalente martingale målet. I tillegg er:

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)ds}$$

$$\Rightarrow \qquad Q^T\left(S(T)>K\right) = Q\left(S(T)>K\right)$$

Med deterministisk rente får vi at:

$$= e^{-\int_0^t r(v)dv} S(t) = f\left(S(t),t\right)$$

$$f\left(S,t\right)=e^{-\int_0^t r(v)dv}S$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=f\left(S,t\right)\frac{1}{S}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}=-rf\left(S,t\right)$$

Bruker Itôs lemma:

$$\begin{aligned}dX\left(t\right)&=-r\left(t\right)f\left(S\left(t\right),t\right)dt+f\left(S\left(t\right),t\right)\frac{1}{S\left(t\right)}dS\left(t\right)\\&=-r\left(t\right)f\left(S\left(t\right),t\right)dt+f\left(S\left(t\right),t\right)\left(\mu\left(t\right)dt+\sigma\left(t\right)dW\left(t\right)\right)\\&=\left(\mu\left(t\right)-r\left(t\right)\right)f\left(S\left(t\right),t\right)dt+f\left(S\left(t\right),t\right)\sigma\left(t\right)dW\left(t\right)\end{aligned}$$

Girsanovs teorem:

$$dW\left(t\right)=dW^S\left(t\right)-\lambda\left(t\right)dt$$

som gir prosessen under sannsynlighetsmålet Q:

$$dX\left(t\right)=\left(\mu\left(t\right)-r\left(t\right)-\lambda\left(t\right)\sigma\left(t\right)\right)f\left(S\left(t\right),t\right)dt+f\left(S\left(t\right),t\right)\sigma\left(t\right)dW^Q\left(t\right)$$

Som gir markedsprisen på risiko:

$$\lambda\left(t\right)=\frac{\mu\left(t\right)-r\left(t\right)}{\sigma\left(t\right)}$$

Setter inn i aksjeprisprosessen:

$$
\begin{aligned}
dS(t) &= \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)\left(dW^Q(t) - \lambda(t)dt\right) \\
&= \left(\mu(t) - \lambda(t)\sigma(t)\right)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^Q(t) \\
&= \left(\mu(t) - \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}\sigma(t)\right)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^Q(t) \\
&= r(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^Q(t)
\end{aligned}
$$

Definerer vi en ny prosess, som er logaritmen til S, integrerer og løser denne får vi:

$$
\begin{aligned}
&Y(t) = \ln S(t) \\
&dY(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt + \sigma(t)dW^Q\ (t) \\
&dY(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt + \sigma(t)dW^Q\ (t) \\
&\int_t^T dY(s) = \int_t^T \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \int_t^T \sigma(s)dW^Q\ (s) \\
&S(T) = S(t)e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \int_t^T \sigma(s)dW^Q\ (s)}
\end{aligned}
$$

Kan dermed beregne sannsynligheten for at aksjeprisen er høyere enn kontraktsprisen ved forfall under sannsynlighetsmålet Q:

$$
\begin{aligned}
Q\left(S(T) > K\right) &= Q\left(S(t)e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds + \int_t^T \sigma(s)dW^S(s)} > K\right) \\
&= Q\left(\varepsilon < \frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \int_t^T \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}\right) \\
&= N(d_2)
\end{aligned}
$$

Verdien på call-opsjonen kan dermed skrives som:

$$
C(t) = S(t)N(d_1) - P(t,T)KN(d_2) \tag{1.25}
$$

hvor

$$(1.26)\qquad \begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\dfrac{S(t)}{K}+\displaystyle\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds}{\sqrt{\displaystyle\int_t^T\sigma^2(s)ds}} \\ d_2 &= \frac{\ln\dfrac{S(t)}{K}+\displaystyle\int_t^T\left(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds}{\sqrt{\displaystyle\int_t^T\sigma^2(s)ds}} = d_1-\sqrt{\int_t^T\sigma^2(s)ds} \end{aligned}$$

Dersom vi antar konstant rente og volatilitet ser vi at vi får den kjente Black&Scholes modellen. (Black F., Scholes M., 1973)

3. Prising av forsikringskontrakter med rentegaranti

Historisk har denne type kontrakter blitt utstedt med en lav rentegaranti relativt til rentenivået, samt at den garanterte renten var fast over hele perioden. Det vil si at forsikringskontraktene var kontrakter med lang løpetid som var utstedt langt ”out-of-the-money”. Problematiske ble disse rentegarantiene først når rentenivåene falt betraktelig, slik at sannsynligheten for at disse rentegarantiene skal ende opp ”at-the-money” eller ”in-the-money” ble betraktelig høyere. Som følge av dette har verdiene på disse kontraktene med rentegaranti økt betraktelig.

Sammenlignet med standard finansielle kontrakter som put- og callopsjoner er forsikrings-kontrakter med rentegarantier mer komplekse produkter med elementer som dødelighet, periodiske premier, rentegarantier samt muligheten til å gjenkjøpe kontrakten. I tillegg er livsforsikringsselskapene gjennom lov også påkrevd å sette til side midler på passivasiden i balansen og loven gir også restriksjoner på fordelinger av overskudd. Alle disse faktorene spiller inn under verdsettelse av forsikringskontrakter med rentegaranti.

Vi vil i dette kapitlet først beskrive modellen og de komponenter som inngår i denne samt antakelsene bak, og vi viser hvordan verdien kan uttrykkes blant annet ved hjelp av opsjoner. Videre priser vi kontraktene i diskret og kontinuerlig tid. Under kontinuerlig tid gjør vi analysen betydelig vanskeligere ved å innføre stokastisk rente.

3.1 Modellen og dens antakelser

Vi antar en friksjonsfri økonomi med et perfekt kapitalmarked, slik at skatteeffekter, transaksjonskostnader og andre ufullkommenheter kan sees bort ifra. Vi betrakter et livs-forsikringsselskap med en planleggingshorisont på tidsintervallet [t,T]. Forsikringsselskapet er et aksjeselskap.

Forsikringsselskapet utsteder homogene forsikringskontrakter med rentegaranti som forfaller på tid T. Vi ser på to hovedforsikringskontrakter. Felles for begge kontraktene er at forsikringstaker må betale inn et beløp G(t) på tid t for et betinget krav på tid T. Den ene kontrakten er en periodevis rentegaranti mens den andre er en forfallsrentegaranti. Begge kontraktene kan være med eller uten tilbakebetaling, dvs at dødelighet spiller en rolle. I tillegg til rentegarantien har forsikringstaker rett på en bonus tilsvarende en andel av verdistigningen utover rentegarantien. Egenkapitalen har begrenset ansvar på tid T. Dvs. at hvis verdien på aktiva på tid T er mindre enn det forsikringstakerne har krav på, så trekker aksjonærene seg ut og verdien på aktiva tildeles forsikringstakerne[2]. I tillegg tar vi også med muligheten for gjenkjøp av forsikringskontraktene. Som vi skal se seinere vil dette ikke være ønskelig for den periodevise rentegarantien, slik at kun forfallsgarantien får et gjenkjøpselement.

Modellen vår skal gi oss fair verdi på forsikringskontraktene, G(t), på tid t, dvs det beløpet som forsikringstaker skal betale for de ulike forsikringskontraktene. Analysen vår er inspirert av Briys og deVarenne (1997), dog med ulikt fokus, og med diverse utvidelser. Briys og deVarenne fokuserer på å beregne fair garantert rente eller fair participation level for en gitt nominell verdi på forsikringskontraktene og egenkapitalen, uten dødelighet, flerperiodegaranti og gjenkjøpselement. Vårt fokus er på verdiberegninger av forsikringskontraktene og egenkapitalen gitt en nominell verdi på kontraktene og egenkapitalen, samt den garanterte renten og et bonussystem. For oss er det mer interessant å beregne hva kunden faktisk skal betale for en gitt kontrakt enn hvordan kontrakten skal se ut gitt hva kunden har betalt inn.

3.1.1 Balansen til selskapet

På tid t kjøper forsikringsselskapet en aktivaportefølje A(t) som det finansierer med egenkapital E(t) og med homogene forsikringskontrakter med forfall på tid T. G(t) angir premiene på disse forsikringskontraktene. Aktivaporteføljen finansieres med andel α i gjeld og (1-α) i egenkapital. Initialporteføljen antaes i sin helhet å være investert i risikable aktiva (aksjer, risikable obligasjoner, eiendom osv.).

De nominelle verdiene på egenkapitalen og gjelden kan dermed skrives som:

$$E_{nom}(t) = (1-\alpha)A(t)$$
$$G_{nom}(t) = \alpha A(t)$$

[2] Hvorfor forsikringstakerne ikke har insentiv til å reforhandle kontraktene sine forklares i Ingersoll (1987).

Aktiva		**Egenkapital og gjeld**	
Aktiva	A (t)	Egenkapital	E (t)
		Gjeld	G (t)
Total	A (t)	Total	A (t)

Figur 3.1 Balansen til selskapet på tid t

Summen av de nominelle verdiene på egenkapitalen og gjelden er lik verdien på aktiva:

$$A(t) = E_{nom}(t) + G_{nom}(t)$$

Men summen av det beløpet forsikringstakerne og forsikringsselskapet skal betale inn er også lik aktiva:

$$A(t) = E(t) + G(t)$$

Men på grunn av rentegarantien og den eventuelle bonusen så kan de nominelle verdiene avvike fra de innbetalte verdiene.

3.1.2 Garantert rente

Forsikringskontraktene er utformet slik at forsikringstaker er garantert en minsterente. På denne måten er forsikringstaker forsikret mot nedsiderisiko. Blir avkastningen på aktiva lavere enn den garanterte renten, må forsikringsselskapet ut med differansen mellom faktisk avkastning og den garanterte renten. Den garanterte renten er vanligvis lavere enn avkastningen på et risikofritt aktivum med samme løpetid som forsikringskontrakten. Vi ser på to forskjellige rentegarantier, en periodevis rentegaranti samt en forfallsrentegaranti. Forfallsgarantien kaller vi kontrakt A, mens kontrakten med periodevis rentegaranti kalles kontrakt B.

Kontrakt A:

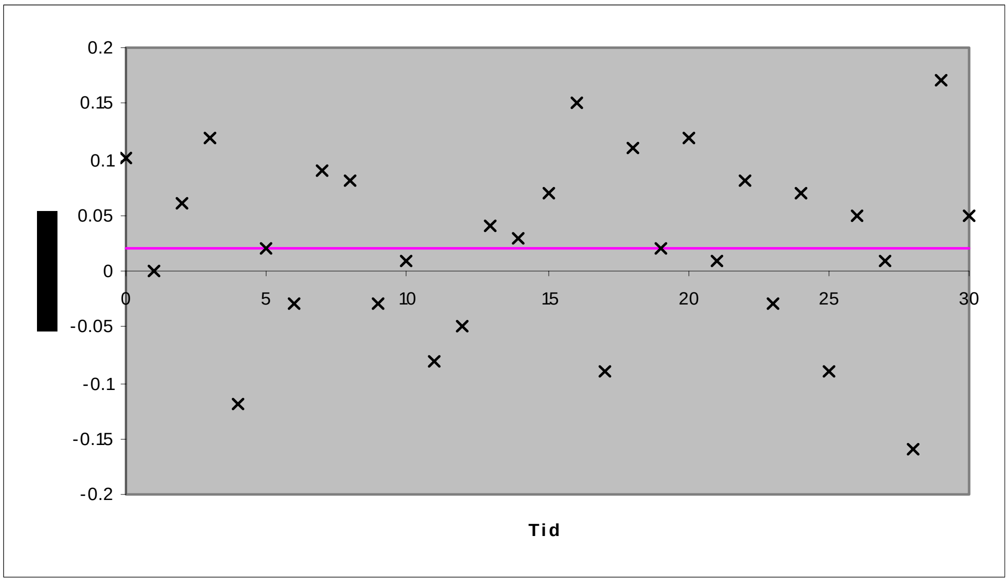
Her kommer rentegarantien i form av en forfallsgaranti. Dvs. at du minimum får igjen innskuddsbeløpet forrentet med den garanterte renten over tidsintervallet [t,T].
På tid T forfaller kontraktene som forsikringsselskapet har utstedt, og det blir på dette tidspunktet avgjort om forsikringsselskapet får fortsette sin virksomhet eller må avvikle den. Dette avhenger av samsvaret mellom verdien på selskapet, A(T), og de garanterte utbetalingene, $G^*(T)$. Er verdien på selskapet A(T) større enn det garanterte tilbakebetalingsbeløpet $G^*(T)$ får forsikringsselskapet fortsette virksomheten. Er derimot A(T) mindre enn $G^*(T)$ blir selskapet avviklet og forsikringstakerne får A(T). Grunnet begrenset ansvar får dermed ikke forsikringstakerne $G^*(T)$ med sikkerhet, men kun dersom ikke forsikringsselskapet går konkurs. Det garanterte beløpet ved forfall kan skrives som:

(3.1) $G^*(T) = e^{r^G(T-t)} G(t)$

Kontrakt B:

Denne kontrakten har en garantert rente hver periode, men beløpet kommer ikke til utbetaling før på sluttidspunktet. Dvs. at selv om verdien på selskapet A(t) er mindre enn $G(t)$ for alle $t \in [0, T-1]$ går ikke selskapet konkurs. Kun hvis verdien på selskapet på tid T, A(T), er mindre enn forsikringskontoen på tid T, $G(T)$, går selskapet konkurs. Men også her får forsikringstaker kun denne garanterte renten såfremt forsikringsselskapet er solvent. Er verdien av selskapet mindre enn verdien på den garanterte rentekontoen blir selskapet avviklet og forsikringstakerne får verdiene.

For en kontrakt hvor man får minimum den garantert renten hvert år, kan et avkastningsbilde se ut som følger:



Figur 3.2 Avkastning og garantert rente.

Aksjeprisen er simulert som:

$$S(t+\Delta t) = S(t) + \mu S(t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon$$

med $S(0) = 100, \mu = 0.08, \sigma = 0.3, \Delta t = 1/10000$ Den garanterte renten er 2%.

Avkastningen er beregnet som:

$$r_S(t) = \ln\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$$

Disse to ulike rentegarantiene representerer forskjellige risiki for forsikringsselskapet. Har man en rentegaranti hvert år, så er sannsynligheten for at den må taes i bruk større enn for en rentegaranti ved forfall. Dette henger sammen med at ett-års avkastningene på risikable aktiva svinger mye mer enn langsiktig avkastning, f.eks avkastning over 20 år. At de har ulik risiko for forsikringsselskapet gir seg utslag i at en årlig rentegaranti er mye dyrere enn en rentegaranti ved forfall.

3.1.3 Dødelighet

Dødeligheten spiller inn i en forsikringskontrakt uten tilbakebetaling, men ikke i en forsikringskontrakt med tilbakebetaling. Dødeligheten antaes å være uavhengig av finansiell risiko.

Forsikring med tilbakebetaling:

Forsikringen utbetales til deg ved forfall hvis du er i live. Hvis vedkommende dør i løpet av perioden, vil forsikringsutbetalingen bli utbetalt til de nærmeste etterlatte ved kontraktens forfall. Her har det ingen hensikt for forsikringsselskapet å regne med dødelighets-sannsynligheter fordi forsikringen utbetales uansett, enten til forsikringstaker eller til nærmeste foresatte. Dette blir mer sparing i fond med garantert avkastning enn forsikring.

Forsikring uten tilbakebetaling:

Forsikringen utbetales til deg hvis du er i live ved forfall. Hvis vedkommende ikke er i live, har ikke de etterlatte krav på noen utbetaling. Vi tenker oss en homogen gruppe forsikringstakere. Dersom en eller flere i gruppen dør i løpet av forsikringsperioden, vil deres konto tilfalle de gjenlevende i gruppen, jamfør ekvivalensprinsippet. Her spiller dødelighets-sannsynligheter en rolle. I og med at forsikringen bare kommer til utbetaling hvis forsikringstaker er i live ved forfall, må man innberegne sannsynligheten for at vedkommende skal overleve kontraktsperioden.

3.1.4 Bonus

Oppstår det overskudd i forsikringsselskapet er det fordi forsikringstakerne har betalt inn for mye i premier. Dette overskuddet bør derfor betales tilbake til forsikringstakerne gjennom en bonus. Denne bonusen kan beregnes periodevis eller kun på sluttidspunktet.

Kontrakt A:

Eventuell bonus tildeles ved sluttidspunkt og er som følger:

$$B(T)=\max\Big(\alpha\big(A(T)-A(t)\big)-\big(G^{*}(T)-G(t)\big),0\Big)$$

(3.2) $$B(T) = \alpha \max\left(A(T) - \frac{G^*(T)}{\alpha}, 0\right)$$

Forsikringstakerne har rett på en bonus som tilsvarer den andelen av overskuddet de har vært med på å generere ved å skyte inn α på tid t, dvs α(A(T)-A(t)), fratrukket de garanterte forpliktelsene over perioden, dvs. $G^*(T) - G(t)$.

Ser her at bonus kun deles ut dersom :

$$A(T) > \frac{G^*(T)}{\alpha}$$

Verdien på aktiva må altså være høyere enn $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ for at det skal deles ut bonus.

Kontrakt B:

Vi tar utgangspunkt i bonusen for kontrakt A for å få mest mulig sammenlignbare produkter. Vi kan skrive om bonusen i kontrakt A:

$$\begin{aligned} B(T) &= \alpha \max\left(A(T) - \frac{G^*(T)}{\alpha}, 0\right) \\ &= A(t)\alpha \max\left(\frac{A(T)}{A(t)} - \frac{\alpha A(t) e^{r^G(T-t)}}{\alpha A(t)}, 0\right) \\ &= G(t) \max\left(r^A - e^{r^G(T-t)}, 0\right) \end{aligned}$$

hvor r^A er bruttoavkastning over perioden.
Vi definerer så periodevis avkastning på aktiva som:

$$r_{t_j}^A = \frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}$$

Bonusmekanismen for kontrakt B kan dermed uttrykkes som:

$$r_{t_j}^B = \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0\right)$$

Vi vet at denne bonusen kommer i tillegg til den garanterte renten i hver periode. Vi skjønner da at sannsynligheten for å gå konkurs er meget høy. Vi har derfor valgt å innføre en utdelingsvariabel, δ, som gir forsikringstakeren en andel av denne bonusavkastningen. Dette er også blant annet blitt gjort i en artikkel av Miltersen og Persson (2003).
Bonusen i kontrakt B blir altså:

(3.3) $$r_{t_j}^B = \delta \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0\right)$$

Ser her at bonus deles ut dersom:

$$\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} > e^{r^G(t_j - t_{j-1})}$$

dvs. så fremt periodeavkastningen på aktiva er høyere enn den garanterte renten.

3.2 Verdi kontrakt A og B

Her tar vi for oss de ulike mulige scenariene for forsikringstakerne og egenkapitalen og finner verdien på de to kontraktene.

3.2.1 Kontrakt A

Forsikringstakerne:

For forsikringstakerne får man tre mulige utbetalingsprofiler ved tid T:

1: $A(T) < G^*(T)$ Her er verdien på selskapet mindre enn garanterte utbetalinger.

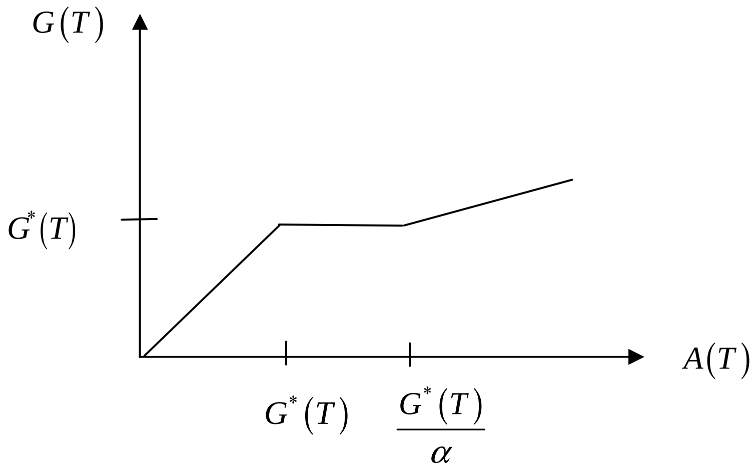
Selskapet er konkurs og forsikringstakerne mottar det som er igjen : $A(T) = G(T)$

2: $G^*(T) < A(T) < \dfrac{G^*(T)}{\alpha}$ Her er verdien på selskapet større enn garanterte utbetalinger, men mindre enn hva som må til for at bonus skal deles ut. Forsikringstakerne får dermed det garanterte beløpet : $G(T) = G^*(T)$

3: $A(T) > \dfrac{G^*(T)}{\alpha}$ Her får forsikringstakerne bonus i tillegg til det garanterte beløpet:

$$G(T) = G^*(T) + \alpha\left(A(T) - \frac{G^*(T)}{\alpha}\right)$$

$$G(T) = \alpha A(T)$$



Figur 3.3 Utbetalingsprofil for forsikringstaker på tid T

Verdien til forsikringskontraktene på tid T kan dermed skrives som:

$$G(T) = G^*(T) - \max\left(G^*(T) - A(T), 0\right) + \alpha \max\left(A(T) - \frac{G^*(T)}{\alpha}, 0\right)$$

som på grunn av ingen arbitrasje gir verdi på tid t lik:

$$G(t) = P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right) \tag{3.4}$$

Ser at forsikringskontraktenes verdi på tid t er det garanterte beløpet diskontert minus en put-opsjon med $G^*(T)$ som utøvelsespris pluss en call-opsjon med $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ som utøvelsespris. Begge opsjonene har aktivaporteføljen som underliggende og forfall på tid T.

$P(t,T)G^*(T)$ uttrykker hvor mye rentegarantien er verdt, men ettersom eierne har begrenset ansvar er ikke dette en sann garanti. Derfor må vi trekke fra en putopsjon som uttrykker muligheten eierne har til å "gå vekk" ved en konkurs. Callopsjonen gjenspeiler forsikringstakerne krav på sin del av det eventuelle overskuddet.

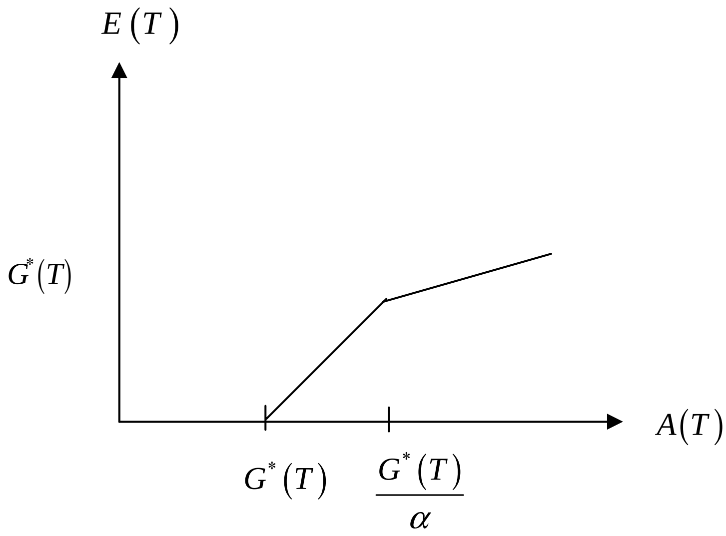
Egenkapitalen:

På grunn av begrenset ansvar får egenkapitalen det som er igjen. For egenkapitalen blir de tilsvarende 3 scenariene:

1: $A(T) < G^*(T)$ gir $E(T) = 0$

2: $G^*(T) < A(T) < \frac{G^*(T)}{\alpha}$ gir $E(T) = A(T) - G^*(T)$

3: $A(T) > \frac{G^*(T)}{\alpha}$ gir $E(T) = (1-\alpha)A(T)$



Figur 3.4 Utbetalingsprofil for egenkapitalen på tid T

Verdien til egenkapitalen på tid T er dermed gitt som:

$$E(T) = \max\left(A(T) - G^*(T), 0\right) - \alpha \max\left(A(T) - \frac{G^*(T)}{\alpha}, 0\right)$$

som på grunn av ingen arbitrasje gir verdien på egenkapitalen på tid t lik:

$$E(t) = C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right) \tag{3.5}$$

Ser at verdien på egenkapitalen ikke er noe annet enn to call-opsjoner med forfall på tid T, aktivaporteføljen som underliggende aktivum og henholdsvis $G^*(T)$ og $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ som utøvelsespris. Den første callen uttrykker eiernes begrensete ansvar. Den sier også at eierne får hele overskuddet utover den garanterte verdien. Dette er ikke tilfellet, og vi må derfor trekke fra den delen som skal utbetales til forsikringstakerne, noe callopsjon nummer to uttrykker.

3.2.2 Kontrakt B

Forsikringskontrakter:

Forsikringskontraktkontoen øker med den garanterte renten og en andel av den eventuelle meravkastningen i hver periode.

Scenario 1: $A(t_j) > G(t_j)\ \forall j$

$$G(t_j) = G(t_{j-1})\left(e^{r^G(t_j - t_{j-1})} + \delta \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0\right)\right)$$

Scenario 2: $A(T) < G(T)$

$$G(T) = A(T)$$

Hvis forsikringsselskapet er solvent på tid T kan verdien på forsikringskontrakten skrives som:

$$G(t_0) = \alpha A(t_0) E_t^Q \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-(r-r^G)(t_j - t_{j-1})} + e^{-r(t_j - t_{j-1})} \delta \max\left(\frac{A_{t_j}}{A_{t_{j-1}}} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0 \right) \right)$$

som på grunn av periodevis uavhengige avkastninger blir:

$$(3.6) \quad G(t_0) = \alpha A(t_0) \prod_{j=1}^{n} E_t^Q \left(e^{-(r-r^G)(t_j - t_{j-1})} + e^{-r(t_j - t_{j-1})} \delta \max\left(\frac{A_{t_j}}{A_{t_{j-1}}} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0 \right) \right)$$

Egenkapitalen:

Egenkapitalkontoen øker hvis avkastningen på aktiva er høyere enn den garanterte renten, og avtar hvis den er lavere:

Scenario 1: $A(t_j) > G(t_j) \ \forall t \in T$

$$\begin{aligned} E(t_j) &= A(t_j) - G(t_j) \\ &= A(t_j) - G(t_{j-1}) \left(e^{r^G(t_j - t_{j-1})} + \delta \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0 \right) \right) \end{aligned}$$

Scenario 2: $A(T) < G(T)$

$$E(T) = 0$$

Hvis forsikringsselskapet er solvent på tid T kan verdien på egenkapitalen skrives som:

(3.7)
$$
\begin{aligned}
E(t_0) &= A(t_0) - \alpha A(t_0) \prod_{j=1}^{n} E_t^Q \left(e^{-(r-r^G)(t_j - t_{j-1})} + e^{-r(t_j - t_{j-1})} \delta \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0 \right) \right) \\
&= A(t_0) \left(1 - \alpha \prod_{j=1}^{n} E_t^Q \left(e^{-(r-r^G)(t_j - t_{j-1})} + e^{-r(t_j - t_{j-1})} \delta \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} - e^{r^G(t_j - t_{j-1})}, 0 \right) \right) \right)
\end{aligned}
$$

Tilfellet hvor selskapet ikke kan betale forpliktelsene sine finner vi ikke noe lukket form løsning for, men vil bli tatt hensyn til gjennom simulering seinere i rapporten.

3.3 Prising

Vår analyse kan sees på som følger:

Livsforsikringsselskapet kjøper inn en portefølje A(t) på tid t. Denne finansierer selskapet med en andel α *i gjeld og en andel (1 -* α *) i egenkapital. Dermed er den nominelle verdien på gjelden på tid t* α*A(t), mens den nominelle verdien på egenkapitalen er (1 -* α *)A(t). Forsikringsselskapet utstyrer forsikringskontraktene med en rentegaranti samt en mulighet for bonus. Dvs. at den nominelle andelen*α*A(t) er utstyrt med tilleggsegenskaper som gjør den ekstra verdifull. Modellen vår skal gi oss det beløpet G(t) som forsikringstakerne må betale inn for å kjøpe denne kontrakten, samt hva egenkapitalen må skyte inn E(t).*

3.3.1 Prising i diskret tid

Den binomiske modellen tas med av pedagogiske hensyn, ettersom vi vet at en del av leserne er mest fortrolig med en slik modell. Vi vil kun ta for oss kontrakt A i denne modellen fordi det blir en noe innfløkt eksersis å finne avkastningen på aktiva i kontrakt B, og man vil da miste det pedagogiske elementet.

Generell binomisk modell for prising av call-opsjon har vi fra (1.12):

$$= A_0 \underbrace{\sum_{j=a}^{N} \binom{N}{j} (q')^j (1-q')^{N-j}}_{B(a;N,q')} - e^{-r(T-t)} K \underbrace{\sum_{j=a}^{N} \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j}}_{B(a;N,q)}$$

$$\Rightarrow C = A \cdot B(a;N,q') - e^{-r(T-t)} K \cdot B(a;N,q)$$

For prising av tilsvarende put-opsjon bruker vi put-call pariteten:

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + A(t)$$

Dette gir da følgende verdi på put-opsjonen:

$$\begin{aligned} P_t &= C_t + e^{-r(T-t)} K - A(t) \\ &= A(t)\big(B(a;N,q') - 1\big) - e^{-r(T-t)} K \big(B(a;N,q) - 1\big) \end{aligned}$$

3.3.1.1 Kontrakt A

Fra (3.4) vet vi at verdien på forsikringskontraktene kan skrives som:

$$G(t) = P(t,T)G^*(T) - P_t\big(A(T), G^*(T), T\big) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Dette kan i en binomisk modell skrives som:

$$\begin{aligned} G(t) = {} & e^{-r(T-t)} G^*(T) - \Big(A(t)\big(B(a;N,q') - 1\big) - e^{-r(T-t)} G^*(T)\big(B(a;N,q) - 1\big)\Big) \\ & + \alpha\left(A(t) \cdot B(a;N,q') - e^{-r(T-t)} \frac{G^*(T)}{\alpha} \cdot B(a;N,q)\right) \end{aligned}$$

(3.8) $\quad G(t) = A(t) - A(t)(1-\alpha)B(a;N,q')$

Fra (3.5) vet vi at verdien på egenkapitalen kan skrives som:

$$E(t) = C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

I en binomisk modell kan dette skrives som:

$$\begin{aligned} E(t) &= \left(A(t)\cdot B(a;N,q') - e^{-r(T-t)}G^*(T)\cdot B(a;N,q)\right) \\ &\quad -\alpha\left(A(t)\cdot B(a;N,q') - e^{-r(T-t)}\frac{G^*(T)}{\alpha}\cdot B(a;N,q)\right) \end{aligned}$$

(3.9) $E(t) = (1-\alpha)A(t)\cdot B(a;N,q')$

Uten tilbakebetaling:

Her spiller dødeligheten inn. Utbetaling skjer her kun hvis forsikringstaker er i live på utbetalingstidspunktet. Dermed blir analysen som ovenfor, men med en forandring. Vi må dividere verdien på forsikringskontraktene med sannsynligheten for at forsikringstaker er i live. Fra (1.9) vet vi at denne sannsynligheten i er:

$L_x(T\text{-}t)$

Dermed kan verdien på forsikringskontraktene og egenkapitalen henholdsvis skrives som:

(3.10) $G(t) = \left(A(t) - A(t)(1-\alpha)B(a;N,q')\right)\dfrac{1}{L_x(T\text{-}t)}$

(3.11)
$$\begin{aligned} E(t) &= A(t) - G(t) \\ &= A(t)\left(1 - \frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right) + \left(A(t)(1-\alpha)B(a;N,q')\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)} \end{aligned}$$

3.3.2 Prising i kontinuerlig tid med deterministisk rente

Her vil vi beregne verdiene på forsikringskontraktene og egenkapitalen når renten og volatiliteten antaes å være deterministisk. Antar at det er to aktiva i økonomien, et risikabelt aktivum og et risikofritt aktivum.

3.3.2.1 Aktiva

Her antas det ingen renterisiko i aktiva, slik at prisprosessen til aktiva antas å følge følgende geometriske brownske bevegelse:

(3.12) $dA(t) = \mu_A(t)A(t)dt + \sigma_A(t)A(t)dW(t)$

hvor $\mu(t)$ og $\sigma(t)$ er henholdsvis forventet avkastning og volatiliteten til aktiva. $W(t)$ er en standard Wienerprosess.

3.3.2.2 Risikofritt aktivum

Antar at vi har et risikofritt aktivum som kan skrives som:

$$dD(t) = r_D(t)D(t)dt$$

hvor $r_D(t)$ er avkastningen på det risikofrie aktivumet.

Dette representerer ligningen for en bankkonto og har følgende løsning:

$$D(T) = D(t)e^{\int_t^T r_D(s)ds}$$

3.3.2.3 Kontrakt A

Fra (3.4) og (3.5) vet vi at:

Verdi egenkapital:

$$E(t) = C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Verdi forsikringskontrakter:

$$G(t) = P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Egenkapitalen er som kjent en portefølje av to call-opsjoner med samme underliggende aktivum, A(t), og forfall, T, men med ulike kontraktspriser. Den ene opsjonen har kontraktspris lik $G^*(T)$, mens den andre har kontraktspris $\frac{G^*(T)}{\alpha}$. Forsikringskontraktene er en portefølje av et beløp $P(t,T)G^*(T)$, en putopsjon og en callopsjon med samme underliggende aktivum, A(t), forfall, T, men med ulike kontraktspriser, henholdsvis $G^*(T)$ og $\frac{G^*(T)}{\alpha}$. For å finne en lukket form løsning på forsikringskontraktenes og egenkapitalens verdi på tid t, trenger vi kun å beregne $C_t\left(A(T), G^*(T), T\right)$. Når vi har funnet denne kan vi bruke put-call pariteten til å beregne $P_t\left(A(T), G^*(T), T\right)$. $C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$ finner vi ved å bytte ut $G^*(T)$ med $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ i den lukkede løsningen til $C_t\left(A(T), G^*(T), T\right)$. Verdsetter dermed først en europeisk call-opsjon $C_t\left(A(T), G^*(T), T\right)$.

Europeisk Call-opsjon:

$$C_t\left(A(T), G^*(T), T\right)$$

Opsjonen har følgende utbetalingsprofil på tid T:

$$\begin{aligned}\max\left(A(T)-G^*(T),0\right) &= 1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\left(A(T)-G^*(T)\right)\\ &= 1_{\{A(T)>G^*(T)\}}A(T)-1_{\{A(T)>G^*(T)\}}G^*(T)\\ &= C^1(T)-C^2(T)\end{aligned}$$

der $1_{\{A(T)>G^*(T)\}}$ er en indikatorfunksjon som setter verdien lik 1 hvis $A(T)>G^*(T)$ og 0 ellers. Verdien på tid T er altså $C^1(T)-C^2(T)$. Verdien på tid t er:

$$C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)= C^1(t)-C^2(t)$$

For C^1 bruker vi aktiva som numeraire.

$$C^1(t)=A(t)E_t^{Q^A}\left(\frac{1_{\{A(T)>G^*(T)\}}A(T)}{A(T)}\right)$$

$$C^1(t)=A(t)Q^A\left(A(T)>G^*(T)\right)$$

Dvs at vi må finne sannsynligheten for at verdien på aktiva på tid T er større enn det garanterte beløpet på tid T under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q^A.

For C^2 bruker vi risikofritt aktivum som numeraire

$$C^2(t)=D(t)E_t^{Q}\left(\frac{1_{\{A(T)>G^*(T)\}}G^*(T)}{D(T)}\right)$$

$$C^2(t)=e^{-\int_t^T r_D(s)ds}Q\left(A(T)>G^*(T)\right)$$

Her må vi finne sannsynligheten for at verdien på aktiva på tid T er større enn det garanterte beløpet på tid T under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q.

Får dermed følgende verdi på call-opsjonen:

$$C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)=A(T)Q^A\left(A(T)>G^*(T)\right)-e^{-\int_t^T r_D(s)ds}Q\left(A(T)>G^*(T)\right)$$
$$=C^1(t)-C^2(t)$$

Beregner først sannsynligheten for at $A(T)>G^*(T)$ under sannsynlighetsmålet Q^A. For å finne denne må vi ha aktivaprosessen under Q^A. Q^A tilsier at vi bruker aktiva som numeraire. I økonomien vår har vi antatt to aktiva, et risikabelt og et risikofritt. Vi definerer en prosess X(t) hvor vi diskonterer bankkontoen med aktiva. Den kan representeres på følgende måte:

$$X(t)=\frac{D(t)}{A(t)}$$

Denne prosessen skal være en martingale under sannsynlighetsmålet Q^A. X(t) er en funksjon av de to aktiva D og A samt tiden t

$$X(t)=f\left(D(t),A(t)\right)=\frac{D(t)}{A(t)}$$

$$X=f(D,A)=\frac{D}{A}$$

De deriverte er:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{A}\frac{dD}{dt}$$
$$\frac{\partial f}{\partial A}=-\frac{D}{A^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}=2\frac{D}{A^3}$$

Dette gir følgende prosess ved bruk av Itôs lemma:

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \frac{1}{A(t)}dD(t) - \frac{D(t)}{A^2(t)}dA(t) + \frac{D(t)}{A^3(t)}\left(dA(t)\right)^2 \\
&= X(t)r_D(t)dt - X(t)\left(\mu_A(t)dt + \sigma_A(t)dW(t)\right) + X(t)\sigma_A^2(t)dt \\
&= \left(r_D(t) - \mu_A(t) + \sigma_A^2(t)\right)X(t)dt - \sigma_A(t)X(t)dW(t)
\end{aligned}
$$

Denne prosessen er under det objektive sannsynlighetsmålet P. Vi vil ha prosessen under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q^A. Bruker Girsanovs teorem og prosessen kan dermed skrives som:

$$
dX(t) = \left(r_D(t) - \mu_A(t) + \sigma_A^2(t) + \lambda(t)\sigma_A(t)\right)X(t)dt - \sigma_A(t)X(t)dW^{Q^A}(t)
$$

under sannsynlighetsmålet Q^A. Denne prosessen skulle være en martingale under dette sannsynlighetsmålet. Det innebærer som kjent at driftleddet skal være lik 0. Dermed kan vi bestemme markedsprisen på risiko:

$$
\lambda(t) = \frac{\mu_A(t) - r_D(t) - \sigma_A^2(t)}{\sigma_A(t)}
$$

Prosessen er en martingale under Q^A:

$$
dX(t) = -\sigma_A(t)X(t)dW^{Q^A}(t)
$$

Denne prosessen kan vi løse ved å definere en ny prosess Y(t) som er lik logaritmen til X(t):

$$
\begin{aligned}
&Y(t) = \ln X(t) \\
&Y(t) = f\left(X(t), t\right) \\
&Y = f\left(X, t\right) = \ln X
\end{aligned}
$$

De deriverte er:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{X}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = -\frac{1}{X^2}$$

Bruker vi Itôs lemma får vi:

$$dY(t) = \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2X^2(t)} \left(dX(t)\right)^2$$

$$= -\sigma_A(t) dW^{Q^A}(t) - \frac{1}{2}\sigma_A^2(t) dt$$

$$\int_t^T dY(s) = -\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_A^2(s) ds - \int_t^T \sigma_A(s) dW^{Q^A}(s)$$

$$X(T) = X(t) e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_A^2(s)ds - \int_t^T \sigma_A(s) dW^{Q^A}(s)}$$

$$A(T) = A(t) e^{\int_t^T \left(r_D(s) + \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right) ds + \int_t^T \sigma_A(s) dW^{Q^A}(s)}$$

Dette er prisprosessen til aktiva under sannsynlighetsmålet Q^A, og dermed kan vi beregne sannsynligheten for at verdien på aktiva på tid T er større enn verdien på det garanterte beløpet:

$$Q^A\left(A(T) > G^*(T)\right) = Q^A\left(A(t) e^{\int_t^T \left(r_D(s) + \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right) ds + \int_t^T \sigma_A(s) dW^{Q^A}(s)} > G^*(T) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= Q^A\left(\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}\,\varepsilon > \ln\frac{G^*(T)}{A(t)} - \int_t^T\left(r_D(s) + \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds\right) \\
&= Q^A\left(\varepsilon > \frac{\ln\frac{G^*(T)}{A(t)} - \int_t^T\left(r_D(s) + \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}}\right) \\
&= Q^A\left(\varepsilon < \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)} + \int_t^T\left(r_D(s) + \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}}\right) \\
&= N(d_1)
\end{aligned}
$$

Dermed har vi beregnet $C^1(t) = A(t)N(d_1)$

Deretter må vi beregne $C^2(t)$. Her skal vi finne sannsynligheten for at $A(T) > G^*(T)$ under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q. Dvs. at vi skal bruke risikofritt aktivum som numeraire. Vi har to aktiva i økonomien vår. Definerer en relativ prosess, hvor aktiva A diskonteres med risikofritt aktivum D. Denne relative prosessen kan representeres som:

$$X(t) = \frac{A(t)}{D(t)}$$

Denne prosessen X(t) skal være en martingale under sannsynlighetsmålet Q.

$$f(A, D) = \frac{A}{D}$$

De deriverte er:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{A}{D^2}\frac{dD}{dt}$$
$$\frac{\partial f}{\partial A} = \frac{1}{D}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = 0$$

Bruker Itôs lemma og får dermed:

$$\begin{aligned} dX(t) &= -\frac{A(t)}{D^2(t)} dD(t) + \frac{1}{D(t)} dA(t) \\ &= -X(t) r_D(t) dt + X(t)\left(\mu_A(t) dt + \sigma_A(t) dW(t)\right) \\ &= \left(\mu_A(t) - r_D(t)\right) X(t) dt + \sigma_A(t) X(t) dW(t) \end{aligned}$$

Dette er under det objektive sannsynlighetsmålet P. Bruker Girsanovs teorem og prosessen kan skrives som:

$$dX(t) = \left(\mu_A(t) - r_D(t) - \lambda\,(t)\sigma_A(t)\right) X(t) dt + \sigma_A(t) X(t) dW^Q\,(t)$$

under sannsynlighetsmålet Q. Denne prosessen skal ha driftledd lik 0 for å være en martingale. Det gir følgende markedspris på risiko:

$$\lambda\,(t) = \frac{\mu_A(t) - r_D(t)}{\sigma_A(t)}$$

som gir prosessen under Q:

$$dX(t) = \sigma_A(t) X(t) dW^Q\,(t)$$

Denne prosessen løser vi ved å definere en ny prosess Y(t) som er lik logaritmen til X(t):

$$Y(t) = \ln X(t)$$
$$Y(t) = f(X(t), t)$$
$$Y = f(X, t) = \ln X$$

De deriverte er:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{X}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = -\frac{1}{X^2}$$

Bruker Itôs lemma og får dermed:

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2X^2(t)} \left(dX(t) \right)^2 \\ &= \sigma_A(t) dW^{Q^T}(t) - \frac{1}{2} \sigma_A^2(t) dt \end{aligned}$$

$$\int_t^T dY(s) = -\frac{1}{2} \int_t^T \sigma_A^2(s) ds + \int_t^T \sigma_A(s) dW^Q(s)$$

$$X(T) = X(t) e^{-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_A^2(s) ds + \int_t^T \sigma_A(s) dW^Q(s)}$$

$$A(T) = A(t) e^{\int_t^T \left(r_D(s) - \frac{1}{2}\sigma_A^2(s) \right) ds + \int_t^T \sigma_A(s) dW^Q(s)}$$

Vi har nå prisprosessen til aktiva under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q og kan dermed beregne sannsynligheten for at $A(T) > G^*(T)$ under sannsynlighetsmålet Q:

$$Q\left(A(T) > G^*(T)\right) \quad = Q\left(A(t) e^{\int_t^T \left(r_A(s) - \frac{1}{2}\sigma_A^2(s) \right) ds + \int_t^T \sigma_A(s) dW^Q(s)} > G^*(T) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= Q\left(\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}\,\varepsilon > \ln\frac{G^*(T)}{A(t)} - \int_t^T\left(r_D(s) - \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds\right) \\
&= Q\left(\varepsilon > \frac{\ln\frac{G^*(T)}{A(t)} - \int_t^T\left(r_D(s) - \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}}\right) \\
&= Q\left(\varepsilon < \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)} + \int_t^T\left(r_D(s) - \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}}\right) \\
&= N(d_2)
\end{aligned}
$$

Dermed har vi beregnet $C^2(t) = e^{-\int_t^T r_D(s)ds} N(d_2)$

Verdien på call-opsjonen er da:

(3.13) $C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) = A(t)N(d_1) - e^{-\int_t^T r_D(s)ds} G^*(T)N(d_2)$

hvor

$$
d_1 = \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)} + \int_t^T\left(r_D(s) + \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}}
$$

$$
d_2 = \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)} + \int_t^T\left(r_D(s) - \frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}} = d_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma_A^2(s)\,ds}
$$

For $C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$ bytter vi ut $G^*(T)$ med $\frac{G^*(T)}{\alpha}$:

$$(3.14)\quad C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)=A(t)N(d_3)-e^{-\int_t^T r_D(s)ds}\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_4)$$

hvor

$$d_3=\frac{\ln\frac{\alpha A(t)}{G^*(T)}+\int_t^T\left(r_D(s)+\frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\sigma_A^2(s)ds}}$$

$$d_4=\frac{\ln\frac{\alpha A(t)}{G^*(T)}+\int_t^T\left(r_D(s)-\frac{1}{2}\sigma_A^2(s)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\sigma_A^2(s)ds}}=d_1-\sqrt{\int_t^T\sigma_A^2(s)ds}$$

Verdien på put-opsjonen:

På grunn av put-call pariteten kan vi finne verdien på put-opsjonen som følger:

$$C_t\left(A(t),G^*(T),T\right)+P(t,T)G^*(T)=P_t\left(A(t),G^*(T),T\right)+A(t)$$

$$\begin{aligned}P_t\left(A(t),G^*(T),T\right)&=C_t\left(A(t),G^*(T),T\right)+P(t,T)G^*(T)-A(t)\\&=A(t)N(d_1)-P(t,T)G^*(T)N(d_2)+P(t,T)-A(t)\\&=P(t,T)G^*(T)\left(1-N(d_2)\right)-A(t)\left(1-N(d_1)\right)\end{aligned}$$

$$(3.15)\quad P_t\left(A(t),G^*(T),T\right)=P(t,T)G^*(T)N(-d_2)-A(t)\left(N(-d_1)\right)$$

Dermed kan verdien på egenkapitalen skrives som:

$$E(t)=C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)-\alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)$$

$$(3.16)\quad =A(t)N(d_1)-e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T)N(d_2)-\alpha A(t)N(d_3)+e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T)N(d_4)$$

$$=A(t)\left(N(d_1)-\alpha N(d_3)\right)-e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T)\left(N(d_2)-N(d_4)\right)$$

Dermed kan verdien på forsikringskontraktene skrives som:

$$
\begin{aligned}
G(t) &= P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T),G^*(T),T\right) + \alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)\\
&= e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T) - e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T)N(-d_2) + A(t)\left(N(-d_1)\right)\\
&\quad + \alpha A(t)N(d_3) - e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T)N(d_4)\\
&= A(t)\left(N(-d_1) + \alpha N(d_3)\right) - e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T)\left(N(d_4) - N(d_2)\right)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Forsikringskontrakt uten tilbakebetaling:

Her spiller dødeligheten inn. Utbetaling skjer kun hvis forsikringstaker er i live på utbetalingstidspunktet. Dermed blir analysen som ovenfor, men med en forandring. Vi må multiplisere verdien på forsikringskontraktene og egenkapitalen med sannsynligheten for at forsikringstaker er i live. Fra (1.9) vet vi at denne sannsynligheten er:

$L_x(T\text{-}t)$

Dermed blir verdien på forsikringskontraktene uten tilbakebetaling:

$$
\begin{aligned}
G(t) &= \left(P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T),G^*(T),T\right) + \alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\\
&= \left(A(t)\left(N(-d_1) + \alpha N(d_3)\right) - e^{-\int_t^T r_D(s)ds}G^*(T)\left(N(d_4) - N(d_2)\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Verdien på egenkapitalen uten tilbakebetaling blir:

$$E(t) = A(t)\left(1 - \frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right) + \left(C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)\right)\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right)$$

$$= \left(A(t)\left(N(d_1) - \alpha N(d_3)\right) - e^{-\int_t^T r_D(s)ds} G^*(T)\left(N(d_2) - N(d_4)\right)\right)\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right) \tag{3.19}$$

$$-\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)} - 1\right)A(t)$$

hvor d_1, d_2, d_3 og d_4 er som for kontrakten med tilbakebetaling.

3.3.2.4 Kontrakt B

Forsikringskontraktene:

$$G(t_j) = \alpha A(t_j)\prod_{j=1}^{n} E_t^Q\left(E_{t_{j-1}}^Q\left(e^{-(r-r^G)(t_j-t_{j-1})} + e^{-r(t_j-t_{j-1})}\delta \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} - e^{r^G(t_j-t_{j-1})}, 0\right)\right)\right)$$

$$= \alpha A(t_j)\prod_{j=1}^{n} E_t^Q\left(E_{t_{j-1}}^Q\left(e^{-(r-r^G)(t_j-t_{j-1})} + e^{-r(t_j-t_{j-1})}\delta\left(\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}1_{\left\{\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} > e^{r_G(t_j-t_{j-1})}\right\}}\right) - \left(e^{r^G(t_j-t_{j-1})}1_{\left\{\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} > e^{r_G(t_j-t_{j-1})}\right\}}\right)\right)\right)\right)$$

$$= \alpha A(t_j)\prod_{j=1}^{n} E_t^Q\left(E_{t_{j-1}}^Q\left(e^{-(r-r^G)(t_j-t_{j-1})} + e^{-r(t_j-t_{j-1})}\delta(Z - X)\right)\right)$$

Tar Z først. For Z bruker vi aktiva som numeraire. Dvs. at vi må bytte numeraire fra risikofritt aktivum til risikabelt aktivum:

$$E_t^Q\left(E_{t_{j-1}}^Q\left(e^{-r\left(t_j-t_{j-1}\right)}\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}1_{\left\{\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right\}}\right)\right)=E_t^{Q^A}\left(E_{t_{j-1}}^{Q^A}\left(\frac{A\left(t_{j-1}\right)}{A\left(t_j\right)}\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}1_{\left\{\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right\}}\right)\right)$$

$$=Q^A\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)$$

Grunnen til at det siste likhetstegnet gjelder er at vi har deterministisk rente, og gjennom det er aktivaavkastningene uavhengige.

For X bruker vi equivalent martingale measure:

$$e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}E_t^Q\left(1_{\left\{\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right\}}\right)$$

$$=e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}Q\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)$$

Aktivaprosessen under Q^A har vi fra utledningen av kontrakt A:

$$A\left(t_j\right)=A\left(t_{j-1}\right)e^{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)+\sigma\left(W^{Q^T}\left(t_j\right)-W^{Q^T}\left(t_{j-1}\right)\right)}$$

Aktivaprosessen under Q har vi også:

$$A\left(t_j\right)=A\left(t_{j-1}\right)e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)+\sigma\left(W^{Q^T}\left(t_j\right)-W^{Q^T}\left(t_{j-1}\right)\right)}$$

Dermed kan verdien på forsikringskontraktene skrives som:

$$(3.20)\quad G(t_0)=\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_j\right)-e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j = \frac{\left(r - r^G + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}{\sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}}$$

$$d2_j = \frac{\left(r - r^G - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}{\sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}} = d1_j - \sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}$$

Ser her at verdien på forsikringskontrakten er face value multiplisert med nåverdien av rentegarantien og den eventuelle bonusen.

Verdien på egenkapitalen kan skrives som:

$$\begin{aligned} E(t_0) &= A(t_0) - G(t_0) \\ &= A(t_0) - \alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_j\right) - e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right) \end{aligned}$$

(3.21) $$E(t_0) = A(t_0)\left(1 - \alpha\prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_i\right) - e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

Forsikringskontrakt uten tilbakebetaling:

Her spiller dødeligheten inn. Utbetaling skjer her kun hvis forsikringstaker er i live på utbetalingstidspunktet. Dermed blir analysen som ovenfor, men med en forandring. Vi må dividere verdien på forsikringskontraktene og egenkapitalen med sannsynligheten for at forsikringstaker er i live. Fra (1.9) vet vi at denne sannsynligheten er:

$L_x(T\text{-}t)$

Dermed blir verdien på forsikringskontraktene uten tilbakebetaling:

(3.22) $$G(t_0) = \alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_j\right) - e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\frac{1}{L_x\left(T - t\right)}$$

Verdien på egenkapitalen uten tilbakebetaling blir:

$$(3.23)\quad E(t_0) = A(t_0)\left(1 - \frac{1}{L_x\left(T-t\right)}\alpha\prod_{j=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_j\right) - e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

3.3.3 Prising i kontinuerlig tid med stokastisk rente

Her vil vi beregne verdiene på forsikringskontraktene og egenkapitalen når renten antaes å være stokastisk. Vi forutsetter at aktivas volatilitet, rentens volatilitet, korrelasjonen mellom renten og aktiva og den garanterte renten er deterministisk. I motsetning til under situasjonen med deterministisk rente får vi nå tre aktiva i økonomien istedenfor to. Vi får to risikable aktiva, en portefølje og en nullkupongobligasjon, og et risikofritt aktivum. Vi begynner analysen med å spesifisere rentemodellen vi har valgt. Deretter bruker vi denne til å finne nullkupongobligasjonen. Endelig beregner vi verdiene på tid t av forsikringskontraktene og egenkapitalen, både med og uten dødelighet.

3.3.3.1 Rentemodell

Vi antar at spotrenten er gitt ved den følgende Ohrnstein-Uhlenbeck prosessen

$$(3.24)\quad dr\left(t\right) = a\left(m - r\left(t\right)\right)dt + \sigma dW\left(t\right)$$

hvor m,a og σ er positive konstanter som kan fortolkes som henholdsvis langtidsgjennom-snittet som r(t) tenderer mot å vende tilbake til, hastigheten på denne tilbakevendingen og rentens volatilitet. Spotrenten på tid t er r(t) og initialrenten r(0) er gitt. W(t) er en standard Wienerprosess definert over et sannsynlighetsområde.

Vi antar at det ikke finnes arbitrasje i obligasjonsmarkedet, hvilket impliserer at det finnes en markedspris på renterisiko representert ved en funksjon $\lambda^1(r(t),t)$. Vi antar at denne markedsprisen er deterministisk og lik $\lambda^1\left(t\right)$.

Ved å bruke denne markedsprisen på renterisiko kan vi finne renteprosessen under det risikojustert sannsynlighetsmålet Q.

$$\begin{aligned} dr(t) &= a\left(m - r(t)\right)dt + \sigma\left(dW^Q(t) - \lambda^1(t)\,dt\right) \\ &= a\left(m - \lambda^1(t)\frac{\sigma}{a} - r(t)\right)dt + \sigma dW^Q(t) \end{aligned}$$

Denne prosessen definerer vi som:

$$(3.25)\quad dr(t) = a\left(b - r(t)\right)dt + \sigma dW^Q(t)$$

hvor

$$b = m - \frac{\sigma}{a}\lambda^1(t)$$

$W^Q(t)$ er en standard Wiener prosess under sannsynlighetsmålet Q. Renteprosessen er også en Ohrnstein-Uhlenbeck prosess under sannsynlighetsmålet Q. Forskjellen er at langtidsgjennomsnittet m er byttet ut med b. Dette samsvarer med Vasicek(1977)[3].

Definerer en ny prosess:

$$\begin{aligned} &Y(t) = r(t)e^{at} \\ &f(r,t) = re^{at} \\ &\frac{\partial f}{\partial r} = e^{at} \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial t} = are^{at} \end{aligned}$$

Itôs lemma gir:

[3] Ulempen med å modellere spotrenten på denne måten er at renten med positiv sannsynlighet vil bli negativ. Men for plausible parameterverdier er sannsynligheten for negativ spotrente lav.

$$dY(t) = ar(t)e^{at}dt + e^{at}dr(t)$$
$$dY(t) = ar(t)e^{at}dt + e^{at}\left(a\left(b - r(t)\right)dt + \sigma dW^Q(t)\right)$$
$$dY(t) = e^{at}abdt + e^{at}\sigma dW^Q(t)$$
$$\int_t^s dY(v) = \int_t^s e^{av}abdv + \sigma\int_t^s e^{av}dW^Q(v)$$
$$Y(s) - Y(t) = e^{as}b - e^{at}b + \sigma\int_t^s e^{av}dW^Q(v)$$
$$r(s)e^{as} = r(t)e^{at} + e^{as}b - e^{at}b + \sigma\int_t^s e^{av}dW^Q(v)$$
$$r(s) = r(t)e^{-a(s-t)} + b - be^{-a(s-t)} + \sigma\int_t^s e^{-a(s-v)}dW^Q(v)$$
$$r(s) = b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) + \sigma\int_t^s e^{-a(s-v)}dW^Q(v)$$

Løsningen på den stokastiske differensiallikningen i (3.25) er :

$$r(s) = b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) + \sigma\int_t^s e^{-a(s-v)}dW^Q(v) \tag{3.26}$$

Lar vi t=0 får vi:

$$r(s) = b + e^{at}\left(r(0) - b\right) + \sigma\int_0^s e^{-a(s-v)}dW^Q(v)$$

Forventet verdi på tid t av r(s) er:

$$\begin{aligned} E_t\left(r(s)\right) &= E_t\left(b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) + \sigma\int_t^s e^{-a(s-v)}dW^Q(v)\right) \\ &= b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) \end{aligned}$$

Ser her at hvis vi lar $s \to \infty$ vil $r(s) \to b$. Vi forventer at renten vil vende tilbake til b, uavhengig av startrentens verdi. Hvor fort den vender tilbake til b er avhengig av a. Er a høy vil den vende raskere tilbake til b relativt til lav a.

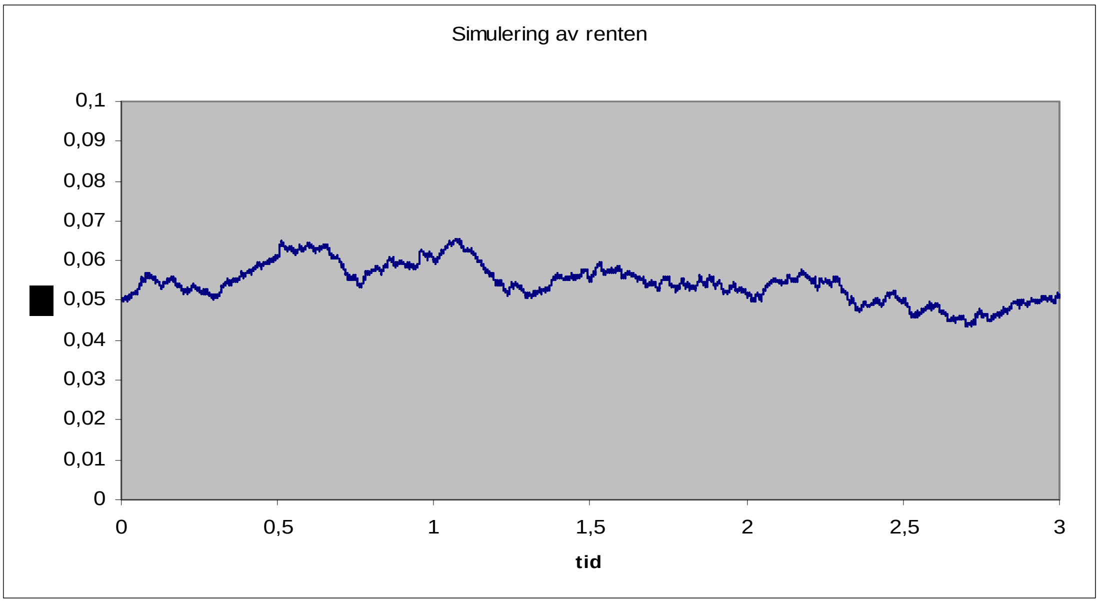
Variansen på tid t av r(s) er:

$$
\begin{aligned}
Var_t\left(r(s)\right) &= Var_t\left(b + e^{-a(s-t)}\left(r(t)-b\right) + \sigma\int_t^s e^{-a(s-v)}dW^Q(v)\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2a(s-t)}\right)
\end{aligned}
$$

Variansen er altså stigende i s. Også verdt å merke seg at når $s \to \infty$ vil $Var_t\left(r(s)\right) \to \frac{\sigma^2}{2a}$.

Variansen kan altså ikke bli større enn $\frac{\sigma^2}{2a}$.

Figur 3.5 viser en mulig sti for renten. Simuleringen er foretatt i Excel.



Figur 3.5 Simulering av rentespor:

Simuleringen er gjort med r(0)=0,05, a=0,4, b=0,06, σ=0,01 og dt=1/1000.

3.3.3.2 Nullkupongobligasjon

Vi antar at obligasjonsprisene for alle forfall er avhengig av dagens nivå på r(t) og P(r(t),t). Itôs lemma gir:

$$dP\left(r(t),t\right)=\frac{\partial P}{\partial t}dt+\frac{\partial P}{\partial r}dr(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^2}\left(dr(t)\right)^2$$

Ved innsetting av rentemodellen i (3.24) gir dette:

$$\begin{aligned}dP\left(r(t),t\right)&=\frac{\partial P}{\partial t}dt+\frac{\partial P}{\partial r}\left(a\left(m-r(t)\right)dt+\sigma dW(t)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2(t)}\sigma^2 dt\\&=\left(a\left(m-r(t)\right)\frac{\partial P}{\partial r(t)}+\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2(t)}\sigma^2\right)dt+\sigma\frac{\partial P}{\partial r(t)}dW(t)\end{aligned}$$

Prisprosessen til en nullkupongobligasjon P(t,T) med forfall på tid T kan dermed skrives som:

(3.27) $dP(t,T)=\gamma(t)P(t,T)dt-\sigma_p(t)P(t,T)dW(t)$

hvor

$$\gamma(t)=\frac{a\left(m-r(t)\right)\frac{\partial P}{\partial r(t)}+\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2(t)}\sigma^2}{P(t,T)}$$

$$\sigma_P(t)=-\sigma\frac{\frac{\partial P}{\partial r(t)}}{P(t,T)}$$

Verdien på en nullkupongobligasjon ved forfall T er P(T,T) og er lik 1. Ved bruk av equivalent Martingale measure er verdien på tid t:

$$P(t,T)=E_t^Q\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\right)$$

For å bevise dette definerer vi en ny prosess hvor nullkupongobligasjonen diskonteres med risikofritt aktivum, dvs vi bruker risikofritt aktivum som numeraire.

Den diskonterte prisprosessen for nullkupongobligasjonen:

$$P^*(t,T) = e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t,T) = f\left(P(t,T),t\right)$$
$$f(P,t) = e^{-\int_0^t r(s)ds} P$$

De deriverte er:

$$\frac{\partial f}{\partial P} = e^{-\int_0^t r(s)ds}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial P^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -r(t)\, f(P,t)$$

Itôs lemma gir:

$$dP^*(t,T) = \left(\mu(t) - r(t)\right) P^*(t,T)\,dt - \sigma_p(t) P^*(t,T)\,dW(t)$$

Dette er under det objektive sannsynlighetsmålet P. For å få prosessen under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q bruker vi Girsanovs teorem. Prosessen under Q blir dermed:

$$\begin{aligned} dP^*(t,T) &= \left(\mu(t) - r(t)\right) P^*(t,T)\,dt - \sigma_p(t) P^*(t,T)\left(dW^Q(t) - \lambda(t)\,dt\right) \\ &= \left(\mu(t) - r(t) + \lambda(t)\sigma_p(t)\right) P^*(t,T)\,dt - \sigma_p(t) P^*(t,T)\,dW^Q(t) \end{aligned}$$

Denne prosessen skal være en martingale under dette sannsynlighetsmålet. Det innebærer at driftleddet må være lik 0. Det gir følgende markedspris på risiko:

$$\lambda(t) = \frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma_p(t)}$$

Den diskonterte prisprosessen under Q blir dermed:

$$dP^*(t,T) = -\sigma_p(t) P^*(t,T) dW^Q(t)$$

Har dermed følgende:

$$P^*(t,T) = E_t^Q\left(P^*(T,T)\right)$$
$$e^{-\int_0^t r(s)ds} P(t,T) = E_t^Q\left(e^{-\int_0^T r(s)ds} P(T,T)\right)$$

(3.28) $$P(t,T) = E_t^Q\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\right)$$

Vi ønsker nå å finne en lukket form løsning på verdien av nullkupongobligasjonen på tid t, P(t,T). For å finne dette tar vi utgangspunkt i (3.28).

Vi vet at for en normalfordelt variabel X gjelder følgende:

$$E_t\left(e^X\right) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Forventningen er relativt rett frem å finne:

$$
\begin{aligned}
\mu &= E_t\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) \\
&= -\int_t^T E_t\left(r(s)\right)ds \\
&= -\int_t^T \left(b + e^{-a(s-t)}\left(r(t)-b\right)\right)ds \\
&= -\int_t^T b\,ds - \int_t^T e^{-a(s-t)}\left(r(t)-b\right)ds \\
&= -b(T-t) + \frac{1}{a}\left(e^{-a(T-t)} - e^{-a(t-t)}\right)\left(r(t)-b\right) \\
&= -b(T-t) + \frac{1}{a}\left(e^{-a(T-t)} - 1\right)\left(r(t)-b\right)
\end{aligned}
$$

Variansen er litt vanskeligere. Først må vi beregne kovariansen, siden denne skal brukes for å beregne variansen.

Kovarians:

$$
\begin{aligned}
&Cov_t\left(X_u, X_s\right) \\
&= E_t\left(\sigma^2 \int_t^u e^{-a(u-v)}dB(v) \int_t^s e^{-a(s-k)}dB(k)\right) \\
&= \sigma^2 \int_t^{\min(u,s)} e^{-a(u+s-2g)}dg \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\left[e^{-a(u+s-2g)}\right]_t^{\min(u,s)} \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{-a|u-s|} - e^{-a(u+s-2t)}\right)
\end{aligned}
$$

Tar vi u=s får vi betinget varians:

$$
Var_t = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(s-t)}\right)
$$

Siden vi nå har beregnet kovariansen kan vi beregne variansen. Variansen blir:

$$
\begin{aligned}
Var_t\left(\int_t^T r(s)ds\right) &= \int_t^T\int_t^T Cov_t\left(r(s),r(u)\right)dsdu \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\left(\int_t^T\left(\int_t^u e^{-a(u-s)}ds+\int_u^T e^{-a(s-u)}ds\right)du-\int_t^T\int_t^T e^{-a(u+s-2t)}dsdu\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T\left(\left[e^{-a(u-s)}\right]_t^u-\left[e^{-a(s-u)}\right]_u^T+\left[e^{-a(u+s-2t)}\right]_t^T\right)du \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T\left(e^{-a(u-u)}-e^{-a(u-t)}-e^{-a(T-u)}+e^{-a(u-u)}+e^{-a(u+T-2t)}-e^{-a(u+t-2t)}\right)du \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_t^T\left(2-2e^{-a(u-t)}-e^{-a(T-u)}+e^{-a(u+T-2t)}\right)du \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(2(T-t)+\frac{2}{a}\left[e^{-a(u-t)}\right]_t^T-\frac{1}{a}\left[e^{-a(T-u)}\right]_t^T-\frac{1}{a}\left[e^{-a(u+T-2t)}\right]_t^T\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(2(T-t)+\frac{2}{a}\left(e^{-a(T-t)}-e^{-a(t-t)}\right)-\frac{1}{a}\left(e^{-a(T-T)}-e^{-a(T-t)}\right)-\frac{1}{a}\left(e^{-a(T+T-2t)}-e^{-a(t+T-2t)}\right)\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(2(T-t)+\frac{2}{a}\left(e^{-a(T-t)}-1\right)-\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)-\frac{1}{a}\left(e^{-2a(T-t)}-e^{-a(T-t)}\right)\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(2(T-t)+\frac{4}{a}\left(e^{-a(T-t)}-1\right)+\frac{1}{a}\left(1-e^{-2a(T-t)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Nå har vi både forventningen og variansen og kan dermed beregne:

$$
\begin{aligned}
P(t,T) &= E_t\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\right) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma} \\
&= e^{-b(T-t)+\frac{1}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)(r_t-b)+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2a^2}\left(2(T-t)+\frac{4}{a}\left(e^{-a(T-t)}-1\right)+\frac{1}{a}\left(1-e^{-2a(T-t)}\right)\right)} \\
&= e^{\left(\frac{\sigma^2}{2a^2}-b\right)(T-t)+\left(e^{-a(T-t)}-1\right)\left(\frac{\sigma^2}{a^3}+\frac{1}{a}(r_t-b)\right)+\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-2a(T-t)}\right)}
\end{aligned}
$$

Dette ser litt "grisete" ut. For at det skal se litt penere ut definerer vi følgende variabler:

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &\equiv \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \\
G(t,T) &\equiv e^{\frac{(B(t,T)-(T-t))\left(a^2b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{a^2}-\frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2}
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Dermed kan verdien av nullkupongobligasjonen i et Vasicek rammeverk skrives som:

(3.30) $P(t,T) = G(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$

$$dP(t,T) = \gamma(t)P(t,T)dt - \sigma_p(t)P(t,T)dW(t)$$

$$\gamma(t) = \frac{a\left(m - r(t)\right)\dfrac{\partial P}{\partial r(t)} + \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2(t)}\sigma^2}{P(t,T)}$$

$$\sigma_P(t) = \sigma\frac{B(t,T)P(t,T)}{P(t,T)} = \sigma B(t,T) = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

Verdt å merke seg at nullkupongobligasjonens volatilitet er:

$$\sigma_P(t) = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

Ser at volatiliteten er stigende i T. Nullkupongobligasjonens volatilitet er avhengig av rentens volatilitet, tilbakevendingshastigheten a samt tidsdifferansen mellom forfallstidspunkt T og inngåelsestidspunkt t. Når $T \to \infty$ vil $\sigma_P(t) \to \frac{\sigma}{a}$. Dvs. at nullkupongobligasjonens volatilitet ikke kan bli større enn $\frac{\sigma}{a}$.

3.3.3.3 Aktiva

For å gi et mer komplett bilde av et forsikringsselskaps risiko antar vi at selskapets aktiva påvirkes av både aktivarisiko og renterisiko. Dermed blir den stokastiske prosessen for aktiva:

(3.31) $dA(t) = \mu(t)A(t)dt + \sigma_A(t)A(t)\left[\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\right]$

μ og σ er henholdsvis forventet avkastning og volatilitet til aktiva. W(t) er en standard Wienerprosess uavhengig av Z(t) og fanger opp renterisiko. Z(t) fanger opp all annen aktivarisiko som ikke skyldes renterisiko. Koeffisienten $\rho \in [-1,1]$ representerer korrelasjonen mellom totalverdien på aktiva, A(t), og renten, r(t). Dvs at ρ er andel renterisiko i aktivas totalrisiko. Total varians til aktiva σ_A^2 kan splittes i to: en renterisikodel $\rho^2\sigma_A^2$ og en aktivarisikodel $(1-\rho^2)\sigma_A^2$.

3.3.3.4 De to risikable prosessene under Q

Som tidligere nevnt har vi nå tre aktiva i økonomien vår, nemlig to risikable aktiva samt et risikofritt aktivum. Disse tre prosessene er:

Aktivaprosess:

$$dA(t) = \mu(t)A(t)dt + \sigma_A(t)A(t)\left[\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\right]$$

Nullkupongobligasjonsprosess:

$$dP(t,T) = \alpha(t)P(t,T)dt - \sigma_p(t)P(t,T)dW(t)$$

Risikofritt aktivum:

$$dD(t) = r(t)D(t)dt$$

Det første vi gjør er å finne nullkupongprosessen under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q. Det vil som kjent si å bruke det risikofrie aktivumet som numeraire. Denne prosessen ser ut som følger:

$$X(t) = \frac{P(t,T)}{D(t)}$$

som ved Itôs lemma gir:

$$\begin{aligned} dX(t) &= -\frac{P(t,T)}{D^2(t)} dD(t) + \frac{1}{D(t)} dP(t,T) \\ &= -r(t)X(t)dt + X(t)\big(\alpha(t)dt - \sigma_p(t)dW(t)\big) \\ &= \big(\alpha(t) - r(t)\big)X(t)dt - \sigma_p(t)X(t)dW(t) \end{aligned}$$

Dette er under det objektive sannsynlighetsmålet P. Bruker Girsanovs teorem for å finne prosessen under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q. Prosessen under Q ser ut som følger:

$$dX(t) = \big(\alpha(t) - r(t) + \lambda^1(t)\sigma_p(t)\big)X(t)dt - \sigma_p(t)X(t)dW^Q(t)$$

Denne prosessen skal være en martingale under Q. Dette gir dermed følgende markedspris på renterisiko:

$$\lambda^1(t) = \frac{r(t) - \alpha(t)}{\sigma_p(t)}$$

Setter vi denne inn i nullkupongobligasjonsprosessen får vi prisprosessen under Q:

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= \big(\alpha(t) + \lambda^1(t)\sigma_p(t)\big)P(t,T)dt - \sigma_p(t)P(t,T)dW^Q(t) \\ &= r(t)P(t,T)dt - \sigma_p(t)P(t,T)dW^Q(t) \end{aligned}$$

Finner aktivaprosessen under Q:

Definerer en ny prosess:

$$X(t) = \frac{A(t)}{D(t)}$$

Itôs lemma gir:

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= -\frac{A(t)}{D^2(t)}dD(t) + \frac{1}{D(t)}dA(t) \\
&= -r(t)X(t)dt + X(t)\left(\mu(t)dt + \sigma_A(t)\left(\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\right)\right) \\
&= \left(\mu(t) - r(t)\right)X(t)dt + \sigma_A(t)X(t)\left(\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\right)
\end{aligned}
$$

Under Q blir prosessen:

$$
\begin{aligned}
dX(t) = &\left(\mu(t) - r(t) - \lambda^1(t)\sigma_A(t)\rho(t) - \lambda^2(t)\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\right)X(t)dt \\
&+\sigma_A(t)X(t)\left(\rho(t)dW^Q(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ^Q(t)\right)
\end{aligned}
$$

som gir markedsprisen på risiko:

$$
\begin{aligned}
\lambda^2(t) &= \frac{\mu(t) - r(t) - \lambda^1(t)\sigma_A(t)\rho(t)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}} \\
&= \frac{\mu(t) - r(t) - \dfrac{\left(r(t)-\alpha(t)\right)\sigma_A(t)\rho(t)}{\sigma_p(t)}}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}
\end{aligned}
$$

Setter inn i aktivaprosessen for å få denne under Q:

$$
\begin{aligned}
dA(t) = &\left(\mu(t) - \lambda^1(t)\sigma_A(t)\rho(t) - \lambda^2(t)\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\right)A(t)dt \\
&+\sigma_A(t)A(t)\left(\rho(t)dW^Q(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ^Q(t)\right) \\
&= r(t)A(t)dt + \sigma_A(t)A(t)\left(\rho(t)dW^Q(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ^Q(t)\right)
\end{aligned}
$$

Har dermed de to prosessene under Q:

$$
dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt - \sigma_p(t)P(t,T)dW^Q(t)
$$

$$
dA(t) = r(t)A(t)dt + \sigma_A(t)A(t)\left(\rho(t)dW^Q(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ^Q(t)\right)
$$

3.3.3.5 Kontrakt A

Verdien på forsikringskontraktene og egenkapitalen får vi fra (3.4) og (3.5):

Verdi egenkapital:

$$E(t) = C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Verdi forsikringskontrakter:

$$G(t) = P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Som under prising av egenkapitalen og forsikringskontraktene fra situasjonen med deterministisk rente trenger vi også her bare å finne lukket form løsning for $C_t\left(A(T), G^*(T), T\right)$. Deretter bytter vi ut kontraktsprisen for å finne $C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$ og bruker put-call pariteten for å finne $P_t\left(A(T), G^*(T), T\right)$. Dermed kan vi finne lukkede løsninger for både forsikringskontraktene og egenkapitalen. Begynner derfor med å beregne den europeiske call-opsjonen.

<u>Europeisk call-opsjon:</u>

$$\begin{aligned}
C(t) &= P(t,T)E_t^{Q^T}\left(\left(A(T) - G^*(T)\right)1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\right) \\
&= P(t,T)E_t^{Q^T}\left(A(T)1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\right) - P(t,T)E_t^{Q^T}\left(G^*(T)1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\right) \\
&= A(t)E_t^{Q^A}\left(1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\right) - P(t,T)E_t^{Q^T}\left(G^*(T)1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\right) \\
&= A(t)Q^A\left(A(t) > G^*(T)\right) - P(t,T)G^*(T)Q^T\left(A(t) > G^*(T)\right) \\
&= C^1(t) - C^2(t)
\end{aligned}$$

Siden:

$$P(t,T)E_t^{Q^T}\left(\frac{A(T)1_{\{A(T)>G^*(T)\}}}{P(T,T)}\right)=A(t)E_t^{Q^A}\left(\frac{A(T)1_{\{A(T)>G^*(T)\}}}{A(T)}\right)$$

For C^1 bruker vi dermed aktiva som numeraire:

$$\begin{aligned}C^1(t)&=A(t)E_t^{Q^A}\left[\frac{1_{\{A(T)>G^*(T)\}}A(T)}{A(T)}\right]\\&=A(t)E_t^{Q^A}\left[1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\right]\\&=A(t)Q^A\left(A(T)>G^*(T)\right)\end{aligned}$$

Ser at vi må finne sannsynligheten for at $A(T)>G^*(T)$ under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q^A.

For C^2 bruker vi forward målet:

$$\begin{aligned}C^2(t)&=P(t,T)E_t^{Q^T}\left[\frac{1_{\{A(T)>G^*(T)\}}G^*(T)}{P(T,T)}\right]\\&=P(t,T)G^*(T)E_t^{Q^T}\left[1_{\{A(T)>G^*(T)\}}\right]\\&=P(t,T)G^*(T)Q^T\left(A(T)>G^*(T)\right)\end{aligned}$$

Her må vi finne sannsynligheten for at $A(T)>G^*(T)$ under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q^T.

Verdien på tid t blir dermed:

$$C(t)=A(t)Q^A\left(A(T)>G^*(T)\right)-P(t,T)G^*(T)Q^T\left(A(T)>G^*(T)\right)$$

Tar C[1] først. Her skal $X(t) = \frac{P(t,T)}{A(t)}$ være en martingale under sannsynlighetsmålet Q^A.

$$X(t) = \frac{P(t,T)}{A(t)} = f\left(A(t), t\right)$$
$$f(A,P) = \frac{P}{A}$$

Siden vi her har to aktiva som begge er stokastiske prosesser blir Itôs lemma litt endret her. Vi får et ekstra ledd som inneholder de to kryssderiverte. Siden de to kryssderiverte er like får vi kun ett ekstra ledd.

De deriverte er:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = -\frac{P}{A^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = 2\frac{P}{A^3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{dP}{dt}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial P} = \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial A} = -\frac{1}{A^2}$$

Bruker Itôs lemma:

$$dX(t) = \frac{1}{A(t)}dP(t,T) - \frac{P(t,T)}{A^2(t)}dA(t) + \frac{P(t,T)}{A^3(t)}\left(dA(t)\right)^2 - \frac{1}{A^2(t)}dA(t)\,dP(t,T)$$
$$\left(dA(t)\right)^2 = \sigma_A^2(t)A^2(t)\rho^2(t)dt + \sigma_A^2(t)A^2(t)\left(1-\rho^2(t)\right)dt = \sigma_A^2(t)A^2(t)dt$$
$$dA(t)\,dP(t,T) = A(t)P(t,T)\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)$$

$$\begin{aligned} & dX(t) = X(t)\left(\alpha(t)dt - \sigma_p(t)dW(t)\right) \\ \Rightarrow \qquad & \quad -X(t)\left(\mu(t)dt + \sigma_A(t)\left(\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\right)\right) \\ & \quad +X(t)\sigma_A^2(t)dt - X(t)\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) \end{aligned}$$

Dette er under det objektive sannsynlighetsmålet P. For å få prosessen under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q^A bruker vi Girsanovs teorem. Forskjellen fra situasjonen uten stokastisk rente blir nå at vi får to markedspriser på risiko, en markedspris på renterisiko $\lambda^1(t)$ og en markedspris på aktivarisiko $\lambda^2(t)$. dX(t) under sannsynlighetsmålet Q^A blir dermed:

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \left(\alpha(t)-\mu(t)+\sigma_A^2(t)-\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)\right)X(t)\,dt \\
&\quad -X(t)\left(\left(\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)\left(dW^{Q^A}(t)-\lambda^1(t)\,dt\right)\right)+\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\left(dZ^{Q^A}(t)-\lambda^2(t)\,dt\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(t)-\mu(t)+\sigma_A^2(t)-\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)+\lambda^1(t)\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right) \\ +\lambda^2(t)\left(\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\right) \end{pmatrix} X(t)\,dt \\
&\quad -X(t)\left(\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)dW^{Q^A}(t)+\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^A}(t)\right)
\end{aligned}
$$

Denne prosessen skal være en martingale under dette sannsynlighetsmålet. Det innebærer at driftleddet må være lik 0. Markedsprisen på aktivarisiko kan dermed skrives som:

$$
\lambda^2(t) = \frac{\mu(t)-\alpha(t)-\sigma_A^2(t)+\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)-\lambda^1(t)\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}
$$

Ser at markedsprisen på renterisiko inngår i markedsprisen på aktivarisiko.

For å finne de to markedsprisene på risiko under sannsynlighetsmålet Q^A innfører vi en ny relativ prosess:

$$
J(t) = \frac{D(t)}{A(t)}
$$

Denne prosessen skal være en martingale under Q^A. Itôs lemma gir:

$$
\begin{aligned}
dJ(t) &= \frac{1}{A(t)}dD(t) - \frac{D(t)}{A^2(t)}dA(t) + \frac{D(t)}{A^3(t)}\big(dA(t)\big)^2 \\
&= J(t)r(t)dt - J(t)\Big(\mu(t)dt + \sigma_A(t)\Big[\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\Big]\Big) + J(t)\sigma_A^2(t)dt \\
&= \big(r(t) - \mu(t) + \sigma_A^2(t)\big)J(t)dt - J(t)\sigma_A(t)\Big[\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\Big]
\end{aligned}
$$

Under sannsynlighetsmålet Q^A blir J(t):

$$
\begin{aligned}
dJ(t) = &\Big(r(t) - \mu(t) + \sigma_A^2(t) + \lambda^1(t)\sigma_A(t)\rho(t) + \lambda^2(t)\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\Big)J(t)dt \\
&- J(t)\sigma_A(t)\Big[\rho(t)dW^{Q_A}(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ^{Q_A}(t)\Big]
\end{aligned}
$$

Driftleddet lik 0 gir markedsprisen på aktivarisiko:

$$
\lambda^2(t) = \frac{\mu(t) - r(t) - \sigma_A^2(t) - \sigma_A(t)\rho(t)\lambda^1(t)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}
$$

Dermed har vi to likninger i to ukjente for de to markedsprisene på risiko:

$$
\lambda^2(t) = \frac{\mu(t) - r(t) - \sigma_A^2(t) - \sigma_A(t)\rho(t)\lambda^1(t)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}
$$

og

$$
\lambda^2(t) = \frac{\mu(t) - \alpha(t) - \sigma_A^2(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) - \lambda^1(t)\big(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\big)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}
$$

Setter disse lik hverandre og løser for $\lambda^1(t)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu(t) - \alpha(t) - \sigma_A^2(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) - \lambda^1(t)\big(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\big)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}} \\
&= \frac{\mu(t) - r(t) - \sigma_A^2(t) - \sigma_A(t)\rho(t)\lambda^1(t)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}
\end{aligned}
$$

som gir:

$$\lambda^1(t) = \frac{r(t) - \alpha(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)}{\sigma_p(t)}$$

dJ(t) er dermed en martingale under Q^A:

$$dJ(t) = \begin{pmatrix} r(t) - \mu(t) + \sigma_A^2(t) + \left(\dfrac{r(t) - \alpha(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)}{\sigma_p(t)} \right) \sigma_A(t)\rho(t) \\ +\mu(t) - \alpha(t) - \sigma_A^2(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) \\ -\left(\dfrac{r(t) - \alpha(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)}{\sigma_p(t)} \right) \left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right) \end{pmatrix} J(t)\,dt$$
$$-J(t)\sigma_A(t)\left[\rho(t)\,dW^{Q^A}(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^A}(t)\right]$$
$$= -J(t)\sigma_A(t)\left[\rho(t)\,dW^{Q^A}(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^A}(t)\right]$$

dX(t) er også en martingale under Q^A:

$$dX(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) - \mu(t) + \sigma_A^2(t) - \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) + \left(\dfrac{r(t) - \alpha(t)}{\sigma_p(t)} \right) \left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right) \\ +\mu(t) - \alpha(t) - \sigma_A^2(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) - \left(\dfrac{r(t) - \alpha(t)}{\sigma_p(t)} \right) \left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right) \end{pmatrix} X(t)\,dt$$
$$-X(t)\left(\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right) dW^{Q^A}(t) + \sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^A}(t)\right)$$
$$= -X(t)\left(\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right) dW^{Q^A}(t) + \sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^A}(t)\right)$$

Denne prosessen kan vi løse ved å betrakte en ny prosess:

$$Y(t) = \ln X(t)$$

Itôs lemma gir:

$$\begin{aligned}
dY(t) &= \frac{1}{X(t)}dX(t) - \frac{1}{2X^2(t)}\left(dX(t)\right)^2 \\
&= -\left(\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)dW^{Q^A}(t)+\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}dZ^{Q^A}(t)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)^2+\sigma_A^2(t)\left(1-\rho^2(t)\right)\right)dt
\end{aligned}$$

Integrerer og løser vi denne får vi aktivas prisprosess under sannsynlighetsmålet Q^A:

$$\begin{aligned}
\int_t^T dY(s) = &-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds \\
&-\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^A}(s)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^A}(s)\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{X(T)}{X(t)} = e^{-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds-\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^A}(s)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^A}(s)\right)}$$

$$\frac{P(T,T)}{A(T)} = \frac{P(t,T)}{A(t)}e^{-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds-\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^A}(s)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^A}(s)\right)}$$

$$A(T) = \frac{A(t)}{P(t,T)}e^{\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds+\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^A}(s)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^A}(s)\right)}$$

Dermed kan vi beregne sannsynligheten for at $A(T) > G^*(T)$ under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q^A:

$$\begin{aligned}
&Q^A\left(A(T) > G^*(T)\right) \\
&= Q^A\left(\frac{A(t)}{P(t,T)}e^{\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds+\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho\right)dW^{Q^A}(s)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^A}(s)\right)} > G^*(T)\right) \\
&= Q^A\left(\varepsilon < \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P(t,T)}+\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}}\right) \\
&= N(d_1)
\end{aligned}$$

Har dermed beregnet $C^1(t) = A(t)N(d_1)$

Deretter C^2:

Bruker nullkupongobligasjonen som numeraire, dermed kan aktiva relativt til nullkupongobligasjonen representeres ved følgende prosess:

$$X(t) = \frac{A(t)}{P(t,T)}$$

Denne prisprosessen skal være en martingale under forward målet Q^T:

$$\begin{aligned}
&f(A,P) = \frac{A}{P} \\
&\frac{\partial f}{\partial A} = \frac{1}{P} \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{A}{P^2}\frac{dP}{dt} \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial P} = \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial A} = -\frac{1}{P^2}
\end{aligned}$$

Itôs lemma gir:

$$\begin{aligned}
dX(t) &= -\frac{A(t)}{P(t,T)^2}dP(t,T) + \frac{1}{P(t,T)}dA(t) - \frac{1}{P(t,T)^2}dP(t,T)dA(t) \\
&= -X(t)\big(\alpha(t)dt - \sigma_p(t)dW(t)\big) \\
&\quad + X(t)\Big(\mu(t)dt + \sigma_A(t)\Big(\rho(t)dW(t) + \sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\Big)\Big) \\
&\quad - X(t)\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) \\
&= \big(\mu(t) - \alpha(t) - \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)\big)X(t)dt \\
&\quad + X(t)\Big(\big(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\big)dW(t) + \sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}dZ(t)\Big)
\end{aligned}$$

Dette er under det objektive sannsynlighetsmålet P. Under Q^T blir prosessen:

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \left(\mu(t)-\alpha(t)-\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)\right)X(t)\,dt \\
&\quad + X(t)\begin{pmatrix} \left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)\left(dW^{Q^T}(t)-\lambda^1(t)\,dt\right) \\ +\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\left(dZ^{Q^T}(t)-\lambda^2(t)\,dt\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu(t)-\alpha(t)-\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)-\lambda^1(t)\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right) \\ -\lambda^2(t)\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)} \end{pmatrix} X(t)\,dt \\
&\quad + X(t)\left(\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)dW^{Q^T}(t)+\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^T}(t)\right)
\end{aligned}
$$

Som gir markedsprisen på risiko:

$$
\lambda^2(t)=\frac{\mu(t)-\alpha(t)-\rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t)-\lambda^1(t)\left(\sigma_p(t)+\sigma_A(t)\rho(t)\right)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}
$$

For å finne de to markedsprisene på risiko definerer vi en ny prosess:

$$
Z(t)=\frac{D(t)}{P(t,T)}
$$

Denne skal også være en martingale under forward målet Q^T:

$$
\begin{aligned}
f(P,D) &= \frac{D}{P} \\
\frac{\partial f}{\partial P} &= -\frac{D}{P^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial P^2} &= 2\frac{D}{P^3} \\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{P}\frac{dD}{dt}
\end{aligned}
$$

Itôs lemma gir:

$$dZ(t) = \frac{1}{P(t,T)} dD(t) - \frac{D(t)}{P(t,T)^2} dP(t,T) + \frac{D(t)}{P(t,T)^3} \left(dP(t,T)\right)^2$$
$$= Z(t)r(t)dt - Z(t)\left(\alpha(t)dt - \sigma_P(t)dW(t)\right) + \sigma_P^2(t)dt$$
$$= \left(r(t) - \alpha(t) + \sigma_P^2(t)\right)Z(t)dt + \sigma_P(t)Z(t)dW(t)$$

Under sannsynlighetsmålet Q^T ser denne ut som følger:

$$dZ(t) = \left(r(t) - \alpha(t) + \sigma_P^2(t)\right)Z(t)dt + \sigma_P(t)Z(t)\left(dW^{Q^T}(t) - \lambda^1(t)dt\right)$$
$$= \left(r(t) - \alpha(t) + \sigma_P^2(t) - \lambda^1(t)\sigma_P(t)\right)Z(t)dt + \sigma_P(t)Z(t)dW^{Q^T}(t)$$

Dette gir markedsprisen på renterisiko:

$$\lambda^1(t) = \frac{r(t) - \alpha(t) + \sigma_P^2(t)}{\sigma_P(t)}$$

Dermed blir dZ(t) en martingale under Q^T:

$$dZ(t) = \sigma_P(t)Z(t)dW^{Q^T}(t)$$

Setter deretter $\lambda^1(t)$ inn i $\lambda^2(t)$:

$$\lambda^2(t) = \frac{\mu(t) - \alpha(t) - \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) - \left(\dfrac{r(t) - \alpha(t) + \sigma_P^2(t)}{\sigma_P(t)}\right)\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right)}{\sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}$$

Som gjør dX(t) en martingale under Q^T:

$$dX(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) - \alpha(t) - \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) - \dfrac{r(t) - \alpha(t) + \sigma_P^2(t)}{\sigma_P(t)}\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right) \\ -\mu(t) + \alpha(t) + \rho(t)\sigma_A(t)\sigma_P(t) + \left(\dfrac{r(t) - \alpha(t) + \sigma_P^2(t)}{\sigma_P(t)}\right)\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right) \end{pmatrix} X(t)\,dt$$
$$+X(t)\left(\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right)dW^{Q^T}(t) + \sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^T}(t)\right)$$

$$dX(t) = X(t)\left(\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right)dW^{Q^T}(t) + \sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^T}(t)\right)$$

Denne kan vi løse ved å definere en ny prosess:

$$Y(t) = \ln X(t)$$

som ved Itôs lemma gir:

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{1}{X(t)}dX(t) - \frac{1}{2X^2(t)}\left(dX(t)\right)^2 \\ &= \left(\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right)dW^{Q^T}(t) + \sigma_A(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,dZ^{Q^T}(t)\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_p(t) + \sigma_A(t)\rho(t)\right)^2 + \sigma_A^2(t)\left(1-\rho^2(t)\right)\right)dt \end{aligned}$$

Integrerer vi og løser denne får vi:

$$(3.32) \quad A(T) = \frac{A(t)}{P(t,T)} e^{-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2 + \sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds + \int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^T}(s) + \sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}\,dZ^{Q^T}(s)\right)}$$

Har dermed aktivaprosessen under sannsynlighetsmålet Q^T. Kan dermed beregne sannsynligheten for at $A(T) > G^*(T)$ under det risikojusterte sannsynlighetsmålet Q^T.

$$
\begin{aligned}
&Q^T\left(A_T > G_T^*\right) \\
&= Q^T\left(\frac{A(t)}{P(t,T)} e^{-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds+\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^T}(s)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^T}(s)\right)} > G^*(T)\right) \\
&= Q^T\left(\varepsilon < \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P(t,T)}-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}}\right) \\
&= N(d_2)
\end{aligned}
$$

Har dermed beregnet $C^2(t) = P(t,T)N(d_2)$

Verdien på call-opsjonene kan dermed skrives som:

(3.33) $C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) = A(t)N(d_1) - P(t,T)G^*(T)N(d_2)$

hvor

$$
d_1 = \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P(t,T)}+\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}}
$$

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P(t,T)}-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}} \\
&= d_1 - \sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}
\end{aligned}
$$

(3.34) $C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right) = A(t)N(d_3) - P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_4)$

hvor

$$d_3 = \frac{\ln \frac{\alpha A(t)}{G^*(T)P(t,T)} + \frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A(s)\rho(s) \right)^2 + \sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right) \right) dt}{\sqrt{\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A(s)\rho(s) \right)^2 + \sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right) \right) dt}}$$

$$d_4 = \frac{\ln \frac{\alpha A(t)}{G^*(T)P(t,T)} - \frac{1}{2}\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A(s)\rho(s) \right)^2 + \sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right) \right) dt}{\sqrt{\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A(s)\rho(s) \right)^2 + \sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right) \right) dt}}$$

$$= d_3 - \sqrt{\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A(s)\rho(s) \right)^2 + \sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right) \right) dt}$$

Verdien på put-opsjonen kan skrives som:

(3.35) $P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) = P(t,T)G^*(T)N(-d_2) - A(t)N(-d_1)$

Dermed kan verdien på egenkapitalen skrives som:

$$E(t) = C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

(3.36)
$$= A(t)N(d_1) - P(t,T)G^*(T)N(d_2) - \alpha A(t)N(d_3) + P(t,T)G^*(T)N(d_4)$$
$$= A(t)\left(N(d_1) - \alpha N(d_3)\right) - P(t,T)G^*(T)\left(N(d_2) - N(d_4)\right)$$

Verdien på forsikringskontraktene kan skrives som:

$$G(t) = P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

(3.37)
$$= P(t,T)G^*(T) - P(t,T)G^*(T)N(-d_2) + A(t)\left(N(-d_1)\right)$$
$$+ \alpha A(t)N(d_3) - P(t,T)G^*(T)N(d_4)$$
$$= A(t)\left(N(-d_1) + \alpha N(d_3)\right) - P(t,T)G^*(T)\left(N(d_4) - N(d_2)\right)$$

hvor d_1, d_2, d_3 og d_4 er som under (3.33) og (3.34)

Forsikringskontrakt uten tilbakebetaling:

Her spiller dødeligheten inn. Utbetaling skjer her kun hvis forsikringstaker er i live på utbetalingstidspunktet. Dermed blir analysen som ovenfor, men med en forandring. Vi må dividere verdien på forsikringskontraktene og egenkapitalen med sannsynligheten for at forsikringstaker er i live. Fra (1.9) vet vi at denne sannsynligheten er:

$L_x(T\text{-}t)$

Dermed kan verdien på forsikringskontrakten skrives som:

(3.38)
$$\begin{aligned} G(t) &= \left(P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T),G^*(T),T\right) + \alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)} \\ &= \left(A(t)\left(N(-d_1)+\alpha N(d_3)\right) - P(t,T)G^*(T)\left(N(d_4)-N(d_2)\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)} \end{aligned}$$

Dermed blir verdien på egenkapitalen uten tilbakebetaling:

(3.39)
$$\begin{aligned} E(t) &= A(t)\left(1-\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right) + \left(C_t\left(A(T),G^*(T),T\right) - \alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)\right)\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right) \\ &= \left(A(t)\left(N(d_1)-\alpha N(d_3)\right) - P(t,T)G^*(T)\left(N(d_2)-N(d_4)\right)\right)\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right) \\ &\quad -\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}-1\right)A(t) \end{aligned}$$

hvor d_1, d_2, d_3 og d_4 er som for kontrakten med tilbakebetaling.

3.3.3.6 Kontrakt B

Under situasjonen med deterministisk rente så vi at vi kunne finne en relativt enkel lukket form løsning på multi-periode garantikontrakten. Persson og Aase (1997) analyserer en to-periode garanti når renten er stokastisk. De finner at markedsverdien er gitt som en funksjon av den kumulative bivariate normalfordelingen. Dette arbeidet fortsettes av Miltersen og

Persson (1999) i en Heath-Jarrow-Morton setting. De finner markedsverdien på en to-periode garanti på både spotrenten og aksjeavkastningen. Lindset (2001) utvider disse arbeidene igjen og finner lukket form løsning på en multiperiodegaranti over mer enn to perioder. Dette blir relativt komplekst sett i forhold vårt kunnskapsnivå. Vi nøyer oss med å utlede en tilnærming til verdien på en slik multiperiodegaranti med stokastisk rente. Den lukkede form løsningen vi finner under i (3.40) kan dermed ikke sees på som en teoretisk riktig løsning, men vi bruker den som en tilnærming. Simon og Van Wouwe (2001) gjør dette under deterministisk rente.

Forsikringskontraktene:

$$G(t_0) = \alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n} P\left(t_{j-1},t_j\right)E_t^{Q^T}\left(E_{t_{j-1}}^{Q^T}\left(e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\max\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}-e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)},0\right)\right)\right)$$

$$= \alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n} P\left(t_{j-1},t_j\right)\left(\begin{array}{l} E_t^{Q^T}\left(e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)+\delta E_t^{Q^T}\left(E_{t_{j-1}}^{Q^T}\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}1_{\left\{\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right\}}\right)\right) \\ -\delta E_t^{Q^T}\left(E_{t_{j-1}}^{Q^T}\left(e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}1_{\left\{\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right\}}\right)\right)\end{array}\right)$$

$$= \alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(1+2-3\right)$$

(2): Bytter numeraire

$$E_t^{Q^T}\left(E_{t_{j-1}}^{Q^T}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}1_{\left\{\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right\}}\right)\right)\right)$$

$$= E_t^{Q^A}\left(E_{t_{j-1}}^{Q^T}\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}\frac{A\left(t_{j-1}\right)}{A\left(t_j\right)}1_{\left\{\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right\}}\right)\right)$$

$$= E_t^{Q^T}\left(Q_{t_{j-1}}^{A}\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)\right)$$

Det er her den første forenklingen vår er. Under deterministisk rente kunne vi fastslå følgende:

$$E_t^{Q^T}\left(Q_{t_{j-1}}^A\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right)\right)=Q^A\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right)$$

Når vi nå har stokastisk rente blir dette ikke riktig lenger. Dette er fordi aktivaavkastningene ikke lenger er uavhengige av hverandre. Det innebærer at avkastningen på tid t_j ikke er uavhengig av avkastningen på tid t_{j-1}. Men som en tilnærming bruker vi dette også under stokastisk rente. Dvs at vi antar at:

$$E_t^{Q^T}\left(Q_{t_{j-1}}^A\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right)\right)\approx Q_{t_{j-1}}^A\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right)$$

Prisprosessen til aktiva under Q^A med stokastisk rente har vi:

$$A(t_j)=\frac{A(t_{j-1})}{P(t_{j-1},t_j)}e^{\frac{1}{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)dt+\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^A}(t)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^A}(t)\right)}$$

(3):

$$E_t^{Q^T}\left(P(t_{j-1},t_j)E_{t_{j-1}}^{Q^T}\left(e^{r^G(t_j-t_{j-1})}1_{\left\{\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right\}}\right)\right)$$
$$=E_t^{Q^T}\left(P(t_{j-1},t_j)e^{r^G(t_j-t_{j-1})}Q_{t_{j-1}}^T\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}>e^{r^G(t_j-t_{j-1})}\right)\right)$$

Igjen gjør vi samme forenkling og antar:

$$E_t^{Q^T}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}Q_{t_{j-1}}^T\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)\right)$$
$$=P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}Q_{t_{j-1}}^T\left(\frac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)$$

Forsikringskontraktenes verdi kan dermed skrives som:

$$G(t_0)=\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(\begin{array}{l}P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta Q^A\left(\dfrac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)\\ -P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\delta Q^T\left(\dfrac{A\left(t_j\right)}{A\left(t_{j-1}\right)}>e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)\end{array}\right)$$
$$=\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_j\right)-P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

(3.40) $$G(t_0)=\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_j\right)-P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j=\frac{\ln\left(\dfrac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right)-r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}{\sqrt{\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}}$$

$$d2_j=\frac{\ln\left(\dfrac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right)-r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}{\sqrt{\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds}}$$

Egenkapitalens verdi:

(3.41) $$E(t_0)=A(t_0)\left(1-\alpha\prod_{i=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_i\right)-P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

Forsikringskontrakt uten tilbakebetaling:

Her spiller dødeligheten inn. Utbetaling skjer her kun hvis forsikringstaker er i live på utbetalingstidspunktet. Dermed blir analysen som ovenfor, men med en forandring. Vi må dividere verdien på forsikringskontraktene og egenkapitalen med sannsynligheten for at forsikringstaker er i live. Fra (1.9) vet vi at denne sannsynligheten er:

$L_x(T\text{-}t)$

Verdien på forsikringskontraktene uten tilbakebetaling:

(3.42)

$$G(t_0) = \alpha A(t_0) \prod_{j=1}^{n} \left(P\left(t_{j-1}, t_j\right) e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_j\right) - P\left(t_{j-1}, t_j\right) e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)} N\left(d2_j\right) \right) \right) \frac{1}{L_x\left(T - t\right)}$$

Dermed blir verdien på egenkapitalen uten tilbakebetaling:

(3.43)

$$E(t_0) = A(t_0) \left(1 - \frac{1}{L_x\left(T - t\right)} \alpha \prod_{j=1}^{n} \left(P\left(t_{j-1}, t_j\right) e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_j\right) - P\left(t_{j-1}, t_j\right) e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)} N\left(d2_j\right) \right) \right) \right)$$

4. Numeriske eksempler

I dette kapitlet vil vi ta for oss ulike numeriske eksempler på de kontraktene vi gjennomgikk i kapittel tre. I avsnitt 4.1 vil vi se nærmere på en situasjon med diskret tid, en binomisk modell. I avsnitt 4.2 betrakter vi situasjonen med kontinuerlig tid og konstant rente, mens vi i avsnitt 4.3 innfører stokastisk rente. For kontrakt B er hovedfokuset på kontrakten uten mulighet for å gå konkurs, men vi viser i avsnitt 4.3.5 hvordan verdien påvirkes av å innføre begrenset ansvar. Til slutt, i avsnitt 4.4, gir vi numeriske eksempler på hvordan et bermudansk opsjonselement påvirker verdiene. Vi tar for oss kontrakten både med og uten tilbakebetaling. Hovedfokuset er på kontrakten med tilbakebetaling. For kontrakten uten tilbakebetaling vil vi kun vise verdien på egenkapitalen og premien gitt basisverdiene. Dette fordi dødeligheten er uavhengig av den finansielle risikoen og vil således kun være en faktor som vi multipliserer/dividerer verdiene med.

4.1 Binomisk

4.1.1 Kontrakt A med tilbakebetaling

Fra (3.8) vet vi at forsikringskontraktene kan skrives som:

$$G(t) = A(t) - A(t)(1-\alpha)B(a;N,q')$$

Fra (3.9) vet vi at egenkapitalen kan skrives som:

$$E(t) = (1-\alpha)A(t) \cdot B(a;N,q')$$

Verdi egenkapitalen og premiene:

Ut fra disse formlene beregner vi verdiene på forsikringskontraktene og egenkapitalen. Initialverdien er beregnet med følgende parameterverdier:

$$A(t) = 100, r = 0,05, r^G = 0,03, \sigma = 0,2, \alpha = 0,9, T = 10, t = 0, N = 400$$

Dette gir følgende verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene:

Egenkapital	7,76
Premie	92,24

Ser her at verdiene på forsikringskontraktene og egenkapitalen er forskjellig fra de nominelle verdiene på henholdsvis 90 og 10. Dette skyldes den rentegarantien som forsikringsselskapet har utstedt. For en forsikringskontrakt med tilbakebetaling og en garantert rente på 3% som forfaller om 10 år må altså forsikringstaker betale 92,24. Egenkapitalen må skyte inn 7,76.

Tabell 4.1 viser ulike verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene ved ulike verdier på N.

N	10	20	40	80	100	400
Egenkapital	7,96	8,16	8,31	7,81	7,91	7,76
Premie	92,04	91,84	91,69	92,19	92,09	92,24

Tabell 4.1 Verdi egenkapital og premier for ulike N

4.1.2 Kontrakt A uten tilbakebetaling

Fra (3.10) vet vi at forsikringskontraktene kan skrives som:

$$G(t) = \left(A(t) - A(t)(1-\alpha)B(a; N, q')\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}$$

Fra (3.11) vet vi at egenkapitalen kan skrives som:

$$E(t) = A(t)\left(1 - \frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right) + \left(A(t)(1-\alpha)B(a; N, q')\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}$$

Verdi egenkapitalen og premiene:

Hvis vi antar vi har en 40 år gammel forsikringstaker som vil tegne en forsikring på tid t med løpetid T, har vi at $L_x(T\text{-}t) = \frac{L_{x+(T-t)}}{L_x} = \frac{L_{50}}{L_{40}}$

Ut fra disse formlene beregner vi verdiene på forsikringskontraktene og egenkapitalen.
Initialverdien er beregnet med følgende parameterverdier:

$$A(t) = 100, r = 0,05, r^G = 0,03, \sigma = 0,2, \alpha = 0,9, T = 10, t = 0, n = 400, x = 40$$

$L_x(T\text{-}t)$ blir dermed $L_{40}(10) = \frac{L_{50}}{L_{40}} = \frac{94\ 941}{97\ 007} = 0.9787$

Verdien på $L_x(T\text{-}t)$ finner vi fra Statistisk Sentralbyrå (se Vedlegg A).

Dette gir følgende verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene:

Egenkapital	5,74
Premie	94,26

Verdien på premiene blir som ventet høyere når vi innfører dødelighet. Dette så vi var tilfelle under avsnitt 1.8.1 hvor vi verdsatte en oppsatt kapitalforsikring. Dette har sin bakgrunn i ekvivalensprinsippet som vi omtalte i kapittel 1.
Dette vil gjelde for de andre situasjonen vi ser på, slik at vi vil ikke kommentere dette for hver gang vi bringer inn situasjonen uten tilbakebetaling.

4.2 Kontinuerlig tid med konstant rente

4.2.1 Kontrakt A med tilbakebetaling

Fra (3.4) vet vi at forsikringskontraktene kan skrives som :

$$G(t) = P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

som med konstant rente blir:

$$G(t) = e^{-r(T-t)}G^*(T) - P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Fra (3.5) vet vi at egenkapitalen kan skrives som:

$$E(t) = C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Fra (3.13) og (3.14) blir verdiene på call-opsjonene med konstant rente henholdsvis:

(4.1) $$C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) = A(t)N\left(d_1\right) - e^{-r(T-t)}G^*(T)N\left(d_2\right)$$

hvor

$$d_1 = \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

(4.2) $$C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right) = A(t)N\left(d_3\right) - e^{-r(T-t)}\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right)$$

hvor

$$d_3 = \frac{\ln\frac{\alpha A(t)}{G^*(T)} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_4 = \frac{\ln\frac{\alpha A(t)}{G^*(T)} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_3 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Fra (3.15) kan put-opsjonen med konstant rente skrives som:

(4.3) $P\left(A(T),G^*(T),T\right)=e^{-r(T-t)}G^*(T)N\left(-d_2\right)-A(t)N\left(-d_1\right)$

Egenkapitalen og Premiene:

Verdien på forsikringskontraktene og egenkapitalen kan dermed skrives som:

(4.4) $G(t)=A(t)\big(N(-d_1)+\alpha N(d_3)\big)-e^{-r(T-t)}G^*(T)\big(N(d_4)-N(d_2)\big)$

(4.5) $E(t)=A(t)\big(N(d_1)-\alpha N(d_3)\big)-e^{-r(T-t)}G^*(T)\big(N(d_2)-N(d_4)\big)$

hvor d_1, d_2, d_3 og d_4 er gitt over.

Initialverdien er beregnet med følgende parameterverdier:

$$A(t)=100, r=0,05, r^G=0,03, \sigma=0,2, \alpha=0,9, T=10, t=0$$

Dette gir følgende verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene:

Egenkapital	7.63
Premie	92.37

For en forsikringskontrakt med tilbakebetaling og en garantert rente på 3% som forfaller om 10 år må altså forsikringstaker betale 92.37. Egenkapitalen må skyte inn 7.63. Tilsvarende verdier under den binomske beregningen var 92.24 og 7.76. Disse ulikhetene skyldes at den binomiske metoden kun er en tilnærming til modellen i kontinuerlig tid med konstant rente.

Tabell 4.2 viser ulike verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene ved ulike verdier på inputparametrene.

A(t)	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
Egenkapital	1.53	3.05	4.58	6.10	7.63	9.16	10.68	12.21	13.74	15.26	16.79
Premie	18.47	36.95	55.42	73.90	92.37	110.84	129.32	147.79	166.26	184.74	203.21

α	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
Egenkapital	44.10	39.01	34.06	29.26	24.63	20.15	15.83	11.66	7.63	3.75	0.00
Premie	55.90	60.99	65.94	70.74	75.37	79.85	84.17	88.34	92.37	96.25	100.00

r^G	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
Egenkapital	8.83	8.49	8.09	7.63	7.12	6.56	5.96	5.34	4.71	4.09	3.49
Premie	91.17	91.51	91.91	92.37	92.88	93.44	94.04	94.66	95.29	95.91	96.51

σ_A	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
Egenkapital	9.51	8.30	7.79	7.63	7.63	7.71	7.83	7.97	8.13	8.29	8.45
Premie	90.49	91.70	92.21	92.37	92.37	92.29	92.17	92.03	91.87	91.71	91.55

r	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
Egenkapital	4.71	5.34	5.96	6.56	7.12	7.63	8.09	8.49	8.83	9.11	9.34
Premie	95.29	94.66	94.04	93.44	92.88	92.37	91.91	91.51	91.17	90.89	90.66

T	1	2	4	6	8	10	12	16	20	24	30
Egenkapital	6.78	6.81	7.03	7.25	7.45	7.63	7.79	8.07	8.30	8.49	8.74
Premie	93.22	93.19	92.97	92.75	92.55	92.37	92.21	91.93	91.70	91.51	91.26

Tabell 4.2 Verdi egenkapital og forsikringskontrakter i kontinuerlig tid med deterministisk rente

Hvorfor endringene i parametrene gir disse resultatene diskuteres i kapittel 5 under komparativ statikk.

4.2.2 Kontrakt A uten tilbakebetaling

Når vi tar inn dødelighet, blir kontraktene som i avsnitt 3.4 men med konstant istedenfor deterministisk rente. (3.18) og (3.19) gir oss dermed verdien på henholdsvis forsikringskontrakten og egenkapitalen:

$$G(t)=\left(P(t,T)G^*(T)-P_t\left(A(T),G^*(T),T\right)+\alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}$$

$$=\left(A(t)\left(N(-d_1)+\alpha N(d_3)\right)-e^{-r(T-t)}G^*(T)\left(N(d_4)-N(d_2)\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}$$

$$E(t)=A(t)\left(1-\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right)+\left(C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)-\alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)\right)\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right)$$

$$=\left(A(t)\left(N(d_1)-\alpha N(d_3)\right)-e^{-r(T-t)}G^*(T)\left(N(d_2)-N(d_4)\right)\right)\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}-1\right)A(t)$$

hvor d_1, d_2, d_3 og d_4 er som under kontrakten med tilbakebetaling.

Vi bruker de samme initialverdiene som under kontrakten med tilbakebetaling:

$A(t)=100, r=0,05, r^G=0,03, \sigma=0,2, \alpha=0,9, T=10, t=0, x=40$

Overlevelsessannsynligheten blir som under den binomiske modellen:

$$L_{40}(10)=\frac{L_{50}}{L_{40}}=\frac{94\ 941}{97\ 007}=0.9787$$

Verdien på premien og egenkapitalen blir dermed:

Egenkapital	5.62
Premie	94.38

4.2.3 Kontrakt B med tilbakebetaling

Fra (3.20) vet vi at forsikringskontraktene kan skrives som:

$$G(t_0)=\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_j\right)-e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j = \frac{\left(r - r^G + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}{\sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}}$$

$$d2_j = \frac{\left(r - r^G - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}{\sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}} = d1_j - \sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}$$

Fra (3.21) vet vi at egenkapitalen kan skrives som:

$$E(t_0) = A(t_0)\left(1 - \alpha\prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_i\right) - e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

Egenkapital og premiene:

Fra (3.20) og (3.21) beregner vi verdier på forsikringskontrakene og egenkapitalen. Initialverdien er beregnet med følgende parameterverdier:

$$A(t) = 100, r = 0,05, r^G = 0,03, \sigma = 0,2, \alpha = 0,9, t_j - t_{j-1} = 1, \delta = 1$$

Dette gir følgende verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene:

Egenkapital	-75.99
Premie	175.99

Ser her en betydelig forskjell i verdiene på forsikringskontraktene og egenkapitalen fra kontrakten med forfallsgaranti og denne kontrakten med periodevis rentegaranti. Kontrakten med periodevis rentegaranti er betraktelig dyrere enn den med forfallsgaranti. Dette skyldes at det er mye større sannsynlighet for at rentegarantiene taes i bruk når kontrakten har periodevis rentegaranti enn ved forfallsgaranti. Dette skyldes at en enperiodeavkastning på en risikabel portefølje er mye mer volatil enn en avkastning over flere perioder. I vårt hovedeksempel forfaller kontraktene om 10 år og den periodevise kontrakten garanterer en avkastning på 3 % i hvert av disse 10 årene. Grunnet denne periodevise rentegarantien på 3% hvert år, må forsikringstakere som ønsker en slik kontrakt betale 175,99, mens de som ønsker en forfallsgaranti må betale 92,37. Forskjellen skyldes altså ulik risiko for forsikringsselskapet. I tilfellet med periodevis rentegaranti *får* faktisk egenkapitalen penger for å utstede slike kontrakter. Her får eierne 75,99, mens med forfallsgarantien må også egenkapitalen ut med penger, nærmere bestemt 7,63. Et forsikringsselskap kan dermed øke sin likviditet ved å utstede forsikringskontrakter med periodevis rentegaranti, men disse kontraktene øker også risikoen for forsikringsselskapet. Vi husker også at disse verdiene er fremkommet ved å betrakte en situasjon uten konkursrisiko, slik at kontrakt A og B ikke er direkte sammenlignbare.

Tabell 4.3 viser ulike verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene ved ulike verdier på inputparametrene.

A(t)	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
Egenkapital	-15.20	-30.39	-45.59	-60.79	-75.99	-91.18	-106.38	-121.58	-136.77	-151.97	-167.17
Premie	35.20	70.39	105.59	140.79	175.99	211.18	246.38	281.58	316.77	351.97	387.17

α	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
Egenkapital	2.23	-7.55	-17.32	-27.10	-36.88	-46.65	-56.43	-66.21	-75.99	-85.76	-95.54
Premie	97.77	107.55	117.32	127.10	136.88	146.65	156.43	166.21	175.99	185.76	195.54

r^G	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
Egenkapital	-54.81	-61.24	-68.28	-75.99	-84.43	-93.68	-103.83	-114.95	-127.15	-140.54	-155.23
Premie	154.81	161.24	168.28	175.99	184.43	193.68	203.83	214.95	227.15	240.54	255.23

σ_A	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
Egenkapital	-0.81	-21.39	-46.35	-75.99	-110.93	-151.92	-199.79	-255.46	-319.95	-394.34	-479.84
Premie	100.81	121.39	146.35	175.99	210.93	251.92	299.79	355.46	419.95	494.34	579.84

r	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
Egenkapital	-127.15	-114.95	-103.83	-93.68	-84.43	-75.99	-68.28	-61.24	-54.81	-48.93	-43.57
Premie	227.15	214.95	203.83	193.68	184.43	175.99	168.28	161.24	154.81	148.93	143.57

T	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Egenkapital	3.76	-2.92	-17.69	-34.58	-53.90	-75.99	-101.24	-130.13	-163.16	-200.93	-244.12
Premie	96.24	102.92	117.69	134.58	153.90	175.99	201.24	230.13	263.16	300.93	344.12

δ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Egenkapital	26.31	19.33	11.76	3.55	-5.34	-14.96	-25.36	-36.60	-48.75	-61.85	-75.99
Premie	73.69	80.67	88.24	96.45	105.34	114.96	125.36	136.60	148.75	161.85	175.99

Tabell 4.3 Verdi egenkapital og forsikringskontrakter i kontinuerlig tid med konstant rente.

Hvorfor endringene i parametrene gir disse resultatene diskuteres i kapittel 5 under komparativ statikk.

4.2.4 Kontrakt B uten tilbakebetaling

Ettersom utbetaling først skjer ved sluttidspunktet, trenger vi kun å hensynta dødeligheten ved forfall. Vi får dermed:

$$(4.6)\quad G(t_0) = \frac{1}{L_x(T-t)}\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_j\right) - e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j = \frac{\left(r - r^G + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}{\sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}}$$

$$d2_j = \frac{\left(r - r^G - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)}{\sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}} = d1_j - \sigma_A\sqrt{t_j - t_{j-1}}$$

$$(4.7)\quad E(t_0) = A(t_0)\left(1 - \frac{1}{L_x(T-t)}\alpha\prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_i\right) - e^{-\left(r-r^G\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

Vi bruker de samme initialverdiene som under kontrakten med tilbakebetaling:

$A(t) = 100, r = 0,05, r^G = 0,03, \sigma = 0,2, \alpha = 0,9, t_j - t_{j-1} = 1, \delta = 1$

Overlevelsessannsynligheten er som kjent 0.9787

Verdien på premien og egenkapitalen blir dermed:

Egenkapital	-79.82
Premie	179.82

4.3 Kontinuerlig tid med stokastisk rente

Her antar vi at rentens og aktivas volatilitet er konstant og henholdsvis lik σ og σ_A. I tillegg antar vi at korrelasjonen mellom renten og aktiva er konstant og lik ρ.

4.3.1 Kontrakt A med tilbakebetaling

Vi kan nå regne ut integralene i N(d_i), i=1..4, fra (3.33) og (3.34):

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A \rho\right)^2 + \sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right) ds \\
&= \int_t^T \left(\sigma_P^2(s) + 2\sigma_A\sigma_P(s)\rho + \sigma_A^2\rho^2 + \sigma_A^2 - \sigma_A^2\rho^2\right) ds \\
&= \int_t^T \left(\sigma_P^2(s) + \sigma_A^2 + 2\sigma_A\sigma_P(s)\rho\right) ds \\
&= \int_t^T \sigma_P^2(s) ds + \int_t^T \sigma_A^2 ds + 2\int_t^T \sigma_A\sigma_P(s)\rho ds \\
&= \sigma_A^2\left(T-t\right) + \int_t^T \sigma_P^2(s) ds + 2\sigma_A\rho\int_t^T \sigma_P(s) ds
\end{aligned}
$$

Fra (3.30) vet vi at:

$$
\sigma_P = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)
$$

Dermed kan vi beregne variansen:

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= \frac{\sigma^2}{a^2}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}\left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}\right)
\end{aligned}
$$

Beregner først integralet av variansen:

$$
\begin{aligned}
\int_t^T \sigma_P^2(s)ds &= \int_t^T \frac{\sigma^2}{a^2}\left(1-2e^{-a(T-s)}+e^{-2a(T-s)}\right)ds \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}(T-t)-\frac{2\sigma^2}{a^2}\int_t^T e^{-a(T-s)}ds+\frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^T e^{-2a(T-s)}ds \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2}(T-t)-\frac{2\sigma^2}{a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)+\frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-2a(T-t)}\right) \\
&= X
\end{aligned}
$$

Integralet av volatiliteten:

$$
\begin{aligned}
\int_t^T \sigma_P(s)ds &= \int_t^T \frac{\sigma}{a}\left(1-e^{-a(T-s)}\right)ds \\
&= \frac{\sigma}{a}(T-t)-\frac{\sigma}{a}\int_t^T \left(e^{-a(T-s)}\right)ds \\
&= \frac{\sigma}{a}(T-t)-\frac{\sigma}{a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right) \\
&= Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds \\
(4.8)\quad &= \sigma_A^2(T-t)+\int_t^T \sigma_P^2(s)ds+2\sigma_A\rho\int_t^T \sigma_P(s)ds \\
&= \sigma_A^2(T-t)+X+2\sigma_A\rho Y
\end{aligned}
$$

Fra (3.4) vet vi at verdien på forsikringskontraktene kan skrives som:

$$
G(t)=P(t,T)G^*(T)-P_t\left(A(T),G^*(T),T\right)+\alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)
$$

Fra (3.5) vet vi at verdien på egenkapitalen kan skrives som:

$$
E(t)=C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)-\alpha C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)
$$

Fra (3.33) og (4.8) vet vi at call-opsjonen med aktiva som underliggende, $G^*(T)$ som kontraktspris og forfall på tid T kan skrives som:

(4.9) $C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)=A(t)N\left(d_1\right)-P\left(t,T\right)G^*(T)N\left(d_2\right)$

hvor

$$d_1=\frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P\left(t,T\right)}+\frac{1}{2}\left[\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y\right]}{\sqrt{\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y}}$$

$$d_2=\frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P\left(t,T\right)}-\frac{1}{2}\left[\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y\right]}{\sqrt{\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y}}=d_1-\sqrt{\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y}$$

Fra (3.34) og (4.8) vet vi at call-opsjonen med aktiva som underliggende, $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ som kontraktspris og forfall på tid T kan skrives som:

(4.10) $C_t\left(A\left(T\right),\frac{G^*\left(T\right)}{\alpha},T\right)=A\left(t\right)N\left(d_3\right)-P\left(t,T\right)\frac{G^*\left(T\right)}{\alpha}N\left(d_4\right)$

hvor

$$d_3=\frac{\ln\frac{\alpha A(t)}{G^*(T)P\left(t,T\right)}+\frac{1}{2}\left[\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y\right]}{\sqrt{\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y}}$$

$$d_4=\frac{\ln\frac{\alpha A(t)}{G^*(T)P\left(t,T\right)}-\frac{1}{2}\left[\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y\right]}{\sqrt{\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y}}=d_3-\sqrt{\sigma_A^2\left(T-t\right)+X+2\sigma_A\rho Y}$$

Fra (3.35) vet vi at verdien på en put-opsjon med aktiva som underliggende, $G^*(T)$ som kontraktspris og forfall på tid T kan skrives som:

(4.11) $P_t\left(A\left(t\right),G^*\left(T\right),T\right)=P\left(t,T\right)G^*\left(T\right)N\left(-d_2\right)-A\left(t\right)N\left(-d_1\right)$

Egenkapitalen og Premiene:

Fra (4.9), (4.10) og (4.11) beregner vi verdier på forsikringskontraktene og egenkapitalen, og vi får:

$$G(t) = A(t)\left(N(-d_1) + \alpha N(d_3)\right) - P(t,T)G^*(T)\left(N(d_4) - N(d_2)\right)$$
$$E(t) = A(t)\left(N(d_1) - \alpha N(d_3)\right) - P(t,T)G^*(T)\left(N(d_2) - N(d_4)\right)$$

hvor d_1, d_2, d_3 og d_4 er gitt i (4.9) og (4.10)

Initialverdien er beregnet med følgende parameterverdier:

$$A(t) = 100, r_0 = 0,05, r^G = 0,03, \sigma = 0,01, \rho = -0,1,$$
$$\sigma_A = 0,2, a = 0,1, b = 0,05, \alpha = 0,9, T = 10, t = 0$$

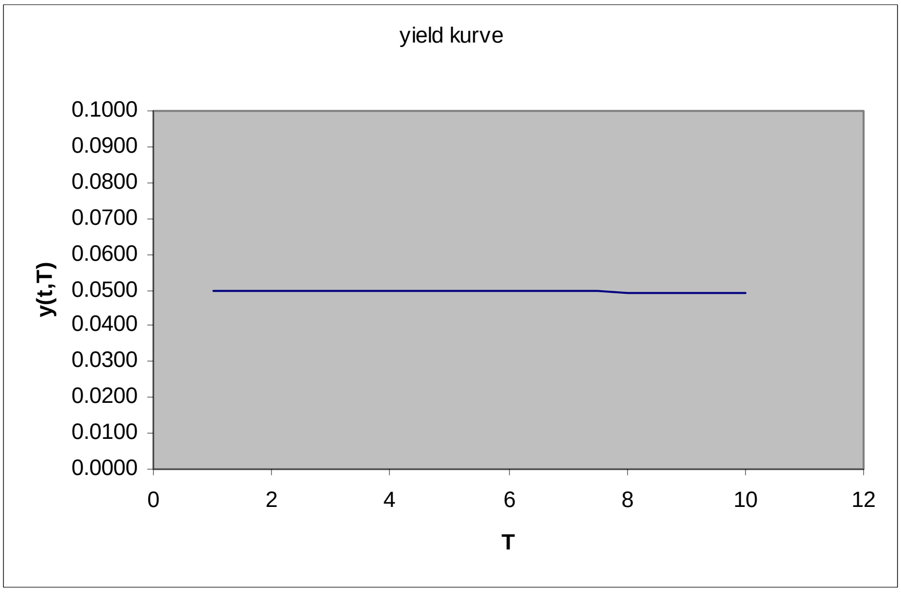
Vi velger her et langsiktig rentenivå på 5%. Dette er et noe lavt anslag på det langsiktige rentenivået, men vi ønsker å få mest mulig sammenlignbare resultater i forhold til situasjonen med konstant rente. For å få en best mulig sammenligning, skulle vi ha ordnet parametrene slik at yield to maturity på hvert tidspunkt var lik den konstante renten på 5%. Yield to maturity er det samme som gjennomsnittsavkastningen på nullkupongobligasjonen:

$$P(t,T) = e^{-y(t,T)(T-t)}$$
$$y(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T)$$

For det langsiktige rentenivået på 5% og de andre parameterverdiene får vi følgende nullkupongpriser og tilhørende yield to maturity:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(t,T)	0.9512	0.9049	0.8610	0.8194	0.7799	0.7426	0.7072	0.6736	0.6418	0.6116
y(t,T)	0.0500	0.0499	0.0499	0.0498	0.0497	0.0496	0.0495	0.0494	0.0493	0.0492

Ser her at yield-kurven blir relativt flat og tilnærmet lik 5% når vi velger langsiktig rentenivå likt den konstante renten fra prisingen under konstant rente. Plottet ser den ut som følger:



Dette gir følgende verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene:

Egenkapital	7.59
Premie	92.41

Ser her at ved å ta en mer realistisk forutsetning om renten, nemlig at den er stokastisk, gir noen små endringer i resultatene. For denne forsikringskontrakten med forfallsgaranti må forsikringstaker betale 92.41, mot 92.37 under situasjonen med konstant rente. Egenkapitalen må betale 7.59, mot 7.63 under konstant rente. Forsikringstakerne må betale noe mer under situasjonen med usikker rente. Dette henger sammen med at med en usikker rente øker sannsynligheten for at rentegarantien tas i bruk.

Tabell 4.4 viser ulike verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene ved ulike verdier på inputparametrene.

A(t)	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
Egenkapital	1.52	3.04	4.55	6.07	7.59	9.11	10.63	12.14	13.66	15.18	16.70
Premie	18.48	36.96	55.45	73.93	92.41	110.89	129.37	147.86	166.34	184.82	203.30

α	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
Egenkapital	43.97	38.87	33.93	29.14	24.52	20.06	15.75	11.60	7.59	3.73	0.00
Premie	56.03	61.13	66.07	70.86	75.48	79.94	84.25	88.40	92.41	96.27	100.00

r^G	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
Egenkapital	8.80	8.46	8.05	7.59	7.07	6.51	5.91	5.29	4.66	4.04	3.45
Premie	91.20	91.54	91.95	92.41	92.93	93.49	94.09	94.71	95.34	95.96	96.55

σ_A	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
Egenkapital	9.09	8.17	7.73	7.59	7.60	7.68	7.80	7.95	8.11	8.27	8.43
Premie	90.91	91.83	92.27	92.41	92.40	92.32	92.20	92.05	91.89	91.73	91.57

σ	0.005	0.010	0.015	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.100
Egenkapital	7.62	7.59	7.54	7.46	7.28	7.06	6.85	6.65	6.48	6.33	6.08
Premie	92.38	92.41	92.46	92.54	92.72	92.94	93.15	93.35	93.52	93.67	93.92

r	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
Egenkapital	5.81	6.20	6.57	6.93	7.27	7.59	7.89	8.16	8.42	8.65	8.85
Premie	94.19	93.80	93.43	93.07	92.73	92.41	92.11	91.84	91.58	91.35	91.15

ρ	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Egenkapital	7.67	7.64	7.62	7.61	7.59	7.59	7.58	7.58	7.58	7.58	7.58
Premie	92.33	92.36	92.38	92.39	92.41	92.41	92.42	92.42	92.42	92.42	92.42

a	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
Egenkapital	7.57	7.59	7.60	7.61	7.61	7.62	7.62	7.62	7.62	7.63	7.63
Premie	92.43	92.41	92.40	92.39	92.39	92.38	92.38	92.38	92.38	92.37	92.37

b	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11
Egenkapital	6.81	7.02	7.21	7.41	7.59	7.77	7.94	8.10	8.25	8.40	8.53
Premie	93.19	92.98	92.79	92.59	92.41	92.23	92.06	91.90	91.75	91.60	91.47

T	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Egenkapital	6.78	6.81	7.02	7.24	7.42	7.59	7.74	7.87	7.98	8.09	8.19
Premie	93.22	93.19	92.98	92.76	92.58	92.41	92.26	92.13	92.02	91.91	91.81

Tabell 4.4 Verdi egenkapital og forsikringskontrakter i kontinuerlig tid med stokastisk rente

Hvorfor endringene i parametrene gir disse resultatene diskuteres i kapittel 5 under komparativ statikk.

4.3.2 Kontrakt A uten tilbakebetaling

Når vi tar inn dødeligheten, blir situasjonen som under (3.38) og (3.39):

$$G(t)=\left(A(t)\left(N(-d_1)+\alpha N(d_3)\right)-P(t,T)G^*(T)\left(N(d_4)-N(d_2)\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}$$

$$E(t)=\left(A(t)\left(N(d_1)-\alpha N(d_3)\right)-P(t,T)G^*(T)\left(N(d_2)-N(d_4)\right)\right)\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}$$
$$-\left(\frac{1}{L_x(T\text{-}t)}-1\right)A(t)$$

hvor d_1, d_2, d_3 og d_4 er som for kontrakten med tilbakebetaling

Vi bruker de samme initialverdiene som under kontrakten med tilbakebetaling:

$A(t)=100, r_0=0,05, r^G=0,03, \sigma=0,01, \rho=-0,1,$
$\sigma_A=0,2, a=0,1, b=0,05, \alpha=0,9, T=10, t=0, x=40$

Overlevelsessannsynligheten er som kjent 0.9787. (Selv om vi opererer i kontinuerlig tid, bruker vi kun overlevelsessannsynligheten på sluttidspunktet)

Verdien på premien og egenkapitalen blir dermed:

Egenkapital	5.58
Premie	94.42

4.3.3 Kontrakt B med tilbakebetaling

Fra (3.40) vet vi at verdien på forsikringskontraktene som en tilnærming kan skrives som:

$$G(t_0)=\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_j\right)-P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j = \frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right) - r^G\left(t_j - t_{j-1}\right) + \frac{1}{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2 + \sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}{\sqrt{\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2 + \sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}}$$

$$d2_j = \frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right) - r^G\left(t_j - t_{j-1}\right) - \frac{1}{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2 + \sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}{\sqrt{\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2 + \sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}}$$

Fra (4.8) vet vi at:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2 + \sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds \\
&= \sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + \int_{t_{j-1}}^{t_j}\sigma_P^2(s)ds + 2\sigma_A\rho\int_{t_{j-1}}^{t_j}\sigma_P(s)ds \\
&= \sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A\rho Y
\end{aligned}$$

hvor

$$X = \frac{\sigma^2}{a^2}\left(t_j - t_{j-1}\right) - \frac{2\sigma^2}{a^3}\left(1 - e^{-a\left(t_j - t_{j-1}\right)}\right) + \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1 - e^{-2a\left(t_j - t_{j-1}\right)}\right)$$

$$Y = \frac{\sigma}{a}\left(t_j - t_{j-1}\right) - \frac{\sigma}{a^2}\left(1 - e^{-a\left(t_j - t_{j-1}\right)}\right)$$

Dermed kan verdien på forsikringskontraktene som en tilnærming skrives som:

$$(4.12)\quad G(t_0) = \alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_j\right) - P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j = \frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right) - r^G\left(t_j - t_{j-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A\rho Y\right)}{\sqrt{\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A\rho Y\right)}}$$

$$d2_j = \frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right) - r^G\left(t_j - t_{j-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A\rho Y\right)}{\sqrt{\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A\rho Y\right)}}$$

Egenkapitalen kan skrives som.

$$(4.13)\quad E(t_0) = A(t_0)\left(1 - \alpha\prod_{i=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_i\right) - P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

Egenkapitalen og Premiene:

Fra (4.12) og (4.13) beregner vi verdier på forsikringskontraktene og egenkapitalen. Initialverdien er beregnet med følgende parameterverdier:

$$A(t) = 100, r_0 = 0,05, r^G = 0,03, \sigma = 0,01, \rho = -0,1, \delta = 1$$
$$\sigma_A = 0,2, a = 0,1, b = 0,05, \alpha = 0,9, t_j - t_{j-1} = \Delta t = 1,, T = 10, n = T/\Delta t$$

Spotrenten er simulert til å ha følgende periodegjennomsnitt:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rente	0.050000	0.050066	0.050015	0.050005	0.050013	0.049947	0.049928	0.049944	0.049894	0.049958

Renten simuleres som:

$$\begin{aligned} r(s) &= b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) + \sigma\int_t^s e^{-a(s-v)}dW^Q(v) \\ &= b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(s-t)}\right)}\varepsilon \end{aligned}$$

hvor ε~N(0,1)

Gjennomsnittet er basert på 50000 simuleringer.

Dette gir følgende verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene:

Egenkapital	-75.75
Premie	175.75

Som under situasjonen med konstant rente blir verdien på forsikringskontraktene også under stokastisk rente mye høyere, og verdien på egenkapitalen mye lavere, med en periodevis rentegaranti enn ved en forfallsgaranti. Her må forsikringstaker betale 175,75 for denne periodevise rentegarantien, mens egenkapitalen får 75,75 av disse. Resultatene under konstant rente var henholdsvis 175,99 og 75,99. Vi husker imidlertid på at verdiene vi får nå under stokastisk rente kun er en tilnærming til den sanne verdien.

Tabell 4.5 viser ulike verdier på egenkapitalen og forsikringskontraktene ved ulike verdier på inputparametrene.

A(t)	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
Egenkapital	-15.15	-30.30	-45.45	-60.60	-75.75	-90.91	-106.06	-121.21	-136.36	-151.51	-166.66
Premie	35.15	70.30	105.45	140.60	175.75	210.91	246.06	281.21	316.36	351.51	386.66

α	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
Egenkapital	2.36	-7.41	-17.17	-26.93	-36.70	-46.46	-56.23	-65.99	-75.75	-85.52	-95.28
Premie	97.64	107.41	117.17	126.93	136.70	146.46	156.23	165.99	175.75	185.52	195.28

r^G	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
Egenkapital	-54.61	-61.03	-68.06	-75.75	-84.19	-93.43	-103.56	-114.67	-126.86	-140.24	-154.92
Premie	154.61	161.03	168.06	175.75	184.19	193.43	203.56	214.67	226.86	240.24	254.92

σ_A	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
Egenkapital	-0.76	-21.25	-46.16	-75.75	-110.65	-151.58	-199.39	-254.99	-319.40	-393.71	-479.11
Premie	100.76	121.25	146.16	175.75	210.65	251.58	299.39	354.99	419.40	493.71	579.11

σ	0.005	0.010	0.015	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.100
Egenkapital	-75.87	-75.75	-75.60	-75.56	-75.79	-75.80	-76.17	-76.72	-76.97	-77.93	-78.82
Premie	175.87	175.75	175.60	175.56	175.79	175.80	176.17	176.72	176.97	177.93	178.82

r	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
Egenkapital	-105.40	-98.83	-92.49	-86.53	-81.05	-75.75	-70.81	-66.19	-61.73	-57.58	-53.71
Premie	205.40	198.83	192.49	186.53	181.05	175.75	170.81	166.19	161.73	157.58	153.71

ρ	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Egenkapital	-72.94	-73.57	-74.19	-74.82	-75.44	-76.07	-76.69	-77.31	-77.93	-78.55	-79.17
Premie	172.94	173.57	174.19	174.82	175.44	176.07	176.69	177.31	177.93	178.55	179.17

a	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
Egenkapital	-75.70	-75.75	-75.79	-75.76	-75.73	-75.72	-75.73	-75.74	-75.77	-75.76	-75.78
Premie	175.70	175.75	175.79	175.76	175.73	175.72	175.73	175.74	175.77	175.76	175.78

b	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11
Egenkapital	-88.57	-85.13	-82.00	-78.69	-75.75	-72.87	-70.03	-67.27	-64.72	-62.21	-59.77
Premie	188.57	185.13	182.00	178.69	175.75	172.87	170.03	167.27	164.72	162.21	159.77

T	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Egenkapital	3.77	-2.89	-17.62	-34.47	-53.73	-75.75	-100.92	-129.79	-162.69	-199.94	-242.96
Premie	96.23	102.89	117.62	134.47	153.73	175.75	200.92	229.79	262.69	299.94	342.96

δ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Egenkapital	26.29	19.32	11.76	3.56	-5.30	-14.90	-25.28	-36.49	-48.60	-61.66	-75.75
Premie	73.71	80.68	88.24	96.44	105.30	114.90	125.28	136.49	148.60	161.66	175.75

Tabell 4.5: Verdi egenkapital og forsikringskontrakter i kontinuerlig tid med stokastisk rente, kontrakt B.

Hvorfor endringene i parametrene gir disse resultatene diskuteres i kapittel 5 under komparativ statikk.

4.3.4 Kontrakt B uten tilbakebetaling

Ettersom utbetaling først skjer ved sluttidspunktet, trenger vi kun å hensynta dødeligheten ved forfall. Vi får dermed at verdien på henholdsvis forsikringskontraktkontoen og egenkapitalen kan uttrykkes som:

(4.14)

$$G(t_0)=\frac{1}{L_x(T-t)}\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_j\right)-P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j = \frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right) - r^G\left(t_j - t_{j-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A \rho Y\right)}{\sqrt{\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A \rho Y\right)}}$$

$$d2_j = \frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right) - r^G\left(t_j - t_{j-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A \rho Y\right)}{\sqrt{\left(\sigma_A^2\left(t_j - t_{j-1}\right) + X + 2\sigma_A \rho Y\right)}}$$

(4.15)

$$E(t_0) = A(t_0)\left(1 - \frac{1}{L_x(T-t)}\alpha \prod_{i=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)} + \delta\left(N\left(d1_i\right) - P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r^G\left(t_j - t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

Vi bruker de samme initialverdiene som under kontrakten med tilbakebetaling:

$$A(t) = 100, r_0 = 0,05, r^G = 0,03, \sigma = 0,01, \rho = -0,1, \delta = 1$$
$$\sigma_A = 0,2, a = 0,1, b = 0,05, \alpha = 0,9, t_j - t_{j-1} = \Delta t = 1,, T = 10, n = T / \Delta t$$

Spotrenten er simulert til å ha følgende periodegjennomsnitt:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rente	0.050000	0.050066	0.050015	0.050005	0.050013	0.049947	0.049928	0.049944	0.049894	0.049958

Overlevelsessannsynligheten er fremdeles 0.9787

Verdien på premien og egenkapitalen blir dermed:

Egenkapital	-79.58
Premie	179.58

4.3.5 Mulighet for konkurs kontrakt B

Hittil har vi i kontrakt B kun konsentrert oss om å prise kontrakten gitt at scenario 1 alltid inntreffer, dvs at verdien på aktiva på sluttidspunktet, A(T), er større enn verdien på forsikringskontraktene, G(T). Siden vi ikke har tatt med muligheten for at selskapet ikke klarer å betale ut G(T) på tid T, har vi dermed fått en relativ høy verdi på denne rente-arantien. Under situasjonen med stokastisk rente måtte forsikringstaker ut med 175,75 på tid 0, mens egenkapitalen fikk 75,75. Vi antok at dette netto overskuddet på 75,75 ble betalt ut til eierne av forsikringsselskapet som utbytte, og således ikke kan reinvesteres i porteføljen for å være med å dekke opp et eventuelt underskudd på tid T.

I dette avsnittet skal vi se på hva som skjer når vi nå tar med forutsetningen om at hvis verdien på selskapet på tid T, A(T), er mindre enn verdien på forsikringskontraktene, G(T), så får forsikringstakerne kun utbetalt A(T). Dette gjør vi ved simulering i Microsoft Excel. Vi simulerer fremtidige verdier på aktiva, $A(t_i)$, under forwardmålet Q^T: Fra (3.32) vet vi at denne er:

$$A\left(t_{i+\Delta t}\right)=\frac{A\left(t_i\right)}{P\left(t_i,t_{i+\Delta t}\right)}e^{-\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+\Delta t}}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2+\sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds+\int_{t_i}^{t_{i+\Delta t}}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^T}(s)+\sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}dZ^{Q^T}(s)\right)}$$

for en sti j.

Deretter beregner vi verdien på forsikringskontraktene ved sluttidspunktet T for hver simulering som:

$$G\left(t_N\right)=\alpha A\left(t_0\right)\prod_{j=1}^{n}\left(e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\max\left(\frac{A_{t_j}}{A_{t_{j-1}}}-e^{r^G\left(t_j-t_{j-1}\right)},0\right)\right)$$

Dette gjør vi for ulike verdier på utdelingsparameteren δ. Summerer deretter antall tilfeller hvor aktiva er større enn verdien på forsikringskontraktene på sluttidspunktet T. Utifra dette kan vi se hvor mange ganger forsikringsselskapet ikke klarer å betale ut G(T). Ser også på gjennomsnittlige verdier på forsikringskontraktene og gjennomsnittlig aktivaverdi. Deretter beregner vi verdien på forsikringskontraktene når vi tar med muligheten for at forsikringsselskapet ikke klarer å betale ut G(T). Endelig sammenligner vi verdiene på forsikringskontraktene med og uten denne muligheten. Dette gir følgende tabell:

Delta	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
N	10000	10000	10000	10000	10000	10000
Gjennomsnitt forsikringskontrakter	291.86	268.22	246.32	226.06	207.32	189.99
Gjennomsnitt aktiva	165.96	165.96	165.96	165.96	165.96	165.96
Verdi kontrakt u/ konkursmulighet	178.52	164.06	150.66	138.27	126.80	116.21
Verdikontrakt m/ konkursmulighet	101.35	100.52	98.77	96.02	92.40	88.06
Antall simuleringer hvor selskapet overlever	107.00	376	785	1325	1963	2651
Sannsynlighet for at selskapet overlever	0.0107	0.0376	0.0785	0.1325	0.1963	0.2651
Delta	0.4	0.3	0.2	0.1	0	
N	10000	10000	10000	10000	10000	
Gjennomsnitt forsikringskontrakter	174.00	159.23	145.61	133.05	121.49	
Gjennomsnitt aktiva	165.96	165.96	165.96	165.96	165.96	
Verdi kontrakt u/ konkursmulighet	106.42	97.39	89.06	81.38	74.31	
Verdikontrakt m/ konkursmulighet	83.29	78.31	73.21	68.10	63.09	
Antall simuleringer hvor selskapet overlever	3284	3926	4551	5142	5619	
Sannsynlighet for at selskapet overlever	0.3284	0.3926	0.4551	0.5142	0.5619	

Ser her at det er stor forskjell i sannsynligheter for om kontrakten også havner in the money for forsikringsselskapet på tid T. Egenkapitalen får det som er igjen, dvs. A(T) - G(T). I de tilfellene hvor A(T) > G(T) får også egenkapitalen en positiv kontantstrøm på tid T, samtidig som forsikringstakerne får G(T). I de tilfellene hvor A(T) < G(T) så får egenkapitalen ingenting, mens forsikringstakerne får A(T). En δ= 1 som tilsvarer en periodevis rentegaranti som er direkte sammenlignbar med forfallsgarantien gir kun positiv kontantstrøm til egenkapitalen i ca 1% av tilfellene. Når vi da tar med muligheten for at forsikringstaker kun får G(T) dersom A(T) > G(T) så faller verdien på forsikringskontraktene fra 178,52 til 101,35. Dette skyldes akkurat det at forsikringstaker i de fleste tilfeller kun får A(T) på tid T. Og nåverdien av A(T) er lik A(t) som igjen er lik 100. Verdien på forsikringskontraktene vil dermed ligge rett over 100. Ser at sannsynligheten for at forsikringsselskapet klarer å betjene G(T) stiger når δ synker. Dette skyldes selvfølgelig at forsikringstaker får mindre og mindre andel av overskuddet, og dermed øker sannsynligheten for at forsikringsselskapet klarer å betjene G(T). δ=0 tilsvarer at forsikringstaker kun er berettiget til $G^*(T)$ på tid T, men kun dersom A(T) > $G^*(T)$. Ser her at selv i dette tilfellet vil forsikringsselskapet kun klare å betjene $G^*(T)$ i litt over halvparten av tilfellene.

Vi må her gjøre leseren oppmerksom på en imperfeksjon i simuleringen. For negativ korrelasjon får vi en litt for høy verdi (ca. 0.5 høyere med ρ = -0.1) på opsjonene når vi simulerer i forhold til lukket form løsningen. Ved positiv korrelasjon får vi ikke dette avviket. Summen av premien og egenkapitalen blir imidlertid 100 også ved negativ korrelasjon. Vi har ikke klart å finne årsaken til dette avviket, men tror det er noe vi har gjort galt i Excel og ikke i utledningen.

Slik som vi modellerer høres resultatene vi får relativt drastisk ut. Men man må huske på at vi kun modellerer et forsikringsselskap som utsteder helt identiske forsikringskontrakter. I virkeligheten er faktum et annet. Et forsikringsselskap utsteder mange ulike kontraktstyper. Man kan dermed se på vår analyse som en del av et forsikringsselskap i virkeligheten. Hvis ikke kontantstrømmen fra denne delen av selskapet blir positiv på tid T, betyr ikke det dermed at hele selskapet går konkurs. Dermed blir konklusjonene litt mindre drastisk. Sannsynlighetene ovenfor sier dermed noe om sannsynligheten for at kontantstrømmen fra denne delen av selskapet vil være positiv på tid T.

4.4 Mulighet for tidlig utøvelse

Hittil har forsikringstaker ikke hatt noen mulighet til å endre sin posisjon etter å ha inngått forsikringskontrakten. Forsikringstaker må simpelthen betale et beløp på tid t og vente til forfall T før payoff blir betalt. I dette kapitlet vil vi se på en utvidelse av kontraktene. Her vil forsikringstaker ha muligheten til å utøve kontrakten på visse på forhånd bestemte mulige tidspunkt. Slik blir vår kontrakt med mulighet for tidlig utøvelse en Bermuda Opsjon (Hull 2003). Formålet med dette kapitlet er å finne fair verdi på en slik kontrakt, dvs hvor mye en forsikringstaker skal betale på tid t for en forsikringskontrakt med mulighet for å utøve før forfall. Basiscaset vårt i dette kapitlet er en tidshorisont på 10 år, med mulighet for å utøve på tid 1,2,3 osv.

Her tar vi ikke med dødelighet. Dette kunne vi tatt med uten at det hadde komplisert analysen noe videre, ettersom vi kun har forfall på diskrete tidspunkt. Vi vet dog at vi kun trenger å dividere forsikringskontraktkontoen med overlevelsessannsynligheten for å hensynta dødeligheten. Dette velger vi ikke å gjøre i dette avsnittet.

Et individ som står overfor muligheten til å utøve opsjonen eller la opsjonen fortsette, vil kun utøve dersom verdien av å utøve er større enn verdien av å fortsette. Det sammenligner payoff fra å utøve med en gang med forventet payoff ved å fortsette. Dermed er den optimale utøvelsesstrategien avhengig av payoffens betingede forventning av å fortsette å holde opsjonen i live. Denne betingede forventningen kan estimeres gjennom simulering og minste kvadraters metode. Det er dette Longstaff og Schwartz gjør i sin artikkel: Valuing American Options by simulation: A Simple Least-Squares Approach (2001) Vi vil bruke deres metode til å verdsette forsikringskontraktene med mulighet for tidlig utøvelse.

4.4.1 Kontrakt A

Standard resultater som Bensoussan (1984) og Karatzas (1988) tilsier at verdien på en slik Bermudian put-opsjon kan representeres ved Snell envelope; Verdien på en Bermudaopsjon tilsvarer den maksimerte verdien fra de diskonterte payoffene fra opsjonen, hvor maksimum blir tatt over alle stoppetider gitt den tilgjengelige informasjonen Ψ.

På opsjonens forfallstidspunkt utøver individet opsjonen hvis den er in-the-money og utøver den ikke hvis den er out-of-the-money. På ethvert mulig utøvelsestidspunkt t_i før sluttidspunktet T, må individet bestemme seg for om han skal utøve opsjonen eller la den fortsette. På disse tidspunktene vet åpenbart individet hvilken payoff han får hvis opsjonen utøves med engang. Problemet er hvordan individet skal tallfeste sammenligningsgrunnlaget, nemlig verdien av å fortsette. Denne verdien er ikke kjent på tid t_i. Ingen arbitrasje teori sier at denne verdien er lik den diskonterte forventede fremtidige verdien under et passende sannsynlighetsmål. Definerer vi fremtidig payoff som $P(t_j, t_i, T)$ kan verdien på tid t_i under forwardmålet skrives som:

$$P\left(t_i\right) = \sup_{\tau\varepsilon r_{\tau,T}} E_{t_i}^{Q^T}\left(\sum_{j=i+1}^{n} P\left(t_i, t_\tau\right) P\left(t_\tau\right)\right)$$

hvor $r_{\tau,T}$ betyr samlingen av stoppetider som kan anta verdier i $[t_i,T]$.

Dermed reduserer problemet med optimal stoppetid seg til å sammenligne verdien av umiddelbar utøvelse med denne betingede forventningen, og utøve så fort verdien av umiddelbar utøvelse er positiv og større eller lik den betingede forventningen

For å kunne verdsette bermudaopsjoner må vi dermed finne den betingede forventede verdien av å fortsette. Vi bruker de simulerte verdiene på forklaringsvariablene våre som inndata for å identifisere den betingede forventningsfunksjonen. Dette gjøres ved å kjøre en regresjon hvor de diskonterte payoffene er avhengige variabler og et sett med basisfunksjoner er de uavhengige variablene. De predikerte verdiene fra dette regresjonsestimatet er de beste lineære forventningsrette estimatorene (BLUE) på den betingede forventningsfunksjonen og gjør oss i stand til å beregne den optimale stopperegelen for den bermudanske opsjonen.

Vi skal nå beregne verdien på selve forsikringskontraktene når disse kan termineres i løpet av forsikringskontraktens løpetid. Verdien av forsikringskontraktene på sluttidspunktet vet vi fra tidligere at er:

$$G(T) = G^*(T) - \max\left(G^*(T) - A(T), 0\right) + \alpha \max\left(A(T) - \frac{G^*(T)}{\alpha}, 0\right)$$

Vi skal i det følgende anta at forsikringstaker kan terminere kontrakten på gitte diskret tidspunkt t_i. Vi antar at forsikringstaker på et gitt mulig utøvelsestidspunkt t_i får følgende utbetaling hvis individet velger å avslutte kontrakten:

$$G(t_i) = G^*(t_i) - \max\left(G^*(t_i) - A(t_i), 0\right) + \alpha \max\left(A(t_i) - \frac{G^*(t_i)}{\alpha}, 0\right) \tag{4.16}$$

Ser her at vi har tatt med konkursrisikoen på de mulige utøvelsestidspunktene t_i. Det innebærer at hvis verdien på aktiva $A(t_i)$ er lavere enn det garanterte beløpet $G^*(t_i)$ så får forsikringstaker kun $A(t_i)$. Det at vi tar med at ikke egenkapitalen kan bli negativ gjør verdien av gjenkjøpselementet lavere enn uten dette. Problemstillingen for forsikringstaker på et mulig utøvelsestidspunkt τ blir dermed om han skal terminere kontrakten og motta $G(t_i)$ eller om han skal holde kontrakten i en periode til før han må bestemme seg for det samme på nytt. Hvis ikke forsikringstaker terminerer kontrakten på tid t_i=T-1 så får han på tid T:

$$G(T) = G^*(T) - \max\left(G^*(T) - A(T), 0\right) + \alpha \max\left(A(T) - \frac{G^*(T)}{\alpha}, 0\right)$$

hvilket selvfølgelig er identisk med utbetalingsprofilen på sluttidspunktet for en identisk europeisk kontrakt. Verdt å merke seg at kontraktsprisene er ulike for hver i. Nærmere bestemt:

$$G^*(t_i) = G^*(t)e^{r^G(t_i - t)}$$

I tillegg har vi stokastisk rente, som antas å følge Ohrnstein-Uhlenbeck prosessen. Renten simuleres som:

$$\begin{aligned} r(s) &= b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) + \sigma \int_t^s e^{-a(s-v)} dW^Q(v) \\ &= b + e^{-a(s-t)}\left(r(t) - b\right) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(s-t)}\right)}\varepsilon \end{aligned}$$

hvor ε~N(0,1)

Verdien på tid t_i av å motta:

$$G(t_{i+\Delta t}) = G^*(t_{i+\Delta t}) - \max\left(G^*(t_{i+\Delta t}) - A(t_{i+\Delta t}), 0\right) + \alpha \max\left(A(t_{i+\Delta t}) - \frac{G^*(t_{i+\Delta t})}{\alpha}, 0\right)$$

på tid $t_{i+\Delta t}$ kan skrives som:

$$G(t_i) = P(t_i, t_{i+\Delta t}) E_{t_i}^{Q^T}\left(G(t_{i+\Delta t})\right)$$

Vi simulerer derfor aktivas verdi under forwardmålet Q^T. Fra (3.32) vet vi at denne er:

$$A(t_{i+\Delta t}) = \frac{A(t_i)}{P(t_i, t_{i+\Delta t})} e^{-\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+\Delta t}}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)^2 + \sigma_A^2(s)\left(1-\rho^2(s)\right)\right)ds + \int_{t_i}^{t_{i+\Delta t}}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A(s)\rho(s)\right)dW^{Q^T}(s) + \sigma_A(s)\sqrt{1-\rho^2(s)}\,dZ^{Q^T}(s)\right)}$$

for en sti j.

Forutsetter vi konstant aktivavolatilitet, korrelasjon og rentevolatilitet kan dette skrives som:

$$A\left(t_{i+\Delta t}\right)=\frac{A\left(t_i\right)}{P\left(t_i,t_{i+\Delta t}\right)}e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_A^2\left(t_j-t_{j-1}\right)+X+2\sigma_A\rho Y\right)+\sqrt{\sigma_A^2\left(t_j-t_{j-1}\right)+X+2\sigma_A\rho Y}\varepsilon_1+\sigma_A\sqrt{\left(1-\rho^2\right)\left(t_j-t_{j-1}\right)}\varepsilon_2}$$

hvor

$$X=\frac{\sigma^2}{a^2}\left(t_j-t_{j-1}\right)-\frac{2\sigma^2}{a^3}\left(1-e^{-a\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)+\frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-2a\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)$$

$$Y=\frac{\sigma}{a}\left(t_j-t_{j-1}\right)-\frac{\sigma}{a^2}\left(1-e^{-a\left(t_j-t_{j-1}\right)}\right)$$

Disse utregningene ble gjort i detalj tidligere i rapporten.

Simulert diskontert payoff på tid t_i blir da:

$$G\left(t_i\right)=P\left(t_i,t_{i+\Delta t}\right)G\left(t_{i+\Delta t}\right)$$

Vi vil nå ta leseren med på et gjennomgangseksempel av hvordan vi bruker metoden på forsikringskontraktene. For enkelthets skyld tar vi her bare med 5 utøvelsestidspunkt og 10 stier. Simulering av aktiva, renten og dermed også de diskonterte payoffene gir følgende tabeller:

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
99.80	108.25	103.42	107.12	113.85
103.34	81.10	81.05	127.71	117.49
92.86	76.62	64.34	58.55	78.62
79.03	102.77	157.38	259.70	555.73
131.36	185.97	238.99	252.25	201.17
98.42	120.36	160.99	165.75	124.98
78.80	52.43	55.00	102.24	99.82
133.46	136.55	93.81	90.30	75.34
89.03	98.49	99.68	131.22	163.63
147.56	154.81	221.40	215.21	346.16

Tabell 3.6.1 Simulerte stier for aktivautviklingen

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
0.0500	0.0644	0.0674	0.0654	0.0589
0.0500	0.0551	0.0559	0.0516	0.0359
0.0500	0.0282	0.0273	0.0097	0.0284
0.0500	0.0571	0.0624	0.0421	0.0538
0.0500	0.0561	0.0701	0.0833	0.0857
0.0500	0.0788	0.0765	0.0505	0.0586
0.0500	0.0454	0.0532	0.0781	0.0659
0.0500	0.0684	0.0763	0.0704	0.0672
0.0500	0.0527	0.0612	0.0757	0.0498
0.0500	0.0573	0.0671	0.0488	0.0642

Tabell 3.6.2 Simulerte stier for spotrenteutviklingen

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
86.48	89.47	90.69	94.27	101.39
86.48	72.71	72.56	103.71	109.07
84.04	72.13	60.67	57.00	73.99
71.52	90.65	125.33	214.58	449.50
106.99	149.81	187.69	193.42	153.58
86.48	93.04	124.98	134.86	108.24
71.31	47.84	49.49	87.93	87.76
108.70	107.56	80.94	78.74	66.08
80.57	88.70	88.39	102.00	133.31
120.18	124.42	174.82	175.65	274.76

Tabell 3.6.3 Diskontert payoff som følger av de simulerte stiene for aktiva og spotrenten

For å finne ut om det er optimalt å utøve på et tidspunkt før bortfall i forhold til å la opsjonen fortsette, må vi altså sammenligne verdien med å utøve med en gang med den betingede forventede verdien av å fortsette.

Den betingede forventede verdien på hvert mulige utøvelsestidspunkt beregner vi ved hjelp av minste kvadraters metode. Formålet med minste kvadraters metode algoritmen er å finne en optimal stopperegel for den bermudanske put-opsjonen.

I dette eksemplet antar vi en enkel regresjonsmodell, der de diskonterte payoffene antaes å bli forklart av aktiva og renten i første potens. Mer generelle spesifikasjoner gjøres seinere i kapitlet. Regresjonsmodellen blir dermed seende ut som følger:

$$\begin{aligned} E(Y \mid A, r) &= f(A, r) \\ &= \beta_1 + \beta_2 A + \beta_3 r + \varepsilon \end{aligned}$$

På matriseform kan det skrives som:

$$Y_{Nx1} = X_{NxK} \beta_{Kx1} + \varepsilon$$

Denne løser vi for beta:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(X^T X\right)^{-1} \left(X^T Y\right) \\ &= A^{-1} b \end{aligned}$$

Dette gjør vi ved hjelp av Gausseliminasjon. (For en nærmere forklaring på Gausseliminasjon, se Sydsæter og Øksendal, 1996)

Betaverdiene for hvert utøvelsestidspunkt blir dermed:

	β_1	β_2	β_3
i=1	84.0552	1.0783	-2048.0000
i=2	-1.8210	0.9571	-47.5922
i=3	37.5995	0.7923	-195.3300
i=4	42.7315	1.4159	-1775.0310

Vi skal finne den optimale stopperegelen. Ut fra regresjonskoeffisientene ovenfor beregner vi verdiene av å fortsette på hvert steg. Denne verdien blir bare å multiplisere regresjons-koeffisientene med henholdsvis 1, verdien på aktiva på det tidspunktet for den stien, og spotrenteverdien på det tidspunktet for den aktuelle stien. Det gir følgende verdier av å fortsette:

i=1	i=2	I=3	i=4
89.26	98.72	106.38	78.33
93.09	73.17	90.89	131.95
81.78	70.16	83.24	108.43
66.87	93.82	150.11	335.81
123.30	173.50	213.26	252.11
87.78	109.62	150.21	187.71
66.62	46.19	70.79	48.95
125.56	125.61	97.02	45.55
77.66	89.94	104.62	94.10
140.76	143.61	199.91	260.82

Tabell 3.6.7 Verdien av å fortsette

Disse verdiene av å fortsette sammenlignes så med verdien av å utøve med en gang:

i=1	i=2	I=3	i=4	i=5
95.57	101.47	103.42	107.12	113.85
95.57	81.10	81.05	114.94	117.49
92.86	76.62	64.34	58.55	78.62
79.03	101.47	141.65	233.73	500.16
118.23	167.37	215.10	227.02	181.06
95.57	108.32	144.89	149.18	121.49
78.80	52.43	55.00	102.24	99.82
120.12	122.89	93.81	90.30	75.34
89.03	98.49	99.68	118.10	147.27
132.81	139.33	199.26	193.69	311.55

Tabell 3.6.8 Verdien av å utøve med en gang

Er verdien av å fortsette større enn verdien av å utøve, så fortsetter vi. Verd å merke seg at det er mulig at opsjonen aldri blir utøvd. Hvis verdien av å fortsette på siste mulige utøvelsestidspunkt er større enn verdien av å utøve med en gang, mens opsjonen ikke blir in-the-money ved forfall så blir opsjonen aldri utøvd. Optimalt utøvelsestidspunkt for hver sti betegnes i utøveslesmatrisen under med tallet 1. Dette gir følgende optimale stopperegel:

i=1	i=2	I=3	i=4	i=5
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1

Tabell 3.6.9 Optimal stopperegel

Deretter bruker vi denne optimale stopperegelen, diskonterer verdiene tilbake til tid 0 ved hjelp av nullkupongobligasjonen og deler på n:

$$\overline{P(t_o)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P\left(t_0^j\right)$$

Dette gir følgende verdi på Bermuda forsikringskontrakten:

Verdi Bermuda	94.94

Verdien på den tilsvarende europeiske kontrakten var 92.41. Det betyr at verdien av muligheten til å utøve tidlig er (94.94 – 92.41)=2.53. Men denne verdien er basert kun på 10 stier, hvilket er alt for lite til å trekke noen konklusjoner. Nedenfor kommer vi tilbake til utvidelser av regresjonsmodellen og antall simuleringer.

For å bestemme om det er optimalt å utøve eller å fortsette å holde kontrakten sammenligner forsikringstaker altså verdien av å utøve på tid t_i med den betingede forventede verdien av å fortsette. Den betingede forventede verdien av å fortsette antok vi ovenfor at kunne identifiseres ved hjelp av kun 2 forklaringsvariabler, nemlig aktiva og renten. Dette er en litt enkel regresjonsmodell.

En mer realistisk modell på hvilke uavhengige variabler, X, som forklarer den avhengige variabelen, Y, er en modell hvor faktorene inngår i høyere potens og hvor også variablene kryssmultiplisert inngår som forklaringsvariable. Mer avanserte modeller for den betingede forventningsfunksjonen kan også brukes, men også forklaringsvariabler bestående av enkle polynomer gir gode svar (se Longstaff & Schwartz, 2001). Den modellen vi bruker er:

$$
\begin{aligned}
E\left(Y \mid A,r\right) &= f\left(A,r\right) \\
&= \beta_1 + \beta_2 A + \beta_3 r + \beta_4 A^2 + \beta_5 r^2 + \beta_6 Ar + \beta_7 A^3 + \beta_8 A^2 r + \beta_9 Ar^2 + \beta_{10} r^3
\end{aligned}
$$

Som vist tidligere i avsnittet finner vi ut fra dette den optimale stopperegelen for bermudakontrakten og finner dermed den estimerte verdien på denne kontrakten.

Verdi forsikringskontakter når disse kan termineres før forfall:

Beregningene er foretatt med følgende parameterverdier:

A(t)	100
alpha	0.9
r*	0.03
σ_A	0.20
r	0.05
T	10
t	0
N	10000
rho	-0.1
σP	0.0095
σ	0.010
a	0.100
b	0.050

Med disse parameterverdiene får vi følgende verdier på forsikringskontraktene når disse kan avsluttes før forfall:

	i=1	i=2	i=5	i=10
Verdi Bermudakontrakt	93.4356	93.7565	93.7686	95.0035

i=1 tilsvarer at kontrakten kun kan uttøves ved forfall, dvs. i år 10. Det innebærer selvfølgelig at denne opsjonen er identisk med en tilsvarende europeisk opsjon. Forskjellen i den simulerte verdien vår her på 93.4356 og verdien fra den lukkede form løsningen, på 92.41, skyldes at vi bruker 10000 simuleringer. Hadde vi høynet antall simuleringer ville vi fått enda nærmere 92.41. i=2 tilsvarer at man kun kan utøve etter 5 år og 10 år, i=5 tilsier at man kun kan utøve annethvert år, mens i = 10 tilsier at man kan utøve kontrakten hvert år. Ser her at verdien på Bermudakontrakten er stigende i i. Dette er naturlig i og med at dette øker valgmuligheten til forsikringstakerne, og dermed øker verdien på kontrakten. Hvis man gir forsikringstaker muligheten til å terminere kontrakten en gang i året ser vi at verdien øker fra 92.41 fra den europeiske forfallskontrakten til 95.035 for denne Bermuda kontrakten.

Ideelt sett burde vi gjort flere simuleringer enn 10000. Men vi har programmert i Visual Basic i Microsoft Excel, hvilket ikke er et ideelt program for denne type problemstillinger. Derfor blir hver simulering relativt tidkrevende, og selv 10000 simuleringer tok relativt lang tid. Men vi har gjort en simulering med N= 20000 og med de samme parameterverdiene som ovenfor og med muligheten for å kunne avslutte kontrakten hvert år. Dette gav følgende verdi på forsikringskontraktene:

Verdi Bermuda	94.87

4.4.2 Kontrakt B

Fra (3.6) vet vi at payoff fra forsikringskontrakten på tid $T=t_n$ er:

$$G(t_n) = \alpha A(t_0) \prod_{j=1}^{n} \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}, e^{r^G(t_j - t_{j-1})} \right)$$

På et tidspunkt i<n vil payoff fra kontrakten være:

$$G(t_i) = \alpha A(t_0) \prod_{j=1}^{i} \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}, e^{r^G(t_j - t_{j-1})} \right)$$

Sammenligner nåverdien av å vente til forfall med umiddelbar utøvelse av kontrakten. Hvis man utøver kontrakten med engang den er inngått får forsikringstaker αA(t). Nåverdien av å vente med å utøve til forfall er:

$$\begin{aligned} PV\left(G(t_n)\right) &= PV\left(\alpha A(t_0) \prod_{j=1}^{n} \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})}, e^{r^G(t_j - t_{j-1})} \right) \right) \\ &> \alpha A(t_0) PV\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{A(t_j)}{A(t_{j-1})} \right) \\ &> \alpha A(t_0) \end{aligned}$$

Ser her at det aldri vil være optimalt å utøve opsjonen før forfall, fordi nåverdien av å utøve ved forfall er større enn verdien av å utøve med engang.

Dette er sammenligning av å utøve på tid 0 og å vente helt til forfall. For å kunne påstå at det aldri vil være optimalt å utøve på noen tidspunkt mellom tid 0 og forfall viser vi nå at nåverdien av å vente til neste periode alltid er større enn verdien av å utøve med en gang.

$$\begin{aligned} PV_{t_{j-\Delta t}}\left(G(t_j)\right) &= PV_{t_{j-\Delta t}}\left(G(t_{j-\Delta t}) \left(e^{r^G(t_j - t_{j-\Delta t})} + \max\left(\frac{A(t_j)}{A(t_{j-\Delta t})} - e^{r^G(t_j - t_{j-\Delta t})}, 0 \right) \right) \right) \\ &> G(t_{j-\Delta t}) \end{aligned}$$

Ser her at nåverdien av å vente en periode er alltid større enn å utøve med en gang.

Det betyr at verdien av en bermudisk flerperiodeopsjon er identisk med en europeisk flerperiodeopsjon.

5. Komparativ statikk kontrakt A

I dette kapitlet vil vi ta for oss de fleste inputparametrene, derivere dem og gjøre en komparativ statikk analyse. For a, b og T velger vi ikke å derivere. Å derivere med hensyn på tiden viser seg å være en intrikat og grisete utregning. Det samme gjelder for a og b. Vi har derfor valgt kun å gjøre analysen ut fra en grafisk beskrivelse for disse variablene.
Vi vil i avsnitt 5.1 gjøre en komparativ statikk analyse for callopsjonen med $G^*(T)$ som kontraktspris (call 1). I avsnitt 5.2 tar vi for oss callopsjonen med $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ som kontraktspris (call 2) og i avsnitt 5.3 studerer vi putopsjonen. I 5.4 og 5.5 syr vi det hele sammen og gjør analysen for henholdsvis egenkapitalen og premien.
Vi har valgt ikke å gjøre komparativ statikk for situasjonen med konstant rente. Dette fordi endringen i parametrene gir tilnærmet de samme effektene som under situasjonen med konstant rente.

5.1 Europeisk call-opsjon 1

Vi vet fra (3.33) at callopsjon 1 i kontinuerlig tid med stokastisk rente kan skrives som:

$$C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)=A(t)N(d_1)-P(t,T)G^*(T)N(d_2)$$

hvor

$$d_1=\frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P(t,T)}+\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}}$$

$$d_2=\frac{\ln\frac{A(t)}{G^*(T)P(t,T)}-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}}$$

$$=d_1-\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}$$

når aktivarisiko og korrelasjonen er konstant.

Definerer:

(6.1) $k = \int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A \rho \right)^2 + \sigma_A^2 \left(1 - \rho^2\right) \right) ds$

Vi vil først vise at $A(t)N'\left(d_1\right) = N'\left(d_2\right)G^*(T)P\left(t,T\right)$. Da tar vi utgangspunkt i at $d_2 = d_1 - \sqrt{k}$ slik at

$$
\begin{aligned}
N'\left(d_1\right) &= N'\left(d_2\right) + \sqrt{k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(d_2 + \sqrt{k}\right)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(d_2\right)^2}{2}} e^{-\frac{2 d_2 \sqrt{k}}{2}} e^{-\frac{k}{2}} \\
&= N'\left(d_2\right) e^{-\left(\ln \frac{A_t}{G_T^* P(t,T)} - \frac{1}{2}k\right)} e^{-\frac{1}{2}k}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi at:

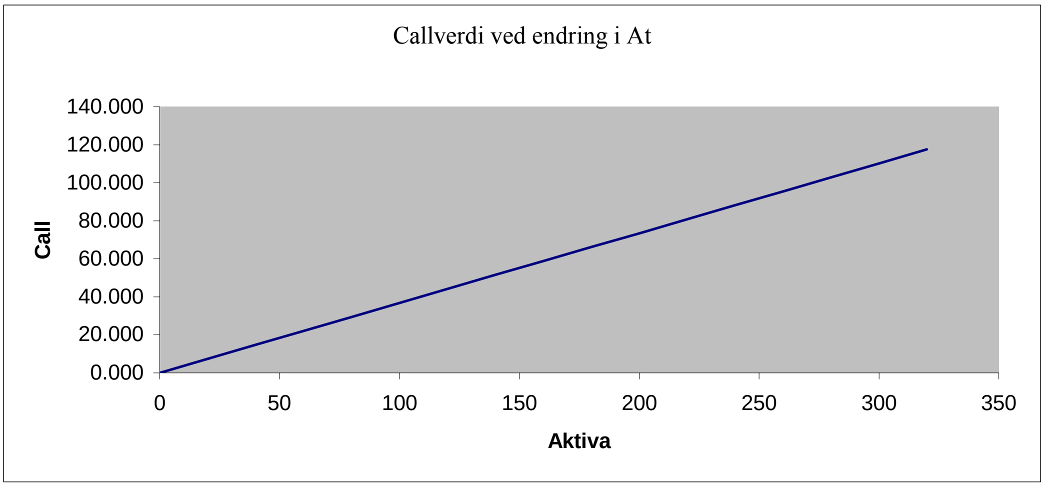
(6.2) $A(t)N'\left(d_1\right) = N'\left(d_2\right)G^*(T)P\left(t,T\right)$

Dette er et resultat vi vil få mye bruk for i derivasjonene som kommer.

<u>Den deriverte med hensyn på aktiva:</u>

$$
\begin{aligned}
\Delta_{C_1} = \frac{\partial C_1}{\partial A(t)} &= N\left(d_1\right) + A(t)N'\left(d_1\right)\frac{\partial d_1}{\partial A(t)} - P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(d_2\right)\frac{\partial d_2}{\partial A(t)} - P\left(t,T\right)\alpha e^{r^G(T-t)} N\left(d_2\right) \\
&= N\left(d_1\right) + A(t)N'\left(d_1\right)\frac{1}{A(t)\sqrt{k}} - P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(d_2\right)\frac{1}{A(t)\sqrt{k}} - P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{A(t)}N\left(d_2\right) \\
&= N\left(d_1\right) + A(t)N'\left(d_1\right)\frac{1}{A(t)\sqrt{k}} - A(t)N'\left(d_1\right)\frac{1}{A(t)\sqrt{k}} - P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{A(t)}N\left(d_2\right) \\
&= N\left(d_1\right) - P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{A(t)}N\left(d_2\right)
\end{aligned}
$$

Vi illustrerer grafisk:

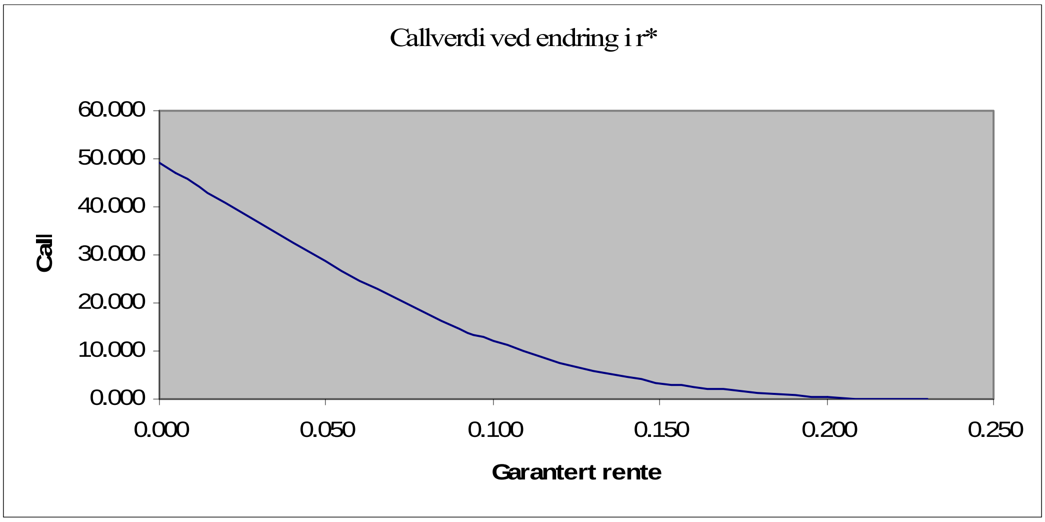


Vi ser at verdien på callopsjonen er en positiv lineær funksjon av aktiva. Dette hadde vi også forventet, da aktiva er homogen av grad 1 i en callopsjon. Dvs. at dersom vi ganger aktiva-verdien med en faktor z, vil også callverdien øke med den samme faktoren:
$C_t\left(z \cdot A(t), G^*(T), T\right) = z \cdot C_t\left(A(t), G^*(T), T\right)$.

Den deriverte med hensyn på den garanterte renten:

$$\begin{aligned}
\xi_{C_1} = \frac{\partial C_1}{\partial r^G} &= A(t)N'\left(d_1\right)\frac{\partial d_1}{\partial r^G} - \left(\left(T-t\right)G^*(T)P\left(t,T\right)N\left(d_2\right) + P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(d_2\right)\frac{\partial d_2}{\partial r^G}\right) \\
&= A(t)N'\left(d_1\right)\left(\frac{\partial d_1}{\partial r^G} - \frac{\partial d_2}{\partial r^G}\right) - \left(T-t\right)G^*(T)P\left(t,T\right)N\left(d_2\right) \\
&= -G^*(T)P\left(t,T\right)N\left(d_2\right)\left(T-t\right)
\end{aligned}$$

Ettersom $G^*(T), P\left(t,T\right), N\left(d_2\right) og \left(T-t\right)$ alle er positive, vil ξ_{C_1} være negativ. Dette ser vi også grafisk:



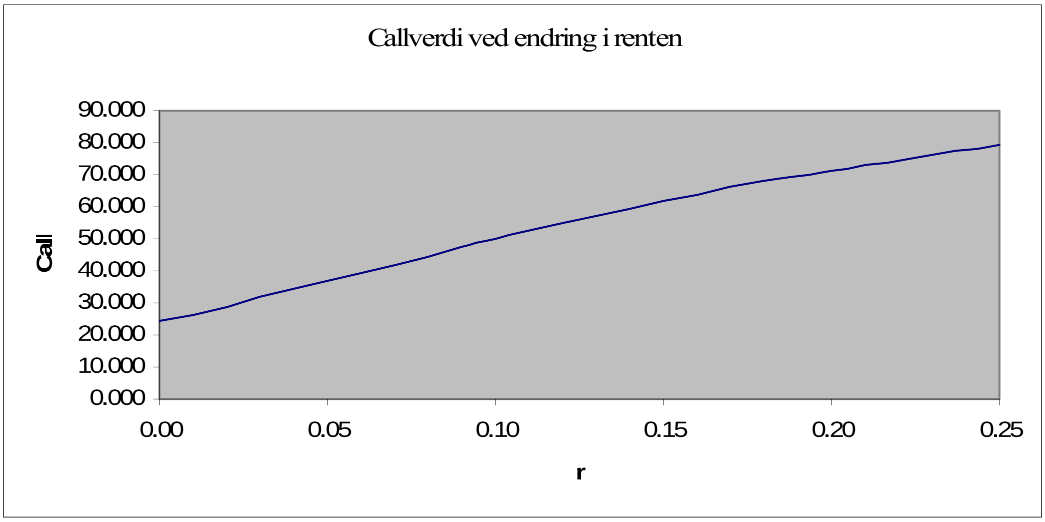
Det er naturlig at callverdien synker når r^G øker, ettersom en økning i den garanterte renten medfører en høyere kontraktspris som igjen minker sannsynligheten for at callen er in-the-money. Vi ser også at når den garanterte renten er høyere enn 15%, er callen tilnærmet verdiløs. Vi merker oss at callverdien er relativt følsom overfor endringer i den garanterte renten.

<u>Den deriverte med hensyn på initialrenten:</u>

$$\begin{aligned}\rho_{C_1} = \frac{\partial C}{\partial r} &= A(t)N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} - \left(\frac{\partial P(t,T)}{\partial r}G^*(T)N(d_2) + P(t,T)G^*(T)N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r}\right)\\ &= A(t)N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r}\right) + B(t,T)P(t,T)G^*(T)N(d_2)\\ &= B(t,T)P(t,T)G^*(T)N(d_2)\end{aligned}$$

Vi vet fra (3.29) at B(t,T) er positiv. Det er også $P(t,T), G^*(T)$ og $N(d_2)$ slik at ρ_{C_1} er positiv.

Dette får vi bekreftet ved den grafiske illustrasjonen:



Vi kan forklare dette med at en høyere initialrente, ceteris paribus, medfører en lavere verdi på nullkupongobligasjonen. Dette medfører videre en lavere diskontert verdi på kontraktsprisen og således en høyere callverdi.

Den deriverte med hensyn på ρ:

$$\tau_{C_1} = \frac{\partial C}{\partial \rho} = A(t)N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \rho} - P(t,T)G^*(T)N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \rho}$$

$$= A(t)N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \rho} - \frac{\partial d_2}{\partial \rho}\right)$$

$$d_1 - d_2 = \sqrt{k} = \sqrt{\int_t^T \left(\left(\sigma_p(s) + \sigma_A \rho\right)^2 + \sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds} = \sigma_A^2\left(T-t\right) + X + 2\sigma_A \rho Y$$

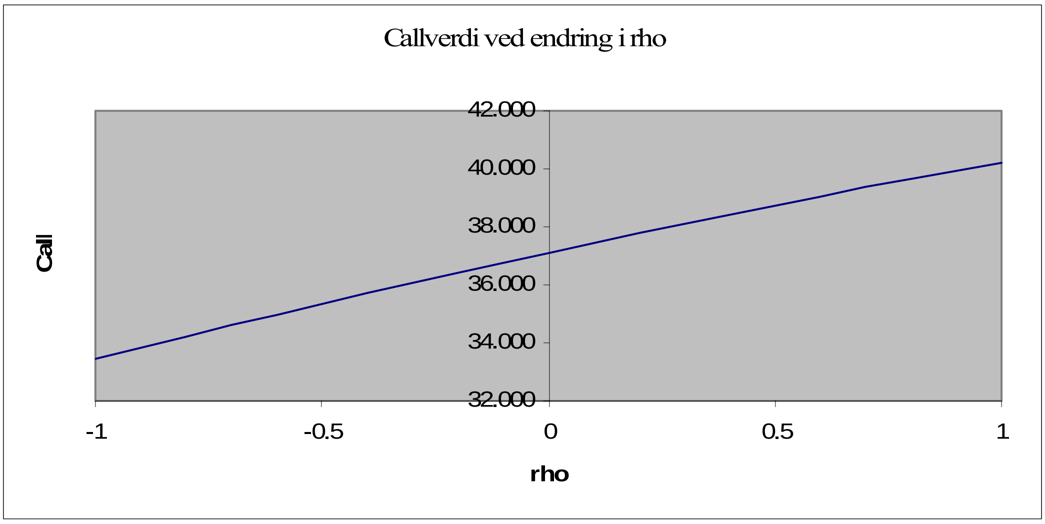
$$\frac{\partial d_1}{\partial \rho} - \frac{\partial d_2}{\partial \rho} = \frac{1}{2\sqrt{k}} 2\sigma_A Y = \frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y$$

$$\tau_{C_1} = A(t)N'(d_1)\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y$$

Vi vet at

$$(6.3) \quad N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \quad \text{(se bl.a. Hull 2003, s248)}$$

Denne vil alltid være positiv. Det vil også de andre elementene som inngår i den deriverte mhp. ρ, og dermed er τ_{C_1} positiv. Dette bekreftes grafisk:



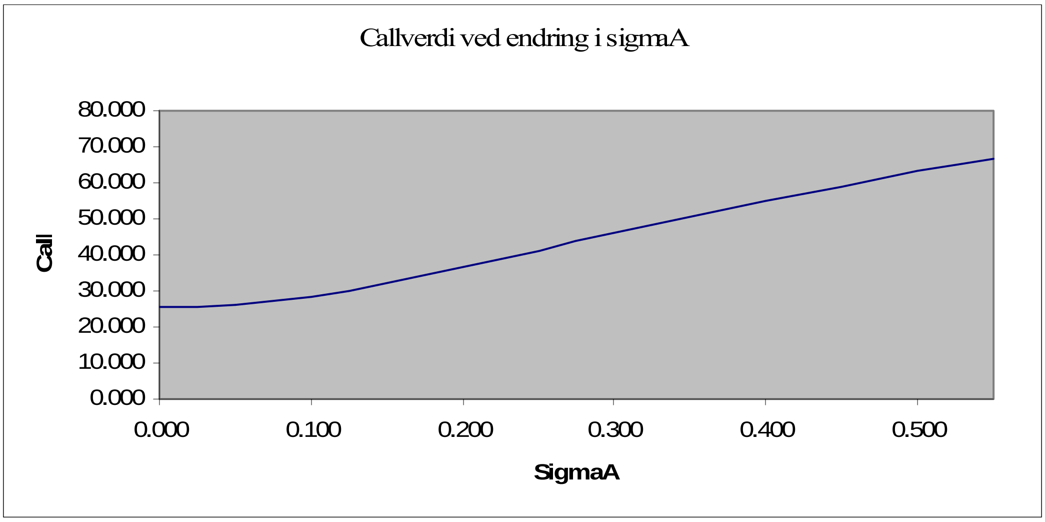
Dette henger sammen med at en høyere korrelasjonskoeffisient gir høyere kovarians og således en høyere totalvarians. En høyere varians (mer usikkerhet) gir høyere callverdi. Vi legger også merke til at endringen i ρ har relativt lite å si for callverdien.

Den deriverte med hensyn på σ_A:

$$\kappa_{C_1} = \frac{\partial C}{\partial \sigma_A} = A(t)N'\left(d_1\right)\frac{\partial d_1}{\sigma_A} - P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(d_2\right)\frac{\partial d_2}{\sigma_A}$$
$$= A(t)N'\left(d_1\right)\left(\frac{\partial d_1}{\sigma_A} - \frac{\partial d_2}{\sigma_A}\right)$$

$$\frac{\partial d_1}{\sigma_A} - \frac{\partial d_2}{\sigma_A} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(2\sigma_A(T-t) + 2\rho Y\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sigma_A(T-t) + \rho Y\right)$$

$$\kappa_{C_1} = A(t)N'\left(d_1\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sigma_A(T-t) + \rho Y\right)$$



Vi ser at callverdien er en stigende funksjon av sigmaA. Ut fra det matematiske uttrykket for den deriverte, ser vi at κ_{C_1} er positiv så lenge $\dfrac{\sigma_A(T-t)}{Y} > -\rho$

Det vil den være for et fornuftig valg av parameterverdier.

Den deriverte med hensyn på σ:

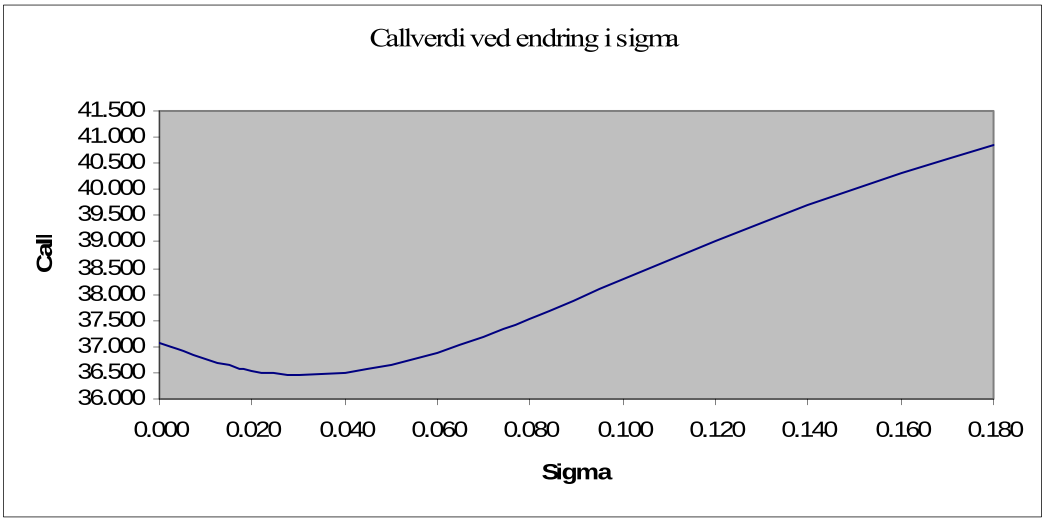
$$\varpi_{C_1} = \frac{\partial C_1}{\partial \sigma} = A(t)N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial P(t,T)}{\partial \sigma}G^*(T)N(d_2) - P(t,T)G^*(T)N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$
$$= A(t)N'(d_1)(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}) - \frac{\partial P(t,T)}{\partial \sigma}G^*(T)N(d_2)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\left[\frac{\partial X}{\partial \sigma} + 2\sigma_A\rho\frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{k}}\left[\frac{2\sigma}{a^2}(T-t) - \frac{4\sigma}{a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right) + \frac{2\sigma}{2a^3}\left(1-e^{-2a(T-t)}\right) + 2\sigma_A\rho\left(\frac{1}{a}(T-t) - \frac{1}{a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\left[\frac{\sigma}{a^2}(T-t) - \frac{2\sigma}{a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right) + \frac{\sigma}{2a^3}\left(1-e^{-2a(T-t)}\right) + \sigma_A\rho\left(\frac{1}{a}(T-t) - \frac{1}{a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{k}}\left[X + \sigma_A\rho Y\right]$$

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial \sigma} = P(t,T)\left[\frac{\sigma(T-t)}{a^2} - \frac{\sigma}{2a}B(t,T)^2\right] = P(t,T)\frac{\sigma}{2a^2}\left[2(T-t) - aB(t,T)^2\right]$$

$$\varpi_{C_1} = A(t)N'(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}\left[X+\sigma_A\rho Y\right]-P(t,T)\frac{\sigma}{2a^2}\left[2(T-t)-aB(t,T)^2\right]G^*(T)N(d_2)$$

Vi ser at det er vanskelig å si noe bestemt om fortegnet til den deriverte ut fra det matematiske uttrykket. Vi kan imidlertid illustrere grafisk:



Vi legger merke til at ϖ_{C_1} er negativ til sigma er ca 0.03 og positiv deretter.

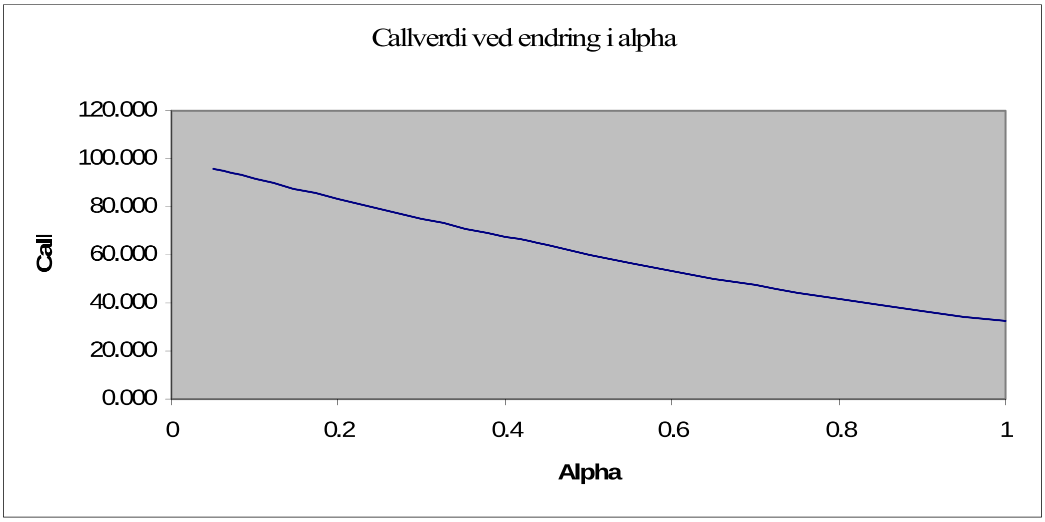
Vi ser også at sigma har lite å si for callverdien.

<u>Den deriverte med hensyn på alpha:</u>

$$C_t\left(A(T),G^*(T),T\right)=A(t)N(d_1)-P(t,T)\alpha A(t)e^{r^G(T-t)}N(d_2)$$

$$\begin{aligned}\nabla_{C_1} &= \frac{\partial C}{\partial\alpha}=A(t)N'(d_3)\frac{\partial d_1}{\partial\alpha}-P(t,T)A(t)e^{r^G(T-t)}N(d_2)-P(t,T)G^*(T)N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial\alpha}\\ &= A(t)N'(d_3)\left(\frac{\partial d_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial d_2}{\partial\alpha}\right)-P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_2)\\ &= -P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_2)\end{aligned}$$

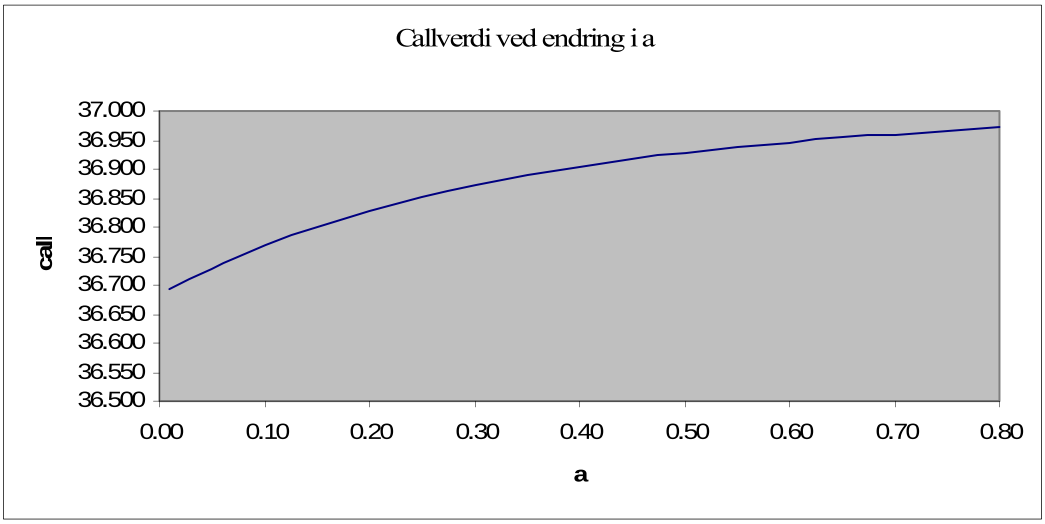
Vi ser at denne vil være negativ ettersom $P(t,T),\frac{G^*(T)}{\alpha},N(d_2)>0$. Dette får vi bekreftet ved den grafiske illustrasjonen:



Årsaken er at jo høyere alpha er, desto høyere er kontraktsprisen som igjen gir en lavere callverdi.

Endring som følge av endring i a

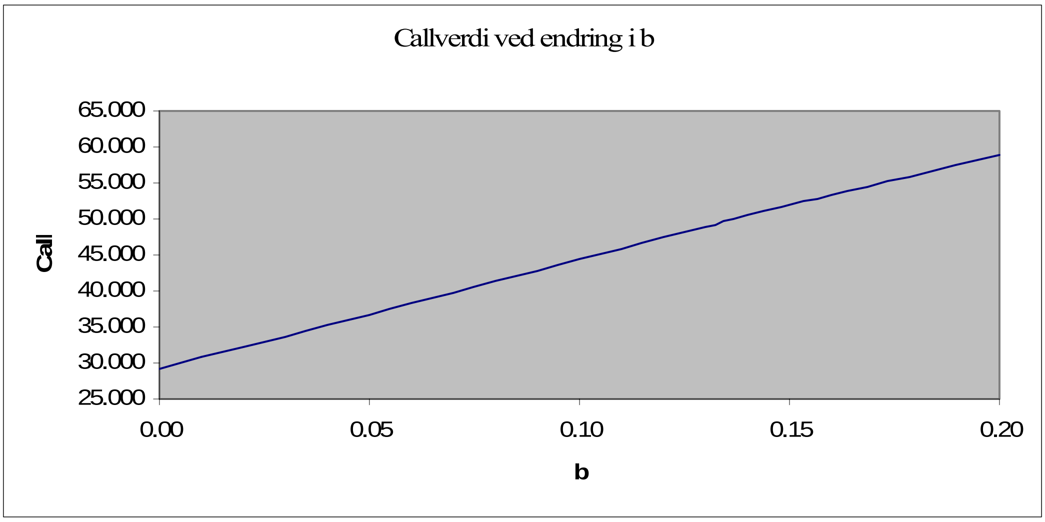
For ulike verdier, se tabell 4.4. Grafisk:



Vi ser at callverdien er en stigende og avtakende funksjon av a (positiv førstederivert og negativ annenderivert). Det vi legger merke til, er at callverdien er omtrent uavhengig av verdien på a. Dette fordi det langsiktige rentenivået er identisk med initialrenten (r_0). Dermed har ikke hastigheten renten når sitt langsiktige nivå på noe å si, ettersom vi allerede er på det langsiktige nivået.

Endring som følge av endring i b

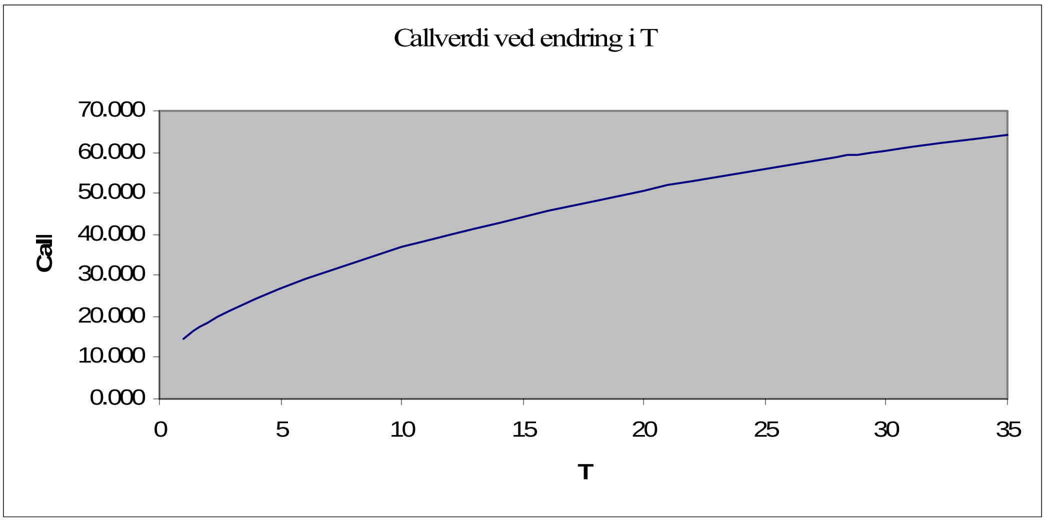
Igjen henviser vi til tabell 4.4 for ulike verdier.



b betegner som kjent det langsiktige rentenivået som renten skal variere rundt. Ettersom en høyere rente gir høyere callverdi, har vi at callverdien er en positiv funksjon av b. Dette fordi en høyere rente medfører en lavere verdi på nullkupongobligasjonen. Dette medfører videre en lavere diskontert verdi på kontraktsprisen og således en høyere callverdi.

Endring som følge av endring i T

Tabell 4.4 gir oss tallverdier og den grafiske fremstillingen blir:



Det burde ikke overraske noen at en lengre løpetid gir en høyere verdi. Sannsynligheten for at callen er in-the-money øker betraktelig etter hvert som tiden går. Løpetiden har relativt stor innvirkning på callverdien.

5.2 Europeisk call-opsjon 2

Vi tar så for oss den europeiske opsjonen med $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ som kontraktspris. Utregningen blir tilsvarende som vi gjorde over, og vi vil ikke vise dem i detalj. For en forklaring på de deriverte henviser vi til diskusjonen i avsnitt 5.1. Vi vil imidlertid gjøre en nærmere analyse av alpha, ettersom vi her får en viktig forskjell relativt til under 5.1.

Vi vet fra (3.34) at verdien på call 2 kan skrives som:

$$C_t\left(A(T),\frac{G^*(T)}{\alpha},T\right)=A(t)N\left(d_3\right)-P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right)$$

hvor

$$d_3=\frac{\ln\frac{\alpha A(t)}{G^*(T)P\left(t,T\right)}+\frac{1}{2}\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}{\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}}$$

$$d_4=d_3-\sqrt{\int_t^T\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}$$

<u>Den deriverte med hensyn på aktiva:</u>

$$\begin{aligned}\Delta_{C_2}&=\frac{\partial C}{\partial A}=N\left(d_3\right)+A(t)N'\left(d_3\right)\frac{\partial d_3}{\partial A}-P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}N'\left(d_4\right)\frac{\partial d_4}{\partial A}-P\left(t,T\right)e^{r^G(T-t)}N\left(d_4\right)\\&=N\left(d_3\right)-P\left(t,T\right)e^{r^G(T-t)}N\left(d_4\right)\end{aligned}$$

<u>Den deriverte med hensyn på den garanterte renten:</u>

$$\xi_{C_2} = \frac{\partial C}{\partial r^G} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{\partial d_3}{\partial r^G} - \left(\left(T-t\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}P\left(t,T\right)N\left(d_4\right) + P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(d_4\right)\frac{\partial d_4}{\partial r^G}\right)$$

$$= -P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right)\left(T-t\right)$$

<u>Den deriverte med hensyn på initialrenten:</u>

$$\rho_{C_2} = \frac{\partial C}{\partial r} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{\partial d_3}{\partial r} - \left(\frac{\partial P\left(t,T\right)}{\partial r}\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right) + P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}N'\left(d_4\right)\frac{\partial d_4}{\partial r}\right)$$

$$= B\left(t,T\right)P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right)$$

<u>Den deriverte med hensyn på ρ:</u>

$$\tau_{C_2} = \frac{\partial C}{\partial \rho} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{\partial d_3}{\partial \rho} - P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(d_4\right)\frac{\partial d_4}{\partial \rho}$$

$$= A(t)N'\left(d_3\right)\left(\frac{\partial d_3}{\partial \rho} - \frac{\partial d_4}{\partial \rho}\right)$$

$$= A(t)N'\left(d_3\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y$$

<u>Den deriverte med hensyn på σ_A:</u>

$$\kappa_{C_2} = \frac{\partial C}{\partial \sigma_A} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{\partial d_3}{\partial \sigma_A} - P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(d_4\right)\frac{\partial d_4}{\partial \sigma_A}$$

$$= A(t)N'\left(d_3\right)\left(\frac{\partial d_3}{\partial \sigma_A} - \frac{\partial d_4}{\partial \sigma_A}\right)$$

$$\kappa_{C_2} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sigma_A(T-t) + \rho Y\right)$$

Den deriverte med hensyn på σ:

$$\varpi_{C_2} = \frac{\partial C_2}{\partial \sigma} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{\partial d_3}{\partial \sigma} - \frac{\partial P\left(t,T\right)}{\partial \sigma}\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right) - P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}N'\left(d_4\right)\frac{\partial d_4}{\partial \sigma}$$
$$= A(t)N'\left(d_3\right)\left(\frac{\partial d_3}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_4}{\partial \sigma}\right) - \frac{\partial P\left(t,T\right)}{\partial \sigma}\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right)$$

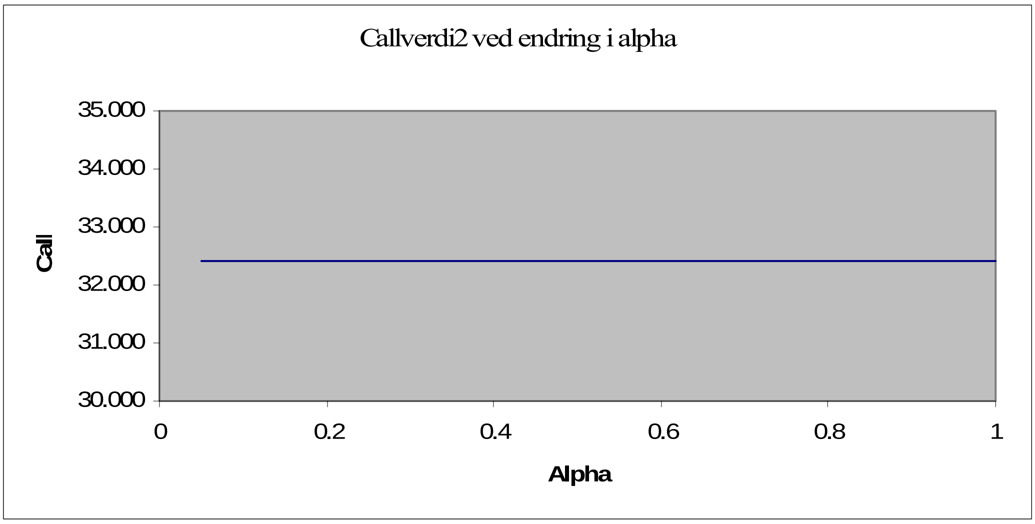
Utregningen blir som for den første call-opsjonen og vi får:

$$\varpi_{C_2} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}\left[X + \sigma_A \rho Y\right] - P(t,T)\frac{\sigma}{2a^2}\left[2(T-t) - aB(t,T)^2\right]\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(d_4\right)$$

<u>Den deriverte med hensyn på alpha:</u>

$$C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right) = A(t)N\left(d_3\right) - P\left(t,T\right)A(t)e^{r^G(T-t)}N\left(d_4\right)$$

$$\nabla_{C_2} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} = A(t)N'\left(d_3\right)\frac{\partial d_3}{\partial \alpha} - P\left(t,T\right)N'\left(d_4\right)\frac{\partial d_4}{\partial \alpha}$$
$$= A(t)N'\left(d_3\right)\left(\frac{\partial d_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial d_4}{\partial \alpha}\right)$$
$$= 0$$



Vi ser at ∇_{C_2} er lik null. En endring i alpha gir altså ingen endring i callverdien. Dette henger sammen med at nå når kontraktsprisen er $\frac{G^*(T)}{\alpha}$ vil ikke en endring i alpha ha noe å si for kontraktsprisen, ettersom alpha også inngår i $G^*(T)$. Det ser vi også av det matematiske uttrykket over.

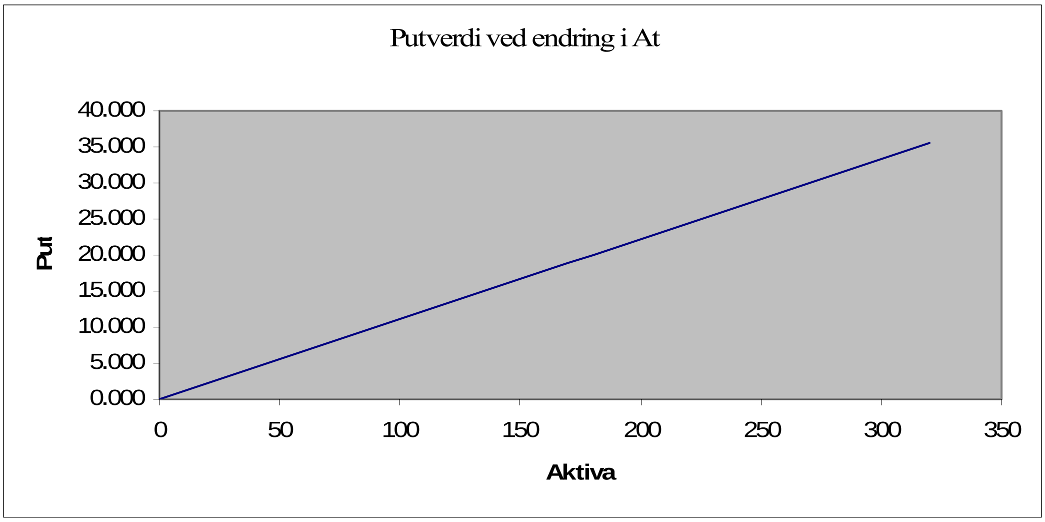
5.3 Europeisk put-opsjon

Verdien på den europeiske puten har vi fra (3.35):

$$P_t\left(A(T),G^*(T),T\right)=P\left(t,T\right)G^*(T)N\left(-d_2\right)-A(t)N\left(-d_1\right)$$

Den deriverte med hensyn på aktiva:

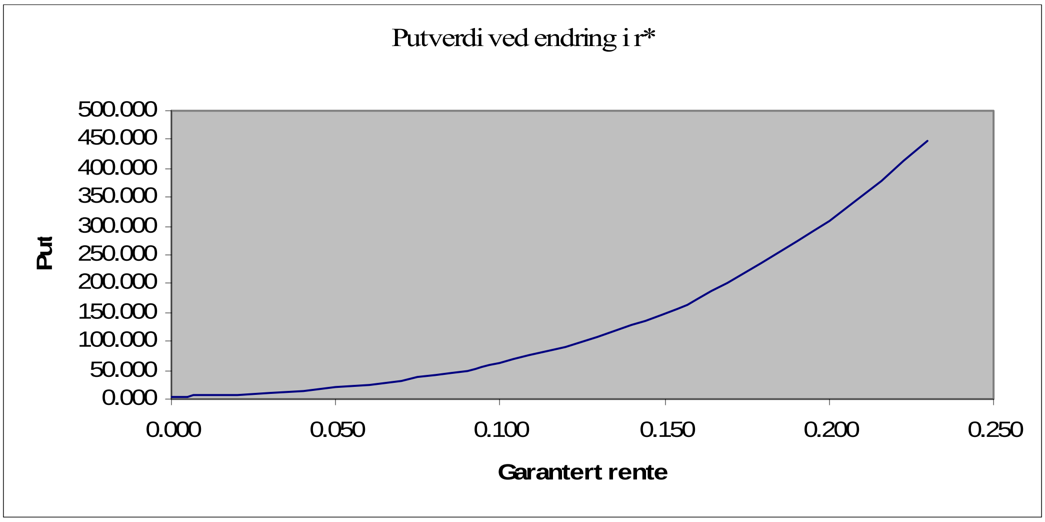
$$\begin{aligned}\Delta_P=\frac{\partial P}{\partial A}&=P\left(t,T\right)\alpha e^{r^G(T-t)}N\left(-d_2\right)+P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(-d_2\right)\frac{\partial-d_2}{\partial A}-\left(N\left(-d_1\right)+A_tN'\left(-d_1\right)\frac{\partial-d_1}{\partial A}\right)\\&=P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{A(t)}N\left(-d_2\right)+A(t)N'\left(-d_1\right)\left[\frac{\partial-d_2}{\partial A}-\frac{\partial-d_1}{\partial A}\right]-N\left(-d_1\right)\\&=P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{A(t)}N\left(-d_2\right)-N\left(-d_1\right)\end{aligned}$$



Grunnen til at putverdien ikke er en synkende verdi av aktiva, er at også kontraktsprisen avhenger av aktiva. Vi legger merke til at også putverdien er homogen av grad 1 mhp. aktiva: $P_t\left(z\cdot A(T),G^*(T),T\right)=z\cdot P_t\left(A(T),G^*(T),T\right)$.

Den deriverte med hensyn på den garanterte renten:

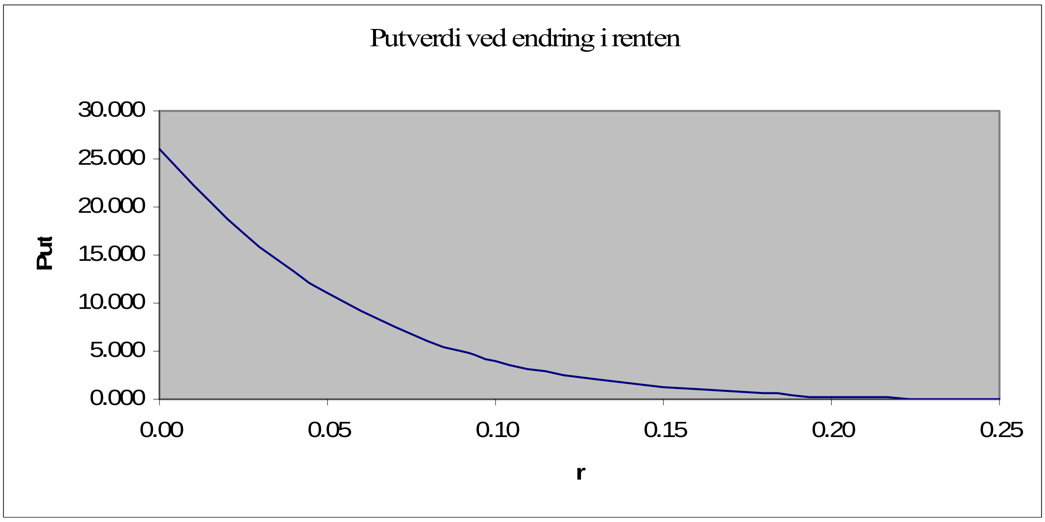
$$\begin{aligned}\xi_P=\frac{\partial P}{\partial r^G}&=P\left(t,T\right)G^*(T)N\left(-d_2\right)\left(T-t\right)+P\left(t,T\right)G^*(T)N'\left(-d_2\right)\frac{\partial-d_2}{\partial r^G}-A(t)N'\left(-d_1\right)\frac{\partial-d_1}{\partial r^G}\\&=P\left(t,T\right)G^*(T)N\left(-d_2\right)\left(T-t\right)\end{aligned}$$



Situasjonen blir her omvendt av den vi hadde med callen. En økning i den garanterte renten gir økt kontraktspris som igjen gir høyere putverdi. Vi legger merke til at puten har relativt lav verdi for verdier på r^G lavere enn 5%, mens verdien stiger raskt når den garanterte renten er over 10%.

<u>Den deriverte med hensyn på initialrenten:</u>

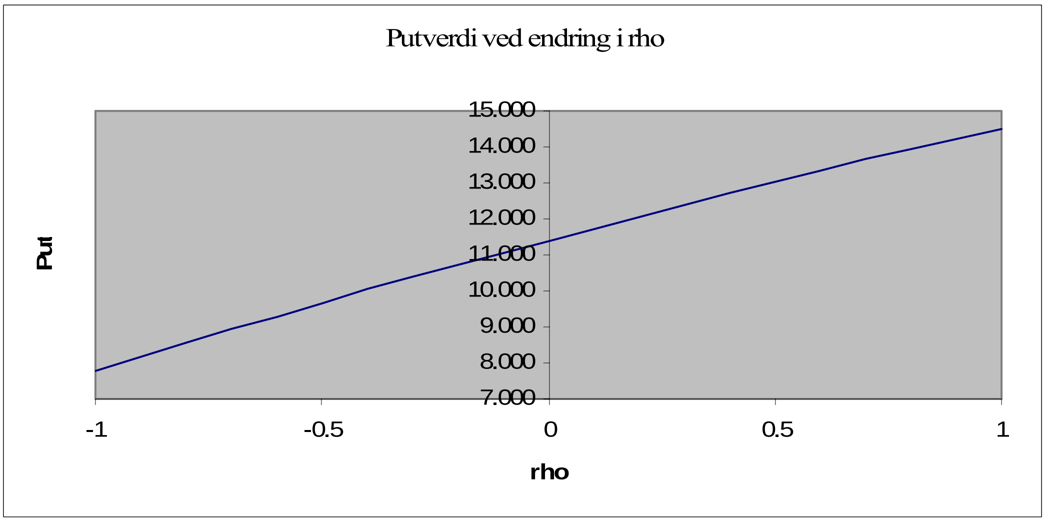
$$\rho_P = \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P(t,T)}{\partial r} N(-d_2) G^*(T) + P(t,T) G^*(T) N'(-d_2) \frac{\partial - d_2}{\partial r} - A(t) N'(-d_1) \frac{\partial - d_1}{\partial r}$$
$$= -B(t,T) P(t,T) G^*(T) N(-d_2)$$



Denne vil være negativ ettersom nullkupongobligasjonen hør høyere verdi desto høyere renten er, noe som medfører en høyere diskontert kontraktspris og dermed lavere putverdi.
For r_0 > 15% er puten tilnærmet verdiløs.

Den deriverte med hensyn på ρ:

$$\tau_P = \frac{\partial P}{\partial \rho} = P(t,T)G^*(T)N'(-d_2)\frac{\partial - d_2}{\partial \rho} - A(t)N'(-d_1)\frac{\partial - d_1}{\partial \rho}$$
$$= A(t)N'(-d_1)\left(\frac{\partial - d_2}{\partial \rho} - \frac{\partial - d_1}{\partial \rho}\right)$$
$$= A(t)N'(-d_1)\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y$$

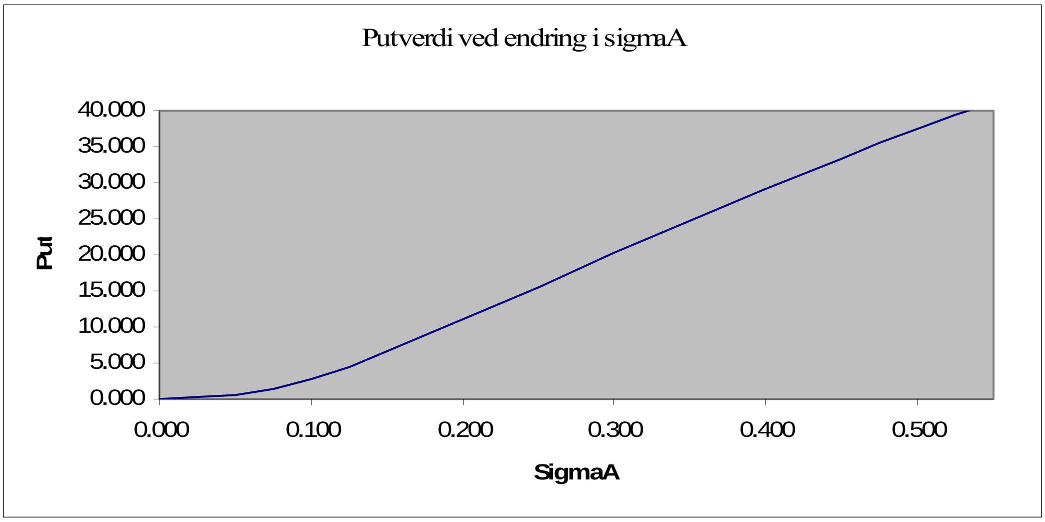


Begrunnelsen er identisk som den var ved callverdien. En høyere rho gir høyere volatilitet som medfører høyere opsjonsverdier.

Den deriverte med hensyn på σ_A:

$$\kappa_P = \frac{\partial P}{\partial \sigma_A} = P(t,T)G^*(T)N'(-d_2)\frac{\partial - d_2}{\partial \sigma_A} - A(t)N'(-d_1)\frac{\partial - d_1}{\partial \sigma_A}$$
$$= A(t)N'(-d_1)\left(\frac{\partial - d_2}{\sigma_A} - \frac{-\partial d_1}{\sigma_A}\right)$$

$$\kappa_P = A(t)N'(-d_1)\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sigma_A(T-t) + \rho Y\right)$$



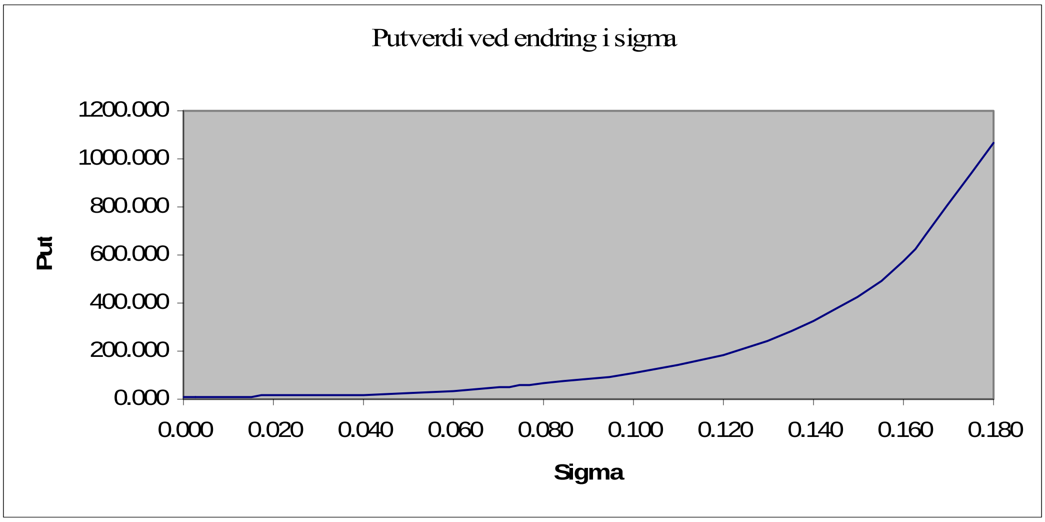
Vi ser at fortegnet blir som det var for callen. For $\sigma_A > 10\%$ er økningen i putverdien tilnærmet lineær.

<u>Den deriverte med hensyn på σ:</u>

$$\varpi_P = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{\partial P(t,T)}{\partial \sigma} G^*(T)N(-d_2) + P(t,T)G^*(T)N'(-d_2)\frac{\partial - d_2}{\partial \sigma} - A(t)N'(-d_1)\frac{\partial - d_1}{\partial \sigma}$$

$$= A(t)N'(-d_1)(\frac{\partial - d_2}{\partial \sigma} - \frac{-\partial d_1}{\partial \sigma}) + \frac{\partial P(t,T)}{\partial \sigma} G^*(T)N(-d_2)$$

$$\varpi_P = A(t)N'(-d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}[X + \sigma_A \rho Y] + \frac{\sigma}{2a^2}\left[2(T-t) - aB(t,T)^2\right]G^*(T)N(-d_2)$$



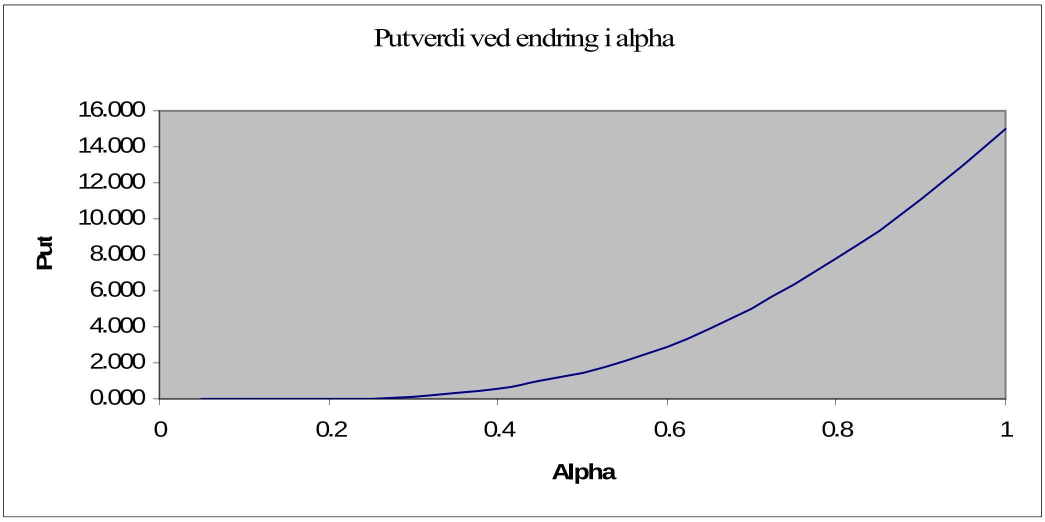
Vi merker oss at for vårt valg av verdier vil $\varpi_P > 0$ og at puten har meget høy verdi når sigma er større enn 0.1, noe som er urealistisk. Selv for små verdier på sigma vil volatiliteten i nullkupongobligasjonen bli meget høy, noe som er urealistisk.

Den deriverte med hensyn på alpha

$$P_t\left(A(T),G^*(T),T\right)=P\left(t,T\right)\alpha A(t)e^{r^G(T-t)}N\left(-d_2\right)-A(t)N\left(-d_1\right)$$

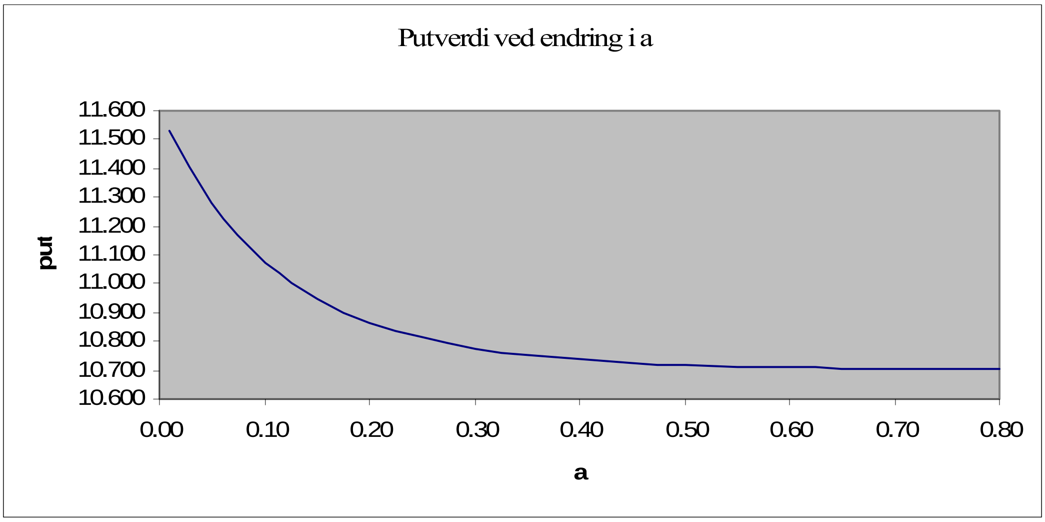
$$\nabla_P=\frac{\partial P}{\partial \alpha}=P\left(t,T\right)A(t)e^{r^G(T-t)}N\left(-d_2\right)-P\left(t,T\right)A(t)e^{r^G(T-t)}N'\left(-d_2\right)\frac{\partial -d_2}{\partial \alpha}-A(t)N'\left(-d_1\right)\frac{\partial -d_1}{\partial \alpha}$$
$$=P\left(t,T\right)\frac{G^*(T)}{\alpha}N\left(-d_2\right)$$

Vi ser at denne naturlig nok må være positiv. En høyer alpha medfører en høyere kontraktspris som gir en høyere putverdi.



Endring som følge av endring i a

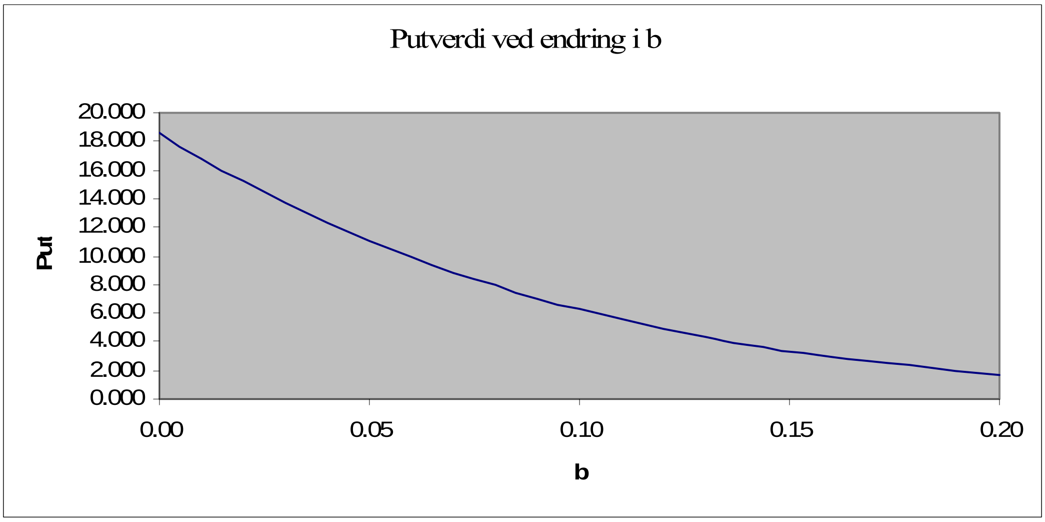
For ulike verdier, se tabell 4.4. Grafisk:



Vi ser at putverdien er en synkende funksjon av a. Det vi legger merke til, er at callverdien er omtrent uavhengig av verdien på a. Dette fordi det langsiktige rentenivået er identisk med initialrenten (r_0). Dermed har ikke hastigheten renten når sitt langsiktige nivå på noe å si, ettersom vi allerede er på det langsiktige nivået.

Endring som følge av endring i b

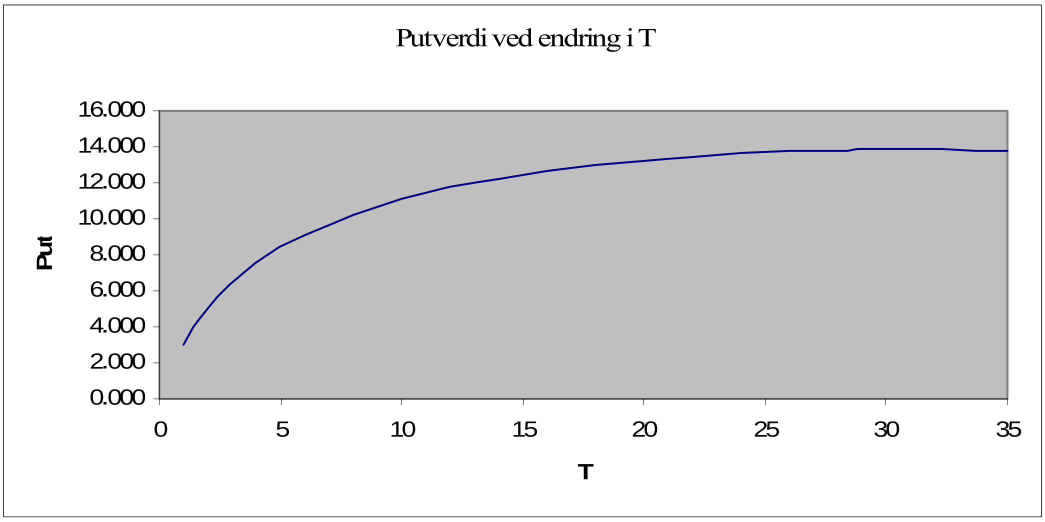
Igjen henviser vi til tabell 4.4 for ulike verdier.



b betegner som kjent det langsiktige rentenivået som renten skal variere rundt. Ettersom en høyere rente gir lavere putverdi, har vi at putverdien er en positiv funksjon av b. Dette fordi en høyere rente medfører en lavere verdi på nullkupongobligasjonen. Dette medfører videre en lavere diskontert verdi på kontraktsprisen og således en lavere putverdi.

Endring som følge av endring i T

Tabell 4.4 gir oss tallverdier og den grafiske fremstillingen blir:



Vi ser at puten er en stigende funksjon av løpetiden.

5.4 Egenkapitalen

Fra (3.5) vet vi at:

$$E(t) = C_t\left(A(T), G^*(T), T\right) - \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

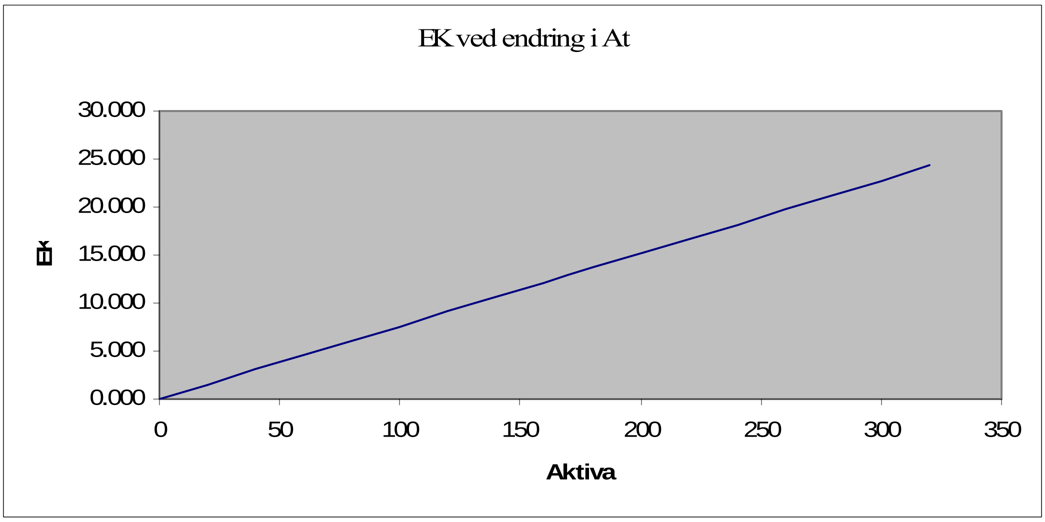
Endring som følge av endring i Aktiva:

$$\Delta_{E(t)} = \Delta_{C_1} - \alpha\Delta_{C_2}$$

$$\Delta_{E(t)} = N(d_1) - P(t,T)\frac{G^*(T)}{A(t)}N(d_2) - \alpha\left(N(d_3) - P(t,T)e^{r^G(T-t)}N(d_4)\right)$$

$$= N(d_1) - \alpha N(d_3) - P(t,T)\frac{G^*(T)}{A(t)}\left(N(d_2) - N(d_4)\right)$$

Vi vet at aktiva er homogen av grad en i begge callopsjonene. Dermed får vi at aktiva også er homogen av grad 1 i egenkapitalen: $C_t\left(z\cdot A(T),G^*(T),T\right)-\alpha C_t\left(z\cdot A(T),\dfrac{G^*(T)}{\alpha},T\right)=zE(t)$

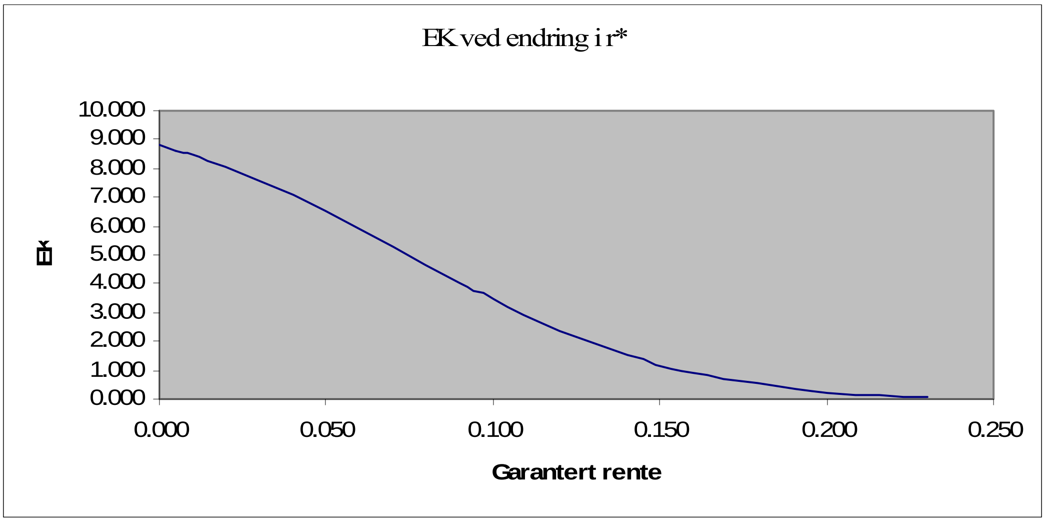


Eierne må naturlig nok betale mer for sin andel ettersom aktiva øker, men andelen av aktiva de betaler er selvsagt konstant.

<u>Endring som følge av endring i den garanterte renten:</u>

$$\xi_{E(t)}=\xi_{C_1}-\alpha\xi_{C_2}$$
$$\xi_{E(t)}=-G^*(T)P(t,T)N(d_2)(T-t)+\alpha\frac{G^*(T)}{\alpha}P(t,T)N(d_4)(T-t)$$
$$\xi_{E(t)}=-G^*(T)P(t,T)\left(N(d_2)-N(d_4)\right)(T-t)$$

Vi vet at $N(d_2)>N(d_4)$, slik at $\xi_{E(t)}$ er negativ. Dette bekreftes av den grafiske illustrasjonen:

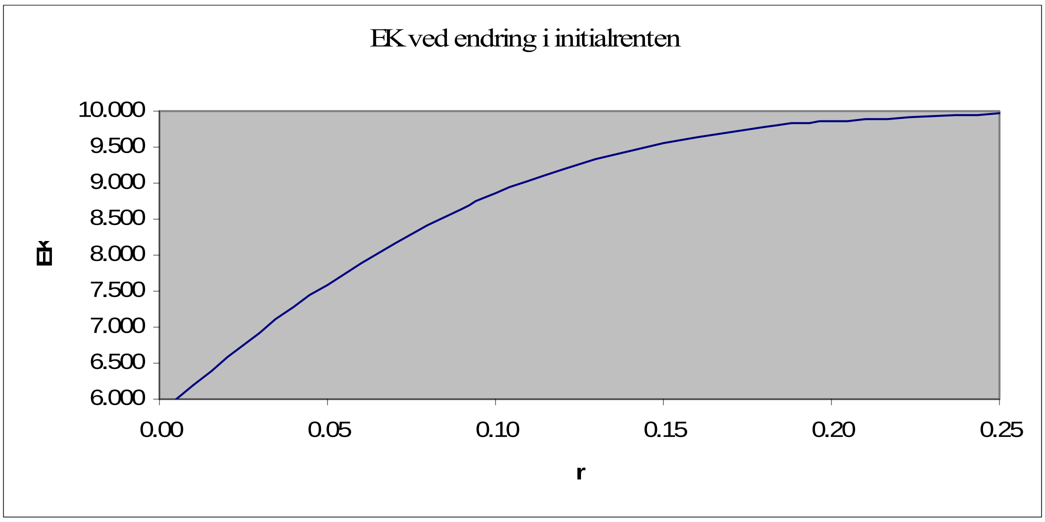


Det er naturlig at eierne må skyte inn en mindre andel etter hvert som den garanterte renten stiger. Dette fordi når de garanterte forpliktelsene blir høyere øker sannsynligheten for at eierne ikke sitter igjen med noe. Da skal de selvfølgelig betale mindre også.

Endring som følge av endring i initialrenten:

$$\begin{aligned}\rho_{E(t)} &= \rho_{C_1} - \alpha\rho_{C_2} \\ &= B(t,T)P(t,T)G^*(T)N(d_2) - \alpha B(t,T)P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_4) \\ &= B(t,T)P(t,T)G^*(T)\left(N(d_2) - N(d_4)\right)\end{aligned}$$

Vi ser både ut fra det matematiske uttrykket og fra grafen at $\rho_{E(t)}$ er positiv.

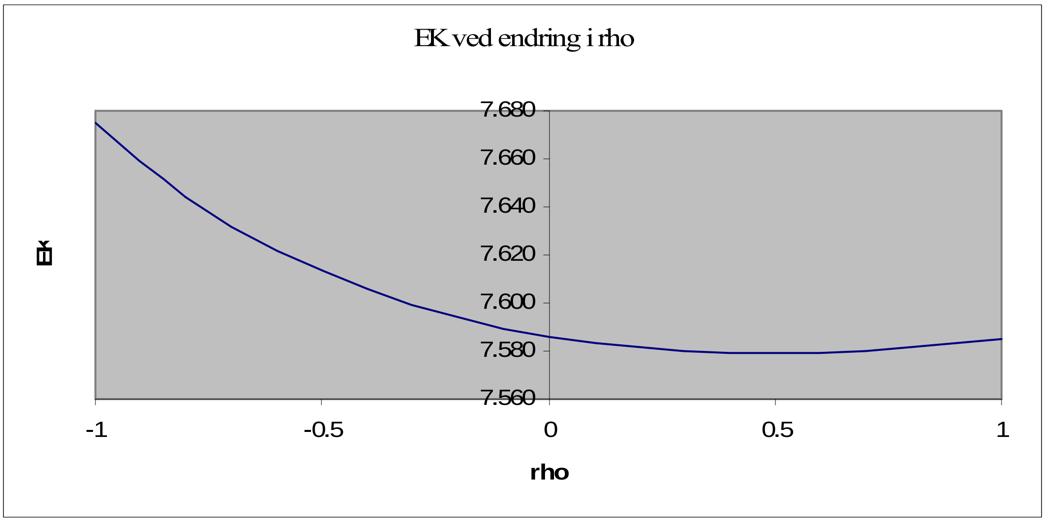


En høyere initialrente gir høyere verdi på nullkupongobligasjonen og verdien på egenkapitalen stiger. En høyere rente gir en høyere forventet avkastning på aktiva. Vi ser at for høye verdier på r_0 er den deriverte tilnærmet null, noe som henger sammen med at $N\left(d_2\right)$ og $N\left(d_4\right)$ da er tilnærmet like.

<u>Endring som følge av endring i rho:</u>

$$\tau_{E(t)} = \tau_{C_1} - \alpha\tau_{C_2}$$
$$\tau_{E(t)} = A(t)N'\left(d_1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y\right) - \alpha A(t)N'\left(d_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y\right)$$
$$\tau_{E(t)} = A(t)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y\right)\left(N'\left(d_1\right) - \alpha N'\left(d_3\right)\right)$$

Vi ser at denne er positiv så lenge $N'\left(d_1\right) > \alpha N'\left(d_3\right)$. Det krever en del regning for å finne ut når det er tilfelle, så vi velger å støtte oss til den grafiske beskrivelsen.

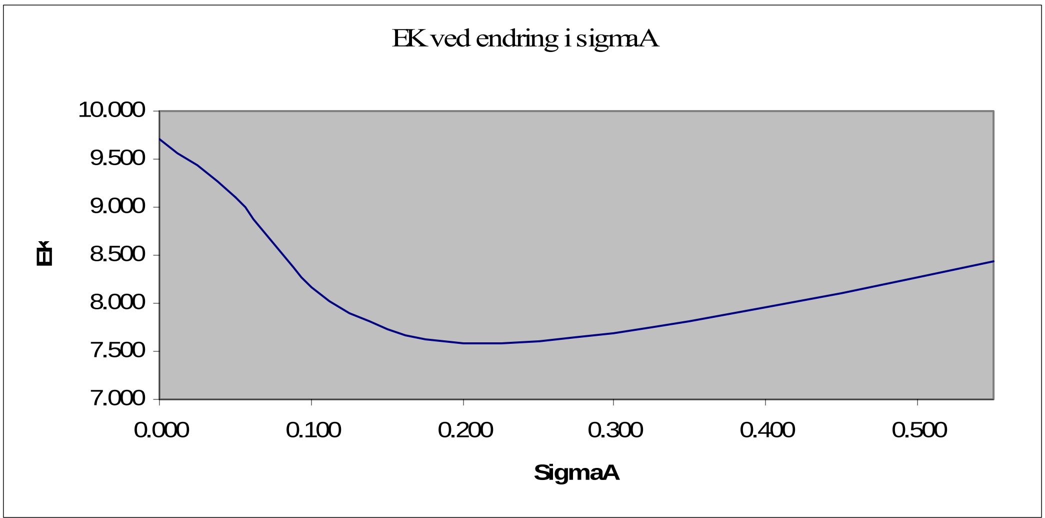


Vi legger merke til at korrelasjonskoeffisienten har meget lite å si for verdien på egenkapitalen.

<u>Endring som følge av endring i σ_A:</u>

$$\kappa_{E(t)} = \kappa_{C_1} - \alpha\kappa_{C_2}$$
$$= A(t)N'(d_1)\frac{1}{\sqrt{k}}(\sigma_A(T-t)+\rho Y) - \alpha A(t)N'(d_3)\frac{1}{\sqrt{k}}(\sigma_A(T-t)+\rho Y)$$
$$= A(t)\frac{1}{\sqrt{k}}(\sigma_A(T-t)+\rho Y)\left(N'(d_1)-\alpha N'(d_3)\right)$$

Vi kan vanskelig si noe om fortegnet på den deriverte uten videre utregninger, men den grafiske illustrasjonen kan hjelpe oss:

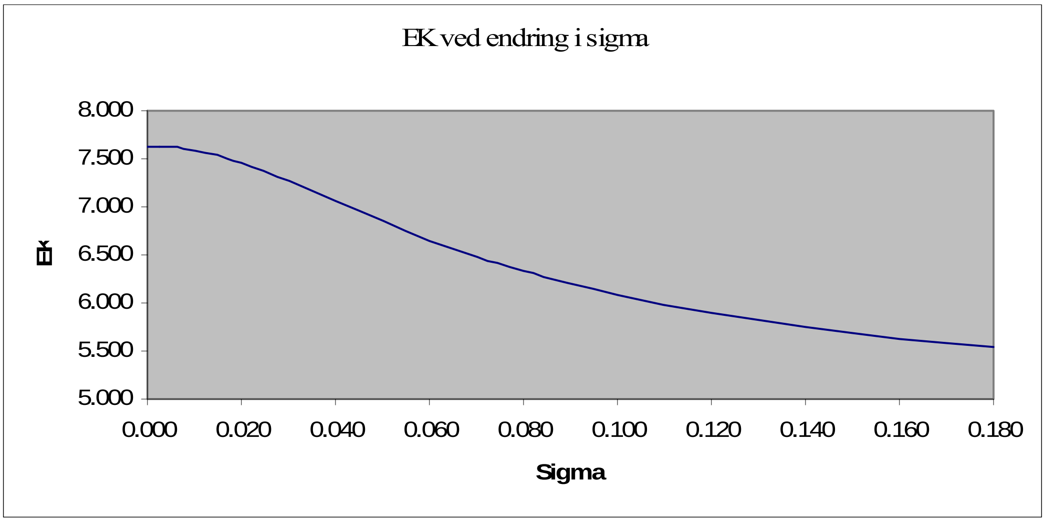


Vi ser at for lave verdier på sigmaA er endringen i egenkapitalen negativ, mens for høye verdier er den positiv. Fortegnsskiftet skjer rundt sigmaA = 0.22.

Grunnen til at vi får et fortegnsskifte, er at egenkapitalen består av to callopsjoner. Den første, som illustrerer eiernes begrensete ansvar, er relativt lite verdt for små sigmaA sett i forhold til ”bonusopsjonen”. For høye verdier på sigmaA, derimot, vil den første opsjonen dominere den andre, slik at den deriverte blir positiv.

<u>Endring som følge av endring i σ:</u>

$$\varpi_{E_{(t)}} = \varpi_{C_1} - \alpha\varpi_{C_2}$$
$$= A(t)N'(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}[X+\sigma_A\rho Y] - P(t,T)\frac{\sigma}{2a^2}\left[2(T-t)-aB(t,T)^2\right]G^*(T)N(d_2)$$
$$-\alpha\left(A(t)N'(d_3)\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}[X+\sigma_A\rho Y] - P(t,T)\frac{\sigma}{2a^2}\left[2(T-t)-aB(t,T)^2\right]\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_4)\right)$$
$$= A(t)\frac{1}{\sigma\sqrt{k}}[X+\sigma_A\rho Y]\left(N'(d_1)-\alpha N'(d_3)\right)$$
$$-P(t,T)\frac{\sigma}{2a^2}\left[2(T-t)-aB(t,T)^2\right]G^*(T)\left(N(d_2)-N(d_4)\right)$$

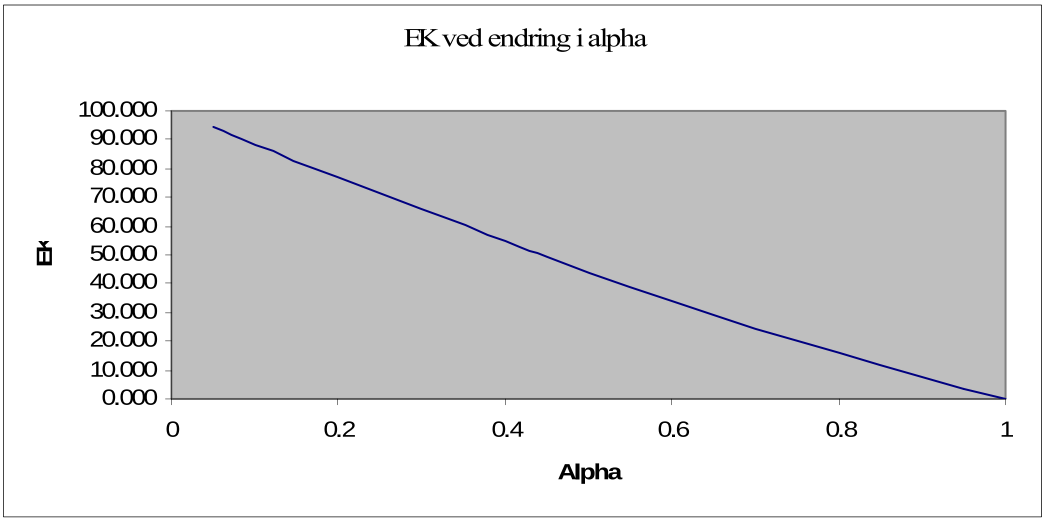


Vi ser ut fra grafen at den deriverte mhp. sigma er negativ. Dette kunne vi vanskelig se ut fra det matematiske uttrykket, da dette er relativt grisete. Vi legger også merke til at den andrederiverte er negativ.

<u>Endring som følge av endring i alpha:</u>

$$\begin{aligned}\nabla_{E(t)} &= \nabla_{C_1} - C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right) - \alpha\nabla_{C_2} \\ &= -P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_2) - A(t)N(d_3) + P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_4) \\ &= P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}\left[N(d_4) - N(d_2)\right] - A(t)N(d_3)\end{aligned}$$

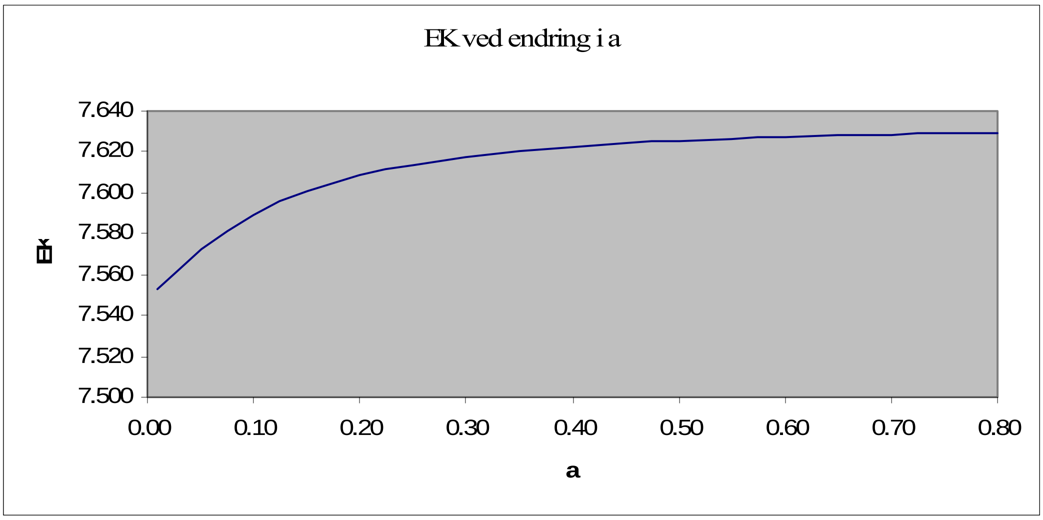
Vi vet at $N(d_4) > N(d_2)$ slik at $\nabla_{E(t)}$ er negativ.



Alpha er den delen forsikringstakerne skyter inn. Dermed er det selvsagt at egenkapitalen må skyte inn mindre desto høyere alpha er.

Endring som følge av endring i a

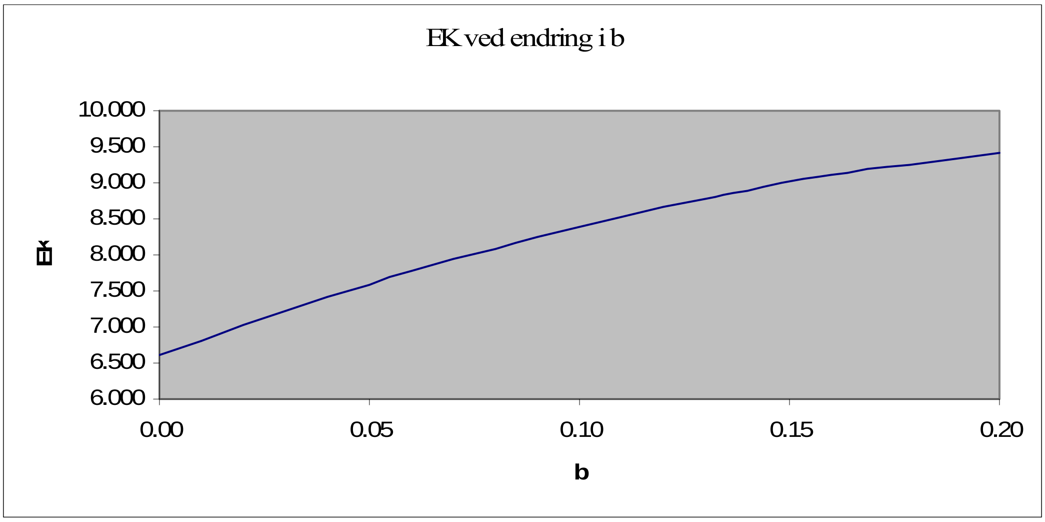
For ulike verdier, se tabell 4.4. Grafisk:



Vi ser at egenkapitalverdien er en positiv funksjon av a. Men a er betydningsløs for verdien på egenkapitalen, ettersom vi allerede befinner oss på det langsiktige rentenivået.

Endring som følge av endring i b

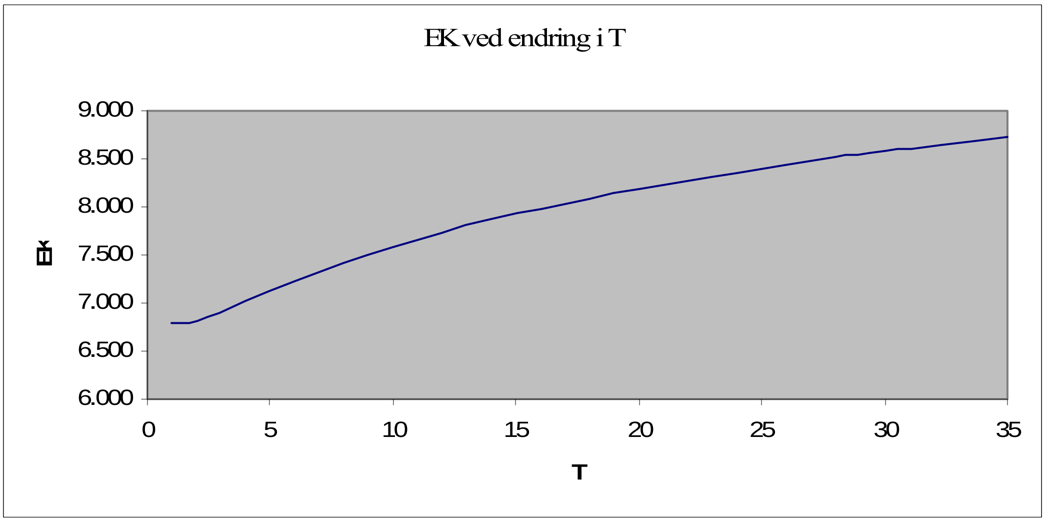
Igjen henviser vi til tabell 4.4 for ulike verdier.



Egenkapitalen er en positiv funksjon av initialrenten og dermed også en positiv funksjon av det langsiktige rentenivået. Når renten øker, øker sannsynligheten for en høyere aktivaverdi. Dermed blir egenkapitalverdien høyere og eierne må skyte inn mer.

Endring som følge av endring i T

Tabell 4.4 gir oss tallverdier og den grafiske fremstillingen blir:



Vi ser at den deriverte av egenkapitalen med hensyn på løpetiden er positiv. Jo lengre tid det er til forfall av kontrakten, desto større er sannsynligheten for at eierne sitter igjen med positiv verdi, noe som reflekteres i hvor mye de må skyte inn.

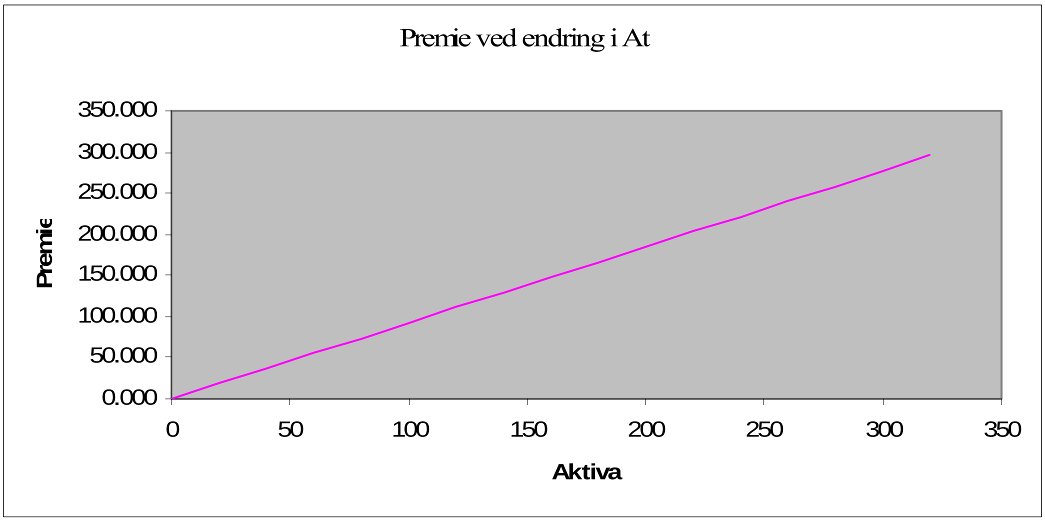
5.5 Forsikringskontraktene

$$G(t) = P(t,T)G^*(T) - P_t\left(A(T), G^*(T), T\right) + \alpha C_t\left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T\right)$$

Endring som følge av endring i aktiva:

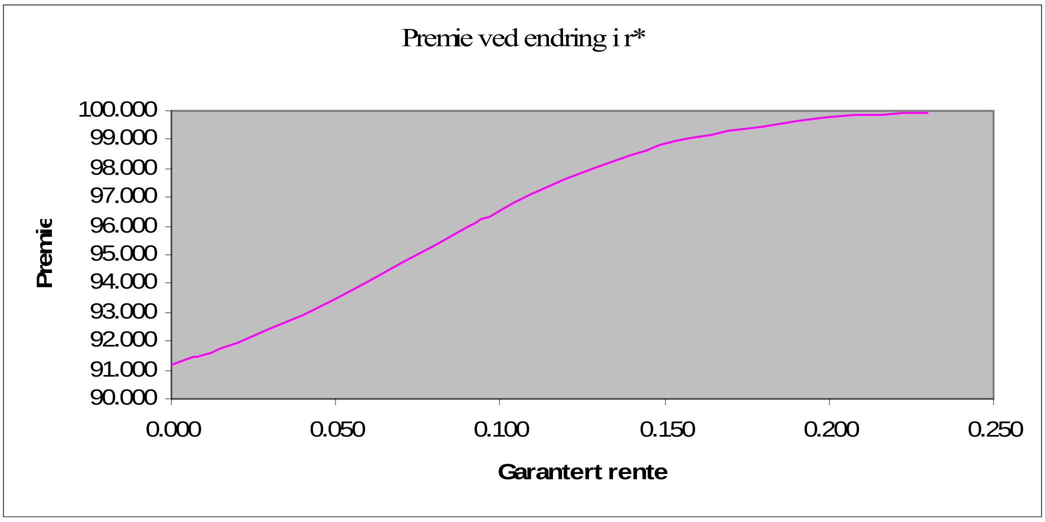
$$\begin{aligned}
\Delta_{G(t)} &= P(t,T)\alpha e^{r^G(T-t)} - \Delta_P + \alpha\Delta_{C_2} \\
&= P(t,T)\frac{G^*(T)}{A(t)} - P(t,T)\frac{G^*(T)}{A(t)}N(-d_2) + N(-d_1) + \alpha\left(N(d_3) - P(t,T)e^{r^G(T-t)}N(d_4)\right) \\
&= P(t,T)\frac{G^*(T)}{A(t)}\left(1 - N(-d_2) - N(d_4)\right) + N(-d_1) + \alpha N(d_3) \\
&= P(t,T)\frac{G^*(T)}{A(t)}\left(N(d_2) - N(d_4)\right) + N(-d_1) + \alpha N(d_3)
\end{aligned}$$

Ettersom $N(d_2) > N(d_4)$ vil $\Delta_{G(t)} > 0$. Ettersom elementene som inngår i forsikrings-kontaktene er homogen av grad 1 med hensyn på aktiva, er aktiva homogen av grad 1 også i G(t). Premien øker naturlig nok når aktiva øker ettersom den nominelle verdien på premien er en andel av aktiva. Den grafiske fremstillingen gir oss det ventede resultat, en rett, positiv linje.



Endring som følge av endring i den garanterte renten:

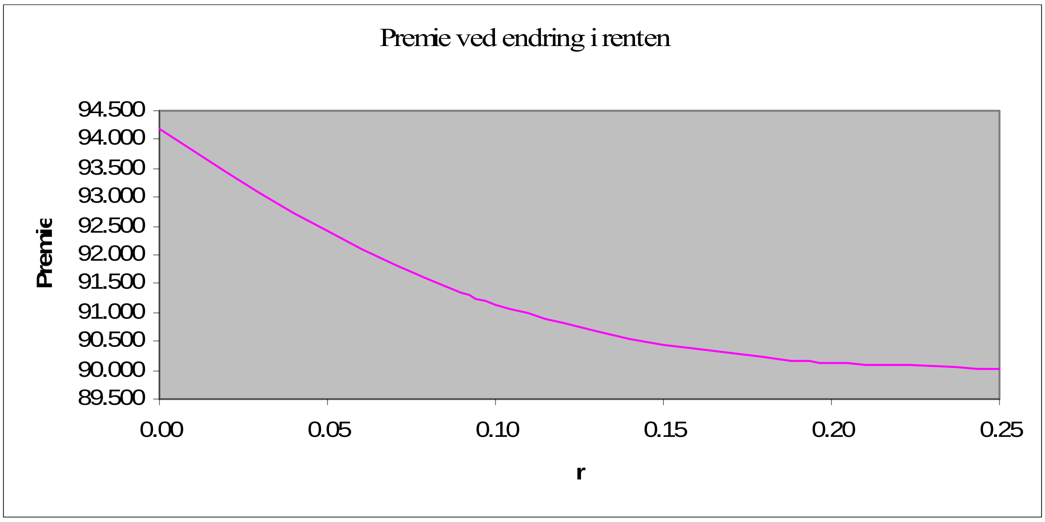
$$\xi_{G(t)} = \frac{\partial G(t)}{\partial r^G} = P(t,T)\frac{\partial G^*(T)}{\partial r^G} - \frac{\partial P_t}{\partial r^G} + \alpha \frac{\partial C_2}{\partial r^G}$$
$$= P(t,T)G^*(T)(T-t) - P(t,T)G^*(T)N(-d_2)(T-t) - \alpha P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_4)(T-t)$$
$$= P(t,T)G^*(T)\big(N(d_2) - N(d_4)\big)(T-t)$$



Vi ser både av det matematiske uttrykket og av grafen at $\xi_{G(t)}$ er positiv. Dette er naturlig, ettersom en høyere garantert rente gir økte garanterte forventede utbetalinger, noe som gjør kontrakten mer attraktiv for forsikringstakerne. Dette må de selvsagt betale for. Verdien flater ut for høye verdier på den garanterte renten, ettersom eierne har begrenset ansvar.

Endring som følge av endring i initialrenten:

$$\rho_{G(t)} = \frac{\partial G(t)}{\partial r} = G^*(T)\frac{\partial P(t,T)}{\partial r} - \frac{\partial P_t}{\partial r} + \alpha \frac{\partial C_2}{\partial r}$$
$$= -B(t,T)P(t,T)G^*(T) + B(t,T)P(t,T)G^*(T)N(-d_2) + \alpha B(t,T)P(t,T)\frac{G^*(T)}{\alpha}N(d_4)$$
$$= B(t,T)P(t,T)G^*(T)\big(N(d_4) - N(d_2)\big)$$



Også her ser vi både av det matematiske uttrykket og av grafen at $\rho_{G(t)}$ er positiv.

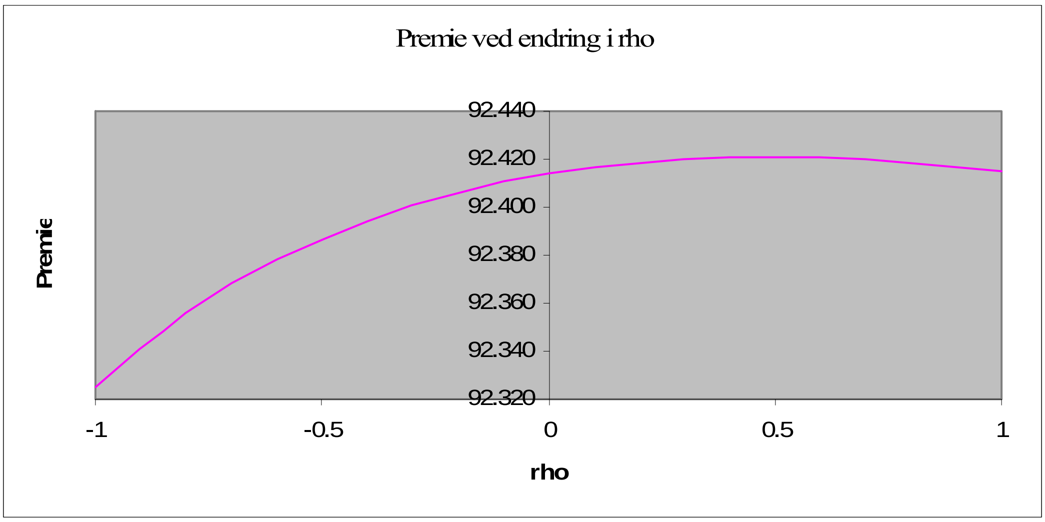
En høyere rente gir lavere sannsynlighet for at rentegarantien tas i bruk. Dette reduserer verdien på kontrakten og forsikringstakeren må betale mindre for deres andel.

<u>Endring som følge av endring i rho:</u>

$$\tau_{G(t)} = \frac{\partial G(t)}{\partial \rho} = -\frac{\partial P_t}{\partial \rho} + \alpha \frac{\partial C_2}{\partial \rho}$$

$$= -A(t)N'\left(-d_1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y\right) + \alpha A(t)N'\left(d_3\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y$$

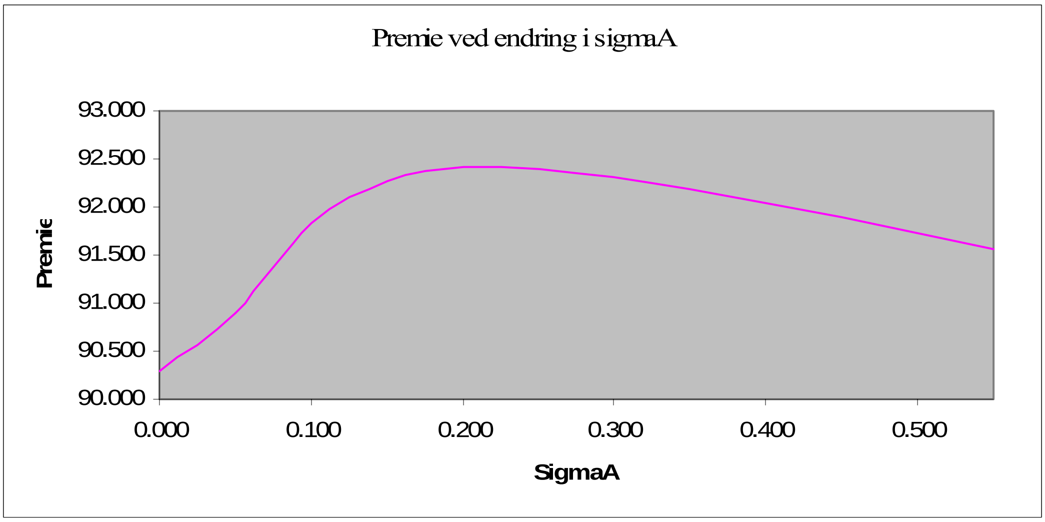
$$= A(t)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_A Y\right)\left(\alpha N'\left(d_3\right) - N'\left(-d_1\right)\right)$$



Diskusjonen blir som under egenkapitalen men med motsatt fortegn. Det man legger merke til, er hvor liten innvirkning korrelasjonskoeffisienten har på premien.

Endring som følge av endring i σ_A:

$$
\begin{aligned}
\kappa_{G(t)} &= \frac{\partial G(t)}{\partial \sigma_A} = -\frac{\partial P_t}{\partial \sigma_A} + \alpha \frac{\partial C_2}{\partial \sigma_A} \\
&= -A(t)N'\left(-d_1\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sigma_A(T-t)+\rho Y\right) + \alpha A(t)N'\left(d_3\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sigma_A(T-t)+\rho Y\right) \\
&= A(t)\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sigma_A(T-t)+\rho Y\right)\left(\alpha N'\left(d_3\right) - N'\left(-d_1\right)\right)
\end{aligned}
$$



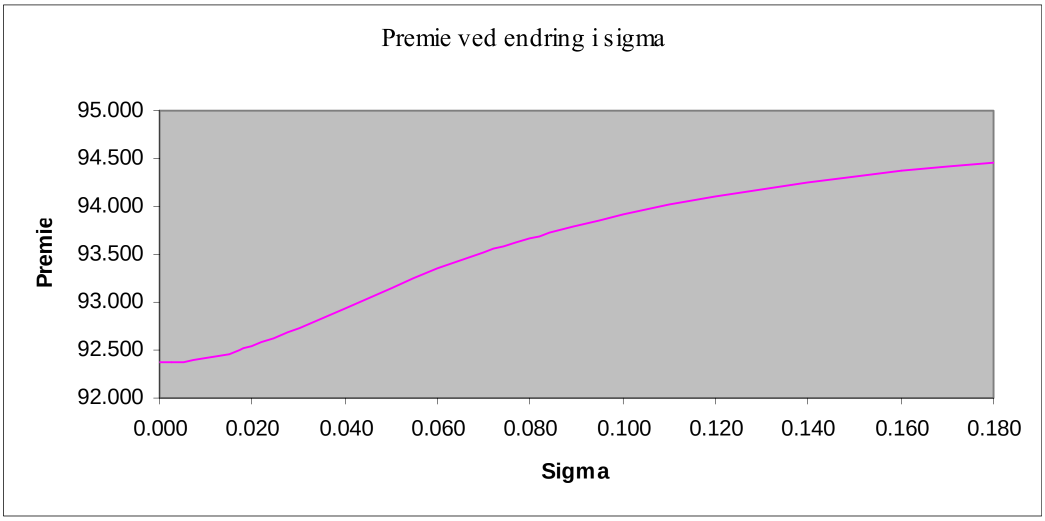
Vi ser at for lave verdier på sigmaA er endringen i egenkapitalen positiv, mens for høye verdier er den negativ. Fortegnsskiftet skjer rundt sigmaA = 0.22.

Grunnen til at vi får et fortegnsskifte, er at premien består av en put og en call hvor sigmaA inngår i begge. Puten, som illustrerer eiernes begrensete ansvar, har en relativ lav verdi for små sigmaA sett i forhold til "bonusopsjonen" (call2). For høye verdier på sigmaA, derimot, vil putopsjonen dominere callen, slik at den deriverte blir negativ.

Premien har et toppunkt i sigmaA tilnærmet lik 0.22.

Endring som følge av endring i σ:

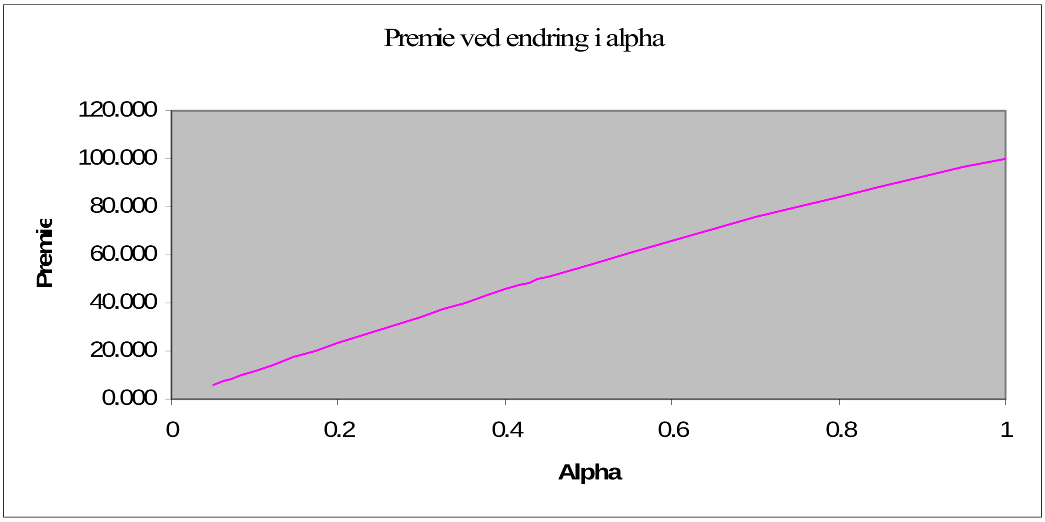
$$
\begin{aligned}
\varpi_{G(t)} &= \frac{\partial G(t)}{\partial \sigma} = \frac{\partial P(t,T)}{\partial \sigma} G^*(T) - \varpi_P + \alpha \varpi_{C_2} \\
&= P(t,T) \frac{\sigma}{2a^2} \left[2(T-t) - aB(t,T)^2 \right] G^*(T) - A_t N'(-d_1) \frac{1}{\sigma\sqrt{k}} \left[X + \sigma_A \rho Y \right] \\
&\quad - \frac{\sigma}{2a^2} \left[2(T-t) - aB(t,T)^2 \right] G^*(T) N(-d_2) \\
&\quad + \alpha \left(A(t) N'(d_3) \frac{1}{\sigma\sqrt{k}} \left[X + \sigma_A \rho Y \right] - P(t,T) \frac{\sigma}{2a^2} \left[2(T-t) - aB(t,T)^2 \right] \frac{G^*(T)}{\alpha} N(d_4) \right) \\
&= A(t) \frac{1}{\sigma\sqrt{k}} \left[X + \sigma_A \rho Y \right] \left(\alpha N'(d_3) - N'(-d_1) \right) + P(t,T) \frac{\sigma}{2a^2} \left[2(T-t) - aB(t,T)^2 \right] G^*(T) \left(N(d_2) - N(d_4) \right)
\end{aligned}
$$



Uttrykket er selvsagt som under egenkapitalen med motsatt fortegn. Vi ser grafisk at $\varpi_{G(t)}$ er positiv.

<u>Endring som følge av endring i alpha:</u>

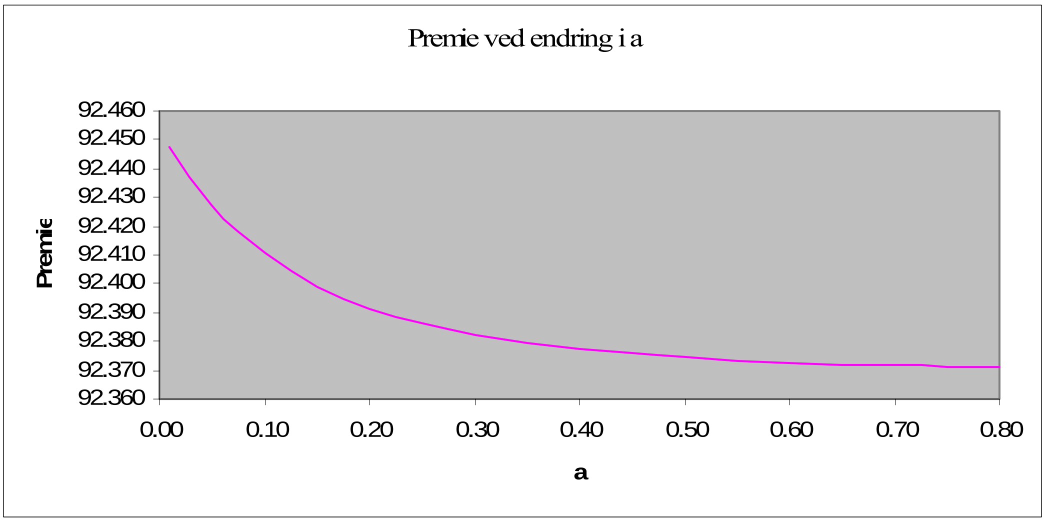
$$
\begin{aligned}
\nabla_{G(t)} &= P(t,T) \frac{G^*(T)}{\alpha} - \nabla_P + C_t \left(A(T), \frac{G^*(T)}{\alpha}, T \right) + \alpha \nabla_{C_2} \\
&= P(t,T) \frac{G^*(T)}{\alpha} - P(t,T) \frac{G^*(T)}{\alpha} N(-d_2) + A(t) N(d_3) - P(t,T) \frac{G^*(T)}{\alpha} N(d_4) \\
&= P(t,T) \frac{G^*(T)}{\alpha} \left[1 - N(-d_2) - N(d_4) \right] + A(t) N(d_3) \\
&= A(t) N(d_3) + P(t,T) \frac{G^*(T)}{\alpha} \left[N(d_2) - N(d_4) \right]
\end{aligned}
$$



Alpha er den delen forsikringstakerne skyter inn av den nominelle verdien. Dermed er det selvsagt at verdien på premien også øker, ceteris paribus.

<u>Endring som følge av endring i a</u>

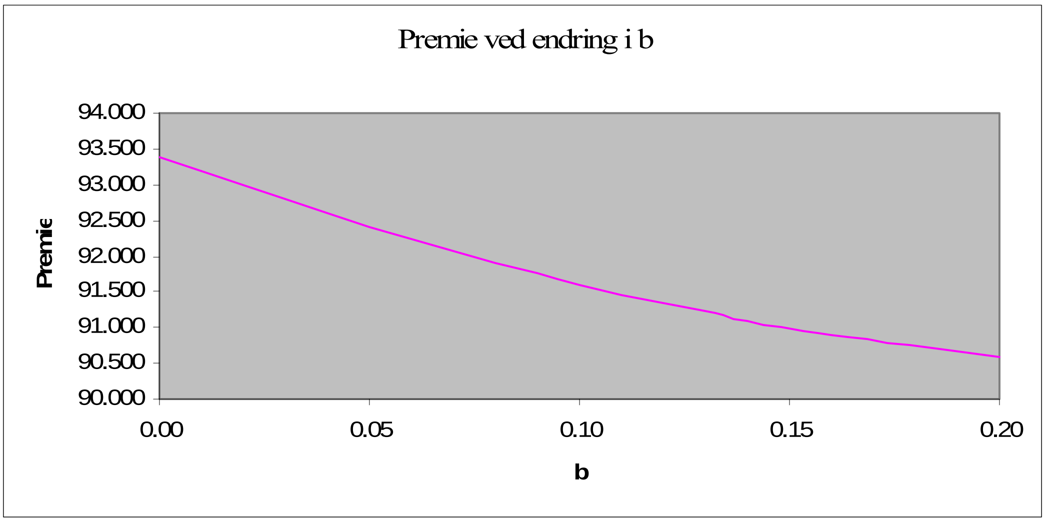
For ulike verdier, se tabell 4.4. Grafisk:



Vi ser at premien er en negativ funksjon av a. Men a er betydningsløs for verdien på premien, ettersom vi allerede befinner oss på det langsiktige rentenivået.

<u>Endring som følge av endring i b</u>

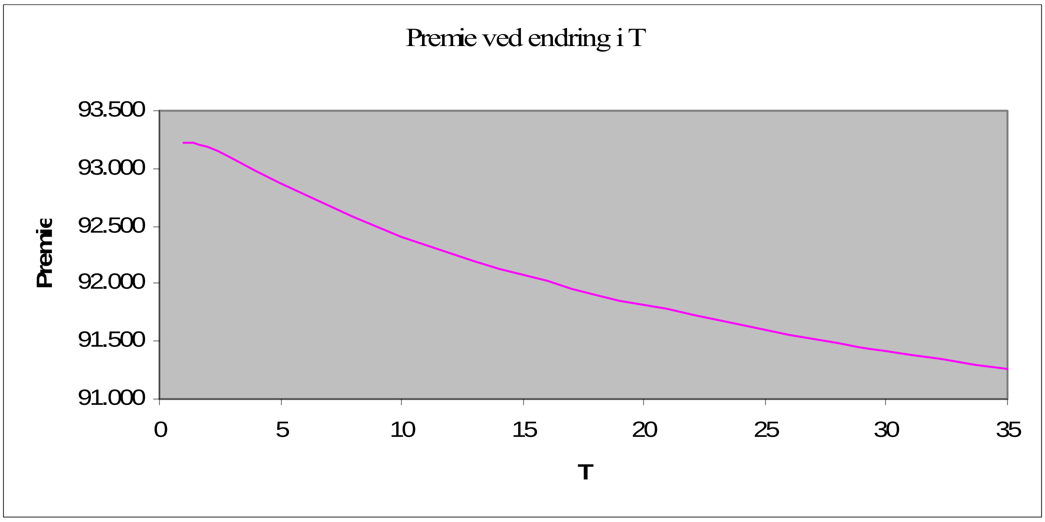
Igjen henviser vi til tabell 4.4 for ulike verdier.



Premien er en negativ funksjon av initialrenten og dermed også en negativ funksjon av det langsiktige rentenivået. Jo høyere det langsiktige rentenivået er, desto mindre verdt er rentegarantien.

Endring som følge av endring i T

Tabell 4.4 gir oss tallverdier og den grafiske fremstillingen blir:



Vi ser at den deriverte av premien med hensyn på løpetiden er negativ. Vi vet at årlig gjennomsnittlig avkastning på aktiva over en lang periode sannsynligvis vil "slå" en årlig avkastning på 3% over samme periode. Dermed vil verdien på rentegarantien synke med løpetiden, noe premieverdien også vil gjøre.

6. Komparativ statikk kontrakt B

I dette kapitlet tar vi for oss kontrakt B og gjør en komparativ statikk analyse av den.
Vi tar først for oss egenkapitalen og deretter forsikringskontraktkontoen.
Vi husker fra (3.40) og (3.41) at verdien på henholdsvis forsikringskontraktene og egenkapitalen kan skrives som:

$$G(t_0)=\alpha A(t_0)\prod_{j=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r_G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_j\right)-P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_s^G ds}N\left(d2_j\right)\right)\right)$$

$$E(t_0)=A(t_0)\left(1-\alpha\prod_{i=1}^{n}\left(P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r_G\left(t_j-t_{j-1}\right)}+\delta\left(N\left(d1_i\right)-P\left(t_{j-1},t_j\right)e^{r_G\left(t_j-t_{j-1}\right)}N\left(d2_j\right)\right)\right)\right)$$

hvor

$$d1_j=\frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right)-\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_s^G ds+\frac{1}{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}{\sqrt{\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}}$$

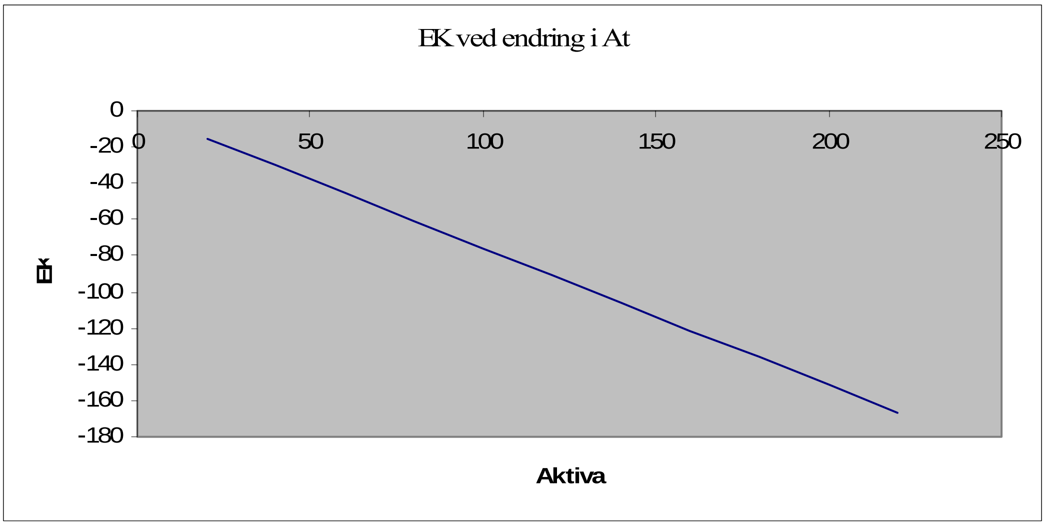
$$d2_j=\frac{\ln\left(\frac{1}{P\left(t_{j-1},t_j\right)}\right)-\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_s^G ds-\frac{1}{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}{\sqrt{\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left(\sigma_p(s)+\sigma_A\rho\right)^2+\sigma_A^2\left(1-\rho^2\right)\right)ds}}$$

Disse utrykkene lar seg vanskelig derivere ettersom vi har ulik rente i hver periode. Den komparative statikken begrenser seg derfor til en grafisk analyse. For endringer i sigma, initialrenten, a, b og T har vi simulert renten for hver ny verdi. Antall simuleringer er satt til 50 000. Dette kunne selvsagt vært høyere, men det ville også vært atskillig mer tidkrevende. Vi gjør oppmerksom på at det kan oppstå små avvik i verdiene i forhold til en situasjon hvor antall simuleringer går mot uendelig. Vi har også valgt å simulere årlige renter, slik at i en situasjon med T = 1 blir renten lik initialrenten, 5%.
Vi minner leseren om at vi opererer uten konkursrisiko i dette kapitlet.

Vi viser til tabell 4.5 for ulike verdier på variablene.

6.1 Egenkapitalen

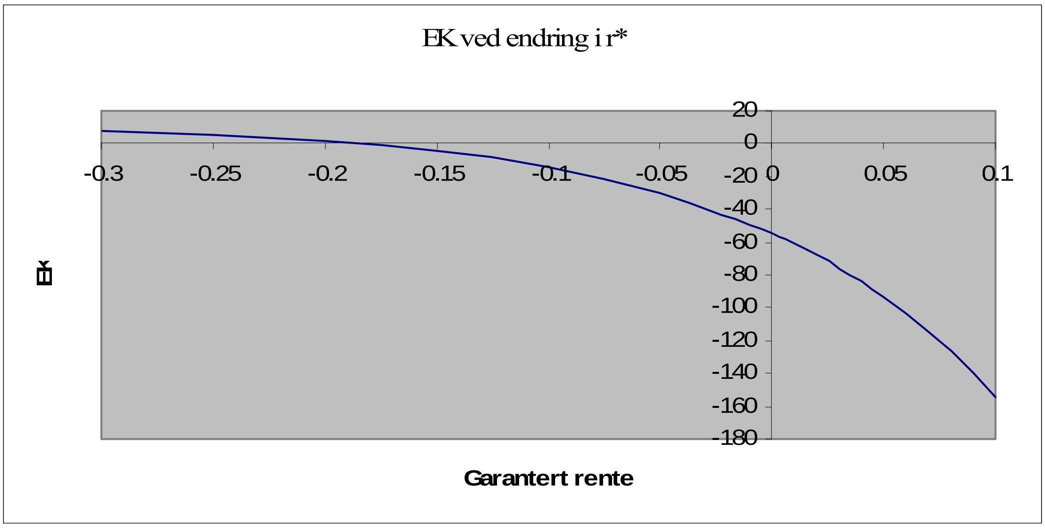
Endring som følge av endring i Aktiva:



Vi ser at egenkapitalen er en negativ funksjon av aktiva, nærmere bestemt en lineær, negativ funksjon. Det er viktig å huske på at jo mer negativ egenkapitalverdien er, desto mer penger får eierne av forsikringstakerne for å inngå kontrakten.

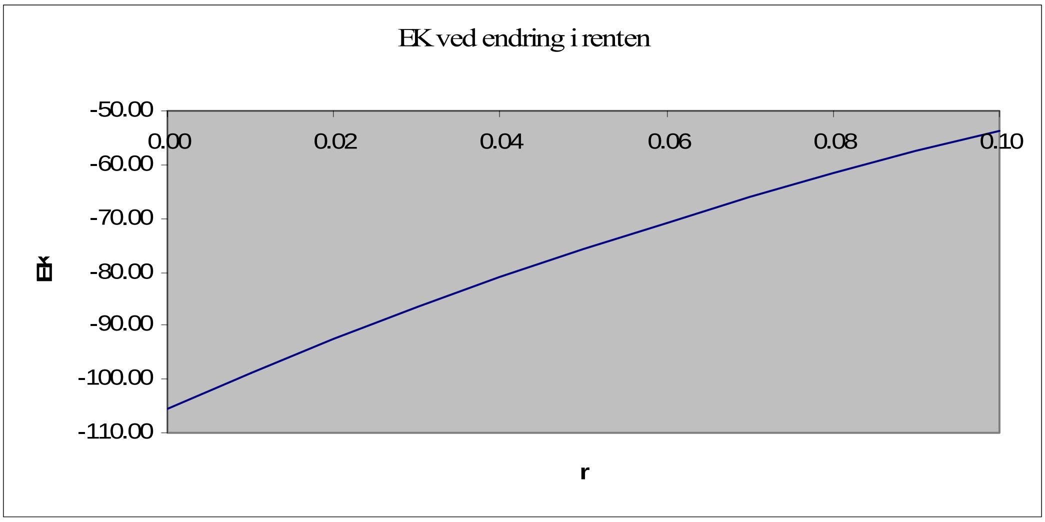
Det er fornuftig at når verdien på aktiva fordobler seg så får eierne dobbelt så mye.

Endring som følge av endring i den garanterte renten:



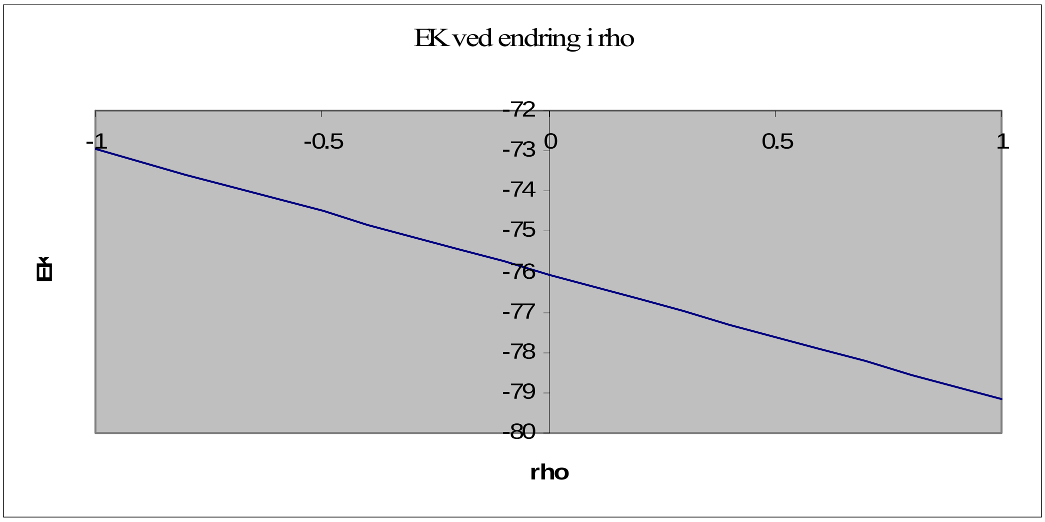
Vi ser at eierne *får* penger for å inngå kontrakten så lenge den garanterte renten er over ca. -18%. Dette henger sammen med at i flere perioder vil vi oppleve en meget lav avkastning på aktiva. Selv om rentegarantien er såpass lav som -15%, vil den forhindre de store tapene som oppstår når aktivaavkastningene er meget dårlige. (Som vi opplever fra tid til annen i aksjemarkedet)
Det er naturlig at eierne må skyte inn en mindre andel etter hvert som den garanterte renten stiger. Dette fordi når de garanterte forpliktelsene blir høyere øker sannsynligheten for at eierne ikke sitter igjen med noe.

Endring som følge av endring i initialrenten:



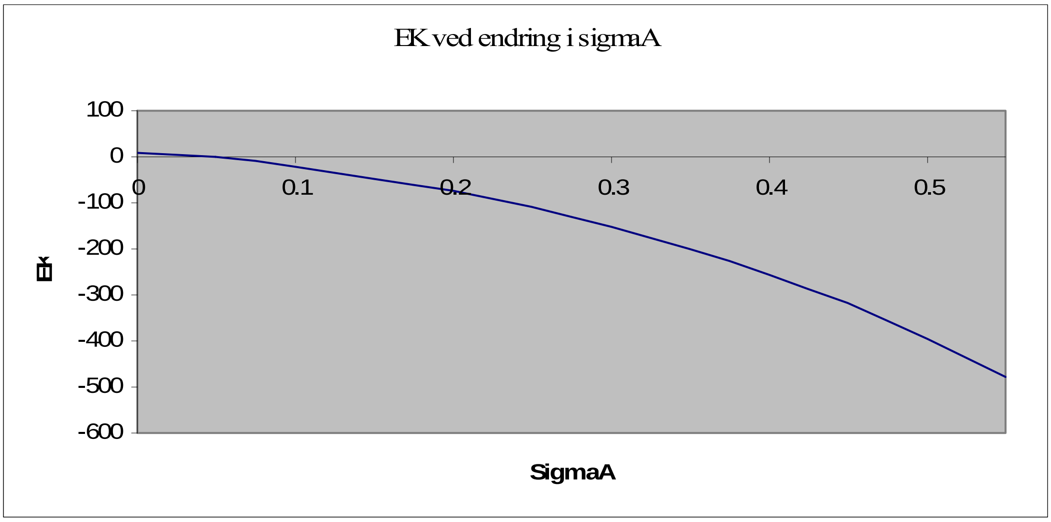
En høyere initialrente gir lavere sannsynlighet for at rentegarantien kommer til anvendelse (en høyere forventet verdi på aktiva), og eierne tar mindre risiko. Ergo må de betale mer (få mindre) etter hvert som initialrenten stiger.

Endring som følge av endring i rho:



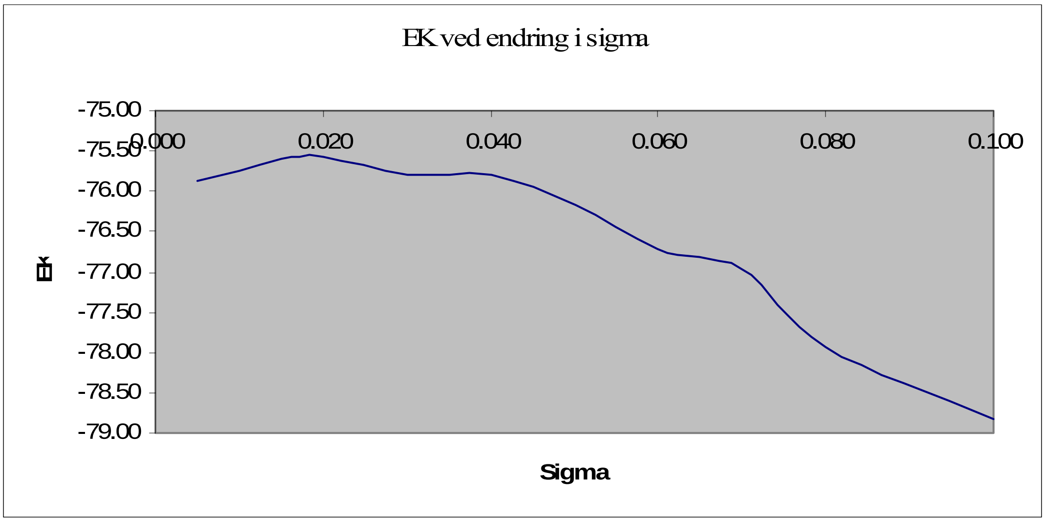
Vi legger merke til at korrelasjonskoeffisienten har meget lite å si for verdien på egenkapitalen.

<u>Endring som følge av endring i σ_A:</u>



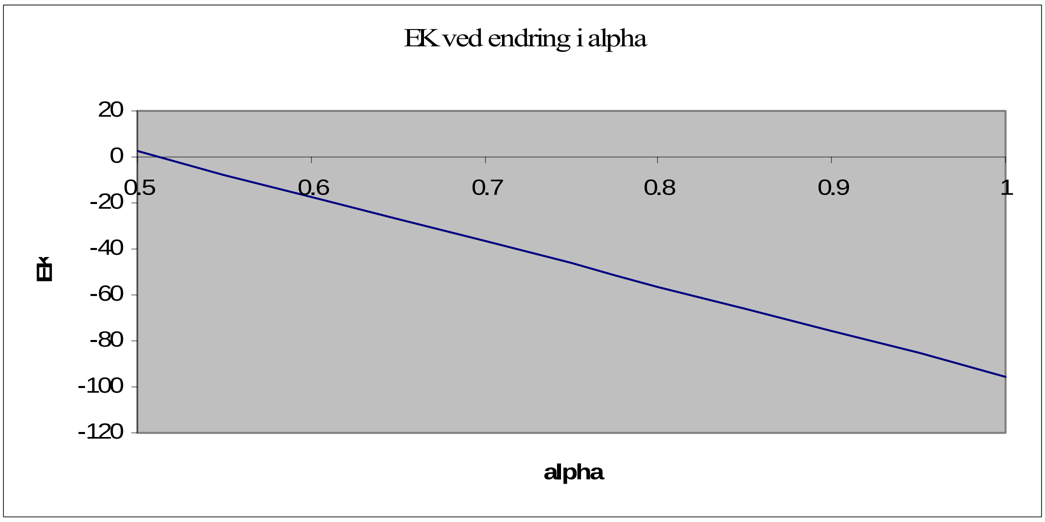
Vi legger merke til at den deriverte av egenkapitalen med hensyn på sigmaA er negativ. Dette står i kontrast til situasjonen under kontrakt A, hvor vi hadde et fortegnsskifte i den deriverte. Grunnen til at eierne får mer penger for å inngå kontrakten etter hvert som sigmaA øker, er at en økende volatilitet øker sannsynligheten for lave (og høye) utfall, men i perioder med lave avkastninger slår rentegarantien inn og verdien på egenkapitalen synker. Dette må eierne kompenseres for.

<u>Endring som følge av endring i σ:</u>



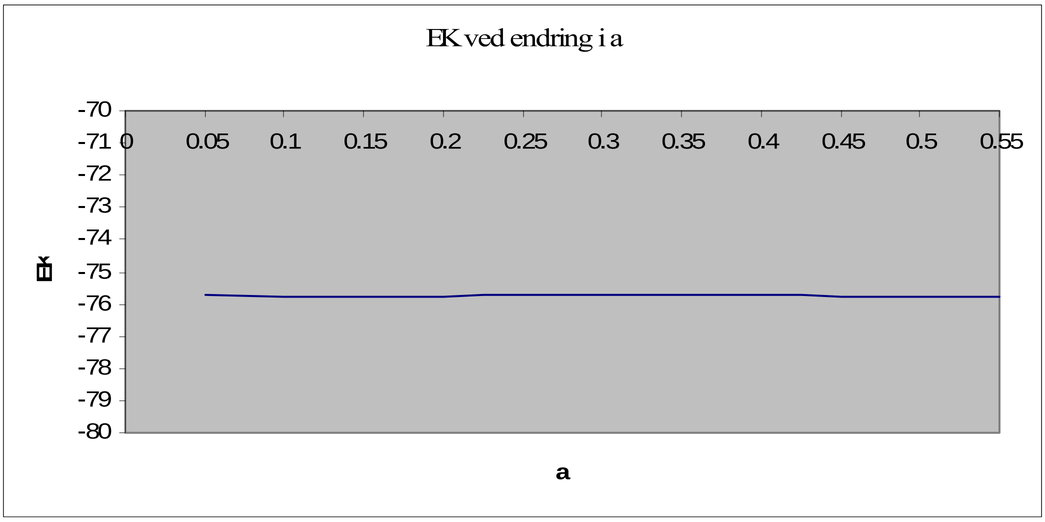
Vi ser ut grafen har en ”krokete” fasong. Dette henger sammen med at vi kjører simuleringer på renten for hver ny sigmaverdi. Ettersom dette ikke gir nøyaktige resultater, kan vi oppleve å få resultater som her. Det vi kan trekke ut fra grafen, er at endring i sigma har svært lite å si for verdien på egenkapitalen. For sigma større enn 4% ser vi en klar nedadgående kurve, men det er fremdeles ikke store utslag i verdien. Men vi har, som for sigmaA, at eierne må kompenseres for en høyere volatilitet.

<u>Endring som følge av endring i alpha:</u>



Alpha er den delen forsikringstakerne skyter inn. Dermed er det selvsagt at egenkapitalen må skyte inn mindre (få mer) desto høyere alpha er.

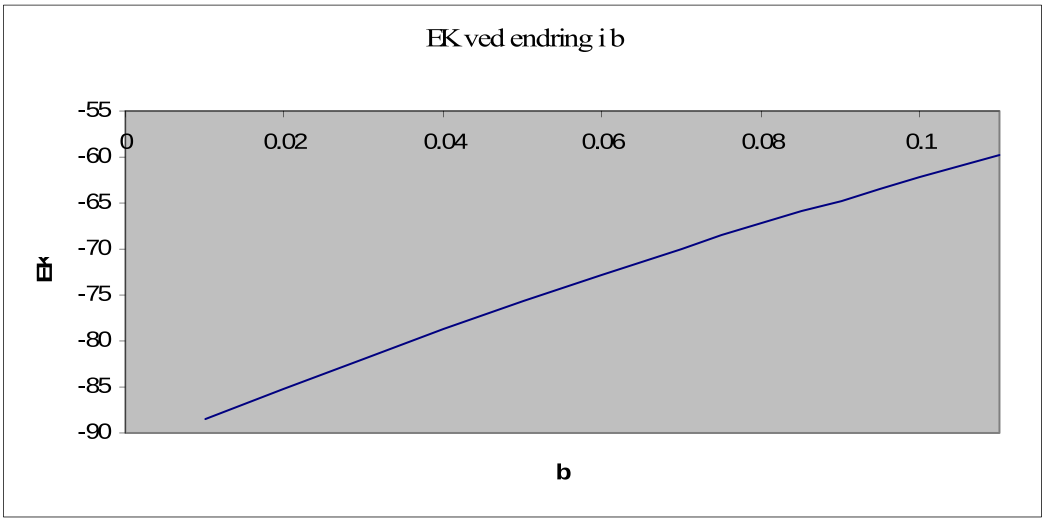
<u>Endring som følge av endring i a</u>



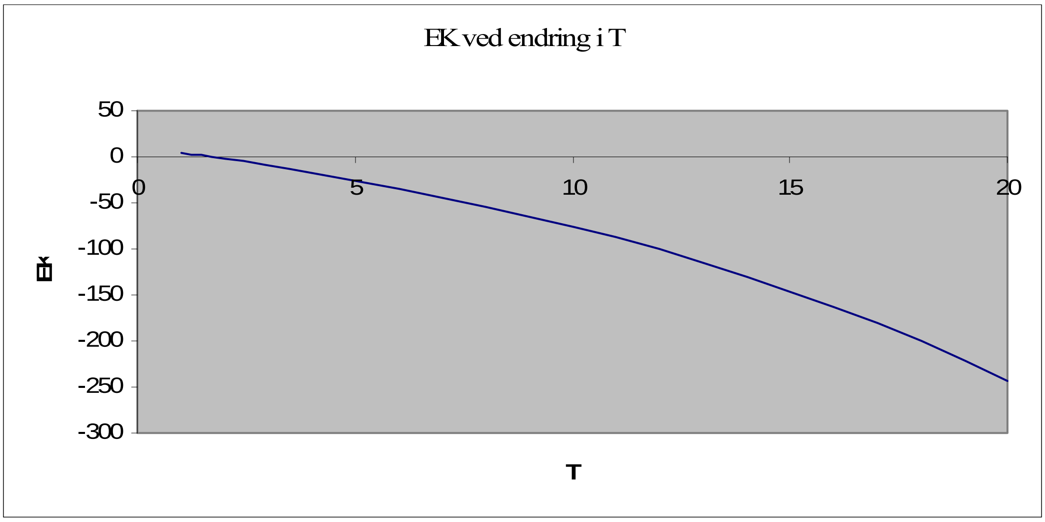
Vi er på det langsiktige rentenivået og a har ikke noe å si for verdien på egenkapitalen.

Endring som følge av endring i b

Også her forventer vi en oppadgående kurve og begrunnelsen er som for initialrenten.

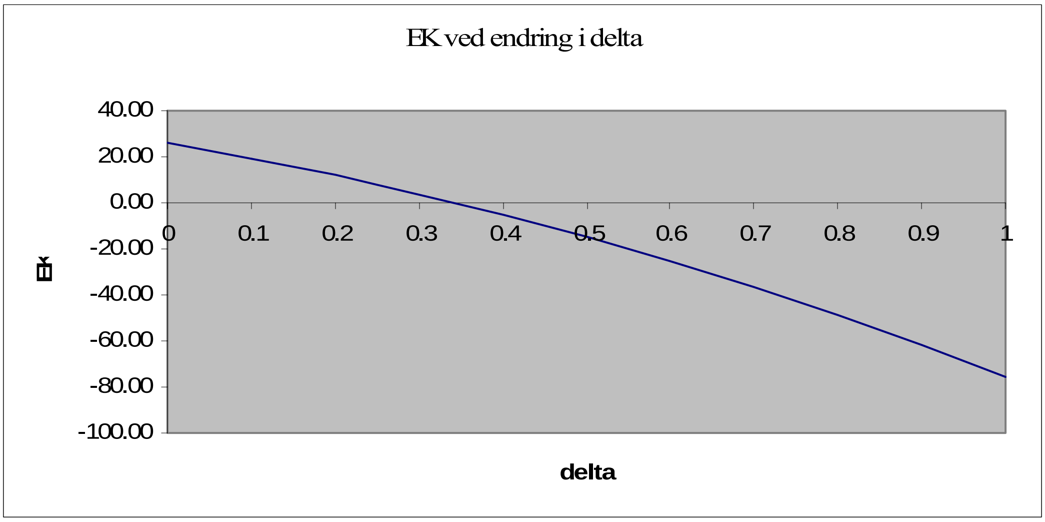


Endring som følge av endring i T



En årlig rentegaranti over flere perioder innebærer større risiko for eierne enn en rentegaranti for færre perioder. Dette må eierne kompenseres for, slik at den deriverte med hensyn på tiden er negativ.

Endring som følge av endring i δ

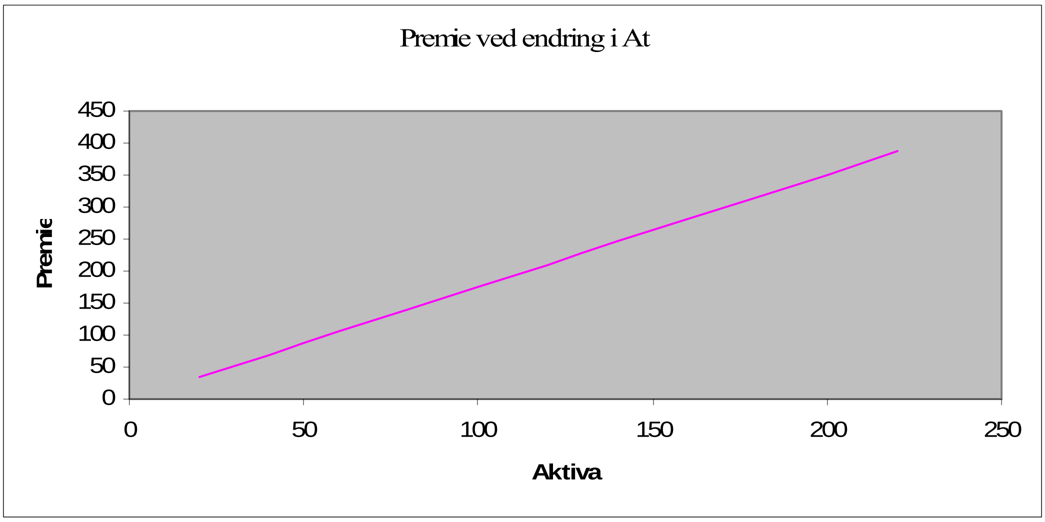


Vi ser at egenkapitalen er en negativ funksjon av delta, dvs. at jo høyere delta er, desto mer får eierne for å inngå kontrakten. En lav delta gir eierne en stor andel av meravkastningen (aktivaavkastning minus den garanterte renten), noe som tilsier en høyere verdi på egenkapitalen.

6.2 Forsikringskontraktene

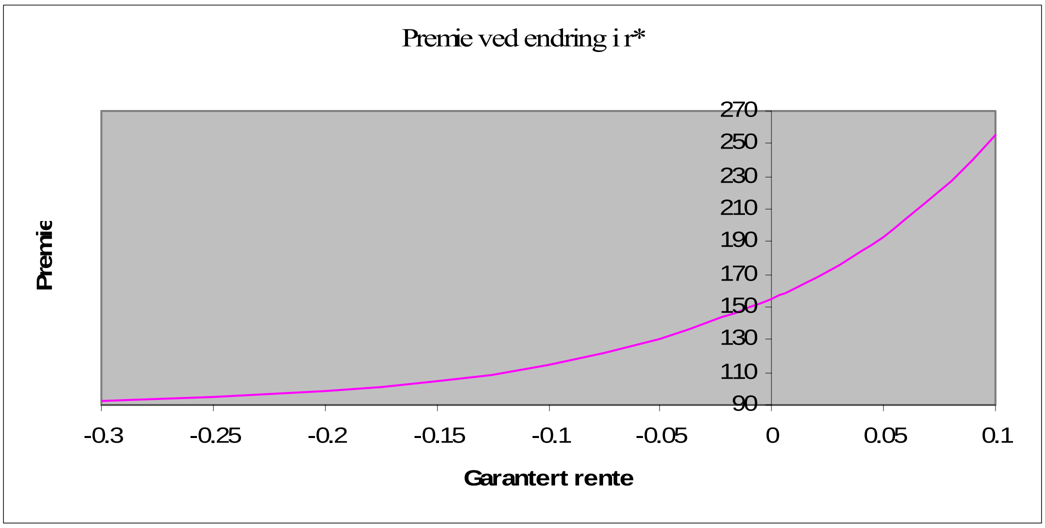
I dette avsnittet ber vi leseren om også å ta med seg momenter fra diskusjonen under egenkapitalen, slik at en del momenter ikke vil gjentas her.

Endring som følge av endring i aktiva:



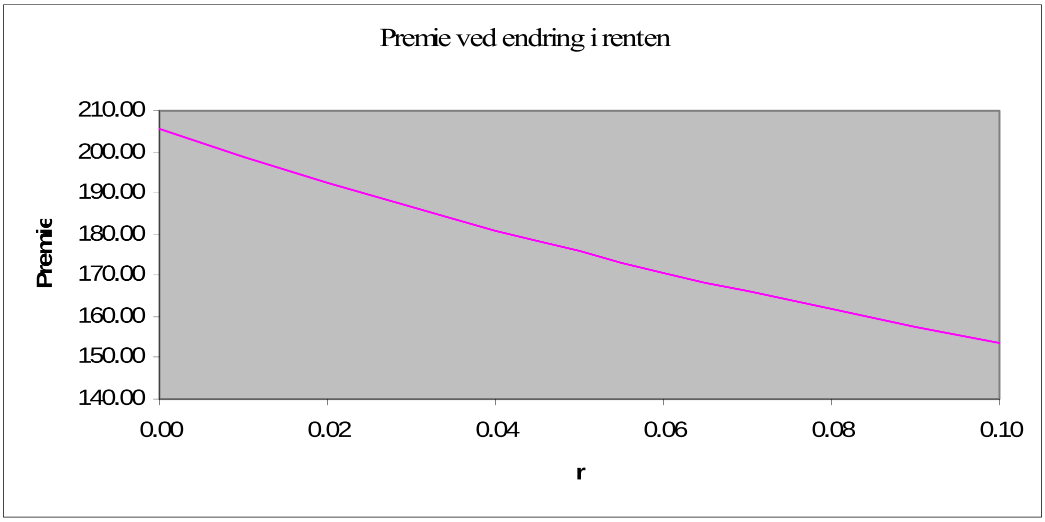
Premien øker naturlig nok når aktiva øker ettersom den nominelle verdien på premien er en andel av aktiva. Den grafiske fremstillingen gir oss det ventede resultat, en rett, positiv linje.

Endring som følge av endring i den garanterte renten:



Dette er naturlig, ettersom en høyere garantert rente gir økte garanterte forventede utbetalinger, noe som gjør kontrakten mer attraktiv for forsikringstakerne. Dette må de selvsagt betale for. Verdien vil ikke, som under kontrakt A, flate ute ved store verdier på den garanterte renten ettersom eierne ikke har begrenset ansvar.

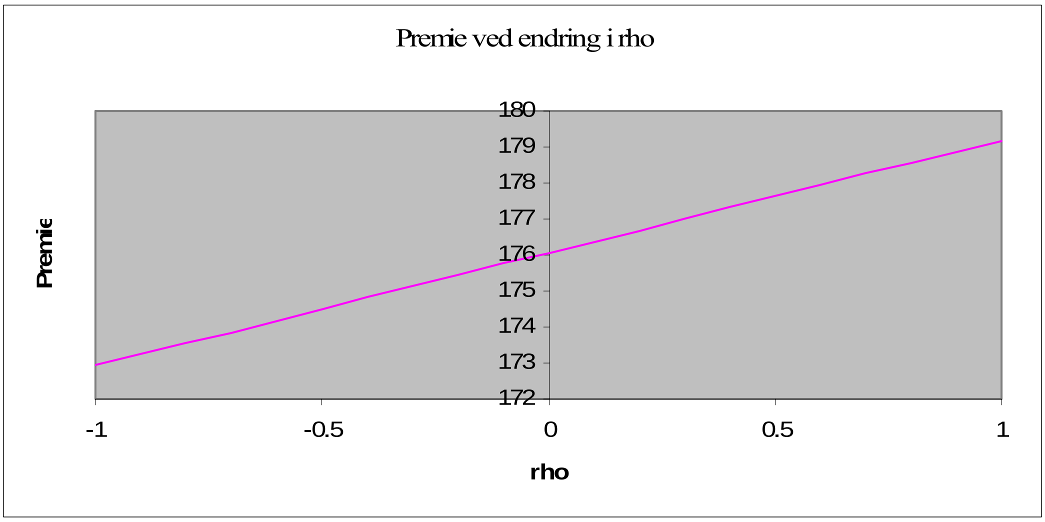
Endring som følge av endring i initialrenten:



Som vi tidligere har nevnt vil en høyere initialrente øke sannsynligheten for at rentegarantien ikke tas i bruk, noe som gir lavere verdi for forsikringstakerne og dermed lavere premie.

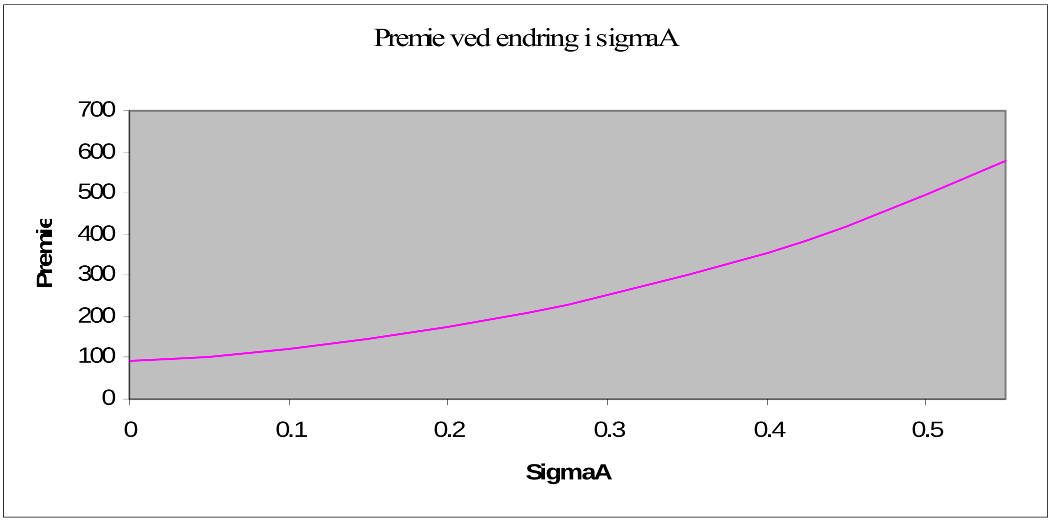
Endring som følge av endring i rho:

Det man legger merke til, er hvor liten innvirkning korrelasjonskoeffisienten har på premien.



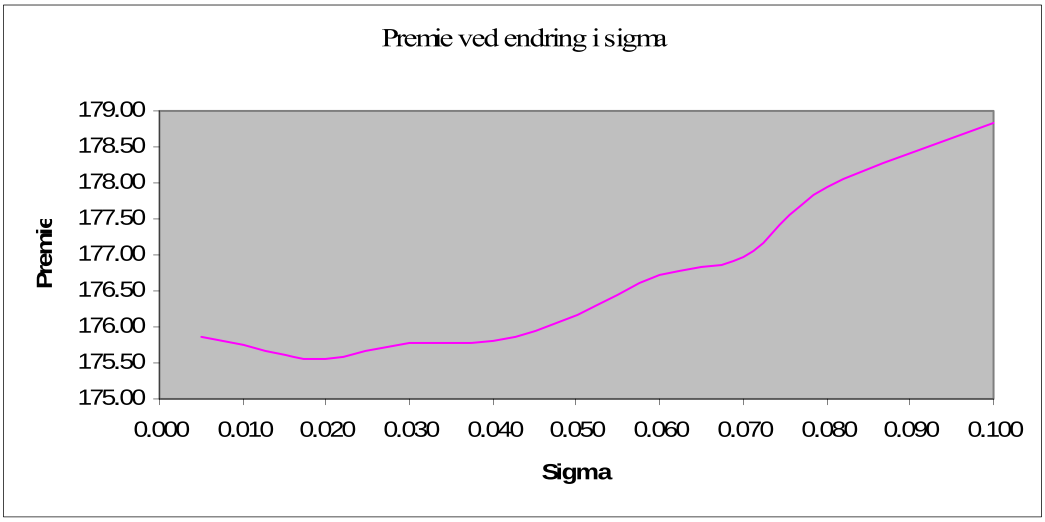
Men grafen har den ventede formen, en høyere korrelasjon gir høyere volatilitet som gir høyere premie.

Endring som følge av endring i σ_A:



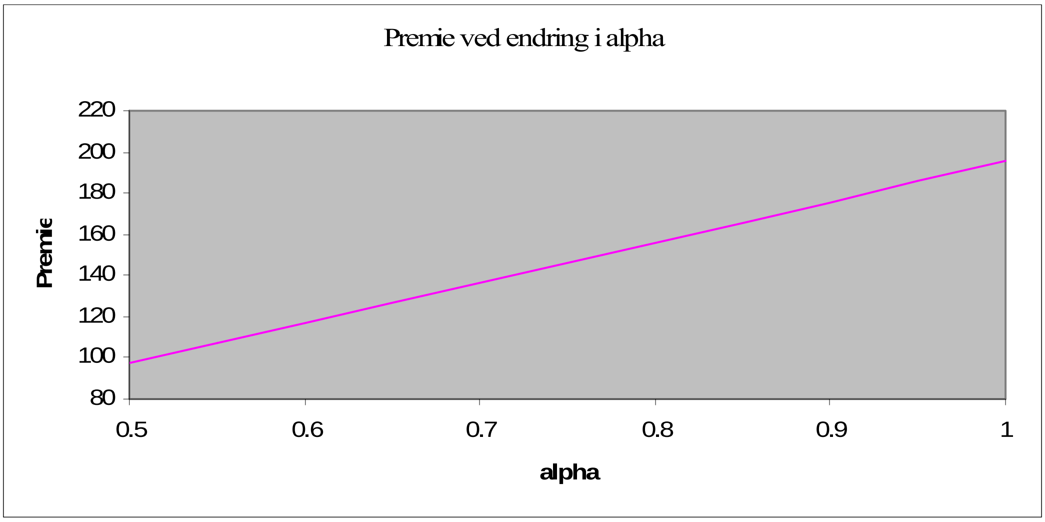
Diskusjonen blir som under egenkapitalen men med motsatt fortegn

Endring som følge av endring i σ:



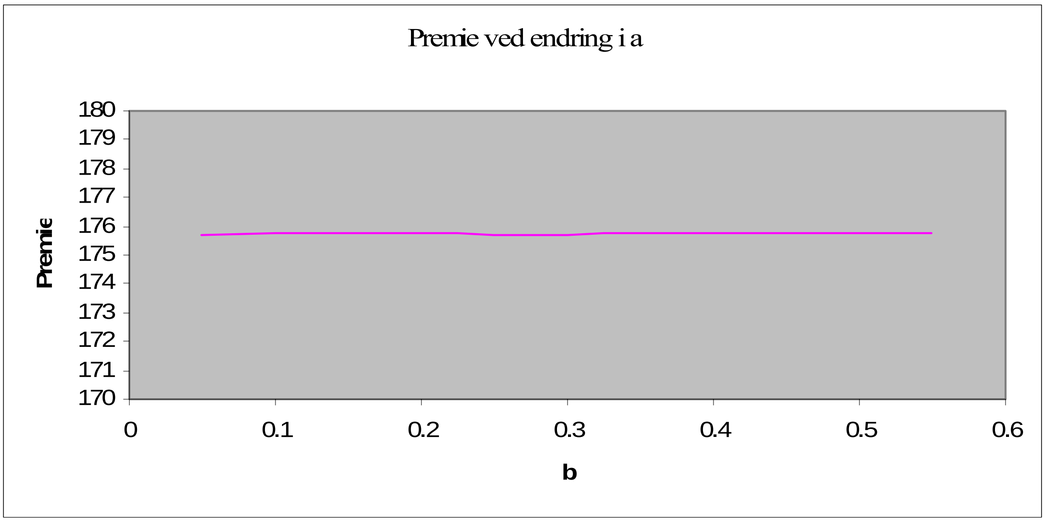
Diskusjonen blir som under egenkapitalen men med motsatt fortegn.

Endring som følge av endring i alpha:



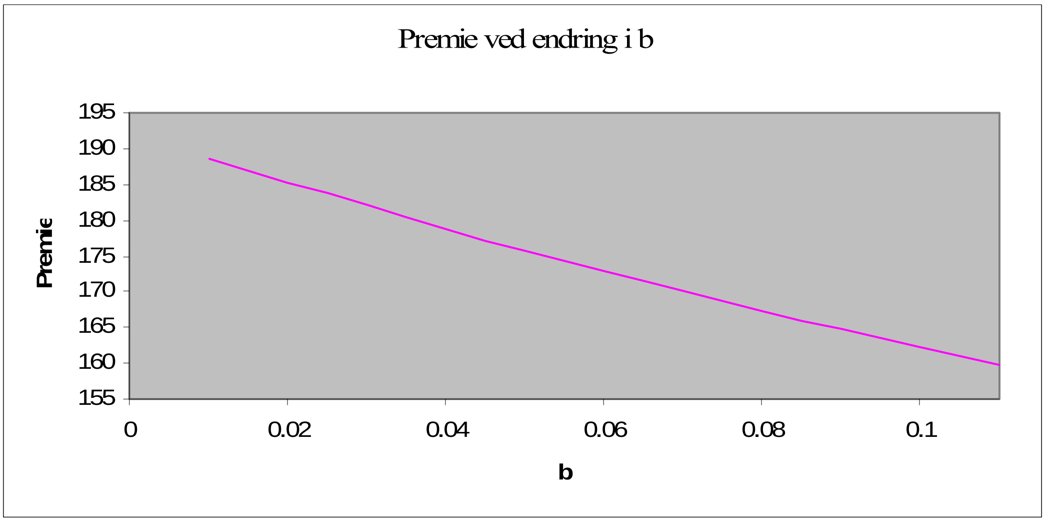
Alpha er den delen forsikringstakerne skyter inn av den nominelle verdien. Dermed er det selvsagt at verdien på premien også øker, ceteris paribus.

Endring som følge av endring i a



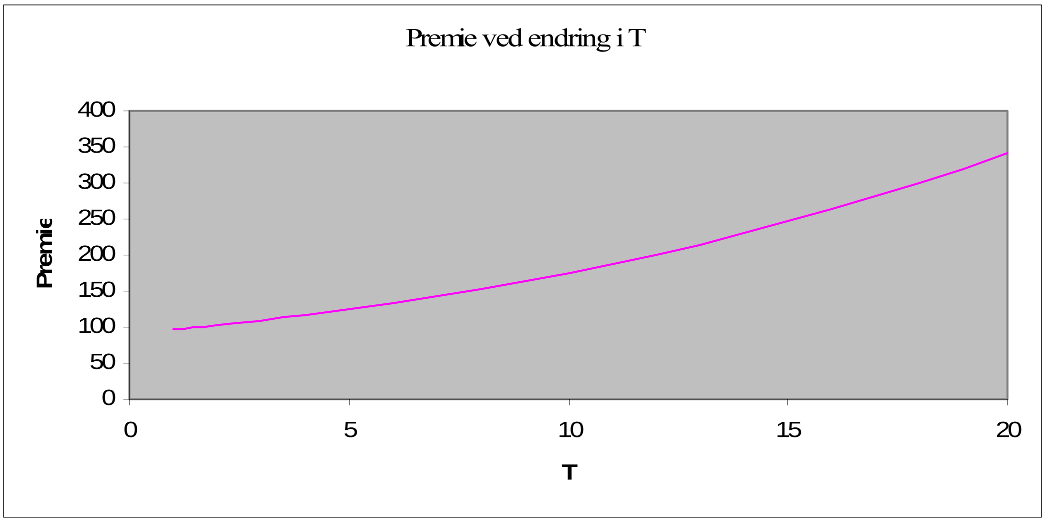
Vi er på det langsiktige rentenivået og a har ikke noe å si for verdien på egenkapitalen.

Endring som følge av endring i b



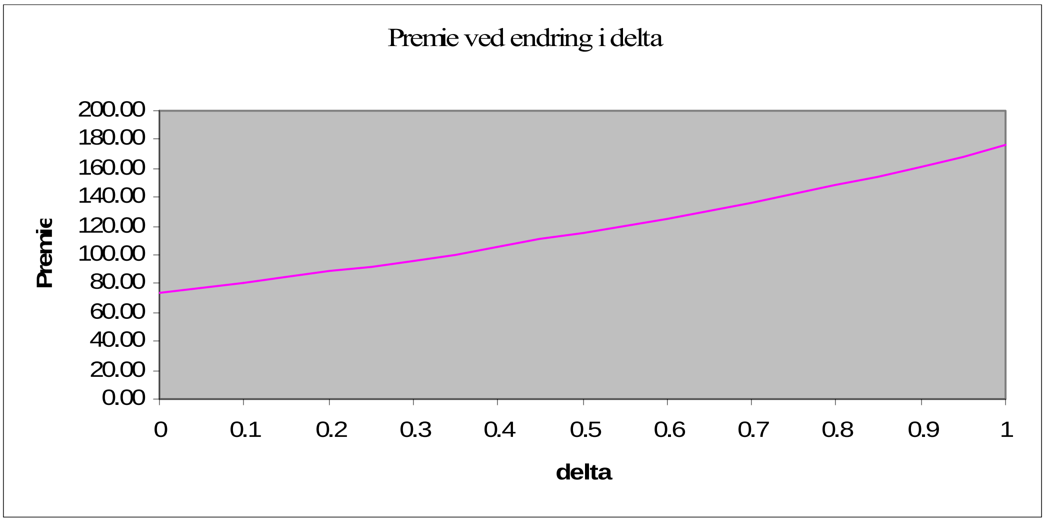
Premien er en negativ funksjon av initialrenten og dermed også en negativ funksjon av det langsiktige rentenivået. Jo høyere det langsiktige rentenivået er, desto mindre verdt er rentegarantien.

Endring som følge av endring i T



En årlig rentegaranti over flere perioder innebærer større risiko for eierne enn en rentegaranti for færre perioder. Den har også en mye større verdi for forsikringstakerne noe de må betale for.

Endring som følge av endring i δ



Vi ser at premien er en positiv funksjon av delta, dvs. at jo høyere delta er, desto mer må forsikringstakerne betale for å inngå kontrakten. En høy delta gir forsikringstakerne en stor andel av meravkastningen (aktivaavkastning minus den garanterte renten), noe som tilsier en høyere verdi på premien.

7. Forslag til utvidelser av rapporten

Ved skriving av en slik rapport, er det alltid ting man kunne ønske man hadde bedre tid til å utforske, utvide analysen med flere elementer eller endre på ting man har gjort. Til slutt må man imidlertid sette en strek og si seg fornøyd. Vi vil dog komme med noen kommentarer til hvordan man kan utvide rapporten. En mulighet er å gjøre et større poeng ut av dødelighetsrisikoen, nemlig ved å innføre stokastisk dødelighet. Vi ser også at den numerisk analysen kunne vært betydelig utvidet, bl.a. ved å endre flere faktorer simultant. Man kan også gjøre som Lindset (2003) og finne lukket form løsninger for kontrakt B under kontinuerlig tid med stokastisk rente. Alternativt kunne man gjort en numerisk analyse og sett hvor stor feil man gjør ved vår tilnærming. Videre kunne man utvidet analysen til å omfatte periodiske premier. Men det viktigste rådet vi kan gi til andre studenter som vil gjøre en tilsvarende analyse, er at man tidlig lærer seg et annet program enn Excel/Visual Basic. Vi har brukt utallige timer på å programmere i VBA, og vi har stadig møtt på problemer. Særlig har Excel store kapasitetsproblemer. Blant annet kunne antall simuleringer vært gjort atskillig høyere med et bedre program. Vi anbefaler også fremtidige studenter å ta et kurs om finans i kontinuerlig tid før man starter på en slik oppgave.

8. Oppsummering av resultater

I denne rapporten har vi vist hvordan vi kan prise forsikringskontrakter med rentegaranti blant annet ved hjelp av opsjonsprising. Vi startet med å analysere kontraktene i diskret tid, deretter i kontinuerlig tid med deterministisk rente og til slutt i kontinuerlig tid med stokastisk rente.
Vi har sett på to hovedtyper av kontrakter, en med forfallsgaranti (kontrakt A) og en med årlig rentegaranti (kontrakt B). Hovedfokuset har vært på kontraktene med tilbakebetaling (uten dødelighet). Dette er ikke fordi vi undervurderer viktigheten av å ta med dødelighet, men gitt våre forutsetninger er det bare en faktor vi dividerer forsikringskontraktkontoen med, og dermed kan sensitivitetsanalysen gjøres uten dødelighetselementet. Vi har funnet en rettferdig verdi på disse kontraktene gitt en nominell verdi. Den rettferdige verdien er høyere enn den nominelle på grunn av betingelsene i kontrakten. For kontrakt A har vi sett på en situasjon hvor eierne har begrenset ansvar (mulighet for å gå konkurs). For kontrakt B har hovedfokuset vært på kontrakten uten konkursrisiko, men vi har også vist hvordan verdien påvirkes av å innføre begrenset eieransvar. Grunnen til at vi valgte å gjøre dette, er at den numeriske analysen ville blitt betydelig mer tidkrevende ved å innføre konkursrisiko.
Under stokastisk rente er ikke verdien på kontrakt B den sanne verdien, men kun en tilnærming. Videre har vi sett på hvordan muligheten til å terminere kontrakten på gitte tidspunkt påvirker verdien på kontraktene. I tabellene under har vi oppsummert de numeriske resultatene.

	KONTRAKT A					
	Med tilbakebetaling			**Uten tilbakebetaling**		
	Diskret tid	Konstant rente	Stokastisk rente	Diskret tid	Konstant rente	Stokastisk rente
Egenkapital	7.75	7.63	7.59	5.74	5.62	5.58
Premie	92.25	92.37	92.41	94.26	94.38	94.42

	KONTRAKT A
	Med tilbakebetaling
	Tidlig utøvelse
Egenkapital	5.13
Premie	94.87

	KONTRAKT B				
	Med tilbakebetaling			**Uten tilbakebetaling**	
	Konstant rente	Stokastisk rente	Konkurs	Konstant rente	Stokastisk rente
Egenkapital	-75.99	-75.75	-1.35	-79.82	-79.58
Premie	175.99	175.75	101.35	179.82	179.58

Ser at verdiene på forsikringskontraktene er avhengig av hvordan de er utformet. Hvis vi skal sammenligne en forfallskontrakt med en identisk periodekontrakt må vi sammenligne kontrakt A med kontrakt B når vi tar med mulighet for konkurs samt en δ på 1. Verdien på en slik forfallskontrakt er med stokastisk rente lik 92.41. Kontrakten med garanti hver periode har en verdi på 101.35. Altså er en kontrakt med rentegaranti hver periode betraktelig dyrere enn en garanti over hele perioden. Hvis vi går over til tilfellet hvor rentegarantien hver periode er en sann garanti ser vi at verdiene blir betraktelig høyere igjen. I dette tilfellet har kontrakten en verdi på hele 179.58 mot 101.35 når garantien ikke er sann.

Vedlegg A

Dødelighetstabell

Alder x	Levende ved alder x		Døde i alder x til x+1		Forventet gjenstående levetid ved alder x		Dødssannsynlighet for alder x. Promille, (uglattet)	
	lx		dx		e0x		qx	
	Menn	Kvinner	Menn	Kvinner	Menn	Kvinner	Menn	Kvinner
0	100 000	100 000	368	307	77,04	81,93	3,68	3,07
1	99 632	99 693	48	43	76,32	81,18	0,48	0,43
2	99 583	99 650	17	28	75,36	80,22	0,17	0,28
3	99 567	99 622	13	14	74,37	79,24	0,13	0,14
4	99 554	99 609	23	24	73,38	78,25	0,23	0,24
5	99 531	99 585	10	3	72,40	77,27	0,10	0,03
6	99 521	99 581	34	10	71,41	76,27	0,35	0,10
7	99 487	99 572	12	10	70,43	75,28	0,12	0,10
8	99 475	99 562	3	17	69,44	74,29	0,03	0,17
9	99 472	99 545	13	3	68,44	73,30	0,13	0,03
10	99 459	99 542	13	13	67,45	72,30	0,13	0,13
11	99 446	99 529	12	10	66,46	71,31	0,12	0,10
12	99 434	99 519	31	13	65,47	70,32	0,31	0,13
13	99 403	99 506	22	3	64,49	69,33	0,22	0,03
14	99 382	99 503	16	27	63,50	68,33	0,16	0,27
15	99 366	99 475	33	18	62,51	67,35	0,34	0,18
16	99 332	99 458	52	29	61,53	66,36	0,52	0,29
17	99 280	99 429	60	19	60,56	65,38	0,60	0,19
18	99 220	99 410	108	38	59,60	64,39	1,09	0,38
19	99 113	99 372	72	30	58,66	63,41	0,73	0,31
20	99 040	99 342	89	41	57,71	62,43	0,90	0,42
21	98 951	99 300	61	37	56,76	61,46	0,61	0,37
22	98 890	99 263	93	26	55,79	60,48	0,94	0,26
23	98 797	99 237	77	29	54,85	59,50	0,78	0,29
24	98 720	99 208	119	39	53,89	58,52	1,20	0,40
25	98 601	99 169	73	39	52,95	57,54	0,74	0,40
26	98 528	99 129	96	46	51,99	56,56	0,98	0,46
27	98 432	99 084	111	33	51,04	55,59	1,13	0,34
28	98 320	99 050	93	32	50,10	54,61	0,95	0,32
29	98 227	99 019	95	40	49,15	53,62	0,97	0,40
30	98 132	98 979	92	27	48,19	52,64	0,93	0,27
31	98 040	98 952	111	43	47,24	51,66	1,14	0,44
32	97 929	98 909	97	43	46,29	50,68	0,99	0,44
33	97 832	98 866	95	37	45,34	49,70	0,97	0,37
34	97 737	98 829	128	62	44,38	48,72	1,31	0,62
35	97 609	98 767	94	40	43,44	47,75	0,97	0,40
36	97 514	98 728	133	34	42,48	46,77	1,36	0,35
37	97 382	98 693	116	75	41,54	45,79	1,19	0,76
38	97 265	98 618	115	61	40,59	44,82	1,18	0,62

39	97 150	98 557	143	86	39,63	43,85	1,48	0,88
40	97 007	98 470	113	113	38,69	42,89	1,16	1,15
41	96 894	98 357	158	93	37,73	41,93	1,63	0,95
42	96 736	98 264	154	113	36,80	40,97	1,59	1,15
43	96 582	98 152	212	116	35,85	40,02	2,20	1,18
44	96 370	98 036	203	118	34,93	39,07	2,11	1,21
45	96 167	97 918	233	119	34,00	38,11	2,42	1,21
46	95 935	97 799	238	146	33,09	37,16	2,48	1,50
47	95 696	97 652	229	134	32,17	36,21	2,40	1,38
48	95 467	97 518	245	197	31,24	35,26	2,57	2,02
49	95 222	97 321	281	179	30,32	34,33	2,96	1,84
50	94 941	97 142	301	220	29,41	33,40	3,17	2,27
51	94 640	96 921	372	224	28,50	32,47	3,93	2,31
52	94 268	96 697	379	233	27,61	31,55	4,02	2,41
53	93 889	96 464	411	275	26,72	30,62	4,38	2,85
54	93 478	96 189	432	285	25,84	29,71	4,62	2,96
55	93 046	95 904	542	389	24,95	28,79	5,83	4,06
56	92 503	95 515	537	372	24,10	27,91	5,80	3,90
57	91 967	95 142	596	419	23,24	27,02	6,48	4,41
58	91 371	94 723	640	434	22,38	26,13	7,01	4,59
59	90 731	94 288	739	483	21,54	25,25	8,15	5,12
60	89 991	93 806	803	509	20,71	24,38	8,92	5,43
61	89 188	93 296	802	517	19,89	23,51	9,00	5,54
62	88 386	92 780	1 020	588	19,07	22,64	11,54	6,34
63	87 366	92 192	1 066	707	18,29	21,78	12,20	7,67
64	86 300	91 485	998	729	17,51	20,94	11,57	7,97
65	85 302	90 756	1 347	702	16,70	20,11	15,80	7,74
66	83 954	90 054	1 492	765	15,96	19,26	17,77	8,49
67	82 462	89 289	1 555	986	15,24	18,42	18,85	11,04
68	80 908	88 303	1 650	1 011	14,53	17,62	20,39	11,45
69	79 258	87 292	1 795	1 058	13,82	16,82	22,65	12,12
70	77 463	86 234	1 866	1 164	13,13	16,02	24,08	13,50
71	75 597	85 070	2 087	1 305	12,44	15,23	27,61	15,34
72	73 510	83 765	2 128	1 490	11,78	14,46	28,95	17,79
73	71 382	82 275	2 497	1 649	11,12	13,71	34,98	20,04
74	68 885	80 626	2 611	1 757	10,50	12,98	37,91	21,80
75	66 274	78 869	2 623	1 950	9,89	12,26	39,57	24,73
76	63 652	76 918	2 957	2 214	9,28	11,56	46,46	28,78
77	60 695	74 705	3 180	2 297	8,71	10,89	52,39	30,75
78	57 515	72 407	3 160	2 499	8,16	10,22	54,94	34,51
79	54 355	69 908	3 449	2 718	7,61	9,57	63,45	38,88
80	50 906	67 190	3 494	3 014	7,09	8,93	68,63	44,86
81	47 412	64 176	4 069	3 312	6,58	8,33	85,81	51,61
82	43 344	60 863	4 072	3 337	6,15	7,75	93,95	54,82
83	39 271	57 527	4 224	3 816	5,73	7,17	107,55	66,34
84	35 048	53 711	3 739	3 816	5,36	6,65	106,68	71,04
85	31 309	49 895	3 934	4 316	4,94	6,12	125,64	86,51
86	27 375	45 579	3 894	4 615	4,58	5,65	142,24	101,25
87	23 481	40 964	3 803	4 548	4,26	5,23	161,97	111,03
88	19 678	36 416	3 268	4 649	3,98	4,82	166,05	127,68
89	16 411	31 766	3 100	4 674	3,68	4,46	188,93	147,13
90	13 310	27 092	2 770	4 374	3,42	4,14	208,15	161,45
91	10 540	22 718	2 448	3 861	3,19	3,84	232,25	169,97
92	8 092	18 857	2 070	3 614	3,00	3,52	255,78	191,65

93	6 022	15 243	1 548	3 189	2,86	3,24	257,01	209,22
94	4 474	12 054	1 329	2 959	2,67	2,96	296,99	245,49
95	3 146	9 095	913	2 316	2,59	2,76	290,26	254,66
96	2 233	6 779	686	1 939	2,45	2,54	307,43	285,99
97	1 546	4 840	530	1 532	2,31	2,35	342,74	316,58
98	1 016	3 308	300	1 143	2,25	2,21	295,12	345,45
99	716	2 165	279	725	1,98	2,12	389,59	334,93

Litteraturliste

Aase, K.K, ”Anvendt sannsynlighetsteori: Forsikringsmatematikk”, *Cappelen Akademiske Forlag*, (*1996)*

Aase, Knut og Persson, Svein-Arne,”Valuation of the Minimum Guaranteed Return Embedded in Life Insurance Products”, *The Warton School University of Pennsylvania;(May 1996)*

Aase, Knut., ” Notater til forelesning i Fin415, Forsikringsøkonomi”, (*Høst 2003)*

Bensoussan, A, “On the Theory of Option Pricing”, *Acta Applicandae Mathematicae, 2; (1984)*

Black, F. og Scholes M., “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy, 84; (1973)*

Box, G. E. P. and Muller, M. E., "A Note on the Generation of Random Normal Deviates." *Annals of Mathematical Statistics,* ***29****, 610-611, (1958).*

Briys, Eric og de Varenne, Francois, ”Insurance:From underwriting to derivatives”, *John Wiley & Sons; (January 11, 2002)*

Cox, John C., Ross, Stephen A. Og Rubinstein, Mark, ”Option pricing: A Simplified Approach”, *Journal of Financial Economics; (September 1979)*

Ekern, S., ”Notater til forelesning i FIN420, Finansieringsteori”, (*Høst 2002).*

Haug, J., ” Notater til forelesning i FIN428, Emner i finans og makro”, (*Høst 2003*,

Hull, J., ”Options, Futures and Other Derivatives”, *Prentice Hall International Inc.*, (*2003, 5.ed)*

Ingersoll, J.E.Jr., ”Theory of Financial Decision Making”, *Rownam & Littlefield; (1987)*

Karatzas, I, “On The Pricing of American Options”, *Applied Mathematics and Optimization, 17; (1988)*

Lindset, S., “Pricing of multi-period rate of return guarantees”, *Insurance: Mathematics and Economics 33, (2003)*

Longstaff, F, og Schwartz, E, “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach”, *The Review of Financial Studies, Vol. 14 No.1; (2001)*

Miltersen, K. R. og Persson, S, "Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Return," *Forthcoming in Scandinavian Actuarial Journal; (2003)*

Miltersen, K. R., “FIN 421 Risikostyring Artikkelsamling”, *Norges Handelshøyskole; (Januar 2004)*

Miltersen, K. R., “FIN 421 Risikostyring Forelesningsnotater”, *Norges Handelshøyskole; (Januar 2004)*

Miltersen, Kristian R. og Persson Svein-Arne, ”Guaranteed Investments Contracts: Distributed and Undistributed Excess Return”, *Scandinavian Actuarial; (January 2002)*

Norges Offentlige Utredninger (NOU), ”Private pensjonsordninger, kap 4. Forsikringsprodukter og økonomisk teori”, *www.finansdepartementet.no*, 1994:6

Olsen, T., Kristiansen, E.G, ”Notater til forelesning i MET400, Beslutninger, strategi og informasjon”, (*Høst 2002)*

Persson, S-A., ”Prising av unit-linked livsforsikring”, *Høyere avdelingsoppgave Norges Handelshøyskole*, (*1991)*

Simon, Steven og Van Wouwe, Martine, “Valuing Life Insurance Contracts with Guaranteed Returns”, *Research Report, Department of Applied Economics, K.U.Leuven, (2001)*

Statistisk Sentralbyrå, ”Dødelighetstabeller”, *www.ssb.no*, *(2004)*

Sydsæter, K, og Øksendal, B, ”Lineær Algebra: med en innføring i Lineær Programmering”, *4.utg Universitetsforlaget; (1996)*

Vasicek, O, “An Equilibrium Characterization og the Term Structure”, *Journal of Financial Economics, 7; (1977)*