SNF-rapport nr. 23/06

OPTIMAL KAPITALSTRUKTUR BASERT PÅ STRUKTURELLE KREDITT-RISIKOMODELLER

av

Filip Aven og Terje Monsen

SNF-prosjekt nr. 7000

SAMFUNNS- OG NÆRINGSLIVSFORSKNING AS
BERGEN AUGUST 2006

ISBN 82-491-0462-5 **Trykt versjon**
ISBN 82-491-0463-3 **Elektronisk versjon**
ISSN 0803-4036

Forord

Vi har skrevet denne rapporten som en del av masterstudiet ved Norges Handelshøyskole (NHH). Temaet er optimal kapitalstruktur basert på strukturelle kredittrisikomodeller. Vi synes dette er et spesielt interessant fagområde, da det kombinerer spennende økonomisk innsikt med en utviklet matematisk plattform. Vi ble introdusert for dette fagområdet gjennom vår veileder professor Kristian Miltersen som vi hadde i kurset "ECO421 – Risk Management" ved NHH. Forøvrig har vi også hatt mange andre kurs på masterstudiet ved NHH som har belyst relevante emner i forhold til dette fagområdet. Vi har begge gjennomført hovedprofilen Finansiell Økonomi, samt støtteprofilen Økonomisk Analyse da vi synes dette er et svært godt komplement til hovedprofilen.

Vi håper at denne rapporten kan bidra til å skape en bedre forståelse av hvilke faktorer som bestemmer en bedrifts valg av optimal kapitalstruktur. Videre håper vi å gi innsikt i hvordan yield spread kan bestemmes ut i fra slike modeller. Rapporten forutsetter kjennskap til metoder innenfor matematisk finans og stokastisk analyse.

Vi har lært mye og hatt det svært spennende mens vi har skrevet denne rapporten. Å arbeide med et fagområde tett opp mot forskningsfronten, synes vi er både engasjerende og utfordrende. Det har vært svært lærerikt å lese journaler fra hele verden knyttet til dette fagområdet.

Vi vil benytte anledningen til å takke vår veileder, professor Kristian Miltersen ved Norges Handelshøyskole, som har kommet med mange nyttige kommentarer og avklaringer under prosessen med rapporten. Samtidig ønsker vi å takke professor Knut K. Aase ved NHH og professor Bernt Øksendal ved Universitetet i Oslo for å ha hjulpet oss ved enkelte anledninger. Til slutt vil vi gjerne uttrykke vår takknemlighet til Institutt for Foretaksøkonomi ved NHH for å ha tildelt oss studentstipend for denne utredningen.

Bergen, mai 2006

Filip Aven / Terje Monsen

Innholdsfortegnelse

Kapittel 1 - Innledning

I både nyere og eldre finanslitteratur eksisterer det omfattende forskning knyttet til spørsmålet om det finnes en optimal kapitalstruktur. Formålet med dette spørsmålet er blant annet å finne ut hvordan man kan maksimere verdien av et selskap ved å velge en optimal sammensetning av gjeld og egenkapital. Dette er et tema som både har stor teoretisk og praktisk interesse. I vår oppgave ser vi på hvordan vi kan beregne optimal kapitalstruktur basert på strukturelle kredittrisikomodeller.

Forskningen om optimal kapitalstruktur basert på strukturelle kredittrisikomodeller kan også benyttes til å beregne yield spread. Med yield spread menes differansen mellom den rentesatsen selskapet må betale på gjeld til sine kreditorer og risikofri rente. I tillegg til beregning av optimal kapitalstruktur har vi også valgt å fokusere på yield spread i denne rapporten.

1.1 – Historisk utvikling for fagområdet

Den velkjente artikkelen til Miller og Modigliani (1958) regnes av mange for å være ett pionerarbeid innenfor fagfeltet optimal kapitalstruktur. Artikkelen argumenterer for at under strenge forutsetninger vil verdien av en bedrift være uavhengig av hvordan bedriften er finansiert, med andre ord kan de finansielle beslutningene separeres fra de realøkonomiske. Denne konklusjonen bygger blant annet på forutsetninger om at det ikke er transaksjonskostnader ved handel, ingen skatter, alle i økonomien har tilgang på samme informasjon (symmetrisk informasjon), ingen agentkostnader, ingen restriksjoner på handel og det er ingen konkurskostnader i økonomien. Et kjent resultat fra Miller og Modigliani (1958) er at i et perfekt marked med skatt så vil det være optimalt med kapitalstruktur bestående av 100 % gjeld. For en nærmere redegjørelse av de klassiske resultatene fra denne artikkelen, se Copeland og Weston (1988) kapittel 13 og 14.

Basert på Black og Scholes (1973) utarbeider Merton (1974) en strukturell modell hvor verdien av egenkapital og gjeld blir beregnet som derivater på totalverdien av selskapet. Denne strukturelle modellen kan brukes til blant annet å verdsette risikable nullkupongobligasjoner med en gitt endelig horisont. Det argumenteres for at aksjonærenes krav på selskapet kan betraktes som en kjøpsopsjon på selskapets totalverdi.

Black og Cox (1976) utvikler en modell som tar høyde for muligheten for at konkurs kan inntreffe før gjelden forfaller. Kriteriet som brukes for at konkurs kan finne sted før gjelden forfaller, er at totalverdien av selskapet faller under en eksogent gitt konkursbarriere.

Brennan og Schwartz (1978) gjennomfører den første kvantitative undersøkelsen av optimal gjeldsandel. De bruker numeriske teknikker for å bestemme optimal gjeldsandel når verdien av selskapets aktiviteter følger en diffusjonsprosess med konstant volatilitet.

I Leland (1994) formuleres en modell hvor konkursbarrieren inngår endogent. Her beregnes verdien av egenkapitalen og gjeld som krav på verdien av selskapets aktiviteter. Leland finner analytiske løsninger for egenkapital og gjeld med uendelig tidshorisont i ett rammeverk som inkluderer en eksplisitt tradeoff mellom konkurskostnader og skattefordeler knyttet til kupongbetalinger. Tradeoff-vurderingen mellom konkurskostnader og skattefordeler tar utgangspunkt i at Leland bryter med noen av forutsetninger fra Miller og Modigliani (1958). Dersom skattesystemet diskriminerer mellom gjeld og egenkapital, kan dette påvirke finansieringsbeslutningene. At man kan oppnå en skattefordel på kuponger, vil isolert sett medføre at gjeld blir relativt sett mer gunstig enn egenkapital. Konkurskostnader vil imidlertid isolert sett gjøre egenkapital mer gunstig enn gjeld. Med konkurskostnader mener vi utgifter forbundet med konkurs, som for eksempel avlønning av bobestyrer, advokatsalærer og annet.

En artikkel om kapitalstruktur av Goldstein, Ju og Leland (2001) tar utgangspunkt i en EBIT (Earnings Before Interests and Taxes) prosess. Gjeld og egenkapital blir her verdsatt som krav på EBIT. Goldstein, Ju og Leland (2001) åpner for dynamisk restrukturering av selskapets gjeld, det vil si at gjelden kan restruktureres ved at tidligere gjeld kan kjøpes tilbake og ny gjeld med høyere kupong og prinsipal kan utstedes. Det intuitive argumentet for å gjennomføre en slik restrukturering, er at hvis EBIT øker, vil aksjonærene kunne øke egenkapitalverdien ved å ta opp mer gjeld – dette skyldes at selskapet kan utnytte skattefordelene ved økt gjeld i større grad med høyere kupong og prinsipal. I en slik situasjon vil skattefordelene være dominerende i forhold til mulige konkurskostnader fordi konkursfaren er så liten med så stor EBIT. Goldstein, Ju og Leland (2001) gir imidlertid ikke anledning til å restrukturere gjelden ved konkursfare. Modellen impliserer at kapitalstrukturen initialt består av relativt lite gjeld, men modellen kan åpenbart medføre høyere gjeldsandel ved tilstrekkelig høy EBIT på et senere tidspunkt.

Francois og Morellec (2004) er blant de første til å analysere nærmere hvordan man kan implementere konkursprosedyrer i strukturelle kredittrisikomodeller. Etter amerikansk konkurslovgiving vil et selskap ved konkurs normalt ha mulighet til fortsatt aktivitet i en begrenset tidsperiode etter "Chapter 11", se Bebchuk (1998). I denne perioden har selskapet en mulighet til å komme seg ut av den økonomiske krisen. Hvis selskapet ikke lykkes, blir selskapet likvidert etter "Chapter 7", jamfør Bebchuk (1998). Det skilles altså mellom konkurs og likvidering av selskapet. Dette arbeidet er fulgt opp av blant annet Galai, Raviv og Wiener (2003) og Moraux (2002).

Broadie, Chernov og Sundaresan (2005) ser nærmere på hvordan selskapet skal behandles under konkurs. I denne artikkelen benyttes både en akkumulert kupongkonto og en akkumulert EBIT-konto i løpet av konkursperioden. Modellen tar også hensyn til delingsregler mellom aksjonærer og långivere i konkursperioden, og den krever numeriske løsningsmetoder. Modellen leder til konklusjonen om at "Chapter 11"-prosedyren kan gi signifikant verdi til både kreditor og aksjonær som følge av økt gjeldskapasitet, lavere yield-spread og økt totalverdi av selskapet.

Ju og Ou-Yang (2005) utvikler en modell hvor optimal kapitalstruktur og optimal tidshorisont for gjelden bestemmes simultant i et stokastisk rentemiljø. Renteprosessen modelleres gjennom en Vasicek prosess (Vasicek (1977)). Det konkluderes med at det langsiktige gjennomsnittsnivået på kortrenten spiller en kritisk rolle i forhold til optimalisering av kapitalstruktur og tidshorisont på gjelden.

Utviklingen siden Merton (1974) og Black og Cox (1976) har gjort strukturelle modeller i stadig større grad i stand til å fange opp nye momenter som er relevante i forhold til å bestemme optimal kapitalstruktur. Anvendelsene for disse modellene er mange. Foruten som nevnt tidligere at man kan beregne hvilken sammensetning av gjeld og egenkapital som maksimerer verdien av et selskap, kan disse modellene brukes til å prise obligasjoner og egenkapital, og modellene kan forklare yield spread. Modellene kan også vise hvordan endring i parametere i økonomien påvirker verdi av gjeld, egenkapital og det totale selskapet. Videre kan modellene gi forklaringer på hvorfor kapitalstruktur varierer mellom ulike selskaper og bransjer, for eksempel hvorfor typiske industriselskaper har høy gjeldsandel og vekstselskaper har lav gjeldsandel.

1.2 - Alternative modeller

Det finnes også andre modeller for å forklare kapitalstruktur. Vi ønsker her å gjengi kort hovedinnholdet i noen alternative modeller og vise hvilke avgrensninger vi gjør i vår oppgave. De fleste alternative modellene er knyttet til prinsipal-agent teorier og/eller asymmetrisk informasjon.

Innenfor prinsipal-agent teorien finnes det tre hovedgrupperinger. En viktig gruppering er knyttet til det såkalte "asset substitution"-problemet. Dette problemet kan illustreres ved å betrakte egenkapitalen som en kjøpsopsjon. Etter å ha tatt opp gjeld er det fristende for aksjonærene å øke risikoen til selskapet. Egenkapitalen vil, analogt med en callopsjon, bli mer verdt når risikoen øker. Aksjonærene utnytter her at de har begrenset nedside og ubegrenset oppside. Spesielt vil dette "asset substitution"-problemet være stort når selskapet er i konkursfare. Dette problemet kan gjøre det vanskelig for selskapet å ta opp gjeld ettersom potensielle långivere er klar over muligheten for en slik overføring av verdier fra gjeld til egenkapital.

En annen viktig gruppering av teorier knyttet til prinsipal-agent teorien handler om underinvesteringer. Tanken her er at aksjonærer vil ønske å optimalisere verdien av egenkapitalen og ikke verdien av selskapet som helhet. La oss tenke oss et sikkert prosjekt med positiv nettonåverdi som øker verdien av gjelden men samtidig reduserer verdien av egenkapitalen i noe mindre grad. Det kan vises, jamfør Myers (1977), at det vil være rasjonelt for aksjonærene å avstå fra å gjennomføre et slikt prosjekt. Dette underinvesteringsproblemet vil i følge Brealey og Myers (2000) gjelde for alle bedrifter med gjeld, men være mest betydningsfullt for bedrifter som er i konkursfare.

En siste gruppering av teorier knyttet til prinsipal-agent teorien dreier seg om free cash problemet. Her ser man på hvilke konsekvenser ledelsens incentiver har for kapitalstrukturen i en bedrift. En nylig artikkel på dette området er Morellec (2004) som viser at ledelsens frihet til å bestemme kapitalstruktur kan medføre svært lav gjeldsandel. Her kan det være fruktbart å tenke på modne selskaper med cash flow som er betydelig høyere enn investeringsbehovet. Problemet her er å gi incentiver til ledelsen til å maksimere aksjonærenes verdier. Ledelsen i slike selskaper vil lett bli fristet til å engasjere seg i ulønnsom "empire"-bygging eller ta ut store personlige fordeler på aksjonærenes regning. Det trengs altså mekanismer som sikrer at free cash flow blir brukt i tråd med aksjonærenes interesser. Å ta ut free cash flow gjennom utbyttepolitikken eller gjenkjøp av egne aksjer blir av noen betraktet som en måte å løse dette problemet på. Imidlertid vil nok mange mene at denne måten ikke er disiplinerende nok fordi ledelsen forholdsvis enkelt kan avstå fra å betale ut utbytte – dette skyldes at det i mange situasjoner er vanskelig for aksjonærer å gripe inn både ut i fra corporate governance regler og fordi ledelsen har mer informasjon om selskapet enn aksjonærene. En annen mekanisme for å sikre at free cash flow blir brukt i tråd med aksjonærenes interesser, er å la selskapet ta opp høy gjeld. Ettersom långivere har konkurslover og lignende som beskytter sine rettigheter, blir ledelsen i større grad enn ved utbyttepolitikk/gjenkjøpsordninger bundet til å betale ut cash flow til långivere. Man kan altså si at høy gjeld vil kunne virke betydelig disiplinerende i forhold til å sikre at ledelsen maksimerer aksjonærenes verdier.

Modellene knyttet til asymmetrisk informasjon er utviklet av blant annet Leland & Pyle (1977), Myers (1977) og Myers & Majluf (1984), og disse modellene har blant annet ledet fram til den såkalte ”Pecking-Order”-teorien. Denne teorien sier at bedriftene finansierer først med interne midler og deretter med den billigste formen for eksterne midler. Her ser man på ufullkommen informasjon som en årsak til at det vil være ulike kostnader for forskjellige finansieringskilder. For at en kapitalinnskyter skal kunne vurdere om han vil støtte et prosjekt økonomisk, må han ha best mulig informasjon om den forventede utviklingen. De nåværende eierne har gjerne bedre kjennskap til framtidige utviklingsforløp enn bankene eller mulige nye eiere. Kostnadene som er forbundet med å skaffe informasjon om virksomheten, vil derfor være høyere for utenforstående eiere og bankene enn for eiere som arbeider i bedriften. Informasjonskostnader kommer dermed i tillegg til kompensasjon for den generelle risikoen, som knytter seg til hvordan et prosjekt utvikler seg. Man vil således forvente at eksterne eiere har høyere avkastningskrav til prosjektet enn interne eiere, og at ekstern egenkapitalfinansiering følgelig blir dyrere enn finansiering ved tilbakeholdt overskudd. På grunn av informasjonsasymmetri mellom de som gjennomfører og de som finansierer et prosjekt, er det ikke sikkert at det er mulig å oppnå finansiering gjennom bank eller aksjemarked. Det vil si at kapitalmarkedet «rasjonerer» eller selekterer bort prosjekter, eller at det eksisterer kapitalmarkedsrestriksjoner.

En annen teori knyttet til asymmetrisk informasjon dreier seg om at ledelsen forutsettes å ha inngående kunnskap om bedriften, mens investoren har relativt begrenset grad av kunnskap om bedriften. Ledelsens valg av kapitalstruktur kan dermed gi viktige signaler om selskapet. Et viktig utgangspunkt i den sammenheng er at høy gjeld er at signal om høy kvalitet på selskapet. Dette begrunnes med at gjeld og egenkapital er forskjellige i sine krav på utbetalinger fra selskapet. Gjeld er et kontraktsbeskyttet løfte om framtidige utbetalinger, mens egenkapital er mer tilgivende og ledelsen kan i større grad utvise skjønn og diskresjon i forhold til hvor store utbetalingene til aksjonærene skal være. Ledelsen kan ved å ta opp mer gjeld signalisere at de er et høykvalitetsselskap. Lavkvalitetsselskap vil imidlertid ikke imitere høykvalitetsselskap ved å ta opp mer gjeld fordi da øker konkurskostnadene uforholdmessig mye. Viktig arbeid innenfor dette feltet er gjort blant annet av Ross (1977).

1.3 – Oppbygning av rapporten

Her følger en oversikt over de ulike kapitlenes oppbygning og innhold.

I kapittel 2 vil vi gjøre rede for teorien knyttet til vår benchmarkmodell. Denne modellen bygger på Leland (1994) og tar utgangspunkt i at verdien V av selskapets aktiviteter, ofte kalt ”asset value” eller ”unlevered value”, følger en stokastisk prosess. Gitt visse forutsetninger kan det vises at krav på V må tilfredsstille en partiell differensiallikning (PDE). En kritisk forutsetning for den videre analysen er at alle krav F på verdien av selskapets aktiviteter V har en uendelig tidshorisont og er tidsuavhengige. Denne forutsetningen reduserer PDE til en ordinær differensiallikning (ODE) av typen Euler. En slik ODE kan man finne generelle løsninger av ved hjelp av kjente metoder. Vi bruker disse metodene kombinert med økonomisk intuitive randkrav til å finne uttrykk for verdien av gjeld, skattefordel, konkurskostnader, det totale selskapet og egenkapitalen. Det gjøres også observasjoner knyttet til egenskaper ved disse uttrykkene.

Deretter finner vi ett uttrykk for konkursbarrieren som maksimerer verdien av egenkapitalen. Vi tar utgangspunkt i at aksjonærene har begrenset nedside og vil slå selskapet konkurs når egenkapitalverdien er lik 0. For å bestemme en slik konkursbarriere, benytter vi en smooth-pasting betingelse. Vi setter inn uttrykket for konkursbarrieren i våre tidligere uttrykk for verdien av gjeld, det totale selskapet og egenkapitalen. Vi finner også uttrykk for risikojustert rente på gjelden og yield spread.

I kapittel 3 utarbeider vi et uttrykk for optimal kupong gitt at man ønsker å maksimere totalverdien av selskapet. Vi setter dette uttrykket inn i våre tidligere uttrykk for verdi av gjeld, det totale selskapet, egenkapitalen, risikojustert rente på gjelden og yield spread. Ut i fra dette studeres optimal kapitalstruktur målt ved optimal gjeldsandel.

For å gi en grafisk framstilling av egenskaper knyttet til uttrykkene for verdi av gjeld, det totale selskapet, egenkapitalen, gjeldsandelen og yield spread, foretar vi en komparativ statikk-analyse. Her taes det utgangspunkt i begrunnede referanseverdier for parametrene som inngår i modellen. Det fokuseres på de analysene som vi mener er mest interessante.

Videre foretar vi en sammenligning av resultatene for optimal kapitalstruktur og yield spread fra benchmarkmodellen i forhold til relevante empiriske data. Det gis også en pekepinn på hvordan benchmarkmodellen kan tilpasses selskapsspesifikke forhold.

I kapittel 4 utvikler vi vår nye modell basert på den senere tids forskning innen området. I motsetning til Leland (1994) tar vi utgangspunkt i en stokastisk prosess hvor EBIT (Earnings Before Interests and Taxes) betegnet ved δ er den primitive variable.

I vår modell åpnes det opp for en stokastisk renteprosess. I artikkelen Galai, Raviv og Wiener (2003) antydes dette som et interessant område for videre forskning. Mer konkret ønsker vi å bruke en renteprosess basert på Vasicek-modellen.

Videre modellerer vi at selskapet vil gå konkurs når EBIT faller ned på et kritisk nivå δ_B. Ved konkurs går selskapet inn i en reorganiseringsprosess etter "Chapter 11" i den amerikanske konkurslovgivningen. En slik reorganiseringsprosess vil typisk kunne vare i 2 år. I denne tilstanden vil selskapet bli beskyttet mot sine kreditorer gjennom at kupongbetalinger blir stoppet på all usikret gjeld. Disse kupongbetalingene blir i stedet for akkumulert opp på en egen konto. Samtidig blir selskapets EBIT akkumulert opp på en annen konto. For å komme ut av konkurstilstanden, må EBIT være større enn den kritiske verdien δ_B. Da vil kreditorene få tilbakebetalt en andel av de akkumulerte kupongbetalingene. Hvis den akkumulerte EBIT-kontoen er større enn betalingen til kreditorene, vil aksjonærene få differansen. Men hvis den akkumulerte EBIT-kontoen er mindre enn betalingen til kreditorene, vil egenkapitalen blir utvannet for å skaffe til veie det tilstrekkelige beløpet.

Vi lar selskapet bli likvidert hvis selskapet tilbringer mer tid i konkursperioden enn den tildelte tiden etter "Chapter 11", eller om EBIT faller tilstrekkelig lavt ned til en kritisk verdi δ_L. Verdien δ_L bestemmes med samme utgangspunkt som for bestemmelse av V_B i benchmarkmodellen ovenfor.

I vår modell kan gjelden restruktureres – det åpnes opp for at den opprinnelig utstedte gjelden kan kjøpes tilbake og en nullkupong kan utstedes. Det intuitive argumentet for å gjennomføre en slik restrukturering, er at det kan oppstå forhold som vil gjøre det mer gunstig å innfri det gamle lånet og finansiere dette med utstedelse av nullkupong til markedsvilkår. Vi velger her å benytte gjeld med endelig forfallstid.

I kapittel 5 vil vi gjennomgå en prosedyre for å implementere den nye modellen fra kapittel 4. Dette oppsettet krever numeriske løsningsmetoder, jamfør tilsvarende modeller som presentert i Broadie, Chernov og Sundaresan (2004). Det brukes Monte Carlo simulering og numeriske løsningsmetoder fra artikkelen til Longstaff og Schwartz (2001).

Vi vil optimalisere kupong og prinsipal i forhold til totalverdien av selskapet. I artikkelen Broadie, Chernov og Sundaresan (2004) påpekes dette som et spennende forskningsområde fremover. Det antydes at dette kompliserer den numeriske beregningen betraktelig.

Med bakgrunn i dette oppsettet ønsker vi å bestemme verdi av gjeld, det totale selskapet, egenkapitalen, risikojustert rente på gjelden, yield spread og optimal gjeldsandel. Videre ønsker vi å foreta komparativ statikk-analyse. I denne komparativ statikk-analysen vil vi kommentere likheter og forskjeller i forhold til benchmarkmodellen.

Vi presenterer så resultatene fra den nye modellen og foretar en sammenlikning av disse resultatene i forhold til empiri. Deretter utfører vi en sammenlikning av resultatene fra den nye modellen og benchmarkmodellen. Vi redegjør for hvordan disse forskjellene skyldes ulikheter i modellenes spesifikasjoner.

I kapittel 6 oppsummerer vi kort innholdet i denne rapporten.

Kapittel 2 – Benchmarkmodellen: Teori

I dette kapittelet vil vi presentere en statisk kapitalstrukturmodell basert på Leland (1994). Modellen er egnet til å analysere optimal kapitalstruktur og uttrykk for verdi av gjeld, egenkapital og det totale selskapet, samt beregne uttrykk for risikojustert rente og yield spread, og den kan sees på som en standard benchmarkmodell innenfor dette området. Basert på en diffusjonsprosses med konstant volatilitet for "asset value" kommer modellen fram til closed-form løsninger. Vi har her avgrenset Lelands modell til å ta innover seg parametere knyttet til blant annet bedriftens risiko, skatter og konkurskostnader. Det åpnes også for å la konkursnivå og kupong bestemmes endogent.

2.1 – Diffusjonsprosessen

Leland tar utgangspunkt i at verdien V av selskapets aktiviteter, ofte kalt "asset value" eller "unlevered value", følger en stokastisk prosess.

En definisjon av en stokastisk prosess vil være nødvendig å ha etablert når vi senere skal se på utviklingen av aktivaverdien V. I finansøkonomisk litteratur, jamfør Øksendal (2003), er definisjon av sannsynlighetsrom nødvendig for å kunne definere en stokastisk prosess. I moderne finans tar man ofte utgangspunkt i at prisbanene til ulike verdipapir som er tilgjengelig for investorer for kjøp og salg kan modelleres som en mengde av stokastiske prosesser definert på et sannsynlighetsrom $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathrm{P})$.

Øksendal (2003) definerer en stokastisk prosess som en parametrisert samling av tilfeldige variable $\{X_t\}_{t\in T}$ definert over et sannsynlighetsrom $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathrm{P})$ og antar verdier i $\mathbf{R}^n$.

Her er Ω tilstandsrommet, det vil si samlingen av alle mulige framtidige utfall etter at investeringsbeslutningen er tatt. Elementene i tilstandsrommet er gjensidig utelukkende og følgelig kan kun ett utfall inntreffe i framtiden. I et enkelt spilleksempel med en vanlig terning og ett kast vil $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

For enhver gitt $t \in T$ har vi en tilfeldig variabel

$$\omega \to X_t(\omega); \qquad \omega \in \Omega$$

hvor ω er en tilstand inneholdt i tilstandsrommet Ω. Denne kan tolkes ved at når vi holder fast t, og lar ω variere, får vi en tilfeldig variabel X_t.

Tilsvarende har vi følgende uttrykk:

For enhver gitt $\omega \in \Omega$ har vi funksjonen

$t \to X_t(\omega); \qquad t \in T$

som kalles en sti for X_t. Tidspunktet t må være inneholdt i tidsrommet T. Vi kan forklare dette med at for hvert utfall ω, og lar t variere, genereres en sti $X_t(\omega)$. Vi kan intuitivt tenke på ω som en hendelse som bestemmer X_t. Hver ω gir en bestemt realisasjon av X_t.

Vi ønsker å forklare nærmere hva som menes med $\mathcal{F}_t$.

$\mathcal{F}_t$ er en σ-algebra. Hvis Ω er en gitt mengde, så vil en σ-algebra $\mathcal{F}_t$ på Ω være en familie av delmengder av Ω med følgende egenskaper:

i. $\emptyset \in \mathcal{F}_t$, hvor $\emptyset$ er den tomme mengden.

ii. $F \in \mathcal{F}_t \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}_t$, hvor $F^C = \Omega \setminus F$ som er komplementet til F i Ω, det vil si F^C inneholder alle utfall i Ω som ikke er med i F. Implikasjonen betyr at dersom mengden F er med i $\mathcal{F}_t$, må komplementmengden F^C også være med i $\mathcal{F}_t$.

iii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_t$. Dette betyr at dersom vi har en sekvens av mengder $A_1, A_2, \ldots$ som alle er med i $\mathcal{F}_t$, vil også unionen av disse mengdene være med i $\mathcal{F}_t$.

En familie F = $\{\mathcal{F}_t\}$, $t \in R_+$, av del σ-algebraer av $\mathcal{F}$ blir tolket som en filtrering om den er ikke-avtakende. Det vil si at dersom $s \leq t$, da er $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Videre egenskaper knyttet til filtrering kan finnes i Aven og Jensen (1999).

Vi kan fortolke σ-algebraen $\mathcal{F}_t$ fra et sannsynlighetsrom som informasjonen som er tilgjengelig på tidspunkt t, det vil si informasjon om historien fram til tidspunkt t. En tolkning av $\mathcal{F}_t$ som en informasjonsmengde er kanskje lettest å forklare i forbindelse med filtreringen til en stokastisk prosess, for eksempel filtreringen $\{\mathcal{F}_t\}$ til en Brownian Motion B(t).

At en stokastisk prosess X_t er tilpasset ("adapted") til filtreringen {$\mathcal{F}_t$} betyr at for hver t er X_t en stokastisk variabel som er målbar med hensyn på $\mathcal{F}_t$. Dette betyr igjen at verdien av X_t kan uttrykkes som en grense for summer av verdiene av funksjoner av $B(t_i)$, der $t_i \leq t$. Med andre ord vil egenskapen at X_t er $\mathcal{F}_t$-målbar innebære at X_t er bestemt av informasjonen som er i $\mathcal{F}_t$. Altså er σ-algebraen $\mathcal{F}_t$ den informasjonen vi trenger når vi skal bestemme X_t. Hvis for eksempel X_t er et porteføljevalg ved tiden t, så betyr dette nettopp at porteføljevalget må basere seg på den informasjonen man får ved å observere den underliggende prosessen $B(t)$.

Paret (Ω , $\mathcal{F}_t$) kalles et målbart rom, når $\mathcal{F}_t$ er en σ-algebra av delmengder av Ω.

Vi ønsker videre å definere en formulering som uttrykker sannsynligheter knyttet til utfallene i Ω gitt informasjonsmengden $\mathcal{F}_t$. Et sannsynlighetsmål P på et målbart rom (Ω , $\mathcal{F}_t$) er en funksjon $P: \mathcal{F}_t \rightarrow [0,1]$ slik at:

a) $P(\emptyset) = 0$. Dette betyr at sannsynligheten over den tomme mengden er 0. I terningeksempelet betyr dette at sannsynligheten for at vi triller 7 med en vanlig terning på et kast, er lik 0.

b) $P(\Omega) = 1$. Dette betyr at sannsynligheten over hele utfallsrommet er lik 1. I terningeksempelet betyr det at sannsynligheten for at vi triller med et utfall innenfor $\{1,2,3,4,5,6\}$, er 100 %.

c) Hvis $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_t$ og $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ er disjunkte ($A_i \cap A_j = \emptyset$ hvis $i \neq j$), så er $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Gitt mengder uten felles elementer så vil sannsynligheten for at unionen av $A_1, A_2, \ldots$ skal inntreffe være lik summen av sannsynlighetene for hver mengde. I det enkle tilfelle at vi kun har to mulige mengder, kan vi illustrere dette med følgende eksempel: La oss si at et selskap kan oppleve to hendelser: A_1 er oljekurs mellom 40 og 50 dollar per fat, og A_2 er oljekurs mellom 50 og 60 dollar per fat. Siden dette er disjunkte mengder, vil sannsynligheten for at oljekursen er mellom 40 og 60 dollar per fat være gitt som summen av sannsynligheten for at oljekursen er mellom 40 og 50 og sannsynligheten for at oljekursen er mellom 50 og 60. Setning c) gjelder imidlertid for et uendelig antall hendelser, og dette kravet er betydelig strengere enn ved ett endelig antall hendelser.

Vi har ovenfor redegjort kort for hva som menes med og hvorfor vi trenger å definere ett sannsynlighetsrom $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathrm{P})$. Nå vil vi se nærmere på den stokastiske prosessen til V.

Generelt vil verdien V følge den stokastiske prosessen:

$$dV_t = \mu(V_t, t)dt + \sigma(V_t, t)dW_t^P \quad , V_0 = v \tag{2.1}$$

hvor:

- $\mu(V_t, t)$ og $\sigma(V_t, t)$ er deterministiske funksjoner av tid og verdien av V.
  - Leddet $\mu(\ )$ betegnes ofte som prosessens drift og kan tolkes som endring i forventningsraten til en prosess i et lite tidsintervall.
  - Leddet $\sigma(\ )$ kalles ofte prosessens diffusjon og $\sigma^2(V_t, t)$ kan tolkes som endring i variansraten til prosessens varians i et lite tidsintervall.
- W_t^P er standard Brownian Motion, det vil si under det fysiske sannsynlighetsmålet P. Sannsynlighetsmålet P er subjektivt for investorene og brukes for å beregne forventninger, varians, kovarians og andre egenskaper ved framtidige priser og avkastninger. Brownian Motion er en stokastisk prosess W_t som antar reelle verdier og tilfredsstiller følgende 4 krav:
  i. $W_0 = 0$.
  ii. For alle tidspunkt t og $s > t$ vil $W_s - W_t \sim N(0, s-t)$, det vil si at den tilfeldige variabelen $W_s - W_t$ er normalfordelt med forventning 0 og varians $s-t$.
  iii. For alle tidspunkt $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$ vil $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ være uavhengige inkrementer.
  iv. W_t har kontinuerlige stier. Det vil si at for alle $\omega \in \Omega$ er funksjonen $t \mapsto W_t(\omega)$ en kontinuerlig funksjon av tiden t. Den er imidlertid ikke en deriverbar funksjon av tiden t.

Brownian Motion er en stokastisk prosess (med visse sannsynlighetsteoretiske egenskaper) og som sådan er det nødvendig å ha et underliggende sannsynlighetsrom definert som ovenfor.

Leland (1994) tar for seg et spesielt tilfelle av ligningen (2.1) – geometrisk Brownian Motion - hvor vi har at $\mu(V_t,t)$ og $\sigma(V_t,t)$ formuleres som henholdsvis μV_t og σV_t. Vi har altså at μ og σ er gitte konstanter. Dermed får vi en diffusjonsprosess som følger:

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW^P{}_t \qquad V_0 = v \tag{2.2}$$

En slik formulering som (2.2) har følgende egenskaper:

i. Verdien V er positiv for alle t med sannsynlighet 1, gitt at den initiale verdien v er positiv.
ii. Endring i V over ikke-overlappende tidsperioder er uavhengig.
iii. Fordelingen av fremtidig endring i V er uavhengig av tidligere verdier av V og dagens verdi av V.
iv. Verdiprosessen til V er Markovian, det vil si, fordelingen av fremtidige verdier til V er kun avhengig av dagens pris på V, og ikke tidligere verdier på V. En annen måte å si dette på, er at all informasjon om verdien på V er reflektert i dagens verdi av V.

For å illustrere intuisjonen ved en diffusjonsprosess (2.2) formulert som en geometrisk Brownian Motion, kan vi omformulere likning på følgende måte:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW^P{}_t$$

Leddet $\frac{dV_t}{V_t}$ sier noe om den prosentvise endringen i V_t over en liten tidsperiode. Faktoren μ antyder hvor stor den prosentvise endringen forventes å være i den samme tidsperioden, mens volatiliteten σ uttrykker usikkerhet knyttet til hvor stor den prosentvise endringen forventes å være. Vi har altså at prosesser med ulike verdier for V_t, men med samme μ og σ, vil ha samme forventet avkastning og volatilitet. I absolutt skala vil disse prosessene i forventning bevege seg forskjellig, men i relativ skala vil prosessene forventes å bevege seg likt. Vi kan her ta et eksempel på dette fra aksjemarkedet. Hvis et selskap har 100 aksjer og aksjepris på 300 per aksje foretar en to-for-en aksjesplitt, vil selskapet etter splitten ha 200 aksjer med pris 150 per aksje. Det vil være rimelig at hver aksje før og etter splitten har samme relative prosess, mens det vil være urimelig at hver aksje før og etter splitten har samme absolutte prosess.

I diffusjonsprosessen (2.2) har vi også antatt at forventning og volatilitet kan uttrykkes som konstanter. Vi ønsker å foreta en slik formulering fordi det gir en tilfredsstillende approksimasjon, og det forenkler beregningene betydelig.

Diffusjonsprosessen (2.2) slik den er formulert, kan være nyttig blant annet fordi den kan benyttes til å finne analytiske closed-form løsninger av mange problemer knyttet til optimal kapitalstruktur.

I nyere forskning, jamfør Goldstein, Ju og Leland (2001), benyttes en EBIT-basert prosess i stedet for den asset-value-baserte prosessen $\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW^P{}_t$. Vi vil i kapittel 4 diskutere nærmere bakgrunnen for at en EBIT-basert prosess ofte benyttes for problemstillinger knyttet til strukturelle kredittrisikomodeller. I forhold til benchmarkmodellen som her utledes vil vi imidlertid holde oss til en prosess basert på selskapets aktiviteter.

Den stokastiske prosessen V forutsettes å følge Modigliani og Miller (1958), Merton (1974) og Brennan og Schwartz (1978) som antar at (i) verdien av aktivitetene til selskapet er uavhengig av finansiell struktur og (ii) avgjørelser knyttet til kapitalstruktur er endelige og endres ikke i ettertid.

Vi ser nærmere på punkt (i). Kupongbetalinger på gjeld kan være dyrt for selskapet. Hvis vi ser bort ifra eksterne finansieringsløsninger, vil selskapet i noen tilfeller ikke ha mulighet til å betale kupong uten å redusere verdien av selskapet. Gitt at selskapet ikke ønsker å redusere sin verdi, trengs det da eksterne finansieringsløsninger. En mulighet i slike tilfeller vil være å se på aksjekapitalsfinansieringsløsninger. Dette kan gjøres på to måter. En måte er å la tidligere aksjonærer skaffe finansiering ved å selge deler av sine opprinnelige aksjer. Denne måten er imidlertid lite brukt i modelleringsøyemed. Den andre måten er å foreta emisjon av aksjekapitalen. Da vil selskapet få økt aksjekapital, mens utvanningen ikke endrer den totale markedsverdien av alle aksjene. De opprinnelige aksjonærene mister da verdi. For den enkelte aksjonær er det i prinsippet irrelevant om netto kontantstrøm betales ved å selge deler av sine opprinnelige aksjer eller ved å utstede nye aksjer.

En konsekvens av (i) er at netto kontantstrøm som følge av valg av gjeldsandel må finansieres ved å utstede ny egenkapital. Å ta ut (inn) kapital av selskapet gjennom kupong på gjeld, må kompenseres ved å utstede (gjenkjøp) aksjekapital for å holde selskapets verdi uavhengig av kapitalstrukturen.

Punkt (ii) er knyttet til at modellen er statisk, det vil si at på ett bestemt tidspunkt taes en avgjørelse knyttet til valg av kupong og gjeldens prinsipal – og denne avgjørelsen blir gjeldende i all framtid. En slik forutsetning kan i flere sammenhenger være en god beskrivelse av virkeligheten. Lånekontrakter med kreditorer vil ofte kunne inneholde såkalte covenants som begrenser selskapets mulighet til å ta opp ytterligere gjeld.

Det er vist, blant annet i Leland (1994), at marginale gjenkjøp (nyutstedelse) av gjeld vil redusere aksjonærenes (kreditorenes) verdier. Bakgrunnen for dette er at reduksjon (økning) av gjelden vil føre til økt (redusert) verdi for resten av utestående gjeld. Dette skyldes mindre (større) konkursfare og følgelig mindre (større) konkurskostnader. Aksjonærene vil ikke kjøpe tilbake gjeld selv om dette kan være optimalt for totalverdien av selskapet, fordi gevinsten som oppstår på grunn av dette tilfaller utestående gjeld. Kreditorene vil nekte aksjonærene å utstede ny gjeld fordi dette vil redusere verdien av den opprinnelige gjelden. Ut fra et slikt resonnement kan det altså være rimelig at det ikke foretas endringer i gjeldstrukturen.

Imidlertid kan det være slik at store gjenkjøp av gjeld kan være til fordel for både aksjonærer og kreditorer, gitt at refinansieringskostnadene er begrensede, jamfør artikkel av Christensen, Flor, Lando og Miltersen (2002). Slike gjenkjøp blir i denne modellen begrunnet ut i fra å redusere konkursfaren. Her velger selskapet å kjøpe tilbake all gjeld og utstede ny gjeld med lavere prinsipal og kupong. I denne modellen utnytter aksjonærene at långiverne mister verdi ved konkurs på grunn av konkurskostnader. Aksjonærene bruker dette til å forhandle til seg verdi fra långiverne i denne restruktureringen. Likevel øker långiverne sin verdi gjennom at konkursfaren er redusert. Både aksjonærer og långivere oppnår på denne måten å øke sine respektive verdier ved gjenkjøp av gjeld. Leland (1994) som vi følger i dette kapittelet har imidlertid ikke valgt å fokusere på slik strategisk restrukturering av gjelden.

2.2 – Partiell differensiallikning

Videre i modellutledningen antar vi at følgende forutsetninger er oppfylt:

1. Det er ikke problemer knyttet til delbarhet av aktiva.
2. Det er tilstrekkelig antall investorer med sammenlignbare formuer slik at hver investor tror han kan kjøpe/selge så mye av et aktivum som han ønsker til markedsprisen.
3. Det kan plasseres og lånes i risikofritt aktivum for samme raten r.
4. Short-salg av alle aktiva er fullt ut tillatt.
5. Terminstrukturen til risikofritt aktivum er flat og kjent med full sikkerhet
6. Aktiva kan handles kontinuerlig i tid.

Mange av disse forutsetningene er ikke nødvendige for å utlede modellen, men vil være nyttige for å få analytiske closed-form løsninger. Mer konkret gjelder at modellen vil kunne utledes selv om forutsetning 1 – 4 formuleres mindre strengt. Punkt 5 blir valgt for at prisingen ikke blir påvirket av endringer i terminstrukturen. Forutsetning 6 er kritisk. Kort fortalt krever punkt 6 at markedet for disse verdipapirene er åpent for handel mesteparten av tiden.

Utgangspunktet for den videre analysen er at vi ønsker å verdsette egenkapital og gjeld som krav på verdien av selskapets aktiviteter. For å foreta denne verdsettingen, trenger vi et prisingsverktøy. Et slikt verktøy er en partiell differensiallikning (PDE). En PDE er en likning som gir en sammenheng mellom funksjoner og funksjonenes partielle deriverte. En løsning av likningen er en funksjon som tilfredsstiller denne sammenhengen. Formålet ved å benytte en PDE er å finne informasjon om en ukjent funksjon ved å først undersøke nærmere sammenhengen mellom funksjonen og dens partielle deriverte. Tradisjonelt har PDE vært et mye brukt verktøy innen naturvitenskap og spesielt fysikk, men har i de siste tiårene fått et gjennombrudd innen kvantitativ finans.

Med utgangspunkt i Black & Scholes (1973) kan det vises at dersom det ikke skal eksistere arbitrasjemuligheter i økonomien, må det være en bestemt sammenheng mellom en ukjent funksjon som beskriver verdien av et tilfeldig krav F avledet av verdien av selskapets aktiviteter V og denne funksjonens partielt deriverte. Det antas at det vilkårlige kravet F utbetaler en ikke-negativ kontantstrøm a så lenge selskapet er solvent (ikke konkurs). Videre defineres δ som netto payout rate for selskapet, det vil si utbetalinger til dividende og kupong. Gitt at bedriften finansierer netto kontantstrøm knyttet til kupong ved å utstede aksjekapital, så er det velkjent (jfr Black & Cox, 1976) at et vilkårlig krav F på selskapets verdi må tilfredsstille følgende PDE:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V,t) + \mu V F_V(V,t) - rF(V,t) + F_t(V,t) + a = 0 \tag{2.3}$$

med randbetingelser bestemt av betalinger ved forfall og betalinger ved konkurs i tilfelle dette skjer før forfall. Leddet a uttrykker kontantstrømmen som tilfaller eier av kravet. Bunnskriftene på F uttrykker at funksjonen er derivert med hensyn på henholdsvis V og t.

Generelt er det ingen closed-form løsninger på dette problemet (2.3). For eksempel Brennan & Schwartz (1978) løser problemet ved numeriske metoder.

For modellutledningen videre antar vi at selskapet har en enkel kapitalstruktur bestående utelukkende av egenkapital og gjeld med uendelig horisont. Diskusjonen under argumenterer for hvorfor en slik kapitalstruktur vil være hensiktsmessig for analyseformål.

Vi ser fra differensiallikningen (2.3) at verdien på et gitt krav F er eksplisitt avhengig av både V og t. Imidlertid vil antakelsen om gjeld med uendelig horisont medføre at kravet F er tidsuavhengig. Med tidsuavhengig mener vi at det ikke foreligger spesifikke tidspunkt for betaling av prinsipal/forfall eller andre kontantstrømmer (kupong og/eller dividende). Man kommer med andre ord aldri nærmere tidspunktet for tilbakebetaling av prinsipal, mens andre kontantstrømmer som dividende og kupong utbetales kontinuerlig – det er altså ingen tidsavhengig variasjon i kontantstrømmene. Alle krav F på verdien av selskapets aktiviteter V har altså en uendelig tidshorisont og er tidsuavhengige. Dermed vil verdien av et krav ikke forandre seg med tiden.

Tidsuavhengighet kan forsvares ved to alternative tilnærminger. Et intuitivt argument kan illustreres ved at verdien av prinsipal med tilstrekkelig lang løpetid vil ha tilnærmet ingen verdi og kan følgelig ignoreres. Veldig lange tidshorisonter for obligasjoner er ikke nytt i teoretisk litteratur. Den originale Modigliani & Miller (1958) antar også gjeld med uendelig horisont. Det samme gjør Merton (1974) og Black & Cox (1976). Også i praksis eksisterer obligasjoner med veldig lange tidshorisonter. Blant annet Walt Disney og Coca Cola har utstedt 100-års obligasjoner. Walt Disney sin obligasjon ble utstedt til pariverdi med effektiv rente 7,55 % og blir omtalt på Wall Street som en "Sleeping Beauty" obligasjon. Også for preferanseaksjer kan tidsuavhengighet være rimelig, da slike verdipapir utbetaler en fastsatt dividende uten noen tidsbegrensning. Et annet argument for å forsvare tidsuavhengighet på, er ved å se på en ordning hvor det øyeblikkelig tas opp ny gjeld idet foregående gjeld forfaller. Det blir i praksis ingen reell tilbakebetaling av prinsipal, og følgelig kan vi si at vi har tidsuavhengighet.

Gitt tidsuavhengighet, kan vi sette $F_t(V,t) = 0$ ettersom tidsuavhengighet innebærer at kravet ikke endres som følge av at variabelen t endres. For øvrig kan vi også eliminere t fra PDE-uttrykket (2.3). Dermed reduseres likningen (2.3) til en inhomogen ordinær differensiallikning (ODE) av Euler typen, som kun inneholder den deriverte av F med hensyn på V :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + \mu V F_V(V) - rF(V) + a = 0$$

Verdien av selskapets aktiviteter V er ikke et handlet aktivum. Dermed holder ikke en del av standardresultatene i finans vi har i finans. Mer spesifikt har man ingen ikke-arbitrasje restriksjon på det risikonøytrale driftleddet. I tilfellet med et handlet aktivum i arbitrasjefritt marked ville driftsleddet vært r for et ikke-dividende betalende aktivum. Likefullt velger Leland å spesifisere driften til prosessen for selskapets aktiviteter som $\mu = r$. Han argumenterer med at total netto payout for selskapet er 0. Mer konkret forutsettes det at ny aksjekapital utstedes i tilsvarende grad som det foretaes kupongutbetalinger. Disse effektene er med motsatt fortegn – og nettoeffekten av disse kontantstrømmene er altså 0.

Valget av driftsleddet til prosessen er en åpenbar svakhet ved Lelands modell. Vi velger imidlertid å følge Lelands oppsett ettersom den vil fungere tilfredsstillende som benchmarkmodell tross sin svakhet. Vi får da nytt uttrykk for ODE:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + rVF_V(V) - rF(V) + a = 0 \tag{2.4}$$

Denne differensiallikningen (2.4) vil danne utgangspunkt for verdsetting av vilkårlige krav F på verdien av selskapets aktiviteter V .

2.3 – Løsning av ODE

For differensiallikninger av typen Euler eksisterer det kjente løsningsmetoder. For en grundig gjennomgang av teorien bak løsningsmetoden, se for eksempel Sydsæter (2002).

Vi ønsker først å løse den homogene delen av differensiallikningen (2.4), det vil si de leddene i ODE hvor funksjonen F inngår. Altså elimineres konstantleddet a. Den homogene delen av ODE kan da skrives som:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV}(V) + rVF_V(V) - rF(V) = 0 \tag{2.5}$$

Metoden som benyttes går ut på å "søke" etter løsninger på formen $F(V) = V^{\beta}$. Innsatt i uttrykket (2.5) får vi da:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \beta(\beta-1)V^{\beta-2} + rV\beta V^{\beta-1} - rV^{\beta} = 0$$

Videre antar vi at $V \neq 0$ slik at V^{β} også er ulik null, og derfor kan vi dele gjennom likningen med V^{β}, som gir oss:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1) + r\beta - r = 0$$

Ordning av leddene gir:

$$(\frac{1}{2}\sigma^2 \beta + r)(\beta - 1) = 0$$

som gir de to løsningene:

$$\beta_1 = 1 \qquad \beta_2 = -\frac{2r}{\sigma^2}$$

Om vi definerer $X = \frac{2r}{\sigma^2} > 0$ finner vi at løsningen av den homogene delen av differensiallikningen er på formen:

$$F_H(V) = A_1 V + A_2 V^{-X}$$

Vi har imidlertid ikke tatt hensyn til den inhomogene delen av ODE enda. Den inhomogene delen av ODE består kun av et konstantledd a. For å bestemme den generelle løsningen på den inhomogene differensiallikningen benytter vi en metode som kan kalles ”intelligent tipping”. Denne metoden går i korte trekk ut på å søke løsninger på samme form som inhomogeniteten i differensiallikningen.

Differensiallikningen vår har en inhomogenitet bestående av et konstantledd. Følgelig ønsker vi å søke etter en løsning på formen $F_p(V) = A_0$. Ved å sette inn uttrykket i differensiallikningen finner vi at:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 0 + rV0 - rA_0 = -a$$

For at skal være oppfylt, må partikulærløsningen være gitt ved:

$$A_0 = \frac{a}{r}$$

Den generelle løsningen av differensiallikningen vil være gitt som summen av løsningen på den homogene og den inhomogene delen av differensiallikningen. Følgelig vil den generelle løsningen være gitt som:

$$F(V) = \frac{a}{r} + A_1 V + A_2 V^{-X} \tag{2.6}$$

Konstanten a bestemmes ut fra spesifikasjonen til det enkelte krav, mens konstantene A_1 og A_2 kan finnes ved å studere randkrav for funksjonen F. De aktuelle randkravene i denne situasjonen vil være å se på funksjonsverdien F når V går mot konkursbarrieren V_B og når V

går mot positivt uendelig (det vil si når V er så mye større enn V_B at konkursfaren er neglisjerbar).

Dette nye uttrykket (2.6) kan brukes til å prise et hvilket som helst krav på verdien V av selskapet.

2.4 - Verdi av gjeld

Funksjonen F representerer et vilkårlig krav, med de gitte antakelsene ovenfor, på verdien V. Følgelig vet vi at gjelden $D(V)$ vil kunne uttrykkes på formen:

$$D(V) = \frac{d_0}{r} + D_1 V + D_2 V^{-X} \tag{2.7}$$

For å bestemme verdien på konstanten d_0 utnytter vi karakteristika ved kravet. Kontantstrømmen som tilfaller kreditorene på ethvert tidspunkt når selskapet er solvent, er kupongen C. Følgelig vet vi at $d_0 = C$.

Videre bestemmer vi D_1 og D_2 ved å studere randkravene som gjelden må tilfredsstille. Vi lar V_B uttrykke nivået på selskapets verdi hvor konkurs inntreffer. Foreløpig antar vi at denne størrelsen er eksogent gitt. At V_B er eksogent gitt, kan være et problem fordi analyser og drøftinger av modellen blir mindre meningsfylt – da man ikke kan vurdere størrelsen på V_B opp mot andre størrelser i modellen. Ved konkurs vil det oppstå konkurskostnader som forenkles til å være andel α i prosent av V_B. Generelt sett vil verdien som tilfaller kreditorene være minimum av $(1-\alpha)V_B$ og neddiskontert verdi av framtidige kuponger og framtidig prinsipal. Leland antar imidlertid at kreditorene ved konkurs uansett vil motta $(1-\alpha)V_B$. Som vi senere skal vise vil aksjonærene bestemme en forholdsvis lav V_B for å maksimere verdien av egenkapitalen. Leland sin forutsetning vil dermed være rimelig i denne modellen. Herav følger det at aksjonærene får ingenting ved konkurs, på grunn av absolutt prioritet.

Når verdien V blir stor i forhold til V_B, vil sannsynligheten for konkurs bli ubetydelig. Da vil man motta kupongen C med full sikkerhet i hver periode i uendelig tid. Matematisk sett kan det vises at nettonåverdi av å motta en risikofri kontantstrøm C på hvert tidspunkt med kontinuerlig diskonteringsrate r, kan uttrykkes $\frac{C}{r}$. Uttrykket $\frac{C}{r}$ illustrerer verdien av å få kupongen i uendelig tid uten risiko for konkurs.

Vi får altså følgende randbetingelser:

$$V = V_B \quad \Rightarrow \quad D(V_B) = (1-\alpha)V_B$$
$$V \to \infty \quad \Rightarrow \quad D(V) \to \frac{C}{r}$$

Fra uttrykket (2.7) ser vi da umiddelbart at $D_1 = 0$, ettersom $V \to \infty$ ville medføre $D(V) \to \infty$ dersom $D_1 \neq 0$.

Dermed kan vi bestemme verdien av konstanten D_2 ut fra det første randkravet:

$$(1-\alpha)V_B = D_2 V_B^{-X} + \frac{C}{r} \qquad \Rightarrow \qquad D_2 = \left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]V_B^X$$

Vi kan dermed konkludere med at verdien av gjelden er gitt ved:

$$D(V) = \frac{C}{r} + \left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{-X} \tag{2.8}$$

For å gi en økonomisk tolkning av uttrykket (2.8), kan det være informativt å definere et krav som gir utbetaling 1 når konkursbarrieren nås, og 0 ellers, med andre ord en tilstandspris. Om vi definerer $p_B(V)$ som denne størrelsen, kan vi finne et uttrykk for dette kravet. Det vil være gitt på en tilsvarende form som F(V) fordi dette også er et krav på verdien av V. Vi får altså funksjonsformen:

$$p_B(V) = C(V) = \frac{c_0}{r} + C_1 V + C_2 V^{-X} \tag{2.9}$$

Kravet $p_B(V)$ betaler imidlertid ikke ut noen kontantstrøm så lenge selskapet er solvent. Av den grunn vil konstantleddet $c_0 = 0$.

Konstantene bestemmes ut fra nye randkrav. Ved konkurs vil verdien av kravet være lik 1 per definisjon, mens når verdien av V går mot positivt uendelig, vil verdien av kravet gå mot 0 siden sannsynligheten for konkurs blir ubetydelig. Dette gir oss randkravene:

$$V = V_B \quad \Rightarrow \quad C(V_B) = 1$$
$$V \to \infty \quad \Rightarrow \quad C(V) \to 0$$

Ved å bruke det andre randkravet ser vi at uttrykket (2.9) for $C(V)$ umiddelbart gir oss at $C_1 = 0$, ettersom $V \to \infty$ ville medføre $C(V) \to \infty$ dersom $C_1 \neq 0$. Hvis C_1 hadde vært ulik 0, ville verdien av kravet $p_B(V)$ ikke gått mot 0 når V går mot positivt uendelig.

Vi bruker deretter det første randkravet, som lar oss bestemme konstanten C_2:

$$1 = C_2 V_B^{-X} \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = V_B^X$$

Altså vil et slikt krav uttrykkes ved:

$$p_B(V) = C(V) = \left[\frac{V}{V_B}\right]^{-X} \tag{2.10}$$

Vi bruker dette til å omformulere uttrykket for verdien av gjelden (2.8):

$$D(V) = [1 - p_B(V)]\left(\frac{C}{r}\right) + p_B(V)[(1-\alpha)V_B]$$

Vi ser på det første leddet fra dette uttrykket. $\left(\frac{C}{r}\right)$ representerer at långiverne mottar kupong i all fremtid med full sikkerhet. $p_B(V)\frac{C}{r}$ uttrykker at man mister strømmen av kuponger C en gang i fremtiden "diskontert" ned med tilstandsprisen $p_B(V)$. Verdien av å motta kupong frem til en eventuell konkurs vil følgelig være $[1-p_B(V)]\left(\frac{C}{r}\right)$. Faktoren $[1-p_B(V)]$ uttrykker usikkerhet om at selskapet kan gå konkurs. En $p_B(V)$ like oppunder 1 uttrykker at V er faretruende nær konkursbarrieren V_B, det er stor konkursfare, og verdien av leddet blir liten. En lav $p_B(V)$ signaliserer at V er betydelig større enn V_B, det er liten konkursfare, og verdien av leddet er nærmere $\left(\frac{C}{r}\right)$ enn ved en høy $p_B(V)$.

Det andre leddet sier noe om verdien av gjelden ved konkurs, justert for tilstandsprisen for å gå konkurs. Ved konkurs vil kreditorene motta V_B justert for konkurskostnader. En $p_B(V)$ like oppunder 1 uttrykker at V er litt større enn V_B, det er stor konkursfare, og verdien av leddet blir stor. En lav $p_B(V)$ signaliserer at V er betydelig større enn V_B, det er da lav konkursfare, og dermed vil verdien av dette andre leddet bli liten.

Ved å benytte Maple kan vi enkelt undersøke egenskaper knyttet til gjeldsverdien (2.8). Ved å derivere uttrykket for gjeldsverdien med hensyn til de ulike variablene finner vi følgende egenskaper for $D(V)$:

- Stigende med kupongen C
- Synkende i parametrene; selskapets risiko σ^2, konkurskostnadene α.
- Uavhengig av skattesatsen τ

For den risikofrie renten r finner vi ingen entydig sammenheng for utvikling av gjeldsverdi ved endring i risikofri rente.

Vi ønsker også å se nærmere på hvordan gjeldsverdien (2.8) varierer med V. Her vil det være aktuelt å undersøke nærmere stigningstall og konveksitet. Vi deriverer $D(V)$:

$$\frac{dD(V)}{dV} = -X\frac{1}{V}\left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

Uten å vite størrelse på faktoren $(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}$ kan vi ikke bestemme fortegnet for den deriverte av $D(V)$ med hensyn til V.

Vi vet imidlertid ikke hvordan endringen i $D(V)$ endrer seg når V endrer seg. Til å analysere dette trenger vi den annenderiverte:

$$\frac{d^2D(V)}{dV^2} = X(X+1)\frac{1}{V^2}\left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

Uten å vite størrelse på faktoren $(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}$ kan vi ikke bestemme fortegnet for den annenderiverte av D med hensyn til V.

Vi kommer altså tilbake til gjeldsverdien senere når V_B blir endogent bestemt, slik at fortegnet på faktoren $(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}$ kan bestemmes.

2.5 – Totalverdi og dekomponering av totalverdi av selskapet

Vi ønsker å finne et uttrykk for totalverdien av selskapet, $v(V)$. Her vil vi vise at totalverdien av selskapet $v(V)$, generelt er forskjellig fra verdien av selskapets aktiviteter V.

Fremgangsmåten for å bestemme totalverdien tar utgangspunkt i at gjeldsopptak påvirker totalverdi av selskapet på to måter. For det første medfører gjeldsopptak at det kan oppstå konkurskostnader. Dette vil isolert sett redusere totalverdien av selskapet. Forklaringen på dette er at konkurskostnadsraten α representerer et effektivitetstap. For det andre vil gjeldsopptak ha den konsekvens at man får en skattefordel ved at man trekker renter på gjelden fra på skatten. Dette vil isolert sett øke totalverdien av selskapet. Siden begge effektene avhenger av selskapets aktiviteter V, og ikke er avhengig av tiden, kan effektene prises med utgangspunkt i likning (2.4).

Vi vil her først se nærmere på hver av disse effektene hver for seg, og deretter vil vi kombinere disse samt verdien av selskapets aktiviteter V til å finne ett uttrykk for totalverdien av selskapet.

2.5.1 – Konkurskostnader

Vi ønsker å undersøke effekten av konkurskostnadene på totalverdien av selskapet. Her designes et krav $BC(V)$ som gir oss utbetalingen αV_B ved konkurs og ingen utbetaling hvis konkurs ikke inntreffer. Med utgangspunkt i forutsetningen om tidsuavhengighet kan vi uttrykke konkurskostnader $BC(V)$ på formen:

$$BC(V) = \frac{bc_0}{r} + BC_1 V + BC_2 V^{-X} \tag{2.11}$$

Så lenge selskapet er solvent, vil ikke kravet $BC(V)$ betale ut noen kontantstrøm. Av den grunn vil konstanten $bc_0 = 0$.

Ved å benytte oss av randkravene som $BC(V)$ må tilfredsstille, kan vi bestemme verdien på konstantene BC_1 og BC_2. Når verdien av selskapet V faller ned på konkursbarrieren V_B, vil verdien av kravet være lik konkurskostnadene αV_B. Når verdien V blir tilstrekkelig stor, vil sannsynligheten for å gå konkurs bli neglisjerbar, og følgelig vil verdien av kravet om å få mulige konkurskostnader gå mot null. Det gir følgende randbetingelser:

$$V = V_B \qquad \Rightarrow \qquad BC(V_B) = \alpha V_B$$
$$V \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad BC(V) \to 0$$

Vi ser først på randbetingelse nummer 2. Vi må ha at $BC_1 = 0$ for at kravet $BC(V) \to 0$ når verdien av selskapets aktiviteter $V \to \infty$.

Ut fra randbetingelse 1 vil derfor konstanten BC_2 måtte tilfredsstille:

$$\alpha V_B = BC_2 V_B^{-X} \qquad \Rightarrow \qquad BC_2 = \alpha V_B^{X+1}$$

Innsatt i uttrykket $BC(V)$ fra (2.12):

$$BC(V) = \alpha V_B^{X+1} V^{-X} = \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-X} \tag{2.12}$$

Ved å sette inn for uttrykket $p_B(V) = \left[\frac{V}{V_B} \right]^{-X}$, kan vi skrive om (2.12) til:

$$BC(V) = p_B(V)[\alpha V_B]$$

Verdien av $BC(V)$ kan altså tolkes som kontantstrømmen ved konkurs (konkurskostnadene) multiplisert med tilstandsprisen for framtidig konkursutfall.

Vi ser lett at kravet $BC(V)$ uttrykt ved (2.12) har følgende egenskaper:

- Stigende i parametrene; selskapets risiko σ^2 (når $V > V_B$) og konkurskostnadene α .
- Synkende i risikofri rente r (når $V > V_B$).
- Uavhengig av skattesatsen τ og kupongen C

Vi ønsker også å se nærmere på hvordan verdien på kravet $BC(V)$ fra (2.12) varierer med V . På den måten kan vi avgjøre hvilken effekt konkurskostnadene har på totalverdien av selskapet ved endring i V . Vi deriverer $BC(V)$:

$$\frac{dBC(V)}{dV} = -X\alpha \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-X-1} < 0$$

Vi ser at den deriverte av $BC(V)$ med hensyn til V alltid vil være negativ for alle $X, \alpha > 0$. Dette betyr at verdien av $BC(V)$ synker når V øker, noe som er intuitivt ettersom høyere V reduserer faren for konkurs.

Videre ønsker vi å studere hvordan vekstfaten til $BC(V)$ endrer seg når V endrer seg. Til å analysere dette trenger vi den annenderiverte:

$$\frac{d^2 BC(V)}{dV^2} = X(X+1)\alpha \frac{1}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X-1} > 0$$

Vi ser at den annenderiverte av $BC(V)$ med hensyn til V alltid vil være positiv for alle $X, \alpha > 0$. Dette betyr at $BC(V)$ er en strengt konveks funksjon av V. Ved en gitt økning i V vil altså $BC(V)$ synke mer ved lav utgangsverdi V enn ved en høy utgangsverdi V. Intuitivt kan dette forstås med at når V er like over V_B, vil en liten økning i V ha relativt stor betydning for muligheten for en eventuell utbetaling av konkurskostnader fordi man i utgangspunktet er så nært konkursnivået. Når V er betydelig større enn V_B, vil en liten økning i V ha relativt liten betydning for muligheten til at det kan bli en eventuell utbetaling av konkurskostnader fordi man i utgangspunktet ligger godt utenfor konkursfare.

2.5.2 – Skattefordel

Videre ønsker vi å analysere verdien av skattefordelen $TB(V)$ ved utstedelse av gjeld. Skattefordelen kan sees på som et krav som betaler ut kontantstrømmen τC så lenge firmaet er solvent, og betaler ingenting ved konkurs. Gitt forutsetningen om tidsuavhengighet, må løsningen være på formen:

$$TB(V) = \frac{tb_0}{r} + TB_1 V + TB_2 V^{-X} \tag{2.13}$$

Kravet betaler kontantstrømmen τC på ethvert tidspunkt så lenge selskapet er solvent. Basert på dette kan vi konkludere med at $tb_0 = \tau C$.

Konstantene TB_1 og TB_2 bestemmes av randbetingelser. Når selskapet går konkurs, faller skattefordelen bort – dette er den første randbetingelsen. Den andre randbetingelsen kommer av at når konkurs blir mindre sannsynlig, må verdien av skattefordelen kunne sees som en uendelig kontantstrøm av τC. Vi setter opp randbetingelsene:

$$V = V_B \qquad \Rightarrow \qquad TB(V_B) = 0$$

$$V \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad TB(V) \to \frac{\tau C}{r}$$

Vi ser først på randbetingelse nummer 2. Når $V \to \infty$, får vi to effekter. Leddet $TB_1 V \to \infty$ og $TB_2 V^{-X} \to 0$ ettersom $X > 0$. Siden uttrykket skal gå mot $\frac{\tau C}{r}$ og dessuten $tb_0 = \tau C$ er en konstant, ser vi lett at $TB_1 = 0$.

Dermed kan vi bruke randbetingelse nummer 1 til å finne TB_2:

$$0 = \frac{\tau C}{r} + TB_2 V_B^{-X} \qquad \Rightarrow \qquad TB_2 = -\frac{\tau C}{r} V_B^{X}$$

Vi setter nå inn i $TB(V)$ fra (2.13) og får:

$$TB(V) = \frac{\tau C}{r} - \frac{\tau C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} \tag{2.14}$$

Vi ønsker her å omskrive utrykket (2.14) for lettere å kunne tolke det. Ved å bruke uttrykket for $p_B(V) = \left[\frac{V}{V_B}\right]^{-X}$, kan vi skrive om $TB(V)$ til:

$$TB(V) = \frac{\tau C}{r}\left[1 - p_B(V)\right]$$

For å tolke uttrykket for skattefordelen kan vi se nærmere på de to leddene hver for seg. Leddet $\frac{\tau C}{r}$ representerer at selskapet mottar skattefordelen av utstede gjeld τC i all framtid med full sikkerhet. Tilsvarende uttrykker $p_B(V)\frac{\tau C}{r}$ at selskapet mister kontantstrømmen τC en gang i fremtiden "diskontert" med tilstandsprisen $p_B(V)$. Verdien av å motta skattefordelen frem til en eventuell konkurs vil følgelig være $\left[1 - p_B(V)\right]\left(\frac{\tau C}{r}\right)$.

Vi ser lett at skattefordelen $TB(V)$ uttrykt ved (2.14) har følgende egenskaper:

- Stigende med kupongen C og skattesatsen τ.
- Synkende i selskapets risiko σ^2,
- Uavhengig av konkurskostnadene α.

Vurdering av hvordan $TB(V)$ vil variere med den risikofrie renten r vil avhenge av valget av de andre parametrene som inngår i uttrykket for $TB(V)$. Vi ønsker videre å se nærmere på hvordan skattefordelen varierer med V. Dette vil være interessant for å kunne avgjøre hvilken effekt konkurskostnadene har på totalverdien av selskapet ved endring i V. Vi deriverer $TB(V)$:

$$\frac{dTB(V)}{dV} = \frac{\tau C}{r} X \frac{1}{V}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} > 0$$

Vi ser at den deriverte av $TB(V)$ med hensyn til V alltid vil være positiv for alle X, τ, r, C > 0. Dette betyr at verdien av $TB(V)$ øker når V øker, noe som er intuitivt ettersom høyere V øker sannsynligheten for fremtidig kupongutbetaling.

For å studere hvordan vekstfarten til $TB(V)$ endrer seg når V endrer seg, benytter vi den annenderiverte:

$$\frac{d^2TB(V)}{dV^2} = -\frac{\tau C}{r} X(X+1)\frac{1}{V^2}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} < 0$$

Vi ser at den annenderiverte av $TB(V)$ med hensyn til V alltid vil være negativ for alle $X, \tau, r, \alpha > 0$. Dette betyr at $TB(V)$ er en strengt konkav funksjon av V. Ved en gitt økning i V vil altså $TB(V)$ stige mer ved lav utgangsverdi V enn ved en høy utgangsverdi V. Intuitivt kan dette forstås med at når V er like over V_B, vil en liten økning i V ha relativt stor betydning for muligheten for fortsatt å kunne nyte godt av skattefordelene fordi man i utgangspunktet er så nært konkursnivået. Når V er betydelig større enn V_B, vil en liten økning i V ha relativt liten betydning for muligheten til fortsatt å kunne nyte godt av skattefordelene fordi man i utgangspunktet ligger godt utenfor konkursfare.

Det antas her at skattefordelen kan utnyttes fullt ut så lenge selskapet er solvent. Her må bedriftens driftsresultat, EBIT, være større enn eller lik kupongen. Hvis EBIT er lavere enn kupongen, blir ikke skattefordelen utnyttet fullt ut. Det finnes regler om fremførbart underskudd, men disse vil likevel ikke gi full utnyttelse av skattefordelen da det oppstår et rentetap grunnet ”time value of money”. Det er forøvrig begrensninger knyttet til hvor lange tidsperioder man kan fremføre underskudd.

2.5.3 – Totalverdi av selskapet

Som følge av at selskapet har utstedt gjeld, vil den totale verdien $v(V)$ av selskapet bestå av tre komponenter: Verdien av selskapets aktiviteter V, pluss skattefordelene $TB(V)$, minus konkurskostnadene $BC(V)$. Vi beregner:

$$
\begin{aligned}
v(V) &= V + TB(V) - BC(V) \\
&= V + \frac{\tau C}{r} - \frac{\tau C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}
\end{aligned}
$$

Dermed får vi uttrykket for totalverdi:

$$
v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left(1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right) - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} \tag{2.15}
$$

Vi ønsker her å tolke dette uttrykket (2.15). Fra før har vi at $p_B(V) = \left[\frac{V}{V_B}\right]^{-X}$, som vi setter inn, og vi får da:

$$
v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left(1 - p_B(V)\right) - \alpha V_B p_B(V)
$$

Totalverdien av selskapet kan da tolkes som en sum av tre ledd. Det første er verdien av selskapets aktiviteter V. Det andre leddet er knyttet til kravet på verdien av skattefordelen, mens det tredje har sammenheng med kravet på verdi av konkurskostnadene. For tolkning av verdi av skattefordel og verdi av konkurskostnader henvises leseren til henholdsvis kapittel 2.5.2 og 2.5.1.

Vi finner følgende egenskaper knyttet til totalverdien $v(V)$:

- Stigende med kupongen C og skattesatsen τ
- Synkende i selskapets risiko σ^2 og konkurskostnadene α.

For den risikofrie renten r finner vi ingen entydig sammenheng for utvikling av totalverdi ved endring i risikofri rente.

Vi ønsker også å se nærmere på hvordan totalverdien varierer med V. Det vil være aktuelt å undersøke stigningstall og konveksitet. Vi deriverer $v(V)$:

$$\frac{dv(V)}{dV} = 1 + \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} X \frac{1}{V}\left[\frac{\tau C}{r} + \alpha V_B\right] > 0$$

Vi ser at den deriverte av $v(V)$ med hensyn til V alltid vil være positiv for alle $X, \tau, r, C, \alpha > 0$. Dette betyr at verdien av $v(V)$ øker når V øker, noe som er intuitivt ettersom høyere V øker verdien av selskapets aktiviteter, øker skattefordelen og reduserer verdien av konkurskostnadene.

Videre ønsker vi å undersøke hvordan vekstfarten til $v(V)$ endrer seg når V endrer seg. Til å analysere dette trenger vi den annenderiverte:

$$\frac{d^2 v(V)}{dV^2} = -X(X+1)\frac{1}{V^2}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\left[\frac{\tau C}{r} + \alpha V_B\right]$$

For å være konkav må $X > 0$ samtidig som minst en av to følgende betingelser være oppfylt:

- $\tau, C, r > 0$

- $\alpha > 0$

Dette betyr at $v(V)$ er en strengt konkav funksjon av V. Ved en gitt økning i V vil altså $v(V)$ stige mer ved lav utgangsverdi V enn ved en høy utgangsverdi V. Intuitivt virker dette rimelig da ved gitt lav utgangsverdi av V like over V_B, vil en marginal økning i V medføre relativt store positive endringer i skattefordelen og relativ stor reduksjon i verdien av konkurskostnadene. Ved en høy utgangsverdi av V langt over V_B, vil en marginal økning i V medføre relativt liten positiv endring i skattefordel og relativt liten reduksjon i verdien av konkurskostnadene.

Vi ønsker nå å studere størrelsen på $v(V)$ i forhold til V. Dette er interessant fordi det viser hvordan gjeldsopptak påvirker totalverdien av selskapet. Uten gjeld ville nemlig totalverdien av selskapet alltid vært lik V. Ved å innføre konkurskostnader og skattefordeler kan vi altså få at totalverdien av selskapet kan avvike fra verdien av selskapets aktiviteter.

Ved å studere uttrykket $v(V)$ fra (2.14) ser vi at når $\alpha > 0$, $\tau > 0$, så vil $v(V) < V$ når $V \to V_B$.

$$\lim_{V \to V_B} \left[V + \frac{\tau C}{r} \left(1 - \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-X} \right) - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-X} \right] = V_B - \alpha V_B = V_B (1 - \alpha) < V_B$$

Vi ser altså at totalverdien av selskapet $v(V)$ er mindre enn verdien av selskapets aktiviteter V når V nærmer seg konkursbarrieren gitt forutsetningene som er tatt. Intuitivt er dette rimelig fordi ved konkurs vil både skattefordelene med kupong falle bort og det vil oppstå konkurskostnader, som begge vil påvirke totalverdien av selskapet negativt.

Videre ser vi at $v(V)$ blir følgende når $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $V \to \infty$:

$$v(V) = \lim_{V \to \infty} \left[V + \frac{\tau C}{r} \left(1 - \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-X} \right) - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-X} \right]$$

som gir oss $v(V) > V$ for tilstrekkelig stor V.

Vi ser altså at totalverdien av selskapet blir større enn verdien av selskapets aktiviteter når verdien av selskapet stiger mot uendelig gitt de forutsetninger som er tatt. Intuitivt er dette rimelig fordi når bedriften beveger seg godt over konkursfare, vil skattefordelen ved kupong være betydelig, mens risikoen knyttet til konkurskostnader er ubetydelig.

Vi ser altså, gitt $\alpha > 0$, $\tau > 0$, at $v(V)$ kan være både høyere og lavere enn V avhengig av hvilken størrelse på V man opererer med. Åpenbart må det være et nivå av V som gir at totalverdien av selskapet er lik verdien av selskapets aktiviteter. Vi kan finne dette nivået ved å sette $v(V) = V$:

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left(1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right) - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} = V$$

som ordnes med hensyn på V:

$$\frac{\tau C}{r}\left(1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right) = \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

$$\left[\alpha V_B + \frac{\tau C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} = \frac{\tau C}{r}$$

Videre forenkling gir:

$$\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} = \frac{\tau C}{r}\left[\alpha V_B + \frac{\tau C}{r}\right]^{-1}$$

$$\frac{V}{V_B} = \left[\frac{\frac{\tau C}{r}}{\alpha V_B + \frac{\tau C}{r}}\right]^{-\frac{1}{X}}$$

Vi får nivået til V som gjør at $v(V) = V$ til å bli følgende uttrykk:

$$V_{V=v} = V_B \left[\frac{\tau C}{\alpha r V_B + \tau C} \right]^{-\frac{1}{X}}$$

Vi ser at faktoren $\left[\frac{\tau C}{\alpha r V_B + \tau C} \right]^{-\frac{1}{X}} > 1$, som gir at $V_{V=v} > V_B$, for $\alpha, r > 0$. Dette nivået $V_{V=v}$ må altså være større enn V_B, noe som virker rimelig da vi tidligere har funnet at $v(V) < V$ når konkurs inntreffer for gitte forutsetninger.

Verdien $V_{V=v}$ uttrykker det nivået på verdien av selskapets aktiviteter hvor skattefordelen er like stor som konkurskostnadene.

Vi ser imidlertid her at når α og/eller r går mot 0, vil dette nivået $V_{V=v}$ være tilnærmet lik konkursbarrieren V_B. Når α går mot 0, kan dette forklares med at da får vi ingen konkurskostnader og kun den positive skattefordelen. Det er dermed klart at totalverdien av selskapet alltid vil være større enn verdien av selskapets aktiviteter så lenge selskapet er solvent. Når r går mot 0, vil effekten av skattefordelen bli positivt uendelig stor, og denne effekten vil overskygge effekten av konkurskostnadene. Dermed vil totalverdien av selskapet alltid være større enn verdien av selskapets aktiviteter så lenge selskapet er solvent. Når både α og r går mot 0, vil det ikke være konkurskostnader og skattefordelene blir uendelig store, slik at åpenbart vil totalverdien av selskapet bli større enn verdien av selskapets aktiviteter.

En annen observasjon vi kan gjøre her, er at variabelen v er proporsjonalt mer volatil enn V for lave verdier av V. Forklaringen på dette er at vi i tilfellet med lave verdier for V har at $v(V) < V$ og at $v(V)$ er en strengt konkav funksjon av V. Intuitivt kan denne forskjellen i volatilitet forklares med at for lave verdier av V, vil $v(V)$ ha en mer usikker utvikling i sin verdi fordi skattefordelen blir usikker og fordi konkurskostnadene blir mer aktuelle. Verdien av selskapets aktiviteter V vil ikke bli påvirket av usikkerhet knyttet til hverken skattefordeler eller konkurskostnader.

Tilsvarende ser vi at variabelen $v(V)$ er proporsjonalt mindre volatil enn V for høye verdier av V. Her er forklaringen at vi har her at $v(V) > V$ og at v er en strengt konkav funksjon av

V . Intuitivt kan volatilitetsforskjellen forklares med at for høye verdier av V , vil $v(V)$ ha en mer sikker utvikling i sin verdi da den mottar en sikker skattefordel, mens verdien av selskapets aktiviteter V ikke får noen slik skattefordel. Konkurskostnadene er ikke relevante for slike høye verdier av V .

2.6 – Verdi av egenkapital

Gitt at vi forutsetter at kapitalstrukturen består av utelukkende egenkapital og gjeld, må verdien av egenkapitalen kunne beregnes som totalverdi av selskapet fratrukket gjeldsverdien. Dersom dette ikke var tilfellet, ville arbitrasjemuligheter oppstått. Følgelig er egenkapitalen bestemt som:

$$\begin{aligned}
E(V) &= v(V) - D(V) \\
&= V + \frac{\tau C}{r}\left(1-\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right) - \alpha V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} - \left[\frac{C}{r} + \left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left[\frac{V}{V_B}\right]^{-X}\right] \\
&= V + \frac{\tau C}{r} - \frac{\tau C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} - \frac{C}{r} - V_B\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} + \frac{C}{r}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}
\end{aligned}$$

Dette gir uttrykket for verdi av egenkapitalen:

$$E(V) = V - \frac{C}{r}(1-\tau) + \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} \tag{2.16}$$

For å tolke uttrykket, setter vi nå $p_B(V) = \left[\frac{V}{V_B}\right]^{-X}$, og får følgende:

$$E(V) = V - \frac{C}{r}(1-\tau) + p_B\left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right]$$

Vi kan formulere $E(V)$ bestående av tre komponenter. Det første leddet V medfører at aksjonærene i utgangspunktet mottar verdien av selskapets aktiviteter. Det andre leddet $\frac{C}{r}(1-\tau)$ sier at $E(V)$ reduseres med kupongutbetaling etter skatt i all framtid. Dette er rimelig siden aksjonærene ved opptak av gjeld har forpliktelser overfor kreditorene. Det tredje leddet $p_B(V)\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]$ antyder verdien for aksjonærer i tilfelle konkurs multiplisert med tilstandsprisen for at konkurs inntreffer. Vi kan si at denne verdien uttrykker verdien i dag for aksjonærene i tilfelle konkurs inntreffer. Ved konkurs vil verdien for aksjonærene være at de blir frigitt fra sine forpliktelser overfor kreditorene, men til gjengjeld må de gi fra seg V_B.

Fra uttrykket for egenkapitalverdien (2.16) ser vi lett at den har følgende egenskaper:

- Synkende med kupongen C
- Stigende i parametrene; skattesats τ, selskapets risiko σ^2.
- Uavhengig av verdien av konkurskostnadene α.

For den risikofrie renten r finner vi ingen entydig sammenheng for utvikling av egenkapitalverdi ved endring i risikofri rente.

Vi ønsker å se nærmere på hvordan egenkapitalverdien varierer med V. Resultatene fra disse beregningene vil komme til nytte under analysen av optimal konkursbarriere. Vi deriverer $E(V)$:

$$\frac{dE(V)}{dV}=1-X\frac{1}{V}\left[(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

Uten å vite størrelse på faktoren $(1-\tau)\frac{C}{r}-V_B$ kan vi ikke bestemme fortegnet for den deriverte av $E(V)$ med hensyn til V. Vi kommer tilbake til dette når vi ser nærmere på endogent konkursnivå, det vil si når V_B ikke lenger er eksogent gitt.

Det neste steget blir å analysere konveksiteten til $E(V)$. Til å studere dette trenger vi den annenderiverte:

$$\frac{d^2E(V)}{dV^2} = X(X+1)\frac{1}{V^2}\left[(1-\tau)\frac{c}{r} - V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

Gitt at $(1-\tau)\frac{c}{r} - V_B$ > 0, har vi at $\frac{d^2E(V)}{dV^2}$ > 0, det vil si at egenkapitalen er en konveks funksjon av V. Dette støtter opp under at vi kan se på egenkapitalen som en callopsjon, jamfør Black og Scholes (1973).

En callopsjon er en kontrakt som på et framtidig tidspunkt gir innehaver rett, men ikke plikt, til å kjøpe ett underliggende aktivum med pris S for en forhåndsavtalt pris K. Denne retten kan uttrykkes matematisk ved $\max(S_T - K, 0)$ på utløsningstidspunktet. At en callopsjon må være konveks, er rimelig fordi den alltid må ha en verdi som er større enn en funksjon på formen $\max(S_T - K, 0)$, som gjelder for alle verdier av $S_T > 0$.

Tilsvarende kan vi betrakte egenkapitalen, som gir aksjonærene rett, men ikke plikt, til en gevinst på selskapet når verdien av selskapet S_T er større enn kreditorenes krav K. Aksjonærene har således en begrenset nedside fordi når S_T er mindre enn kreditorenes krav K, kan de velge å la selskapet gå konkurs.

2.7 - Endogent bestemt konkurs

Foreløpig har vi antatt at konkursbarrieren V_B er eksogent gitt. En eksogent gitt V_B vil generelt ikke maksimere totalverdien av selskapet. Dette kan vi undersøke nærmere ved å derivere totalverdien av selskapet v med hensyn til V_B; vi ønsker å se hvilke valg av V_B som maksimerer totalverdien $v(V)$.

$$\frac{\partial v(V)}{\partial V_B} = -\frac{\tau C}{r} X \frac{1}{V_B}\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x} - (X+1)\alpha\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} < 0$$

For $\tau, \alpha, X > 0$ har vi altså at $\frac{\partial v(V)}{\partial V_B}$< 0, det vil si at jo lavere man velger V_B, desto større blir totalverdien av selskapet v. Når V beveger seg ned mot V_B oppstår det konkurskostnader og redusert verdi av skattefordeler, og da er det intuitivt rimelig at lav V_B øker totalverdien av selskapet. Ved lav V_B vil det sjeldnere oppstå konkurs enn ved høy V_B. Vi har altså sett at for selskapet som helhet er det ønskelig med lavest mulig V_B.

Imidlertid er det slik at aksjonærene har begrenset nedside, det vil si at V_B ikke kan være arbitrært liten – fordi aksjonærene vil slå selskapet konkurs når egenkapitalverdien er 0. Vi ønsker her å finne fram til nivået på konkursbarrieren V_B hvor aksjonærene vil velge å slå selskapet konkurs. Vi har sett at $E(V)$ er strengt konveks i V når $V_B < (1-\tau)\frac{C}{r}$. Men betingelsen at $E(V)$ er konveks vil isolert sett ikke kunne forhindre at vi vil kunne få negative verdier for $E(V)$. Problemet med negative verdier for $E(V)$ inntreffer når $\left.\frac{dE}{dV}\right|_{V=V_B} < 0$. Da vil $E(V)$ bli negativ for noen $V \geq V_B$. Vi trenger altså minst en betingelse til for å sikre positive verdier av $E(V)$ for alle $V > V_B$. Da kan vi bruke ett argument som er vanlig i litteraturen, en såkalt smooth-pasting betingelse, som sikrer ikke-negativ egenkapitalverdi for alle $V \geq V_B$. Betingelsen er: $\left.\frac{dE}{dV}\right|_{V=V_B} = 0$. Ved å bruke både smooth-pasting betingelsen og konveksitetsegenskapen, kan vi altså finne fram til nivået på konkursbarrieren V_B hvor aksjonærene vil slå selskapet konkurs.

Vi ser altså at det vil være aksjonærene som vil begrense nivået på V_B på grunn av aksjonærenes begrensede nedside; det vil med andre ord ikke bli foretatt en begrensning av konkursnivået med utgangspunkt i totalverdien av selskapet.

Vi ønsker nå å beregne nivået på konkursbarrieren V_B ut ifra kriteriet $\left.\frac{dE}{dV}\right|_{V=V_B} = 0$.

Vi deriverer først med hensyn på V:

$$\frac{dE(V)}{dV} = 1 - X\frac{1}{V}\left[(1-\tau)\frac{c}{r} - V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

Vi setter nå inn $V = V_B$ og setter utrykket lik null:

$$\left.\frac{dE}{dV}\right|_{V=V_B} = 1 - X\frac{1}{V_B}\left[(1-\tau)\frac{c}{r} - V_B\right]\left(\frac{V_B}{V_B}\right)^{-X} = 0$$

og får:

$$1 - X\frac{1}{V_B}\left[(1-\tau)\frac{c}{r} - V_B\right] = 0$$

Vi løser dette med hensyn til V_B:

$$V_B = \frac{(1-\tau)C}{r}\frac{X}{1+X} = \frac{(1-\tau)C}{r}\frac{\frac{2r}{\sigma^2}}{1+\frac{2r}{\sigma^2}} = \frac{(1-\tau)C}{\frac{1}{2}\sigma^2 + r} \qquad (2.17)$$

Vi observerer at $V_B = \dfrac{(1-\tau)C}{\frac{1}{2}\sigma^2 + r} < \dfrac{(1-\tau)C}{r}$. Vi ser altså at V_B er mindre enn det vi forutsatte for å kunne si at egenkapitalen er konveks. Vi har altså at den annenderiverte av egenkapitalen med hensyn til V er positiv, slik at egenkapitalen er konveks i V.

Vi observerer videre at konkursbarrieren V_B uttrykt ved (2.17) har følgende egenskaper:

1. Proporsjonal med kupongen C
2. Synkende i parametrene; skattesats τ, selskapets risiko σ^2.
3. Uavhengig av verdien av konkurskostnadene α.
4. Synkende i risikofri rente r.
5. Uavhengig av verdien av selskapets aktiviteter V.

Det kan enkelt sees at de tre første egenskapene kan forklares ut fra hvordan egenkapitalverdien (2.16) oppfører seg med hensyn til de samme parametrene. Egenskap 4 er begrunnet i Leland (1994). Den siste egenskapen er litt vanskeligere å se. At V_B er uavhengig av V , kan forklares med betingelsen $\left.\frac{dE}{dV}\right|_{V=V_B} = 0$. Vi beregner V_B med utgangspunkt i at en endring i V ikke skal medføre noen endring i egenkapitalverdien.

Vi ønsker her å vise hvordan endring i hver enkelt parameter for V_B vil slå ut i $v(V_B)$. Vi tar utgangspunkt i følgende likning fra (2.15):

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left(1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right) - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

Vi setter inn for $V = V_B$ og får:

$$v(V_B) = V_B + \frac{\tau C}{r}\left(1 - \left(\frac{V_B}{V_B}\right)^{-X}\right) - \alpha V_B \left(\frac{V_B}{V_B}\right)^{-X}$$
$$= V_B - \alpha V_B$$

som kan forkortes til:

$$v(V_B) = (1 - \alpha)V_B$$

Vi ser at $v(V_B)$ oppfyller egenskap 1, 2, 4 og 5 spesifisert ovenfor for V_B. Imidlertid gjelder ikke egenskap 3 for $v(V)$, fordi $v(V_B)$ påvirkes av endring i konkurskostnadene α. Dette skyldes at ved konkurs er totalverdien av selskapet v kritisk avhengig av hvor store konkurskostnadene blir.

I det følgende ønsker vi å modifisere uttrykkene vi allerede har for gjeldsverdien $D(V)$, totalverdien $v(V)$ og egenkapitalverdien $E(V)$ ved å benytte at vi har funnet fram til ett uttrykk for den endogene konkursbarrieren. Formålet er å prise gjelden, det totale selskapet og egenkapitalen gitt en spesifikasjon for i hvilken situasjon aksjonærene vil slå selskapet konkurs – her unngår vi den tidligere ulempen knyttet til en eksogent gitt V_B.

2.7.1 – Verdi av gjeld ved endogen konkursbarriere

Først tar vi utgangspunkt i formuleringen av gjeldsverdien med eksogen konkursbarriere og setter inn for V_B uttrykt ved likning (2.17).

Vi beregner:

$$D(V) = \frac{C}{r} + \left[(1-\alpha)V_B - \frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X} = \frac{C}{r} + \left[(1-\alpha)(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{1+X} - \frac{C}{r}\right]\left(\frac{V}{(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{1+X}}\right)^{-X}$$

$$= \frac{C}{r}\left[1 + \left((1-\alpha)(1-\tau)\frac{X}{X+1} - 1\right)\left(\frac{V}{(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{X+1}}\right)^{-X}\right]$$

Faktorisering gir da:

$$D(V) = \frac{C}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{X}\left(1-(1-\alpha)(1-\tau)\frac{X}{X+1}\right)\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}\right]$$

$$= \frac{C}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{X}(1+X-(1-\alpha)(1-\tau)X)\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}\frac{1}{X+1}\right]$$

som gir oss uttrykket for gjeldsverdien med endogen konkursbarriere:

$$D(V) = \frac{C}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{X} k\right] \tag{2.18}$$

hvor vi for enkelhets skyld har definert:

$$k = (1+X-(1-\alpha)(1-\tau)X)m > 0$$

$$m = \left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}\frac{1}{X+1} > 0$$

Vi ser at vi kan tolke verdien av gjelden $D(V)$ fra (2.18) som en sum av to komponenter. Den første komponenten $\frac{C}{r}$ uttrykker verdien av å få kupong C i all framtid med full sikkerhet. Det andre leddet $\frac{C}{r}\left(\frac{C}{V}\right)^X k$ er et uttrykk for redusert verdi knyttet til risiko for at man kan miste kupong ved konkurs. Grunntallet $\left(\frac{C}{V}\right)$ sier noe om forholdet mellom kupong og verdien av selskapets aktiviteter. I tilfeller hvor kupongen C er høy i forhold til verdien V, vil man oppleve en situasjon med betydelig konkursfare, og risikojusteringen av gjelden vil dermed bli forholdsvis stor. I tilfeller hvor kupongen C er lav i forhold til verdien V, vil man oppleve en situasjon med mindre konkursfare, og risikojusteringen av gjelden vil dermed bli forholdsvis liten.

Ettersom (1) vi har funnet verdien av gjelden $D(V)$, (2) kupongen C er kjent, og (3) gjelden har uendelig horisont, kan vi beregne rentesatsen R som må betales på den risikofylte gjelden ut fra den velkjente sammenhengen $D(V) = \frac{C}{R\left(\frac{C}{V}\right)}$. Dette gir oss:

$$R\left(\frac{C}{V}\right) = \frac{C}{D(V)} = \frac{C}{\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^X k\right]} = \frac{r}{\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^X k\right]} = r\frac{1}{\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^X k\right]}$$

Følgelig kan vi skrive rentesatsen som:

$$R\left(\frac{C}{V}\right) = rK\left(\frac{C}{V}\right) \tag{2.19}$$

hvor $K\left(\frac{C}{V}\right) = \frac{1}{\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^X k\right]}$

Rentesatsen R avhenger altså positivt av forholdet mellom kupongen C og verdien av selskapets aktiviteter V.

$K\left(\frac{C}{V}\right)$ kan tolkes som en risikojusterende faktor som kompenserer kreditorene for risikoen som gjeld i selskapet innebærer i forhold til risikofri rente. Jo større $K\left(\frac{C}{V}\right)$ er, desto større blir risikopåslaget på renten på den risikofylte gjelden. Høy kupong C relativt til V, som medfører betydelig konkursfare (jamfør diskusjon ovenfor), vil her måtte kompenseres med høyt risikopåslag på renten på den risikofylte gjelden. Tilsvarende vil lav kupong C relativt til V, som medfører mindre konkursfare, kreve forholdsvis lavt risikopåslag på den risikofylte gjelden.

Vi er også interessert i yield spread, det vil si en additiv risikojustering som kompenserer kreditorene for risikoen som gjeld i selskapet innebærer i forhold til risikofri rente. Denne kan beregnes slik:

$$R\left(\frac{C}{V}\right)-r=r\frac{1}{\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X}k\right]}-r$$

$$=r\left[\frac{1}{1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X}k}-1\right]=r\left[\frac{1-1+\left(\frac{C}{V}\right)^{X}k}{1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X}k}\right]$$

Vi får følgende uttrykk:

$$R\left(\frac{C}{V}\right)-r=r\left(\frac{C}{V}\right)^{X}k\left[\frac{1}{1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X}k}\right] \tag{2.20}$$

Vi ser at yield spreaden stiger med $\frac{C}{V}$. Dette er rimelig da vi allerede har sett at den risikofylte renten $R\left(\frac{C}{V}\right)$ stiger med $\frac{C}{V}$, og vi har antatt at renten r er en konstant. Som for diskusjonen angående risikojusterende faktor, vil en høy (lav) kupong C i forhold til V, medføre betydelig (mindre) konkursfare, og dermed kreve forholdsvis høyt (lavt) additivt risikopåslag på renten på den risikofylte gjelden.

Det kan kommenteres at verdiene ovenfor er beregnet for arbitrære valg av kupongen C. Vi vil senere komme tilbake til optimale valg av kupongen C.

2.7.2 – Totalverdi av selskapet ved endogen konkursbarriere

På tilsvarende måte som for gjeldsverdien kan vi ta utgangspunkt i likningen for totalverdien med eksogen konkursbarriere og setter inn for V_B fra likning (2.17).

Vi beregner:

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left[1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}\right] - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

$$= V + \frac{\tau C}{r}\left[1 - \left(\frac{V}{(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{1+X}}\right)^{-X}\right] - \alpha(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{1+X}\left(\frac{V}{(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{1+X}}\right)^{-X}$$

Faktorisering gir:

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left[1 - \left(\frac{V}{(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{1+X}}\right)^{-X} - \alpha(1-\tau)\frac{1}{\tau}\frac{X}{1+X}\left(\frac{V}{(1-\tau)\frac{C}{r}\frac{X}{1+X}}\right)^{-X}\right]$$

$$= V + \frac{\tau C}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{X}\left[\left(\frac{1}{(1-\tau)\frac{1}{r}\frac{X}{1+X}}\right)^{-X} + \alpha(1-\tau)\frac{1}{\tau}\frac{X}{1+X}\left(\frac{1}{(1-\tau)\frac{1}{r}\frac{X}{1+X}}\right)^{-X}\right]\right]$$

Vi ordner om på uttrykket:

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X}\left[\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X} + \alpha(1-\tau)\frac{1}{\tau}\frac{X}{1+X}\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}\right]\right]$$

$$= V + \frac{\tau C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X}\left[\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}\left[1+\alpha(1-\tau)\frac{1}{\tau}\frac{X}{1+X}\right]\right]\right]$$

Videre manipulering gir følgende:

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X}\left[\frac{\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}}{(1+X)}\left[1+X+\alpha(1-\tau)\frac{1}{\tau}X\right]\right]\right]$$

som gir oss:

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X} h\right] \qquad (2.21)$$

hvor vi har:

$$h = \left[1+X+\alpha(1-\tau)\frac{1}{\tau}X\right]m > 0$$

$$m = \frac{\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}}{(1+X)} > 0$$

Totalverdien $v(V)$ fra likning (2.21) kan sees på som en sum av tre komponenter. Den første komponenten V er knyttet til verdien av selskapets aktiviteter, som ville vært selskapets totale verdien dersom gjeld ikke hadde blitt tatt opp. Det andre leddet $\frac{\tau C}{r}$ uttrykker verdien av å motta skattefordelen med full sikkerhet i all framtid. Det tredje leddet $\frac{\tau C}{r}\left(\frac{C}{V}\right)^X h$ kan tolkes som en reduksjon av totalverdien grunnet risiko til å gå konkurs – da kan man tape skattefordelen, og det oppstår konkurskostnader. Tilsvarende som for tolkning av gjeldsverdi, vil forholdet $\left(\frac{C}{V}\right)$ si noe om faren for å gå konkurs. I tilfeller hvor kupongen C er høy (lav) i forhold til verdien V, vil man oppleve en situasjon med betydelig (mindre) konkursfare, og risikojusteringen av totalverdien vil dermed bli forholdsvis stor (liten).

2.7.3 – Verdi av egenkapital ved endogen konkursbarriere

På tilsvarende måte som for gjeldsverdien og totalverdien tar vi utgangspunkt i uttrykket for egenkapitalverdien med eksogen konkursbarriere og setter inn for V_B fra likning (2.17).

Vi beregner:

$$E(V) = V - (1-\tau)\frac{C}{r} + \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - V_B\right]\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-X}$$

$$= V - (1-\tau)\frac{C}{r} + \left[(1-\tau)\frac{C}{r} - \frac{(1-\tau)C}{r}\frac{X}{X+1}\right]\left(\frac{V}{\frac{(1-\tau)C}{r}\frac{X}{X+1}}\right)^{-X}$$

Vi faktoriserer:

$$E(V) = V - (1-\tau)\frac{C}{r}\left[1 - \left(1 - \frac{X}{X+1}\right)V^{-X}\left(\frac{(1-\tau)C}{r}\right)^X\left(\frac{X}{X+1}\right)^X\right]$$

$$= V - (1-\tau)\frac{C}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^X\left(\frac{1+X-X}{X+1}\right)\left(\frac{(1-\tau)}{r}\right)^X\left(\frac{X}{X+1}\right)^X\right]$$

Ordning av uttrykket gir:

$$E(V) = V - (1-\tau)\frac{C}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^X\left(\frac{1}{X+1}\right)\left(\frac{(1-\tau)X}{r(X+1)}\right)^X\right]$$

Dette gir oss uttrykk for egenkapitalverdien:

$$E(V) = V - (1-\tau)\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X} m\right] \tag{2.22}$$

hvor vi har:

$$m = \left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X} \frac{1}{X+1} > 0$$

Egenkapitalverdien $E(V)$ fra likning (2.22) kan tolkes som en sum av tre komponenter. Den første komponenten V er knyttet til verdien av selskapets aktiviteter, som ville tilfalt aksjonærene i tilfellet uten gjeld. Det andre leddet $(1-\tau)\frac{C}{r}$ er kostnaden etter skatt knyttet til å betale kupong i all fremtid, gitt at det er full sikkerhet om at selskapet vil være solvent. Det tredje leddet $(1-\tau)\frac{C}{r}\left(\frac{C}{V}\right)^{X} m$ uttrykker verdien av aksjonærenes rett til å slå selskapet konkurs og på den måten fristilles fra sine forpliktelser overfor kreditorene. Tilsvarende som for tolkning av gjeldsverdi og totalverdi, vil forholdet $\left(\frac{C}{V}\right)$ si noe om faren for å gå konkurs. I tilfeller hvor kupongen C er høy (lav) i forhold til verdien V, vil man oppleve en situasjon med betydelig (mindre) konkursfare, og risikojusteringen av egenkapitalverdien vil dermed bli forholdsvis stor (liten).

Basert på modelloppsettet som er presentert i dette kapittelet, vil vi utføre analyse av modellen i kapittel 3.

Kapittel 3 – Benchmarkmodellen: Analysen

I kapittel 2 har vi redegjort for uttrykk for verdi av gjeld, egenkapital og det totale selskapet, samt beregnet uttrykk for risikojustert rente og yield spread. Her i kapittel 3 ønsker vi først å benytte det etablerte rammeverket til å bestemme optimale verdier for kupong, samt benytte den optimale kupongverdien til å bestemme nye uttrykk for verdi av gjeld, egenkapital og det totale selskapet. Deretter kan benytte de beregnede uttrykkene til å studere optimal kapitalstruktur.

Videre vil vi utføre komparativ statikk. Av hensyn til illustrasjonsformål er det hensiktsmessig å foreta grafiske følsomhetsanalyser av de formuleringene vi kommer fram til. Med slike grafiske følsomhetsanalyser kan vi få innsikt i både hva slags virkning en endring i parameterne har å si for modellen og hvor stor effekt på modellen en slik endring medfører. Det vil bli brukt begrunnede referanseverdier for parametrene som utgangspunkt.

3.1 – Maksimal verdi av gjeld

Først ønsker vi å bestemme hvilket nivå på kupongen som maksimerer verdien av gjeld. Dette kan være interessant for sammenligningsformål, da vi senere skal undersøke hvilken kupong som maksimerer totalverdien av selskapet.

For å finne kupongen som maksimerer gjeldsverdien, tar vi utgangspunkt i formelen for verdien av gjelden $D(V)$ og deriverer den med hensyn til kupongen C. Punktene som tilfredstiller likningen $\frac{\partial D(V)}{\partial C} = 0$ er aktuelle kandidater til å være maksimumspunkt. Samtidig må andreordensbetingelsen være oppfylt. Det vil si at den andrederiverte i det stasjonære punktet må være strengt negativ for å sikre maksimumspunkt.

Den maksimale verdien av gjelden kalles ofte for ”debt capacity” til selskapet. En måte å tolke ”debt capacity” er å se gjelden fra kreditorens ståsted – på den ene siden ønsker kreditoren å motta høyere kupong, mens på den andre siden vil høyere kupong medføre større konkursfare. ”Debt capacity” er altså en optimal avveining mellom verdien av å motta kupong og verdien knyttet til konkursrisiko for kreditorene.

Vi beregner:

$$\frac{\partial D(V)}{\partial C} = \frac{1}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{X} k\right] + \frac{C}{r}\left[-X\left(\frac{C}{V}\right)^{X}\frac{1}{C}k\right] = 0$$

som gir oss:

$$1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{X} k = X\left(\frac{C}{V}\right)^{X} k$$

$$k(1+X)\left(\frac{C}{V}\right)^{X} = 1$$

som kan løses med hensyn til C:

$$C_{\max} = V\left[(1+X)k\right]^{-\frac{1}{X}} \tag{3.1}$$

hvor vi har at:

$$k = \left(1 + X - (1-\alpha)(1-\tau)X\right)m > 0$$

$$m = \frac{\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^{X}}{(1+X)} > 0$$

$C_{\max}$ uttrykker den kupongen som gir maksimal verdi på gjelden. Vi kan tolke $C_{\max}$ som en andel av verdien av selskapets aktiviteter V, hvor faktoren $\left[(1+X)k\right]^{-\frac{1}{X}}$ bestemmer denne andelen. Ved innsetting i uttrykket for gjeldsverdien $D(V)$ fra (2.18), finner vi således maksimal verdi på gjelden:

$$D_{\max}(V) = \frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^{X} k\right]$$

$$= \frac{V[(1+X)k]^{-\frac{1}{X}}}{r} - \frac{V[(1+X)k]^{-\frac{1}{X}}}{r}\left[\frac{V((1+X)k)^{-\frac{1}{X}}}{V}\right]^{X} k$$

Vi faktoriserer og får:

$$D_{\max}(V) = \frac{V}{r}\left[(1+X)^{-\frac{1}{X}} k^{-\frac{1}{X}} - (1+X)^{-\frac{1}{X}-1} k^{-\frac{1}{X}}\right]$$

$$= \frac{V}{r}\left[(1+X)^{-\frac{1}{X}-1} k^{-\frac{1}{X}} (1+X-1)\right]$$

Dette gir uttrykket for gjeldskapasitet:

$$D_{\max}(V) = \frac{V}{r}\left[Xk^{-\frac{1}{X}}(1+X)^{-\frac{1}{X}-1}\right]$$

Vi ser at gjeldskapasiteten kan tolkes som en andel av verdien av selskapets aktiviteter V. Størrelsen på denne andelen avhenger av spesifikasjonen på de andre parametrene i modellen.

3.2 – Optimal kapitalstruktur

Vi ønsker videre å analysere optimal kapitalstruktur i denne modellen. Fremgangsmåten som benyttes er å bestemme den kupongen som maksimerer totalverdien av selskapet. Som vi har presisert i innledningen av denne utredningen forutsettes det at det ikke er asymmetrisk informasjon i modellen. Følgelig antas det at det ikke oppstår agentkostnader, det vil si at vi antar at aksjonærene maksimerer totalverdien av selskapet og ikke egenkapitalen direkte. En måte å sikre dette på kan være ved en utførlig lånekontrakt mellom selskapet og kreditorene om hvilke beslutninger som kan tas i selskapet. Aksjonærene vil ønske å skrive under på en slik kontrakt, da dette kan gi bedre lånebetingelser. Et annet tilfelle hvor det ikke oppstår agentkostnader, kan være i en situasjon hvor selskapets aktiviteter er låst på kort og lang sikt, slik at det ikke er grunn for kreditorene til å mistenke aksjonærene for å overføre verdier fra kreditorene til seg selv. For nærmere diskusjon av problemstillinger knyttet til asymmetrisk informasjon og ”asset substitution” problemet henvises leseren til innledningen av denne utredningen.

3.2.1 – Optimal kupong

Vi kan bestemme den optimale kupongen ved å benytte standard optimeringsteori. Ved å derivere uttrykket for totalverdien med hensyn til kupongen og sette dette lik 0, finner vi de stasjonære punktene. Disse er aktuelle kandidater til å være maksimumspunkt. Samtidig må andreordensbetingelsen være oppfylt. Det vil si at den andrederiverte i det stasjonære punktet må være strengt negativ for å sikre maksimumspunkt.

$$v(V) = V + \frac{\tau C}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^X h\right]$$

Vi deriverer så dette med hensyn på C:

$$\frac{\partial v(V)}{\partial C} = \frac{\tau}{r}\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^X h\right] + \frac{\tau}{r}\left[-X\left(\frac{C}{V}\right)^X \frac{1}{C}h\right] = 0$$

Dette gir:

$$1 - \left(\frac{C}{V}\right)^X h = X\left(\frac{C}{V}\right)^X h$$

$$h(X+1)\left(\frac{C}{V}\right)^X = 1$$

Ettersom andreordensbetingelsen også er oppfylt, blir den optimal kupongen:

$$C^* = V\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}} \tag{3.2}$$

Det kan være interessant å sammenligne uttrykket (3.2) for optimal kupong gitt maksimering av totalverdi av selskapet med kupongen som maksimerer verdi av gjeld. Ettersom vi enkelt ser at $h > k$, får vi da at $C^*(V) < C_{\max}(V)$. Optimal kupong er mindre enn kupongen som bestemmer gjeldskapasiteten. Intuitivt er dette rimelig. Utgangspunktet er at totalverdien av selskapet består av gjeld og egenkapital. Verdien av egenkapitalen reduseres når kupongen økes. Verdien av gjelden øker frem til kupongnivået $C_{\max}(V)$ og synker deretter. Ettersom summen av endring i egenkapitalen og gjeldsverdien utgjør endring i totalverdien, må nødvendigvis optimal kupong være mindre enn kupongen som maksimerer gjeldsverdien.

Gitt den optimale kupongen fra likning (3.2), kan vi nå finne nye uttrykk for verdier av gjeld, egenkapital og det totale selskapet, samt renten på risikofylt gjeld og konkursbarrieren.

3.2.2 – Gjeldsverdi gitt optimal kupong

Vi begynner med å beregne et uttrykk for gjeldsverdien D^*. Her tas det utgangspunkt i tidligere likning for gjeldsverdien (2.18), og vi setter inn for optimal kupong fra likning (3.2):

$$D(V) = \frac{V\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}}{r}\left[1-\left[\frac{V\left((1+X)h\right)^{-\frac{1}{X}}}{V}\right]^{X} k\right]$$

som gir oss:

$$D^*(V) = \frac{V\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}}{r}\left[1-k\left((1+X)h\right)^{-1}\right] \tag{3.3}$$

Vi ser at $D^*(V)$ er proporsjonal med V. Det vil si at den optimale gjelden vil utgjøre en andel av verdien av selskapets aktiviteter. Vi vil benytte dette uttrykket i forbindelse med den grafiske framstillingen av modellen i kapittel 3.4.

3.2.3 – Totalverdi av selskapet gitt optimal kupong

På tilsvarende måte som i kapittel 3.2.2 kan vi ett nytt uttrykk for totalverdi gitt optimal kupong $v^*(V)$ ved å ta utgangspunkt i tidligere likning for totalverdien (2.21) og optimal kupong fra likning (3.2):

$$v(V) = V + \frac{\tau V\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}}{r}\left[1 - \left[\frac{V\left((1+X)h\right)^{-\frac{1}{X}}}{V}\right]^{X} h\right]$$

$$= V + \frac{\tau V\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}}{r}\left(1 - \frac{1}{1+X}\right)$$

Vi trekker sammen og ordner:

$$v(V) = V\left[1 + \frac{\tau}{r}\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}\right]\left(\frac{X}{1+X}\right)$$

Dette gir da totalverdien:

$$v^*(V) = V\left[1 + \frac{\tau}{r}\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}\right]\left(\frac{X}{1+X}\right) \tag{3.4}$$

Dette uttrykket (3.4) for totalverdien av selskapet inkluderer endogen konkursbarriere og optimal kupong i en modell med konkurskostnader, konstant risikofri rente og skattekostnader.

Vi ser at $v^*(V)$ er proporsjonal med V. Vi vil undersøke nærmere hvordan verdien $v^*(V)$ endres med andre parametre under komparativ statikk analyse.

3.2.4 – Kapitalstruktur gitt optimal kupong

Vi er interessert i å finne et uttrykk for optimal kapitalstruktur. Det finnes flere ulike mål for dette. I denne fremstillingen har vi valgt å bruke målet gjeldsandel – som er definert som gjeldsverdien D i forhold til totalverdien av selskapet v. Vi bruker her at vi har funnet gjeldsverdi D^* og totalverdi v^* ved optimal kupong til å bestemme gjeldsandelen:

$$L^* = \frac{D^*}{v^*} = \frac{\frac{V}{r}\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}\left[1 - k\left[(1+X)h\right]^{-1}\right]}{V\left[1 + \frac{\tau}{r}\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}\right]\frac{X}{1+X}}$$

Vi ser dermed at optimal gjeldsandel er gitt ved:

$$L^* = \frac{\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}\left[1-k\left[(1+X)h\right]^{-1}\right]}{r\left[1+\frac{\tau}{r}\left[(1+X)h\right]^{-\frac{1}{X}}\right]\frac{X}{1+X}} \tag{3.5}$$

Av uttrykket (3.5) ser vi at optimal gjeldsandel vil være uavhengig av verdien på selskapets aktiviteter V. Vi kan forklare dette intuitivt med et eksempel. Sett at vi har to selskaper, ett med lav V og ett med høy V. Selskapet med lav V vil ved en optimal strategi velge en forholdsvis liten kupong, og da vil verdien av gjelden bli liten. Tilsvarende vil selskapet med høy V velge en relativt stor kupong, som vil medføre at verdien av gjelden blir stor. Teorien om at optimal gjeldsandel ikke påvirkes av verdien V, virker dermed rimelig.

3.2.5 – Egenkapitalverdi gitt optimal kupong

Tilsvarende kan vi finne egenkapitalverdien gitt optimal kupong ved å ta utgangspunkt i likning for tidligere egenkapitalverdi (2.22) og likning for optimal kupong (3.2):

$$E(V) = V - (1-\tau)\frac{C}{r}\left[1-\left(\frac{C}{V}\right)^X m\right]$$

$$= V - (1-\tau)\frac{V\left((1+X)h\right)^{-\frac{1}{X}}}{r}\left[1-\left(\frac{V\left((1+X)h\right)^{-\frac{1}{X}}}{V}\right)^X m\right]$$

Dette gir egenkapitalverdien gitt optimal kupong:

$$E^*(V) = V\left[1-(1-\tau)\frac{\left((1+X)h\right)^{-\frac{1}{X}}}{r}\left[1-\left((1+X)h\right)^{-1}m\right]\right] \tag{3.6}$$

Vi kan tolke verdien av egenkapitalen $E^*(V)$ som en andel av verdien av selskapets aktiviteter V. For alle ikke-negative parametere τ, σ, α og r vil andelen være større eller lik 0 og mindre eller lik 1.

3.2.6 – Rente på risikofylt gjeld gitt optimal kupong

Som vi har argumentert for i avsnitt 2.7.1, kan vi finne rente på gjeld ved å dividere kupongen på verdien av gjelden. Vi kan følgelig bestemme renten på nyutstedt risikofylt gjeld R^* ved optimal kupong:

$$R = \frac{C}{D(V)} = r\left[1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{X} k\right]^{-1}$$

$$= r\left[1 - \left(\frac{V\left((1+X)h\right)^{-\frac{1}{X}}}{V}\right)^{X} k\right]^{-1}$$

Algebraisk manipulasjon av uttrykket gir:

$$R = r\left[1 - \left((1+X)h\right)^{-1} k\right]^{-1}$$

$$= r\left(\frac{1}{1 - \frac{k}{(1+X)h}}\right) = r\left(\frac{(1+X)h}{(1+X)h - k}\right)$$

Dette gir da renten på nyutstedt risikofylt optimal gjeld:

$$R^* = r\left(\frac{(1+X)h}{(1+X)h - k}\right) \qquad (3.7)$$

Vi ser at den risikojusterte faktoren $\left(\frac{(1+X)h}{(1+X)h - k}\right)$ må være større enn 1 gitt tidligere antakelser om verdien på parametrene τ, σ, α og r. Dette virker rimelig, da renten på risikabel gjeld intuitivt må være større enn risikofri rente.

Videre kan vi også bestemme yield-spread ved optimal kupongrente:

$$R^* - r = r\left(\frac{(1+X)h}{(1+X)h-k}\right) - r$$

$$= r\left(\frac{(1+X)h}{(1+X)h-k} - 1\right)$$

Ordning under felles brøkstrek gir:

$$R^* - r = r\left(\frac{(1+X)h - (1+X)h + k}{(1+X)h-k}\right)$$

Dette gir følgende uttrykk for yield-spreaden:

$$R^* - r = r\left(\frac{k}{(1+X)h-k}\right) \tag{3.8}$$

Vi vet fra tidligere diskusjon at $h > k$. Følgelig vil yield-spreaden være positiv for alle ikke-negative verdier på parametrene τ, σ, α og r. Dette er naturlig ettersom kreditorer krever høyere avkastning på risikofylt gjeld enn for risikofri gjeld.

3.2.7 – Endogen konkursbarriere gitt optimal kupong

Vi kan justere vårt tidligere uttrykk for konkursbarriere (2.17) til å inkludere optimal kupong (3.2), og finner:

$$V_B(V) = \frac{(1-\tau)C}{r}\left(\frac{X}{1+X}\right)$$

$$= \frac{(1-\tau)V(1+X)^{-\frac{1}{X}} h^{-\frac{1}{X}}}{r}\left(\frac{X}{1+X}\right)$$

Algebraisk sortering av faktorer gir:

$$V_B(V) = \left[\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\frac{1}{(1+X)^{\frac{1}{X}}}\right)^X\right]^{\frac{1}{X}} h^{-\frac{1}{X}} V$$

$$= \left[\left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^X \frac{1}{(1+X)}\right]^{\frac{1}{X}} h^{-\frac{1}{X}} V$$

Her substitueres $m = \left(\frac{(1-\tau)X}{r(1+X)}\right)^X \frac{1}{(1+X)}$, og vi får:

$$V_B(V) = m^{\frac{1}{X}} h^{-\frac{1}{X}} V$$

Dette gir endogen konkursbarriere gitt optimal kupong:

$$V_B^*(V) = V\left(\frac{m}{h}\right)^{\frac{1}{X}} \tag{3.9}$$

Vi ser at $V_B^*(V)$ er proporsjonal med V. En slik sammenheng fikk vi ikke i uttrykket for det tidligere uttrykket for konkursbarrieren (2.17) hvor vi ikke tar eksplisitt hensyn til optimal kupong– her var konkursbarrieren uavhengig av V.

Faktoren $\left(\frac{m}{h}\right)^{\frac{1}{X}}$ kan si noe om hvor konkursbarrieren ligger i forhold til dagens verdi av selskapets aktiviteter V. Siden $m < h$, og $m, h > 0$ ser vi at faktoren er større enn null for alle $X > 0$. Samtidig vet vi at $\lim_{X\to\infty}\left(\frac{m}{h}\right)^{\frac{1}{X}} = 1$, og siden $\frac{1}{X}$ er en monoton funksjon for $X > 0$, må faktoren $\left(\frac{m}{h}\right)^{\frac{1}{X}} \in [0,1]$. At faktoren er større enn eller lik null er rimelig fordi en konkursbarriere på et selskaps aktiviteter ikke kan være negativ. Faktoren vil heller ikke være større enn 1, fordi da ville selskapet allerede vært konkurs.

3.3 – Referanseverdier

Parameter	*Verdi*
V_0	100
r	7 %
τ	35 %
α	20 %
σ	15 %

Vi velger å sette initialverdien av V til 100. Initialverdien kan fastsettes vilkårlig uten tap av generalitet.

Huang & Huang (2003) bestemmer den kontinuerlige risikofrie renten basert på et historisk gjennomsnitt av US Treasury rates for perioden 1973 – 1998. Vi benytter samme fremgangsmåte for å fastslå en referanseverdi for den risikofrie renten, men bruker data fra perioden 1973 – 2005. Denne fremgangsmåten gav oss en risikofri rente på 7 %. En slik tilnærming med å bruke Treasury rates er vanlig i litteraturen. Det finnes imidlertid noen argumenter for at Treasury rates ikke er en ideell proxy for den uobserverbare risikofrie renten. De vanligste argumentene er knyttet til spesiell skattebehandling og knapphetspremie. En annen proxy som kunne vært brukt her, er swap-rater. Swapper kan konstrueres syntetisk og er tilgjengelig i tilnærmet ubegrenset mengde. Imidlertid inneholder en swap kredittpremie fordi i) det flytende elementet er indeksert i forhold til LIBOR, som i seg selv ikke er en risikofri rente, og ii) tilstedeværelse av risiko for at motparten kan gå konkurs. I følge Duffie og Huang (1996) vil motpartrisikoen kun utgjøre mellom 1 og 2 basispunkter. Vi henviser til McCaluey (2002) for videre diskusjon av swap som benchmark for risikofri rente.

Skattesatsen τ settes i dette modelloppsettet til 35 %. Dette er corporate skatterate i USA og er vanlig å bruke i litteraturen, jamfør Leland (1994).

Andel α knyttet til konkurskostnadene er valgt til 20 %. I en empirisk analyse foretatt av Altman (1984) beregnes de totale konkurskostnadene til 16,7 % av selskapsverdien ved konkurs. Huang og Huang (2003) og Andrade og Kaplan (1998) antyder at denne andelen ligger mellom 10 og 20 prosent.

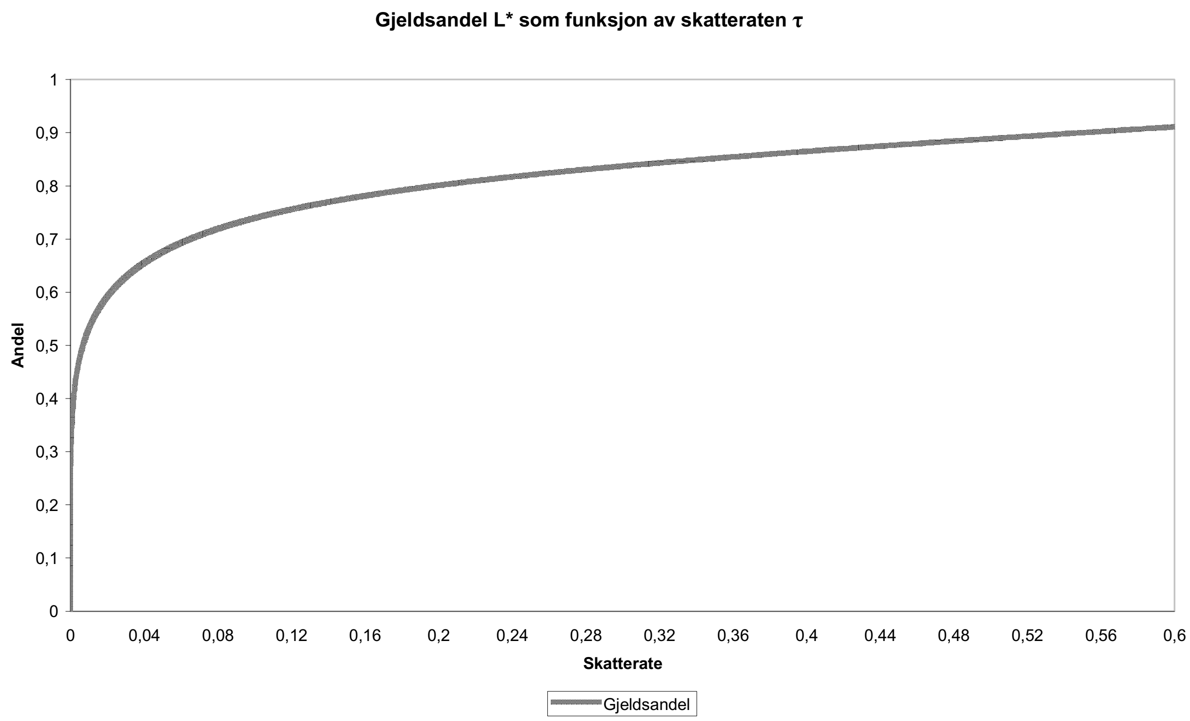
Vi ønsker å se nærmere på volatiliteten til verdien av selskapets aktiviteter V. Denne størrelsen er imidlertid ikke observerbar i markedet. Som utgangspunkt for å anslå volatiliteten til verdien av selskapets aktiviteter, kan det være interessant å se på volatiliteten til egenkapitalen. Den historiske volatiliteten til avkastningen på en representativ aksje ligger rundt 20 %; dette kan enkelt beregnes ut fra historiske kursnoteringer fra for eksempel finance.yahoo.com. Intuitivt vil volatiliteten til egenkapitalen være større enn volatiliteten til verdien av selskapets aktiviteter. Dermed må volatiliteten til verdien av selskapets aktiviteter være lavere enn 20 %. I Crosbie og Bohn (2003) presenteres tallmateriale for ”asset” volatilitet og diskusjon rundt beregning av denne. Crosbie og Bohn finner at ”asset” volatilitet typisk ligger mellom 15 og 20 %. Dette er i overensstemmelse med vår intuisjon ovenfor om at ”asset” volatiliteten må være mindre enn 20 %. På bakgrunn av dette anslår vi volatiliteten til verdien av selskapets aktiviteter til å være 15 %.

3.4 – Komparativ statikk

I det følgende vil vi utføre en følsomhetsanalyse knyttet til modellen hvor vi har endogen kupong. Her ser vi på hvordan endring i parametere påvirker verdi av gjeld, egenkapital, det totale selskapet, gjeldsandel, kupong, risikojustert rente og yield spread.

Det må her presiseres tydelig at vi kun har tatt med utvalgte følsomhetsanalyser ut i fra hvilke vi synes er mest interessante. I den sammenheng ønsker vi å sette fokus på analyser som fanger opp sentrale aspekter ved modellen, samt resultater som i utgangspunktet kan fremstå som uventede. Vi har her valgt ut cirka 15 slike analyser av mange forskjellige som vi hadde tilgjengelig.

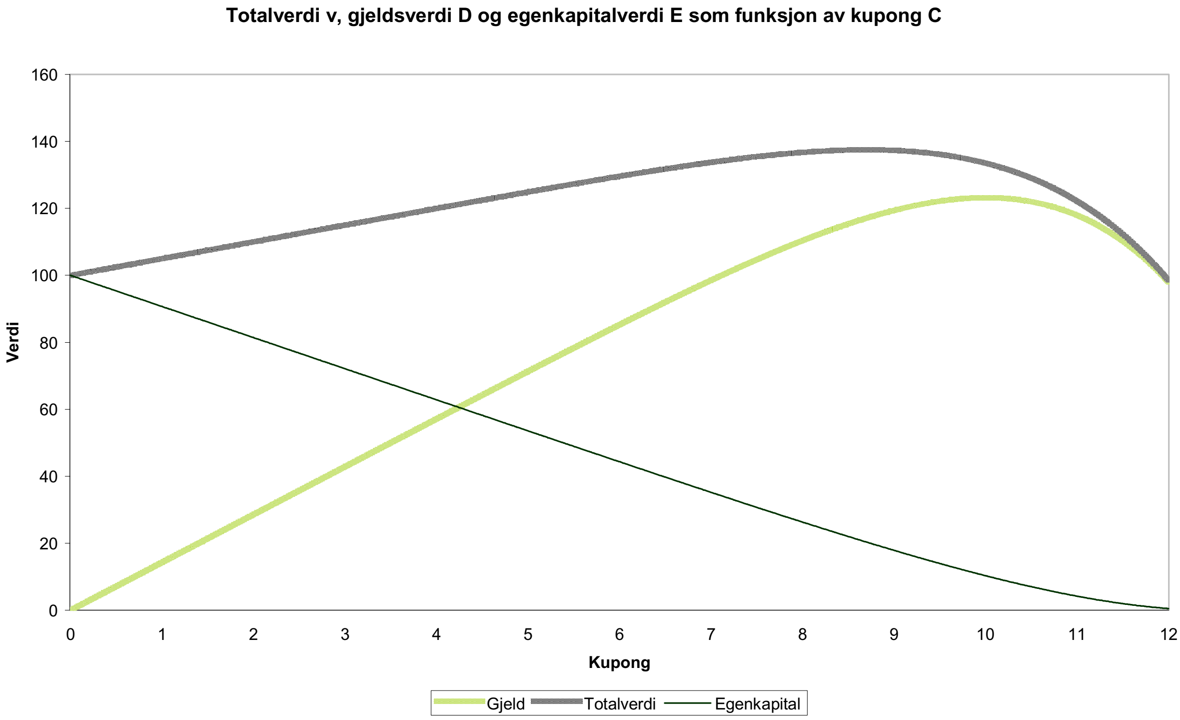
3.4.1 – Komparativ statikk av skattesatsen τ



Når skatteraten er lik 0, ser vi av figuren at gjeldsandelen er lik 0. Dette kan forståes intuitivt med at når det ikke er skatt vil det ikke være mulig å oppnå skattefordeler av gjeld. Ettersom det er konkurskostnader knyttet til å ha gjeld, tilsier dette at bedriften dermed vil unngå gjeld.

Vi ser videre at gjeldsandel stiger monotont når skatteraten øker. Initialt stiger gjeldsandelen betydelig ved økning i skatteraten, men etter hvert øker gjeldsandelen saktere. Når det innføres skatt, vil bedriften ta opp gjeld for å dra nytte av skattefordelene. Desto større skatten er, jo mer gjeld vil bedriften ønske av hensyn til skattefordelene. Imidlertid bidrar økt gjeld til større konkurskostnader, og denne egenskapen vil følgelig begrense gjeldsopptaket. Etter hvert som gjelden øker vil konkurskostnadene stige mer og mer. Ut i fra dette vil selskapet kreve stadig større økning i skatteprosenten for å øke gjeldsandelen med en bestemt andel.

3.4.2 – Komparativ statikk av kupong C



Ved 0 i kupong vil gjeldsverdien være lik 0 i og med at långiverne da ikke mottar noen kontantstrøm. Vi ser at høyere kupong fører initialt til høyere gjeldsverdi. Gitt lave kupongbetalinger i utgangspunktet og dermed begrensede konkurskostnader, er det rimelig at en liten økning i kupongen vil medføre en positiv endring av gjeldsverdien. Gjeldsverdien vil avveie fordelen av større kontantstrøm mot ulempen knyttet til større konkurskostnader når kupongen stiger. Ved en kupong på cirka 10,5 vil endring i gjeldsverdi som følge av større kontantstrøm være like stor som endring på grunn av økte konkurskostnader. Ved høyere kupong enn 10,5 vil gjeldsverdien synke fordi effekten av økte konkurskostnader vil dominere. Toppunktet for gjeldsverdien i denne grafen vil tilsvare gjeldskapasiteten som ble bestemt i kapittel 3.1.

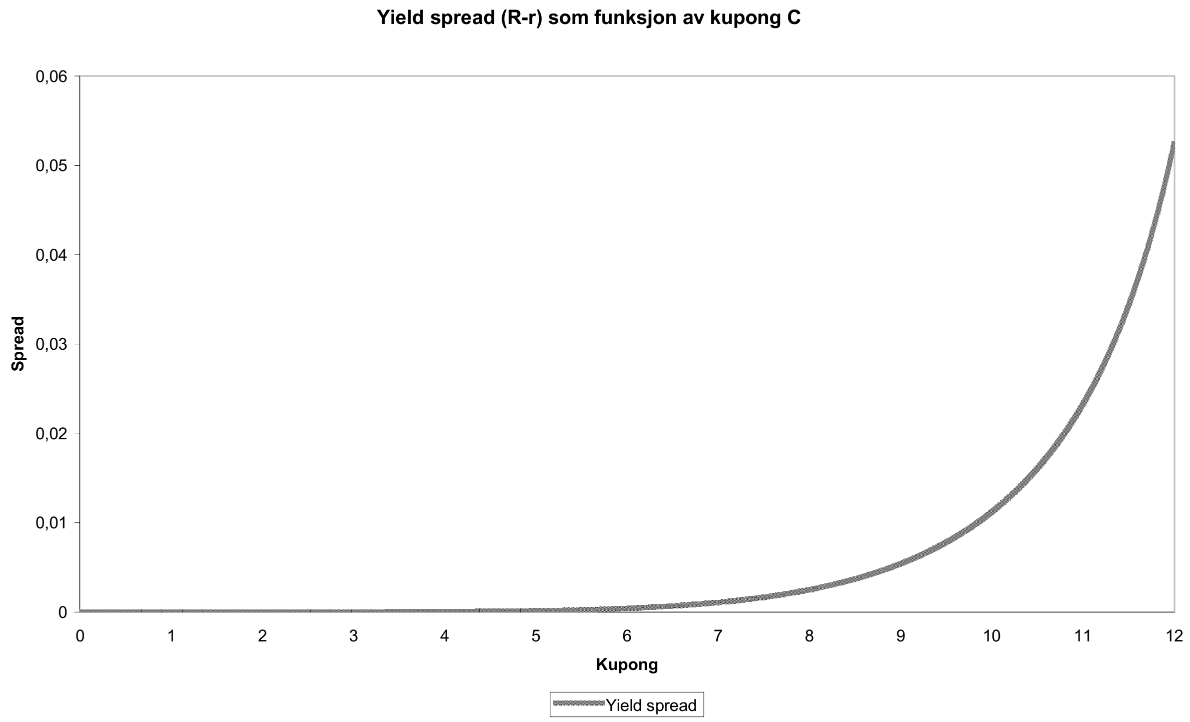
Totalverdien av selskapet vil være knyttet til verdien av selskapets aktiviteter pluss verdien av skattefordel minus verdien av konkurskostnadene. Ved kupong lik 0 vil det ikke være noen skattefordel eller konkursfare, og totalverdien vil dermed være lik verdien av selskapets aktiviteter. Initialt for lave verdier av kupongen, vil en liten økning i kupongen medføre en positiv skattefordel som er større enn den tilhørende negative endringen i konkurskostnader. Dermed vil totalverdien av selskapet øke. Når kupongen blir tilstrekkelig stor, det vil si cirka

8,7 på figuren, vil endring i totalverdi på grunn av skattefordelen være like stor som endring som følge av konkursfaren. For høyere kupong enn cirka 8,7 vil en liten økning i kupongen medføre at effekten av økte konkurskostnader dominerer, og da vil totalverdien synke for en liten økning av kupongen.

Vi legger forøvrig merke til at totalverdien har maksimal verdi for en lavere kupong enn for gjeldsverdien. Den kupongen som maksimerer gjeldsverdien, er i tråd med kupongen fra likning (3.1). Den kupongen som maksimerer totalverdien av selskapet, samsvarer med den kupongen fra likning (3.2). Det virker naturlig at kupongen som maksimerer gjeldsverdien er høyere enn den kupongen som maksimerer totalverdien av selskapet, fordi maksimering av totalverdien tar hensyn til verdien av skattefordelene, noe som tilsier at for det totale selskapet er konkurs mer ødeleggende enn for långiverne som aldri mottar skattefordelen.

For egenkapitalen ser vi at verdien synker for høyere kupong for alle verdier av kupongen. Dette virker intuitivt rimelig ettersom egenkapitalen kan betraktes som residualen av totalverdien minus gjelden. Ved 0 i kupong har ikke långiverne rett på noen kontantstrøm, og da vil aksjonærene ha krav på verdien av det totale selskapet. En liten økning av kupongen vil medføre at endringen i egenkapitalverdien vil være differansen mellom endringene i totalverdien og gjeldsverdien. Ettersom denne lille økningen i kupongen medfører at gjeldsverdien stiger mer enn totalverdien, vil egenkapitalverdien synke. At gjeldsverdien stiger mer enn totalverdien øker, kan forståes intuitivt med at en liten økning i kupongen gir nærmest full kontantstrømeffekt for gjelden som er en større effekt enn skattefordelen for totalverdien. Det kan nevnes at både gjeldsverdien og totalverdien blir berørt av effekten av økte konkurskostnader når kupongen her øker. Effekten av konkurskostnader vil være liten ved lav kupong og høy ved stor kupong, men effekten av konkurskostnader vil være til stede både på totalverdien og gjeldsverdien, og dermed utligne hverandre.

Vi legger forøvrig merke til at når kupongen blir svært høy, nærmer gjeldsverdien seg verdien av det totale selskapet. Dette kan forklares med at for en svært høy kupong er konkurs nærmest en helt sikker hendelse og dermed blir verdien av egenkapitalen cirka lik 0.

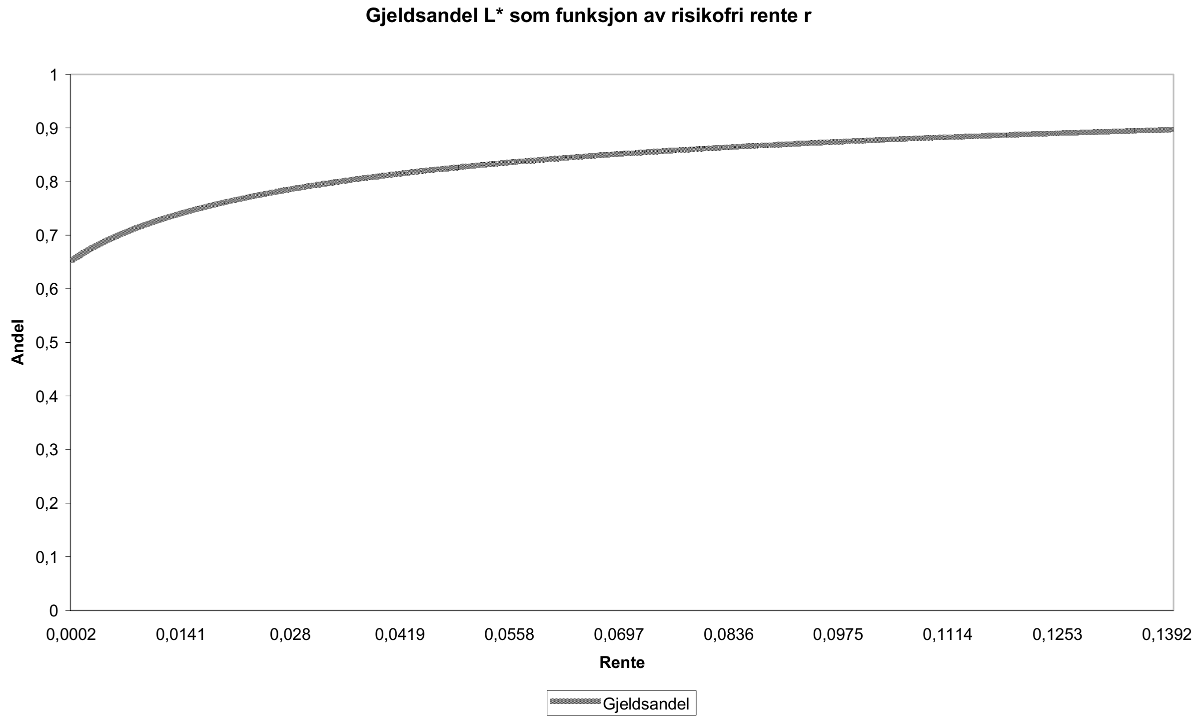


Vi ser av figuren at høyere kupong fører til at yield spreaden øker monotont. Intuitivt kan dette forståes med at høyere kupong øker konkurskostnadene. Ved høyere konkurskostnader krever långiverne å få betalt for dette ved å kreve rente på lånet.

Når kupongen nærmer seg 0, går yield spreaden mot 0. Dette er naturlig fordi en svært lav kupong innebærer meget lave konkurskostnader. Av den grunn vil gjelden være mindre risikofylt for kreditorene, og de krever følgelig en lavere rentesats R.

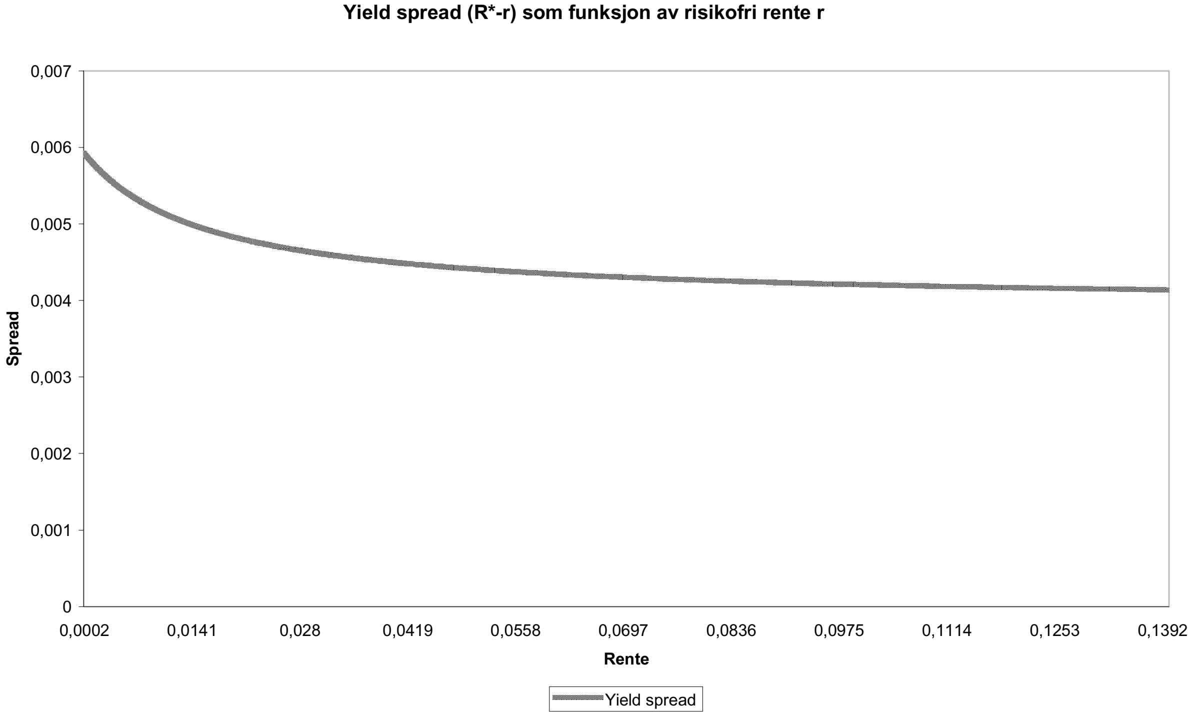
Vi observerer forøvrig at yield spreaden er en konveks funksjon av kupongen. Som vi husker fra kapittel 2.7.1 vil renten på den risikofylte gjelden være gitt ved $R\left(\frac{C}{V}\right) = \frac{C}{D(V)}$. Høyere kupong vil på den ene siden skape høyere kontantstrøm C. Samtidig vil høyere kupong øke verdien av gjelden $D(V)$ på grunn av denne kontantstrømeffekten inntil kupongen blir så stor at gjeldsverdien synker på grunn av økte konkurskostnader. Denne bevegelsen av gjeldsverdien som funksjon av kupongen kan være med på å forklare hvorfor yield spreaden er en konveks funksjon av kupongen.

3.4.3 – Komparativ statikk av risikofri rentesats r



Vi observerer at gjeldsandelen øker når den risikofrie renten stiger. Intuitivt vil mange tro at at høyere risikofri rente vil redusere gjeldsandel fordi selskapet vil låne mindre. I denne modellen er det imidlertid slik at skattefordelen ved økte renter vil mer enn kompensere for høyere lånekostnader. Dette kommenteres forøvrig av Leland (1994) som et oppsiktsvekkende funn i modellen. Videre kan det påpekes at det kan virke destabiliserende på økonomien at høyere renter fører til økt gjeld, da Sentralbanken benytter økt rente som virkemiddel for nettopp å kjøle ned låneviljen til individ og selskap.

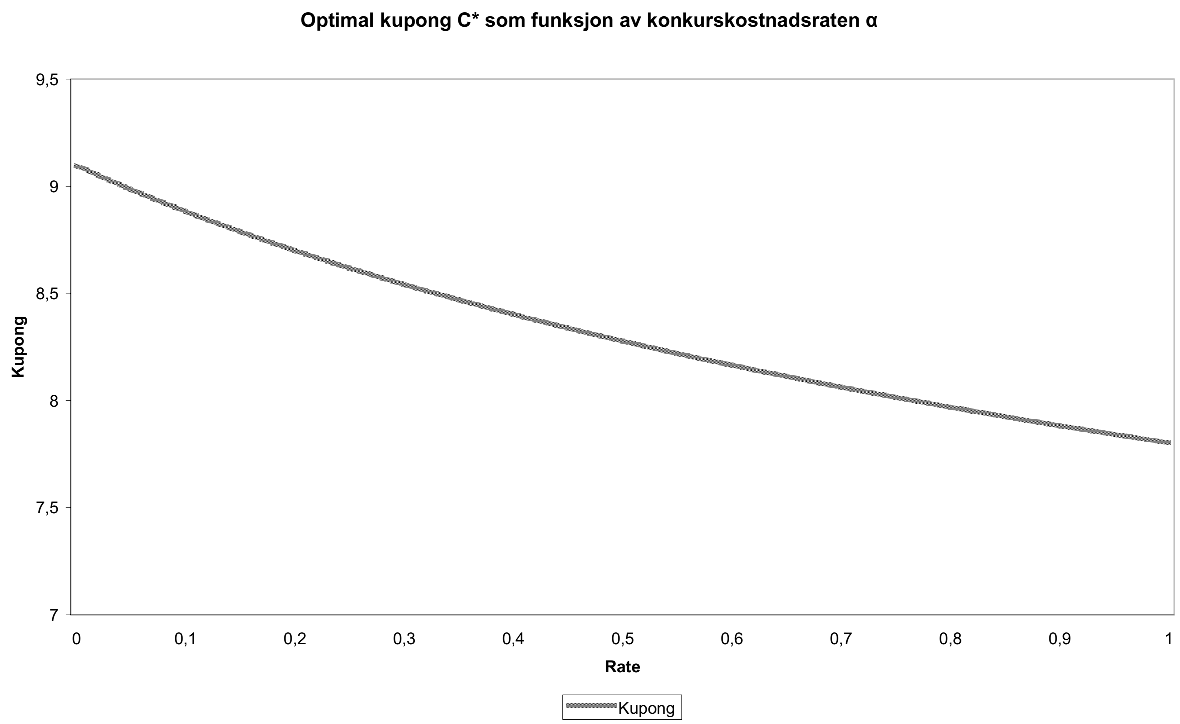
I andre grafer, som vi ikke har tatt med her, har vi sett at både kupongen og gjeldsverdien øker monotont når den risikofrie renten stiger. Vi har også observert at totalverdien stiger med høyere risikofri rente, men denne stigningen er noe mindre enn for gjeldsverdien. Disse resultatene stemmer overens med at gjeldsandelen øker i grafen ovenfor.



Vi ser at yield spreaden synker når den risikofrie renten øker. Initialt synker yield spreaden forholdsvis raskt, men etter hvert flater den ut.

Når den risikofrie renten øker, vil verdien av framtidige kuponger som långiverne mister ved en eventuell konkurs bli mindre. Kreditorene vil altså lide et mindre tap ved en eventuell konkurs. Ut i fra dette vil yield spreaden reduseres når den risikofrie renten øker. Denne effekten ved mindre tap på framtidige kuponger vil overgå effekten av større konkurskostnader (som er et resultat av at gjeldsandelen øker når den risikofrie renten stiger).

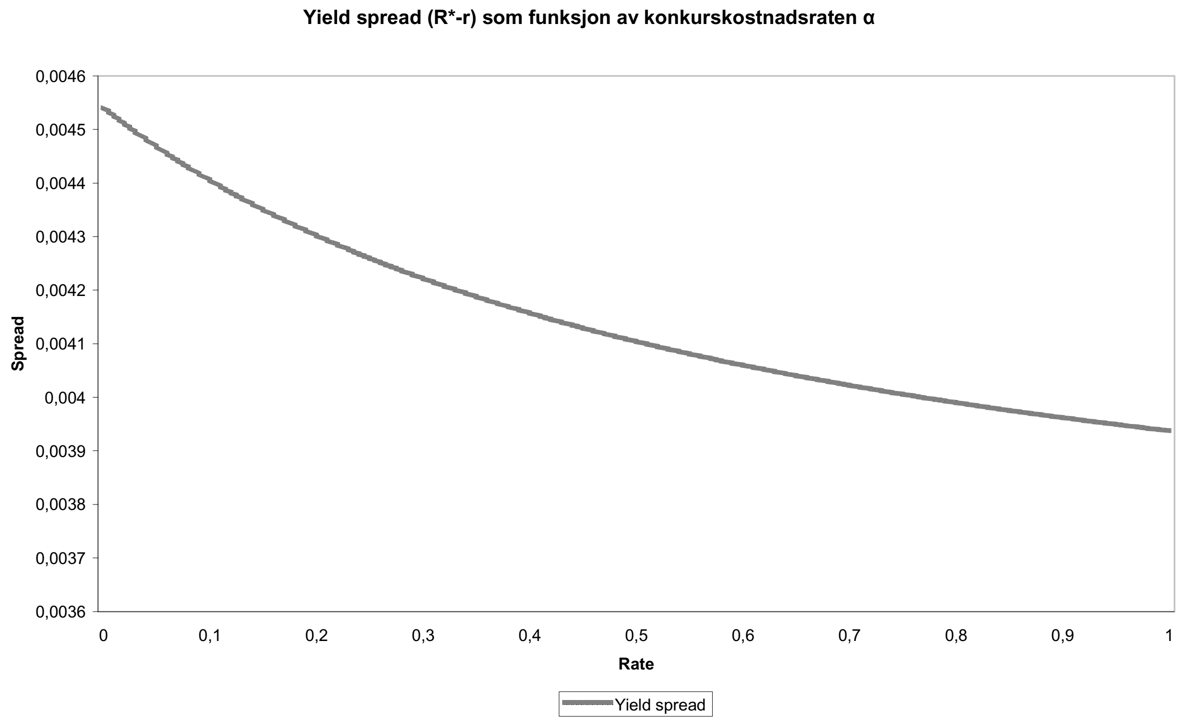
3.4.4 – Komparativ statikk av konkurskostnadsraten α



Figuren viser at den optimale kupongen synker når konkurskostnadsraten øker. Dette virker rimelig fordi økt konkurskostnadsrate isolert sett bidrar til større konkurskostnader, og for å maksimere verdien av det totale selskapet er det i en slik situasjon rimelig å redusere kupongen for å redusere konkurskostnadene.

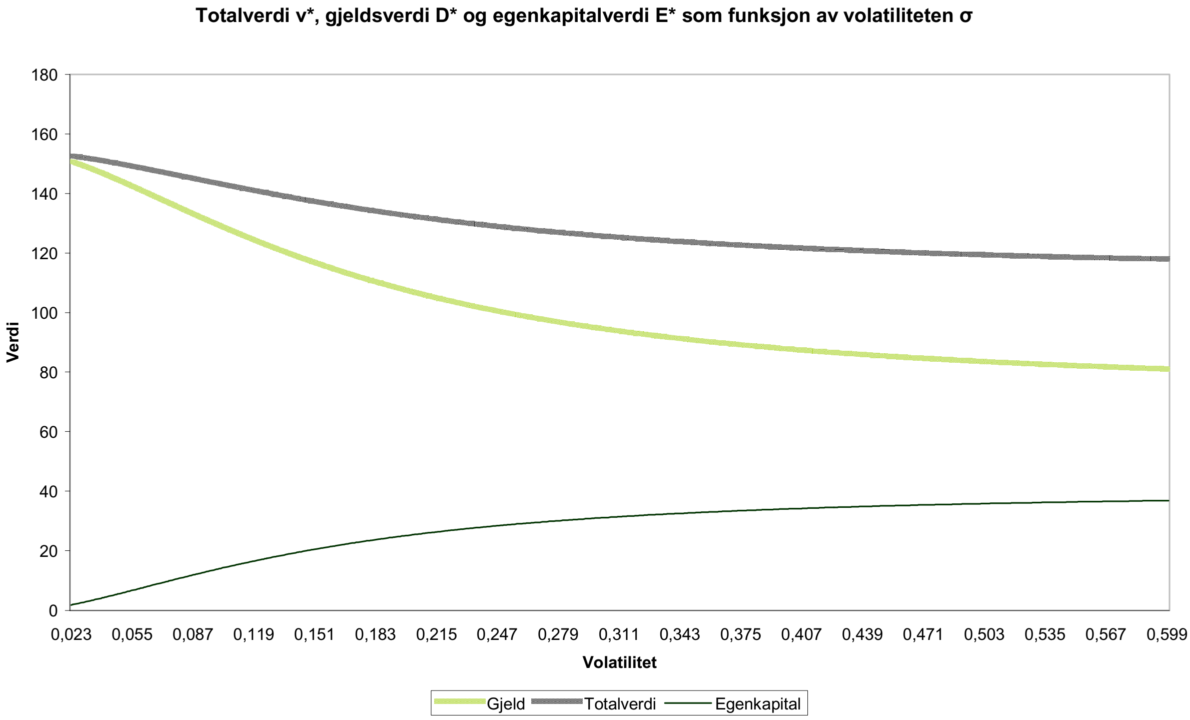
Vi legger forøvrig merke til at den optimale kupongen ikke faller lenger ned enn ca 7,7 når konkurskostnadsraten beveger seg mot 1. I en situasjon med konkurskostnadsraten tilnærmet lik 1 ved konkurs vil hele totalverdien av selskapet bli brukt til å dekke kostnader ved konkurs. Likevel vil det være optimalt for selskapet med kupong så høy som 7,7. Det signaliseres her at skattefordelene er så betydelige at kupongen er verd å beholde på et betydelig nivå, til tross for en svært høy konkurskostnadsrate.

I denne sammenheng kan det også være verd å kommentere at kupongen er cirka 9,1 når konkurskostnadsraten er 0. Avviket i forhold til en høy konkurskostnadsraten er altså cirka 1,4 og er med andre ord ikke spesielt stort. Dette kan tyde på at man ønsker å unngå konkurs fordi skattefordelene som tapes ved konkurs er så store, og ikke fordi det oppstår kostnader knyttet til konkurs.



Av figuren legger vi merke til at yield spreaden synker monotont med høyere konkurskostnadsrate. Ettersom høyere konkurskostnadsrate intuitivt vil øke konkurskostnadene, vil dette medføre at gjeldsverdien synker. Samtidig vil kupongen reduseres som vi så i grafen ovenfor når konkurskostnadsraten øker. Denne kupongen vil naturlig nok falle forholdsvis mer enn gjeldsverdien ettersom kupongen bestemmes ut i fra å maksimere totalverdien av selskapet som igjen tar hensyn til skattefordelene, mens gjeldsverdien ikke er avhengig av disse skattefordelene. Fra sammenhengen $R\left(\frac{C}{V}\right) = \frac{C}{D(V)}$ kan vi - på bakgrunn av at gjeldsverdien synker og kupongen reduseres forholdsvis mer - slutte at yield spreaden vil falle. Dette kan virke som ett noe overraskende resultat, men henger altså sammen med den sterke effekten skattefordelene har for valg av optimal kupong.

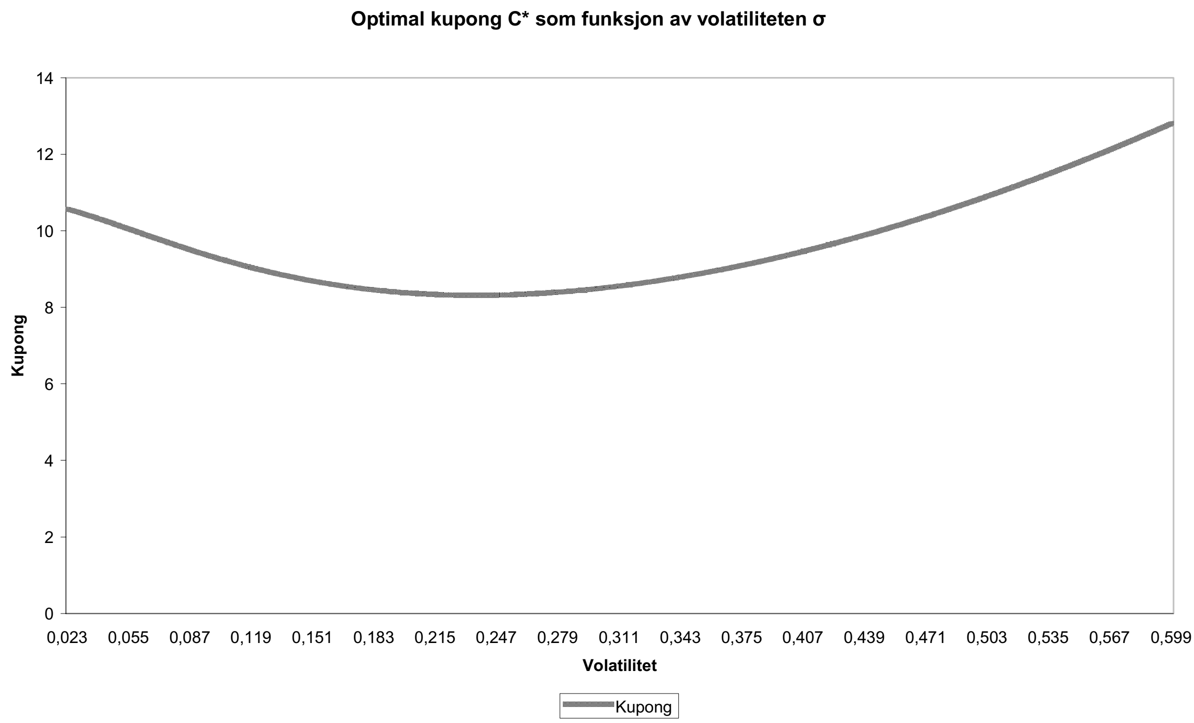
3.4.5 – Komparativ statikk av volatiliteten σ



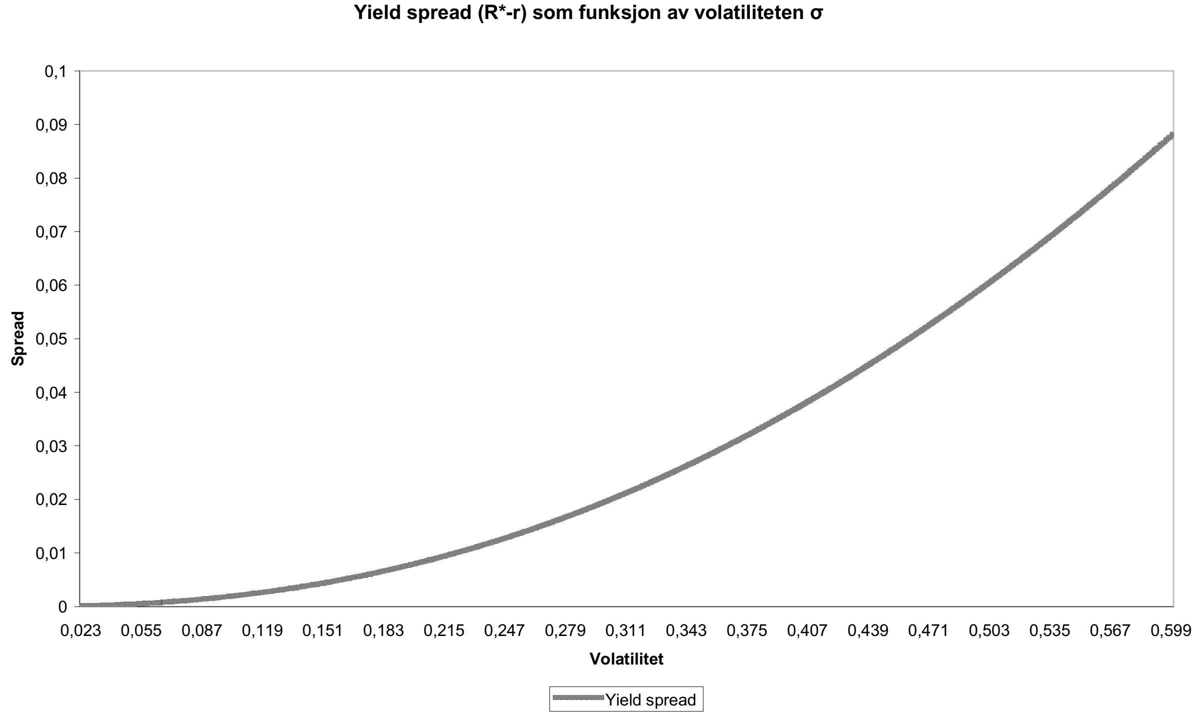
Vi ser av figuren at gjeldsverdien synker ved høyere volatilitet. Dette er intuitivt rimelig da høyere volatilitet øker sannsynligheten for konkurs og dermed vil konkurskostnadene gjøre seg mer gjeldende. Dette resonnementet kan også forklare hvorfor totalverdien synker ved høyere volatilitet.

Som vi ser av figuren øker egenkapitalverdien ved høyere volatilitet. Dette er i tråd med vår betraktning av egenkapitalen som en kjøpsopsjon på det underliggende selskapet - en kjøpsopsjon vil som kjent stige i verdi ved økt volatilitet. Ettersom egenkapitalen har begrenset nedside og ubegrenset oppside, vil høyere volatilitet medføre at egenkapitalen stiger i verdi.

Ved svært lav volatilitet ser vi at gjeldsverdien nærmer seg totalverdien, samtidig som at egenkapitalverdien nærmer seg 0. Dette kan forklares ved at når volatiliteten er svært lav, vil konkurskostnadene være meget små. I en slik situasjon vil selskapet foretrekke å ta opp forholdsvis mye gjeld, og dermed stiger verdien av gjelden. Også totalverdien av selskapet vil stige noe når konkurskostnadene reduseres. Egenkapitalverdien vil følgelig synke ettersom selskapet vil ta opp en relativt større andel gjeld når volatiliteten går mot 0.



Når volatiliteten i utgangspunktet er svært lav (høy), ser vi av figuren at høyere volatilitet reduserer (øker) den optimale kupongen. Den optimale kupongen minimeres når volatiliteten er ca 0,23. Selskaper med høy eller lav volatilitet vil altså optimalt sett betale ut relativt store kuponger, mens selskaper med middels volatilitet vil optimalt velge å utbetale noe mindre kuponger. En forklaring på dette kan være at selskaper med lav risiko kan betale ut høye kuponger fordi framtiden er ganske sikker og sannsynligheten for konkurs er relativt lav. Selskap med svært høy risiko har så usikker framtid at de like godt kan love høye kuponger mens muligheten til å betale ut kuponger finnes. Disse selskapene med høy volatilitet har forholdsvis høye konkurskostnader, og det vil derfor være intuitivt fornuftig at disse lover høy kupong da svingningene i deres aktiviteter er så store at kupongstørrelsen blir forholdsvis uinteressant med tanke på risikoen for å gå konkurs. Selskapene med middels volatilitet vil velge lavere kupong fordi usikkerheten i deres bransje er noe begrenset, og størrelsen på kupongen er forholdsvis viktig i forhold til konkurskostnadene.

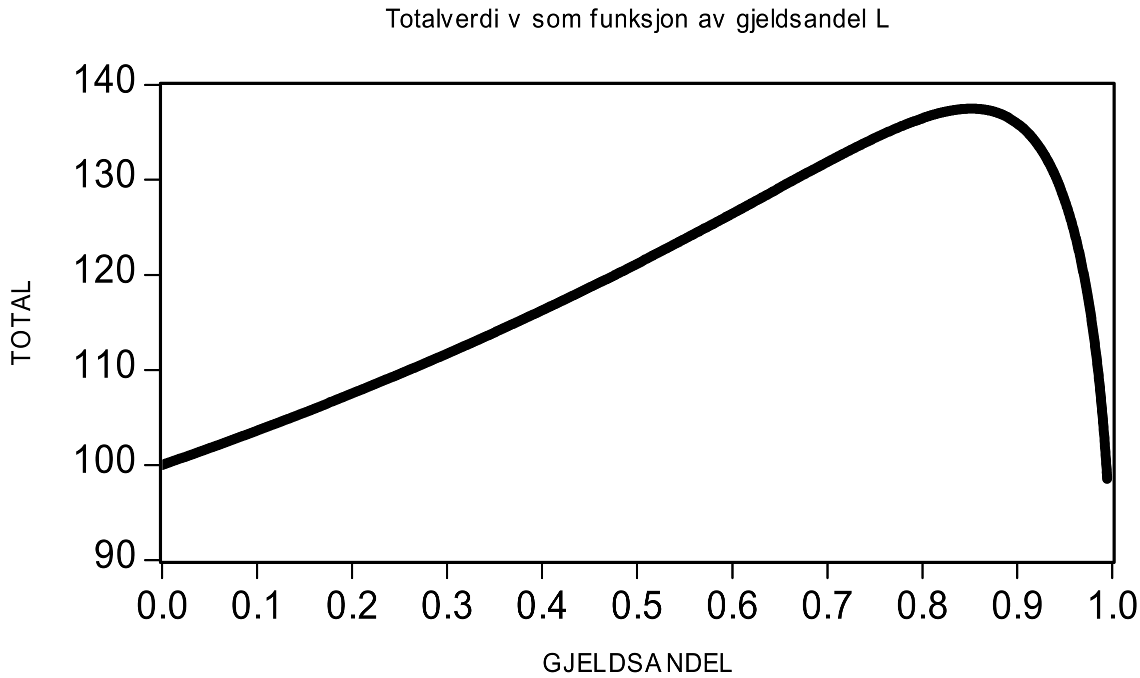


Vi ser at yield spreaden øker monotont med volatiliteten. Dette virker rimelig ettersom høyere volatilitet øker konkurskostnadene og dermed synker verdien av gjelden. Når verdien av gjelden synker, vil yield spreaden øke med mindre økt kupong kan oppveie for dette. Ettersom kupongen faller noe initialt når volatiliteten øker, skjønner vi at kupongen initialt faktisk kompenserer noe for fallet i gjeldsverdien. Når kupongen faller vil dette imidlertid i seg selv bidra til å redusere gjeldsverdien.

Etter hvert når den optimale kupongen begynner å stige ved høyere volatilitet, vil kupongen bidra til å øke yield spreaden.

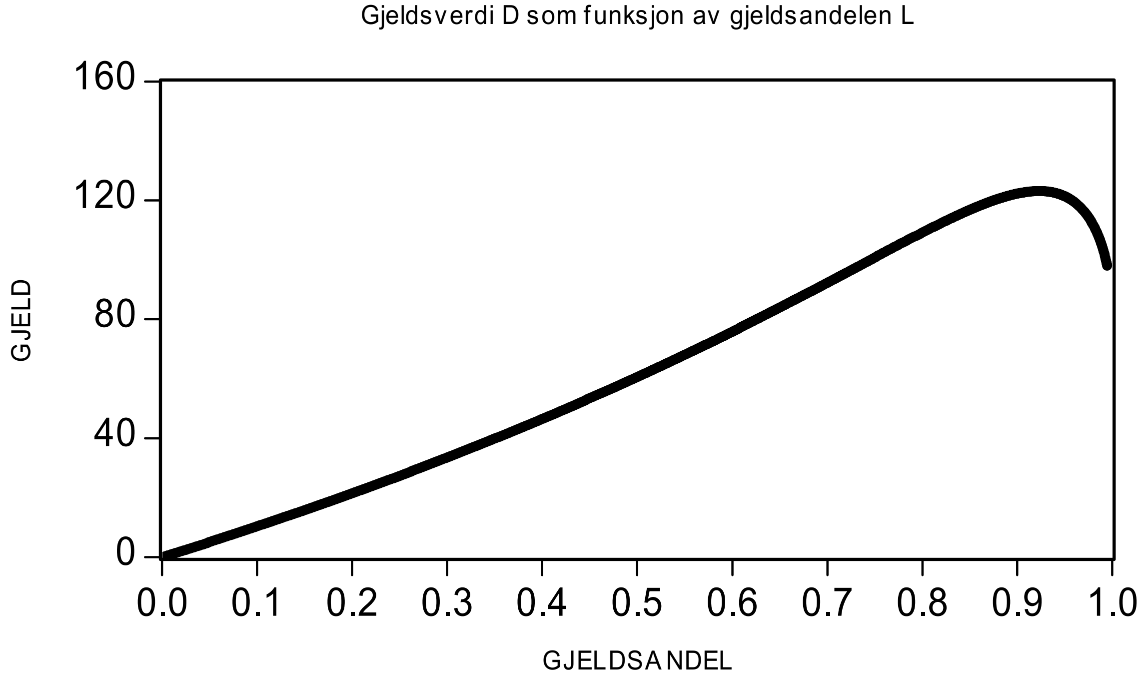
At kupongen først bidrar til å redusere yield spreaden og så til å øke yield spreaden, er med på å forklare hvorfor grafen her er konveks.

3.4.6 – Komparativ statikk av gjeldsandel L



Figuren viser oss at totalverdien maksimeres ved en gjeldsandel på ca 85 %. Når gjeldsandelen er lavere enn dette, kan totalverdien økes ved å øke gjeldsandelen fordi den marginale endringen i skattefordelene vil være større enn den marginale endringen i konkurskostnadene. Når gjeldsandelen er høyere enn dette, kan totalverdien økes ved å redusere gjeldsandelen fordi i denne situasjonen er endringen i konkurskostnadene større enn endringen i skattefordelene.

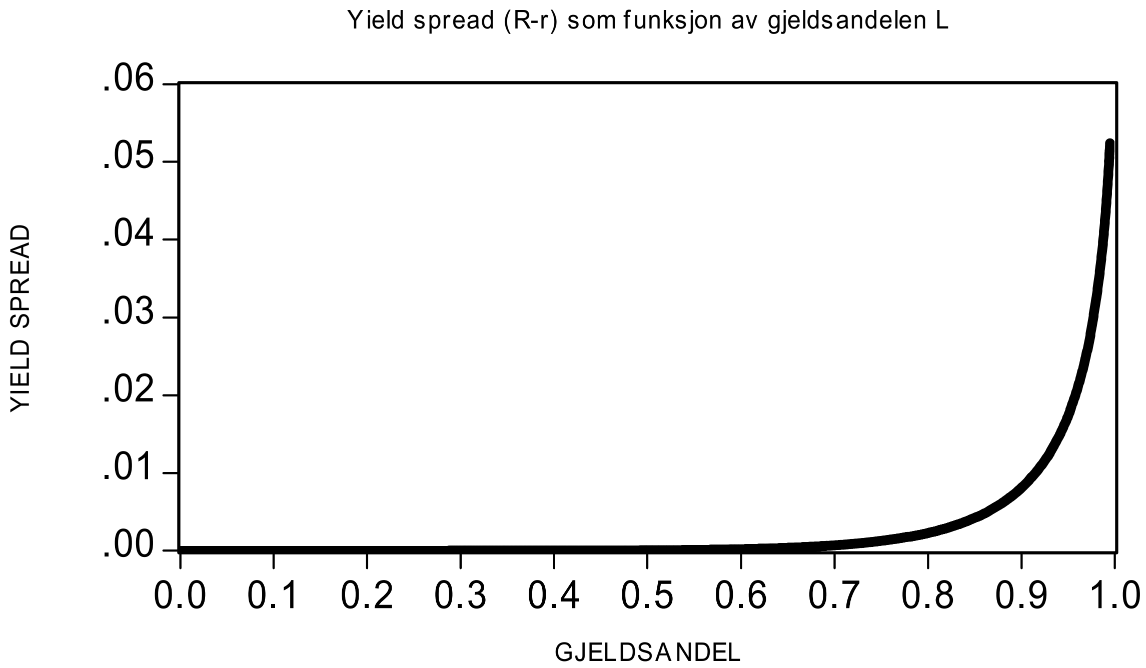
Vi ser forøvrig at gjeldsandel på 0 gir totalverdien lik 100, som tilsvarer verdien av selskapets aktiviteter. Ved ingen gjeld får man verken skattefordeler eller konkurskostnader, og det virker derfor rimelig at totalverdien av selskapet er lik verdien av selskapets aktiviteter. Optimal sammensetning av gjeld og egenkapital gir altså en totalverdi på selskapet oppunder 140, med andre ord en økning på nesten 40 % i forhold til ingen gjeld.



Gjeldsverdien maksimeres ved en gjeldsandel på ca 0,93. Gjeldsverdien maksimeres altså ved en høyere gjeldsandel enn totalverdien av selskapet. Långiverne får ikke skattefordelene som det totale selskapet har, og derfor vil långiverne ikke lide så stort tap ved konkurs som det totale selskapet vil gjøre. Både långiverne og det totale selskapet vil imidlertid bli belastet det samme tapet knyttet til konkurskostnader ved konkurs.

Når gjeldsandelen er lavere enn ca 0,93, kan gjeldsverdien økes ved å heve gjeldsandelen. I en slik situasjon vil en stigning i gjeldsandelen gi en mer positiv endring i kuponginntekter enn tapet ved økte konkurskostnader.

Ved en høyere gjeldsandel enn ca 0,93, kan gjeldsverdien økes ved å redusere gjeldsandel. I en slik situasjon vil en reduksjon av gjeldsandelen kunne senke konkurskostnadene mer enn tapet knyttet til tapte kuponginntekter.

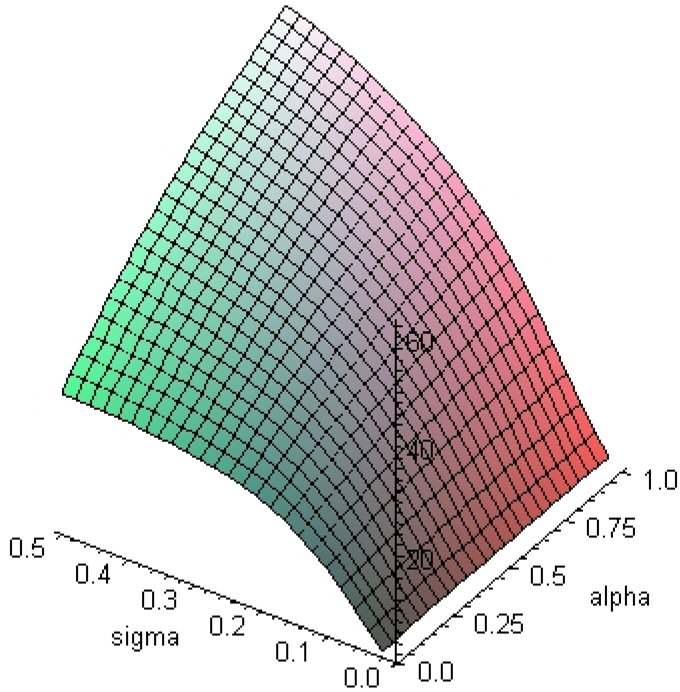


Vi ser at yield spreaden øker når gjeldsandelen stiger. Av figuren observerer vi at grafen har en konveks form. Når gjeldsandelen overstiger ca 0,7, ser vi at yield spreaden vokser drastisk i forhold til ved lavere gjeldsandel.

Høyere gjeldsandel medfører større konkurskostnader, og det er i så måte rimelig at yield spreaden stiger med vekst i gjeldsandelen. Långiverne må kompenseres for økt risiko med større kompensasjon i yield spreaden.

3.4.7 – Egenkapitalverdien som funksjon av konkurskostnadsraten α og volatilitet σ

Følgende 3D-figur viser egenkapitalverdien som funksjon av konkurskostnadsraten α og volatilitet σ:



Gitt en lav konkurskostnadsrate ser vi av figuren at egenkapitalverdien stiger med høyere volatilitet. I og med at vi kan betrakte egenkapitalen som en kjøpsopsjon på det underliggende selskapet, er det intuitivt at høyere volatilitet øker egenkapitalverdien. Vi registrerer at effekten på egenkapitalen flater noe ut når volatiliteten blir høy.

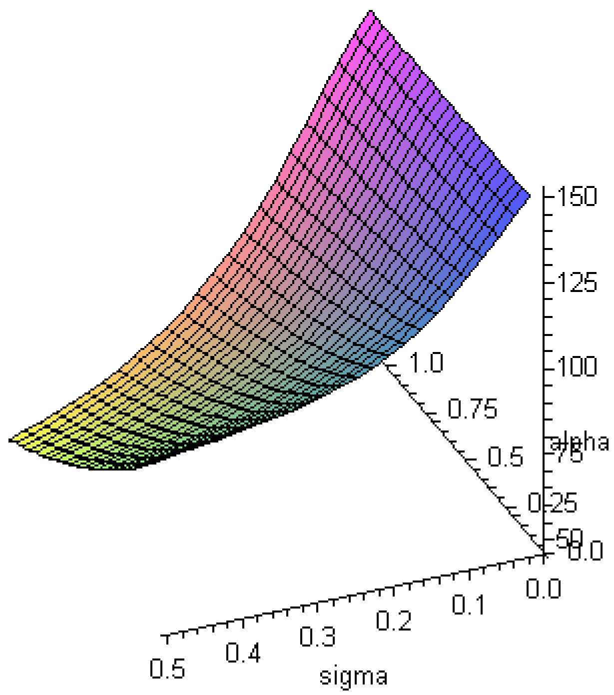
Gitt en høy konkurskostnadsrate observerer vi at også her stiger egenkapitalverdien når volatiliteten øker. Her ser vi at effekten på egenkapitalen ikke flater så mye ut som når konkurskostnadsraten er lav.

Gitt en lav volatilitet registrerer vi at egenkapitalverdien er forholdsvis uavhengig av konkurskostnadsraten. Dette kan forklares ut fra at når volatiliteten er lav, vil det være omtrent usannsynlig med konkurs, og dermed spiller konkurskostnadsraten en ubetydelig rolle.

Gitt at volatiliteten er høy ser vi at egenkapitalverdien stiger betraktelig med høyere konkurskostnadsrate. Dette kan skyldes at når volatiliteten er høy, er usikkerheten om framtiden stor. I en slik situasjon vil høyere konkurskostnadsrate føre til at kupongen og dermed gjeldsverdien reduseres. Totalverdien av selskapet vil også synke ved høyere konkurskostnadsrate, men fallet her vil ikke være like stort som for gjeldsverdien. Og når gjeldsverdien synker mer enn totalverdien, vil altså egenkapitalverdien stige.

3.4.8 – Gjeldsverdien som funksjon av konkurskostnadsraten α og volatilitet σ

Følgende 3D-figur viser gjeldsverdien som funksjon av konkurskostnadsraten α og volatilitet σ:



Dersom selskapet er karakterisert ved svært lav volatilitet ser vi at gjeldsverdien vil være relativt uavhengig av konkurskostnadsraten. Dette virker intuitivt rimelig fordi når volatiliteten er meget lav, vil det være omtrent usannsynlig med konkurs, og dermed spiller konkurskostnadsraten en mindre betydningsfull rolle.

Gitt høy volatilitet legger vi merke til at gjeldsverdien synker med høyere konkurskostnadsrate. I en verden med høy usikkerhet er det rimelig at gjeldsverdien synker når konkurskostnadsraten øker fordi høyere konkurskostnadsrate er et direkte tap for långiverne.

I tilfellet med en lav konkurskostnadsrate registrerer vi at gjeldsverdien faller med høyere volatilitet. Det kan virke naturlig at økt volatilitet bidrar til å redusere gjeldsverdien ettersom långiverne ikke får glede av en eventuell oppside, men må ta belastningen ved en eventuell konkurs og tilhørende konkurskostnader, samt at långiverne mister framtidige kuponger ved en eventuell konkurs.

Dersom konkurskostnadsrate er høy i utgangspunktet observerer vi at gjeldsverdien reduseres med høyere volatilitet. Vi ser spesielt at gjeldsverdien synker mer i dette tilfelle enn når konkurskostnadsraten er lav. Dette kan skyldes at konkurskostnadene blir større når konkurskostnadsraten er høy, og dermed er tapet for långiverne større ved en eventuell konkurs. Gjelden vil dermed prises lavere ettersom tapet ved en eventuell konkurs er forholdsvis stort.

3.5 – Resultater fra benchmarkmodellen

Ved å benytte referanseverdiene presentert i kapittel 3.3 får vi følgende resultat fra vår benchmarkmodell med endogen kupong:

Konkursbarriere	69,60194483
Verdi av gjeld	117,0925825
Konkurskostnader	1,460180661
Skattefordel	38,93815095
Totalverdi selskapet	137,4779703
Egenkapitalverdi	20,38538778
Gjeldsandel	0,851718877
Rente på risikofylt gjeld	0,074302257
Yield spread	0,0043023

Vi observerer at totalverdien av selskapet optimaliseres til en verdi på cirka 137. Dette er en betraktelig størrelse når vi vet at verdien av selskapets aktiviteter er 100. Gjennom å ta opp gjeld og dermed oppnå skattefordelene og utsette seg for konkurskostnader har dermed totalverdien økt med ca 37. Vi ser videre at skattefordelene er forholdsvis store på cirka 38,9 i forhold til konkurskostnadene som er cirka 1,46.

Vi legger merke til at gjeldsandelen er forholdsvis høy på cirka 85 %. Spesielt kan vi betrakte dette som høyt når vi tar utgangspunkt i at dette er en statisk modell hvor kapitalstrukturen er låst for alltid. Ifølge Myers (2001) er gjennomsnittlig gjeldsandel for amerikanske selskaper i 1991 cirka 28 %. Det er altså klart at benchmarkmodellen ikke er helt i tråd med empiri på dette punktet.

Vi ser også at yield spreaden er cirka 43 basispunkter. Dette er noe lavere enn et empirisk arbeid til Datta, Iskandar-Datta og Patel (1998) som har beregnet yield spreaden til å være 68 basispunkter i gjennomsnitt for amerikanske selskaper. At yield spreaden er for lav, er etter vår forståelse et vanlig problem med strukturelle kredittrisikomodeller. I følge Leland (2002) vil yield spreaden i praksis vil reflektere likviditetseffekter i tillegg til sannsynligheten og alvorligheten av kreditthendelser. Følgelig vil de strukturelle modellene, som ikke modellerer likviditetseffekter eksplisitt, underestimere yield spreaden.

Ut i fra at benchmarkmodellen er bygget på strenge forutsetninger som for eksempel at gjelden har uendelig tidshorisont, synes vi resultatene med tanke på optimal gjeldsandel og yield spread er forholdvis tilfredsstillende.

I kapittel 5.4.2 vil vi sammenlikne resultatene fra benchmarkmodellen og den nye modellen.

3.6 – Selskapsspesifikke parametere for vår benchmarkmodell

Vi ønsker å teste hvordan modellen vår oppfører seg når vi endrer selskapsspesifikke parametere. Mer spesifikt ønsker vi å undersøke nærmere hvordan optimal kapitalstruktur og yield spread endrer seg ut i fra forskjellige selskapsspesifikke parametere. Formålet med dette er å gi en antydning av hvordan benchmarkmodellen kan brukes i praksis og hvordan resultatene fra modellen vil endre seg når vi tilpasser til hvert enkelt selskap.

I vår benchmarkmodell ser vi at de selskapsspesifikke parametrene i hovedsak er volatilitet og konkurskostnadsrate. Fra før var disse valgt til å være følgende:

α	20 %
σ	15 %

Vi ønsker nå å se hvordan modellen slår ut for andre verdier for disse selskapsspesifikke parametrene. I praksis kan både volatilitet og konkurskostnadsrate være både høyere eller lavere enn verdiene ovenfor.

Vi velger lav verdi for volatilitet til å være 5 % og høy verdi for volatilitet til å være 40 %. Videre setter vi lav konkurskostnadsrate til å være 10 % og høy konkurskostnadsrate til å være 50 %.

Dette gir oss fire forskjellige kombinasjoner av selskaper når vi setter sammen kombinasjoner av volatilitet og konkurskostnadsrate. Vi vil gå gjennom hvert av disse og beregne optimal kapitalstruktur og yield spread for hver av disse kombinasjonene.

3.6.1 – Lav volatilitet og lav konkurskostnadsrate

Med lav volatilitet og lav konkurskostnadsrate kan vi for eksempel se for oss tradisjonell tungindustri som våpenindustri, maskinprodusenter og naturforedlingsbedrifter. Her er det forholdsvis stabile konjunkturer, og ved konkurs vil kostnadene være lave fordi bedriften innehar aktiva som kan selges.

Et eksempel på et slikt selskap kan være Terra Nostra Resources. Dette er et amerikansk industriselskap som produserer kopper og rustfri stål.

Med innsetting av lave verdier for volatilitet og konkurskostnadsrate får vi her følgende relevante utdata fra modellen:

Gjeldsandel	0,962576572
Yield spread	0,0004445

Vi ser for det første at gjeldsandelen er svært høy. Dette virker intuitivt rimelig da både volatiliteten og konkurskostnadsraten er lave, og selskapet er dermed villige til å ta opp forholdsvis mye gjeld.

Yield spreaden er relativt lav. Dette virker forståelig ettersom lav volatilitet innebærer lav sannsynlighet for å konkurs, samt lav konkurskostnadsrate betyr at tapet ved en eventuell konkurs er forholdsvis lite.

3.6.2 – Høy volatilitet og høy konkurskostnadsrate

Her kan vi typisk tenke oss serviceindustrier for luksusgoder, som for eksempel flyfraktindustri, postordrefirmaer, luksusvare-butikker, hoteller og tog. Denne industrien vil typisk svinge mye med konjunkturene, og ved konkurs vil det være lite fysiske verdier å hente ut långiverne.

Ett eksempel her kan være Protection One. Dette er et amerikansk sikkerhetsselskap som installerer og bruker avansert sikkerhetsutstyr for både private og organisasjoner. Tjenestene til dette selskapet er typisk high-end i sikkerhetsmarkedet.

Vi får følgende utdata fra modellen:

Gjeldsandel	0,620886259
Yield spread	0,0322882

Vi ser at gjeldsandelen er forholdsvis lav og yield spreaden er relativt høy i forhold til tidligere. Med høy usikkerhet om framtiden og store tap ved en eventuell konkurs, er det intuitivt at det vil være optimalt med forholdvis lite gjeld.

3.6.3 – Lav volatilitet og høy konkurskostnadsrate

Vi kan her tenke på for eksempel bedrifter med sterk merkevare og stabil etterspørsel i markedet. Dette kan være mange bedrifter innen forbruksgoder som drikkevarer, sigaretter, klær, sportsutstyr og leker. Ettersom etterspørsel er stabil vil volatiliteten være lav, mens kostnadene ved konkurs vil være høye på grunn av immaterielle verdier som for eksempel merkevare.

Ett eksempel på en bedrift her kan være Coca-Cola. Dette er et selskap med en helt spesielt sterk merkevare. Navnet Coca-Cola må sies å være kjent i hele verden. Samtidig er etterspørselen av Coca-Cola forholdsvis lite konjunkturutsatt – Coca-Cola er noe som kjøpes og forbrukes til alle tider.

Vi får følgende resultater fra modellen:

Gjeldsandel	0,957136204
Yield spread	0,0004399

Vi ser at gjeldsandelen er svært høy og yield spreaden er temmelig lav. Spesielt interessant kan det være verd å observere at både gjeldsandelen og yield spreaden er omtrent på det nivået som de er når både volatiliteten og konkurskostnadene er lave. Dette kan tyde på at volatiliteten er forholdsvis mye viktigere enn konkurskostnadene med tanke på å bestemme gjeldsandelen og yield spreaden.

3.6.4 – Høy volatilitet og lav konkurskostnadsrate

Vi kan her tenke på for eksempel høyteknologi produksjonsselskaper innenfor områder som kommunikasjonsutstyr, datalagring, eletronikk, informasjonssystemer og personlige datamaskiner. Her kan volatiliteten være stor på grunn av uforutsigbare endringer i etterspørselen, mens ved konkurs vil ofte ikke kostnadene være så store fordi disse bedriftene har fysiske aktiva som långiver kan selge.

Ett eksempel her kan være e.Digital. Dette er et amerikansk selskap som produserer teknologiske løsninger til digitale video/lyd-spillere. Dette er en bransje som svinger mye i tråd med stadige teknologiske framskritt. Ved konkurs har imidlertid selskapet materielle verdier som långiver kan gripe fatt i.

Vi får følgende utdata fra modellen

Gjeldsandel	0,758908631
Yield spread	0,0388325

Vi ser altså at gjeldsandelen er på et middels nivå i forhold til våre tidligere resultater, mens yield spreaden faktisk er den høyeste av disse fire forskjellige casene.

Hvis vi sammenligner dette resultatet med situasjonen når både volatiliteten og konkurskostnadsraten er høye, ser vi noe interessant. Når både volatiliteten og konkurskostnadsraten er høye, ser vi at gjeldsandelen blir cirka 62 %, mens når volatiliteten er høy og konkurskostnadsraten er lav, får vi gjeldsandel på cirka 76 %. I situasjonen med høy volatilitet og konkurskostnadsrate vil den lave gjeldsandelen altså bidra til å gjøre yield spreaden mindre enn i situasjonen når volatiliteten er høy og konkurskostnadsraten er lav. Dette er ett noe oppsiktsvekkende resultat ettersom konkurskostnadsratene i disse situasjonene er så forskjellige.

Kapittel 4 – En ny modell: Teori

Vi vil her utlede en ny modell basert på den senere tids forskning innenfor området strukturelle kredittrisikomodeller. Det vil her være betydelige forskjeller i forhold til benchmarkmodellen presentert i kapittel 2. En viktig forskjell er at det taes utgangspunkt i en EBIT-prosess. En annen forskjell er at vi går nærmere inn på prosedyrene ved konkurs – man skiller mellom en likvideringsprosess og en reorganiseringsprosess. Videre tar vi her for oss en stokastisk renteprosess, og vi åpner for at gjelden kan restruktureres. Det grunnleggende rammeverket i modellen baserer seg på Broadie, Chernov og Sundaresan (2005).

Formålet med å utlede denne modellen, er for å finne optimal kapitalstruktur og uttrykk for verdi av gjeld, egenkapital og det totale selskapet, samt beregne uttrykk for risikojustert rente og yield spread - ut i fra en modell som tar inn over seg flere interessante parametere enn benchmarkmodellen.

Vi vil i kapittel 5.4.2 kort sammenligne denne nye modellen med benchmarkmodellen.

4.1 – EBIT-prosessen

Som primitiv variabel i vårt modelloppsett ønsker vi å ta utgangspunkt i EBIT (Earnings Before Interest and Taxes) betegnet ved δ_t. Bakgrunnen for dette er at nyere litteratur innen verdsetting av gjeld og egenkapital i strukturelle kredittrisikomodeller påpeker noen ulemper med bruken av verdien av selskapets aktiviteter V som grunnleggende tilstandsvariabel.

Hovedproblemet med å benytte verdien av selskapets aktiviteter V som grunnleggende prisprosess er knyttet til forholdet mellom V og totalverdien $v(V)$. I en modell hvor den primitive variabelen antas å være V vil aktøren ha mulighet til å skape totalverdiprosessen $v(V)$ ved å kjøpe V og så bruke utstedelse av gjeld og salg av egenkapital for å oppnå ”pakken” $v(V)$. Man oppnår med andre ord en ”cash subsidy” ved å utstede gjeld som øker totalverdien av selskapet.

For å unngå dette problemet har man i litteraturen foreslått å benytte selskapets inntjening EBIT som primitiv tilstandsvariabel. Fordelen med dette rammeverket er at det tar hensyn til at verdien av levered og unlevered selskap ikke kan eksistere samtidig. Ved modellering av unlevered value vil utstedelse av gjeld umiddelbart føre til at denne størrelsen ikke lenger eksisterer. EBIT vil derimot være lite sensitivt overfor endring i kapitalstruktur, og er følgelig et godt valg som primitiv variabel. En slik egenskap knyttet til selskapets inntjening stammer fra en standard antakelse i finans som sier at investerings- og finansieringsbeslutninger er uavhengige. Intuitivt vil dessuten inntektsgenereringen være uavhengig av hvem som har krav på inntektene. For nærmere diskusjon av EBIT-prosess som grunnleggende variabel, se for eksempel Lando (2004).

Vi antar *ikke* at prisprosessen til δ er prisprosessen til et handlet aktivum. Av den grunn kan vi ikke prise kontantstrømmer fra ulike krav innenfor det tradisjonelle "contingent claim" rammeverket. Vi antar imidlertid at det eksisterer et ekvivalent martingale measure Q. Det vil si at det eksisterer andre handlede verdipapir som kan benyttes til å replikere og prise et hvilket som helst annet krav. Se for øvrig diskusjon Ericsson og Reneby (2002).

Vi ønsker kort å diskutere begrepet ekvivalent martingale mål (equivalent martingale measure). Dette er et fiktivt sannsynlighetsmål da det vanligvis ikke representerer investorenes framtidsforhåpninger, men er nyttig for prisingsformål. Definisjonen av et ekvivalent martingale mål:

- Q er et ekvivalent martingale mål dersom det tilfredsstiller følgende to egenskaper:
    i. Q skal være ekvivalent med sannsynlighetsmålet P. Hvis et sett $A \subseteq \Omega$ har $P(A) = 0$, må også $Q(A) = 0$ og vice versa. Dette betyr at hvis sannsynligheten for at et utfall skal inntreffe er 0 under P-målet, må denne sannsynligheten være 0 også under Q-målet – og motsatt.
    ii. For ethvert omsatt verdipapir må $E_t^Q[G_s^*] = G_t^*$ for $s > t$ hvor G^* er betegnelsen for en diskontert gain process. En gain process uttrykker verdien av en underliggende variabel inkludert dens kumulative dividende. For nærmere diskusjon av gain process se Duffie (2001).

Overgangen fra det fysiske sannsynlighetsmålet P til et ekvivalent sannsynlighetsmål Q er spesifisert i Girsanovs teorem. Se Øksendal (2003) eller Duffie (2001) for en grundig diskusjon av bakgrunn for og anvendelser av Girsanov teoremet.

I finansielle modeller i kontinuerlig tid vil eksistens av et ekvivalent martingale mål medføre at det tilnærmet ikke eksisterer arbitrasjemuligheter i økonomien. I litteraturen antas det at sammenhengen mellom ingen arbitrasjemuligheter og eksistens av ekvivalent martingale measure er eksakt.

Vi antar følgende kontinuerlige prisprosess for EBIT under Q-målet:

$$d\delta_t = r_t \delta_t dt + \sigma_\delta \delta_t dW_t^{\delta Q} \tag{4.1}$$

hvor $W_t^{\delta Q}$ er en standard Brownian motion under sannsynlighetsmålet Q. Renten r_t er gitt ved Vasiceks rentemodell, se kapittel 4.2.

Driften r_t i (4.1) er valgt ut i fra modelleringshensyn. Ettersom EBIT ikke er et handlet aktivum, eksisterer det ikke noen driftsrestriksjon som tilsier at driften til prosessen nødvendigvis skal være den risikofri renten. Generelt vil derfor driften avvike fra den risikofrie renten. Bakgrunnen for at driften likevel settes lik kortrenten r_t er at en slik formulering vil simplifisere sammenhengen mellom selskapets inntjening EBIT og verdien av selskapets aktiviteter V.

Som i benchmarkmodellen antar vi at utstedelse av gjeld gir selskapet en skattefordel. Rentene selskapet betaler på gjelden kan trekkes fra på skatten. For modelleringsformål antar vi at denne skattefordelen vil være en andel τ av kupongutbetalingene så lenge selskapet er solvent. Følgelig vil selskapets netto kontantstrøm til betaling av kupong til kreditor være gitt ved $(1-\tau)C$.

Det antas videre at EBIT benyttes til å dekke kupongutbetalinger til gjeld, og ethvert overskudd $[\delta_t - (1-\tau)C]$, gitt at selskapet er solvent, blir delt ut til aksjonærene som dividende.

I tillegg antas det at selskapet består utelukkende av gjeld med horisont T og egenkapital. Vi antar at aksjonærene eier selskapet fram til tidspunkt T, for så å selge unna selskapet til en scrap-value som defineres i kapittel 4.3. Samtidig vil det være mulig for selskapet å kjøpe tilbake den utstedte gjelden på et tidspunkt $t < T$, se diskusjon kapittel 4.5.

4.2 – Stokastisk renteprosess

Vi tar utgangspunkt i at den kortsiktige renten følger en Ornstein-Uhlenbeck prosess, se for eksempel Ornstein og Uhlenbeck (1930). Mer spesifikt tar vi utgangspunkt Vasiceks (1977) modell for utvikling av den kortsiktige renten (for nærmere diskusjon av Vasiceks modell og alternative rentemodeller, se for eksempel Cairns (2004)):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^{rQ} \tag{4.2}$$

hvor κ, θ, σ_r for enkelhelt skyld antas å være konstante parametere. Prosessen (4.2) blir ofte betegnet som en elastisk Random Walk, det vil si en Markov prosess med normalfordelte inkrementer. Driften $\kappa(\theta - r_t)$ uttrykker prosessens "Mean Reversion" egenskaper. Dette innebærer at kortsiktige renter over tid vil tendere til å ligge i nærheten av det langsiktige risikonøytrale likevektsnivået θ. Parameteren κ antyder hvor raskt kortsiktige renter vil justere seg mot det langsiktige likevektsnivået. Videre uttrykker parameteren σ_r den lokale volatiliteten av den kortsiktige renten. Prosessen dr_t antas å være en kontinuerlig funksjon av tiden t.

Denne stokastiske differensiallikningen (4.2) kan vi løse ved hjelp av Itôs lemma. Ved å bruke Itôs lemma på funksjonen formulert som $f(r,t) = re^{\kappa t}$ finner vi:

$$d(re^{\kappa t}) = \left[f_1(r,t)\kappa(\theta - r_t) + \frac{1}{2} f_{11}(r,t)\sigma_r^2 + f_2(r,t) \right] dt + f_1(r,t)\sigma_r dW_t^{rQ}$$
$$= \left[e^{\kappa t}\kappa(\theta - r_t) + r\kappa e^{\kappa t} \right] dt + \sigma_r e^{\kappa t} dW_t^{rQ}$$

som gir oss:

$$d(re^{\kappa t}) = \kappa\theta e^{\kappa t} dt + \sigma_r e^{\kappa t} dW_t^{rQ}$$

Vi integrerer uttrykket med hensyn på tiden:

$$\int_t^T d(re^{\kappa v}) = \kappa\theta\int_t^T e^{\kappa v}dv + \sigma_r\int_t^T e^{\kappa v}dW_v^{rQ}$$

$$r_T e^{\kappa T} - r_t e^{\kappa t} = \theta e^{\kappa T} - \theta e^{\kappa t} + \sigma_r\int_t^T e^{\kappa v}dW_v^{rQ}$$

Vi flytter over og ordner uttrykket:

$$r_T e^{\kappa T} = e^{\kappa t}(r_t - \theta) + \theta e^{\kappa T} + \sigma_r\int_t^T e^{\kappa v}dW_v^{rQ}$$

Dermed kan vi finne et eksplisitt uttrykk for r_T:

$$r_T = e^{-\kappa(T-t)}(r_t - \theta) + \theta + \sigma_r\int_t^T e^{-\kappa(T-v)}dW_v^{rQ} \tag{4.3}$$

Vi observerer at den kortsiktige renten r_T er normalfordelt. Leddet $e^{-\kappa(T-t)}(r_t - \theta) + \theta$ er en deterministisk funksjon, det vil si en funksjon uten stokastiske elementer og som kun varierer med tiden. Vi ser nå på faktoren $\int_t^T e^{-\kappa(T-v)}dW_v^{rQ}$. Generelt vil uttrykk som $\int_t^T \zeta(u)dW_u$ være normalfordelt gitt at ζ er en deterministisk funksjon. Det følger av definisjonen på et stokastisk integral at faktoren $\int_t^T e^{-\kappa(T-v)}dW_v^{rQ}$ kan skrives so $\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\kappa(T-v_i)}\left(W_{v_{i+1}}^{rQ} - W_{v_i}^{rQ}\right)$. Fra definisjonen på Brownian motion vet vi at inkrementet $W_{v_{i+1}}^{rQ} - W_{v_i}^{rQ} \sim N(0, v_{i+1} - v_i)$, og følgelig vil renten r_T være normalfordelt.

Som det videre modelloppsettet vil avsløre, vil det ikke være mulig å bestemme analytiske løsninger for verdien av gjeld og egenkapital i dette rammeverket. Av den grunn vil disse verdiene måtte bestemmes numerisk. I denne sammenheng vil Monte-Carlo simulering være en hensiktsmessig fremgangsmetode. Da vi allerede har gjort rede for at r_T er normalfordelt, ønsker vi å bestemme forventning og varians til uttrykket i (4.3) for å kunne implementere simuleringen.

Vi ser at forventningen under sannsynlighetsmålet Q er gitt som:

$$E_t^Q[r_T] = E_t^Q\left[e^{-\kappa(T-t)}(r_t-\theta)+\theta+\sigma_r\int_t^T e^{-\kappa(T-v)}dW_v^{rQ}\right]$$
$$= E_t^Q\left[e^{-\kappa(T-t)}(r_t-\theta)+\theta\right]+E_t^Q\left[\sigma_r\int_t^T e^{-\kappa(T-v)}dW_v^{rQ}\right]$$

og ettersom $E_t^Q\left[\sigma_r\int_t^T e^{-\kappa(T-v)}dW_v^{rQ}\right]=0$, får vi at forventningen til r_T er gitt ved:

$$E_t^Q[r_T] = e^{-\kappa(T-t)}(r_t-\theta)+\theta \tag{4.4}$$

Fra sannsynlighetsteorien vet vi at variansen bestemmes slik:

$$Var[r_T] = E\left[\left(\int_t^T \sigma_r e^{-\kappa(T-v)}dW_v^{rQ}\right)^2\right]$$

Ved å benytte Itôs isometri (se for eksempel Øksendal (2003)) får vi at:

$$Var[r_T] = E\left[\int_t^T \sigma_r^2 e^{-2\kappa(T-v)}dv\right]$$

Vi integrerer og setter inn for integralgrensene:

$$Var[r_T] = \sigma_r^2\left[\frac{1}{2\kappa}\left(e^{-2\kappa(T-v)}\right)\right]_t^T$$
$$= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa}\left[e^{-2\kappa(T-T)}-e^{-2\kappa(T-t)}\right]$$

som til slutt gir oss variansen til r_T:

$$Var[r_T] = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa}\left[1 - e^{-2\kappa(T-t)}\right] \tag{4.5}$$

Med andre ord vil $r_T \sim N\left(e^{-\kappa(T-t)}(r_t - \theta) + \theta, \frac{\sigma_r^2}{2\kappa}\left[1 - e^{-2\kappa(T-t)}\right]\right)$

I et rentemiljø karakterisert ved Vasiceks rentemodell, kan det vises (se Appendix A) at prisen $P(t,T)$ på tid t av en nullkupongobligasjon med forfall tid T er gitt ved:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r_t} \tag{4.6}$$

hvor $A(t,T)$ og $B(t,T)$ er bestemt som:

$$B(t,T) = \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(T-t)}\right) \tag{4.6i}$$

$$A(t,T) = e^{\left[(B(t,T)-(T-t))\left(\theta - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa}(B(t,T))^2\right]} \tag{4.6ii}$$

Denne verdien på nullkupongobligasjon gitt ved likning (4.6) vil benyttes som diskonteringsfaktor i forbindelse med verdsettelse av blant annet egenkapital og gjeld i modellen.

Det er knyttet enkelte alvorlige begrensninger til Vasiceks rentemodell. For det første er modellen en såkalt en-faktor modell. Dette innebærer at dagens terminstruktur kun avhenger av utvikling av en faktor, i denne sammenheng kortrenten r_t. Denne egenskapen begrenser modellens fleksibilitet og relevans til praktiske forhold. Videre er modellen konstruert slik at negative rentesatser kan oppstå. Dette er en alvorlig svakhet ved Vasiceks oppsett, men for realistiske valg av parametere vil negative renter inntreffe med en lav, dog strengt positiv sannsynlighet.

4.3 – Verdien av selskapets aktiviteter

For verdsettingsformål kan det være svært nyttig å ha et uttrykk for verdien av selskapets aktiviteter V. Hvordan denne verdien utvikler seg, avhenger av spesifikasjonene som vi gjør med hensyn til EBIT-prosessen og kortrenteprosessen.

Det vil være naturlig å anta at det er en form for samvariasjon mellom utvikling i EBIT og kortrenten. Følgelig ønsker vi å tillate korrelasjon mellom de to prosessene. Korrelasjonen mellom Brownian Motion i EBIT-prosessen og renteprosessen antas å være konstant og modelleres på følgende måte:

$$d\left\langle W^{\delta Q}, W^{rQ} \right\rangle_t = \rho dt$$

Ved å introdusere W_{1t}^Q og W_{2t}^Q som to ortogonale (uavhengige) Brownian motions spesifisert ved $dW_t^{rQ} = dW_{1t}^Q$ og $dW_t^{\delta Q} = \rho dW_{1t}^Q + \sqrt{1-\rho^2}\, dW_{2t}^Q$, kan vi omskrive EBIT-prosessen (4.1) til:

$$d\delta_t = r_t \delta_t dt + \sigma_\delta \delta_t \rho dW_{1t}^Q + \sigma_\delta \delta_t \sqrt{1-\rho^2}\, dW_{2t}^Q \tag{4.7}$$

Denne modifiserte prosessen (4.7) vil altså være utgangspunktet for den videre analysen. W_{1t}^Q uttrykker sjokk i rentemarkedet som påvirker utviklingen av EBIT, mens W_{2t}^Q uttrykker alle andre markedssjokk som påvirker EBITs utvikling. I tillegg vil EBIT påvirkes av rentesjokk indirekte ettersom driftleddet er nettopp den risikofrie renten r_t.

Gitt denne spesifikasjonen på EBIT-prosessen, kan vi etablere en sammenheng mellom EBIT og verdien av selskapets aktiviteter V i perioden (t,T). Den er gitt ved:

$$V(t,T) = E_t^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^u r_s ds} \delta_u du\right] = \delta_t (T-t) \tag{4.8}$$

Denne sammenhengen er ikke-triviell for et generelt driftledd for EBIT-prosessen, og leseren henvises til Appendiks B for et grundig bevis for likheten (4.8) ovenfor.

Vi ser at verdien av selskapets aktiviteter går mot 0 når gjenværende levetid av selskapet går mot null. For kredittrisikomodellen vår vil dette innebære at V vil bli null ved forfall av gjelden. Konsekvensen av dette vil følgelig være at selskapet alltid vil likvideres ved forfall av gjelden med et slikt oppsett, gitt at selskapet ikke likvideres på et tidligere tidspunkt.

For å unngå dette problemet antar vi at selskapets eiendeler kan selges unna på tidspunktet for forfall av gjelden. Med en slik ”scrap-value” Ψ inkludert, finner vi enkelt at verdien av selskapets aktiviteter på tidspunkt t er gitt ved:

$$V(t,T) = \delta_t(T-t) + P(t,T)\Psi \qquad (4.9)$$

Dette uttrykket (4.9) for verdien av selskapets aktiviteter benyttes i den videre fremstillingen.

4.4 – Konkursprosedyrer og likvidering

Leland (1994) lar konkurs være ensbetydende med likvidering av selskapet. I denne modellen skiller vi imidlertid mellom konkurs og likvidering. Når selskapet er insolvent, vil amerikansk konkurslovgivning (”Chapter 7 & 11”) kunne åpne for både likvidering og konkurs. Med konkurs mener vi at selskapet likevel har adgang til å fortsette bedriftens aktiviteter i en begrenset periode, jamfør ”Chapter 11”. Med likvidering mener vi at selskapets aktiva blir solgt, enten i deler og eller som en fullstendig enhet, jamfør ”Chapter 7”.

Ifølge Bebchuk (1998) vil de aller fleste større børsnoterte selskaper gå inn i en konkursperiode etter ”Chapter 11” framfor å bli likvidert umiddelbart. I denne perioden har verken aksjonærer eller långivere adgang til å motta krav på selskapet, det vil si henholdsvis dividende eller utbytte. Man kan intuitivt tenke på ”Chapter 11” som et salg av selskapets aktiva til de eksisterende aksjonærene og långiverne – betalingen for selskapet er at disse aksjonærene og långiverne mister retten til å motta krav på selskapet, mens de får en andel hver av det reorganiserte selskapet. Reorganiseringsprosessen vil ende med at bedriften enten blir solvent igjen ved tilfredsstillende økonomiske resultater eller blir likvidert etter ”Chapter 7” reglene hvis de økonomiske resultatene ikke ansees som tilfredsstillende. Ved likvidasjon vil salgssummen bli brukt til først å dekke direkte konkurskostnader, og deretter å dekke kravene på selskapet fra gjeld og egenkapital etter prioritet.

Vi vil her fokusere på selskaper som omfattes av konkursprosedyrer knyttet til ”Chapter 7 & 11”. I det følgende vil vi gjøre rede for betingelsene for å gå konkurs etter ”Chapter 11”, hva som skjer under denne konkursperioden, muligheter for å bli solvent i løpet av konkursperioden og betingelser for å bli likvidert.

4.4.1 – Betingelser for å gå konkurs

I vår modell vil selskapet gå konkurs når EBIT faller ned på et kritisk nivå δ_B. I denne utredningen baserer vi oss på et eksogent gitt kritisk nivå $\delta_B = (1-\tau)C$. Et slikt valg av kritisk nivå på EBIT kan begrunnes ut i fra likviditetshensyn. I en situasjon hvor $\delta_B < (1-\tau)C$ er den aktuelle periodens EBIT utilstrekkelig til å dekke periodens kupongbetaling. Med et slikt oppsett vil altså aksjonærene foretrekke å slå selskapet konkurs framfor å redusere verdien av egenkapitalen. Denne betingelsen vil medføre at konkurs kan inntreffe før verdien av egenkapitalen er 0. Følgelig kan konkurs inntreffe tidligere enn likvidering i Leland (1994). I Lelands modell tas avgjørelsen om likvidering ut fra kriteriet om at verdien av egenkapitalen er 0.

I utgangspunktet vil et eksogent gitt nivå på konkursbarrieren $\delta_B = (1-\tau)C$ ikke optimalisere verdien for verken aksjonærer, kreditorer eller selskapet som en helhet. Et alternativ ville være å bestemme den optimale konkursbarrieren δ_B^* numerisk. Det vil si at man ville bestemme den konkursbarrieren δ_B^* som maksimerer totalverdien av selskapet, såkalt ”first-best outcome”. Imidlertid kan en slik tilnærming medføre at verdien for aksjonærene kan bli negativ, noe som ikke er ønskelig i og med at de har begrenset ansvar i selskapet. Alternativt kunne en såkalt ”smooth-pasting” betingelse implementeres for egenkapitalen, tilsvarende metoden benyttet i benchmarkmodellen. En slik tilnærming ville imidlertid komplisert de numeriske beregningene betraktelig. Følgelig velger vi å benytte den eksogent gitte konkursbarrieren $\delta_B = (1-\tau)C$.

Broadie, Chernov og Sundaresan (2005) diskuterer mer grundig konsekvensene av en konkursbarriere basert på maksimering av henholdsvis totalverdi av selskapet, egenkapitalverdi og gjeldsverdi. Analysene viser at valg av konkursbarriere i stor grad sammenfaller for maksimering av totalverdi og gjeldsverdi. Maksimering av egenkapitalverdien vil på sin side medføre et valg av konkursbarriere som ikke sammenfaller med maksimering av totalverdi av selskapet.

Dette modelloppsettet fokuserer på muligheten for å slå selskapet konkurs etter "Chapter 11" når selskapet er i konkursfare. I praksis vil imidlertid selskapet ha mulighet til å restrukturere gjelden ved konkurs-/likvideringsfare i stedet for å benytte seg av "Chapter 11" rammeverket. Ved bankgjeld kan dette gjøres gjennom private forhandlinger og ved obligasjonsgjeld kan dette gjøres gjennom ombyttingstilbud. Det eksisterer en rekke modeller som tar for seg restrukturering utenfor "Chapter 11" prosedyren ved konkursfare, se for eksempel Anderson og Sundaresan (1996) og Christensen, Flor, Lando og Miltersen (2002).

Vi er interessert i et uttrykk for tidspunktet når konkursperioden innledes. Mer konkret vil vi definere tidspunktet for den sist inntrufne konkursen:

$$\pi_t^{\delta_B} = \sup\{s \le t : \delta_s = \delta_B\}$$

En slik presis formulering av konkurstidspunktet vil være nyttig i forbindelse med verdsetting av blant annet gjeld og egenkapital.

4.4.2 – Konsekvenser av å være konkurs ("Chapter 11")

I vårt modelloppsett antas EBIT-prosessen å være den samme både i konkursperioden og i solvent tilstand. Bakgrunnen for denne formuleringen er at konkurs i modellen inntreffer når selskapet er illikvid, det vil si når EBIT er mindre enn kupongkostnaden etter skatt, og ikke nødvendigvis som følge av underliggende fundamentale vanskeligheter.

Selskapet vil imidlertid bli eksponert for distress kostnader i konkursperioden. Disse kostnadene kan eksempelvis være knyttet til svekket omdømme, juridiske honorarer, tap av kunder og flukt av nøkkelmedarbeidere. Disse kontinuerlig påløpende kostnadene ω antas å være proporsjonale med verdien av bedriftens aktiviteter V. Intuitivt virker dette rimelig fordi et selskap med store verdier av bedriftens aktiviteter får som oftest større kostnader knyttet til å være i konkurs tilstand målt i absolutt skala enn en bedrift med mindre verdier. Firmaet har altså et klart incentiv til å komme seg ut av konkurs for å slippe disse kostnadene. Disse kostnadene vil bli tatt hensyn til i modellen ved at de reduserer egenkapitalverdien.

Aksjonærene må altså løpende dekke disse kostnadene selv om de ikke mottar noen utbetaling fra driften i konkursperioden. Følgelig påvirkes ikke EBIT-prosessen i seg selv.

Konkursbegjæring etter ”Chapter 11” åpner for såkalt ”automatic stay” av selskapets eiendeler. Dette innebærer at kreditorene hindres i å likvidere selskapet i konkursperioden. Samtidig tillates det ingen dividendeutbetalinger til aksjonærene i denne perioden.

Vi ønsker å beskrive hvordan behandlingen av selskapet påvirkes i konkursperioden. Mer spesifikt vil vi presentere et modelloppsett for behandling av kupong og EBIT i dette tidsrommet.

4.4.2.1 – Akkumulert kupong konto

”Automatic stay” medfører i praksis at kupongutbetaling til all usikret gjeld stoppes i konkursperioden. For å modellere kupongutbetalingene som kreditorene ville ha mottatt hvis selskapet var solvent i dette tidsrommet, tar vi utgangspunkt i en akkumulert kupong konto A_t. På denne kontoen akkumuleres ubetalte kuponger med påfølgende renter. Vi antar at akkumulert kupong konto utvikler seg på følgende måte:

$$dA_t = \begin{cases} r_t A_t dt + Cdt & hvis \;\; \delta_L \leq \delta_t < \delta_B \\ -A_t dt & hvis \;\; \delta_t \geq \delta_B \end{cases} \tag{4.10}$$

Når selskapet er i reorganiseringsperioden, det vil si når $\delta_L \leq \delta_t < \delta_B$, vil kontoen på ethvert tidspunkt vokse med kupong og renter på kontoen. Når selskapet returnerer til solvent tilstand, det vil si $\delta_t = \delta_B$, vil kontoen bli nullstilt. Mer om overgangen fra konkurs til solvent tilstand i kapittel 4.4.3.

4.4.2.2 – Akkumulert EBIT-konto

I løpet av konkursperioden vil selskapet ikke kunne betale dividende til aksjonærene. Vi ønsker derfor å akkumulere opp EBIT som påløper på en konto i konkursperioden på tilsvarende måte som vi gjorde for kupongutbetalingene. Vi tar utgangspunkt i en akkumulert EBIT-konto S_t, hvor EBIT akkumuleres med påfølgende renter. Den akkumulerte EBIT-kontoen antas å utvikle seg på følgende måte:

$$dS_t = \begin{cases} r_t S_t dt + \delta_t dt & hvis \;\; \delta_L \leq \delta_t < \delta_B \\ -S_t dt & hvis \;\; \delta_t \geq \delta_B \end{cases} \tag{4.11}$$

Så lenge selskapet er i restruktureringsperioden, det vil si når $\delta_L \leq \delta_t < \delta_B$, vil kontoen på ethvert tidspunkt vokse med EBIT og tilhørende renter på kontoen. Når selskapet returnerer til solvent tilstand, det vil si $\delta_t = \delta_B$, vil kontoen bli nullstilt. Mer om overgangen fra konkurs til solvent tilstand i kapittel 4.4.3.

4.4.3 – Muligheter for å bli solvent

Etter amerikansk konkurslovgivning vil selskapet bli tildelt en tidsfrist for hvor lenge selskapet maksimalt kan oppholde seg i konkurs tilstand. Vi definerer denne tildelte tidsfristen som nådeperioden d ("grace period"). En slik nådeperiode kan typisk strekke seg over mange år.

I vårt modelloppsett er betingelsen for å bli solvent at EBIT returnerer opp til nivået δ_B, det vil si $\delta_t = \delta_B$, innen nådeperiodens slutt. Det er ingen automatikk i at $\delta_t = \delta_B$ vil være det nivået hvor selskapet igjen blir solvent, men denne antakelsen benyttes for ikke å komplisere modellimplementeringen videre. Tidspunktet hvor selskapet igjen blir solvent beskrives ved notasjonen Γ.

Når selskapet returnerer til solvent tilstand, vil kreditorene få tilbakebetalt en andel $\xi \in [0,1]$ av de akkumulerte kupongene A_t fra selskapet. Kreditorene ettergir altså andelen $(1-\xi)$ av de akkumulerte kupongene, noe som medfører at aksjonærene kan tjene på en "Chapter 11" konkursprosess. Ofte vil verdien av fortsatt drift av selskapet være større enn likvideringsverdien for samfunnet som helhet. Følgelig er det ønskelig at aksjonærene fortsetter driften av selskapet. Etter amerikansk lovgivning er det opp til aksjonærene og långiverne å bli enige om å fordele verdier når selskapet går fra konkurstilstand til solvent tilstand. Amerikansk lovgivning er altså basert på at fordelingen av verdier skal skje ved hjelp av forhandlinger. En plan knyttet til reorganiseringen vil altså kun bli fulgt opp om både aksjonærer og långivere godkjenner planen.

En måte å vurdere hvor godt dette forhandlingssystemet er, kan skje gjennom å vurdere to effisiens regler fra Bebchuk (1998) som slike fordelingsregler må følge:

i.) Maksimere verdien av selskapet ex post. I så henseendet er det essensielt at kostnader og dermed tiden i reorganiseringsperioden minimeres. Det er også essensielt at verdien av aktiva blir maksimert ved slutten av reorganiseringsperioden, det vil si at selskapet kun skal fortsette som virksomhet hvis verdien av denne virksomheten er større enn verdien av likvidering av aktiva. Det kan også åpnes for delvis likvidering av aktiva.

ii.) Sikre at ex ante insentiver gir riktig ex post fordeling for både aksjonærer og långivere.

Ett viktig problem for å redegjøre for regler for fordeling av verdier mellom aksjonærer og långivere, har vært hvordan man kan verdsette verdien av det reorganiserte selskapet.

Forhandlingssystemet vil i følge Bebchuk (1998) og Gertner and Scharfstein (1991) i begrenset grad oppfylle effisiensreglene. For det første vil i.) ikke bli oppfylt da reorganiseringsperioder ofte tar betydelig tid. I en større konkurs-sak på 1980-tallet i USA løp de direkte juridiske kostnadene på $ 3,5 millioner i måneden målt i datidens priser, jamfør Cutler and Summers (1988). I tillegg påløper sannsynligvis enda større kostnader knyttet til forstyrret ledelse, tap av kunder og flukt av nøkkelansatte. For det andre vil ikke ii.) bli oppfylt da empiri, som for eksempel Bebchuk (1998) og White (1994), viser at forhandlingsspillet under ”Chapter 11” favoriserer aksjonærene framfor långiverne. Aksjonærene kan på ulike måter overføre verdier fra kreditorene til seg selv. En måte å skaffe seg forhandlingsmakt på, er gjennom å ha mulighet til å hindre eller utsette beslutninger som kreditorene vil ha gjennomført og dermed redusere verdi for kreditorene ved konkurs – aksjonærene har lite å tape da egenkapitalverdien allerede befinner seg i grenselandet rundt 0. En annen måte å oppnå forhandlingsmakt på for aksjonærene, er om aksjonærene truer med å trekke ut verdier fra selskapet. Selv om selskapet er overvåket av en egen konkursrett, er det et begrenset spillerom for aksjonærene til å foreta beslutninger som øker egenkapitalverdi og reduserer selskapsverdien. Videre har aksjonærene forhandlingsmakt gjennom at de, og ikke långiverne, kan legge fram reorganiseringsforslag. Mer om aksjonærenes forhandlingsmakt kan leses blant annet i Eberhardt, Moore og Roenfeldt (1990), Franks og Torous (1989) og Weiss (1990).

Da forhandlingssystemet har visse svakheter, vil vi her kort redegjøre for alternative teoretiske alternativer til hvordan reorganiseringsprosedyrene kan foregå. Roe (1983) redegjør for auksjonsprinsippet – selge ut en del av selskapet for å få en pekepinn på hvordan markedet vurderer verdien av det reorganiserte selskapet. Senere forskning på dette området, blant annet Jensen (1991), har argumentert for at man kan legge ut hele selskapet for salg. Formålet med auksjonsprinsippet er å få størst mulig verdi ut av selskapet, men dette prinsippet blir av mange betraktet som uforenlig med ”Chapter 11” prosedyren og medfører en direkte ”Chapter 7” prosess ved insolvens. Det kan imidlertid reises spørsmålstegn til om en slik auksjon alltid vil fungere bra. I mange tilfeller kan potensielle kjøpere, som for eksempel konkurrenter, ha sammenfallende økonomiske problemer som det konkursrammede selskapet (på grunn av konjunkturer i bransjen), jamfør Shleifer and Vishny (1992).

Ett annet teoretisk alternativ til forhandlingssystemet er det såkalte opsjonsalternativet som ble foreslått av Bebchuk (1988). Kort fortalt får her aksjonærene utdelt en type opsjon på selskapet og långiverne mottar en annen type opsjon på selskapet. Fordelingen av ex post verdi i det reorganiserte selskapet vil avhenge av hvordan aksjonærene og långiverne utnytter sine opsjoner. Uansett hva selskapsverdien blir, er dette opsjonsalternativet designet på en slik måte at ingen av partene kan klage på at de fikk mindre verdi enn de hadde krav på. Opsjonsalternativet vil sikre at reorganiseringstiden blir begrenset (selv om dette alternativet tar litt mer tid enn auksjonsalternativet), samt vil sikre en rettferdig fordeling av aktiva gjennom at enhver part som har krav på selskapet på egen hånd kan vurdere hvordan sin opsjon skal utøves. Det kan imidlertid reises spørsmålstegn til hvordan kapitalstruktur og styring av selskapet skal etableres i det reorganiserte selskapet, og dette er noe som blant annet studeres nærmere i Aghion, Hart and Moore (1992).

I det følgende vil vi ta utgangspunkt i forhandlingssystemet ettersom dette er det gjeldende etter amerikansk konkurslovgivning per dags, og fordi etter vår forståelse av amerikansk juss foreligger det ingen realistiske planer knyttet til større prinsipielle endringer av amerikansk konkurslovgivning i nær framtid.

For å innfri sine forpliktelser overfor kreditorene, må selskapet tilbakebetale en andel av de akkumulerte kupongene A_t justert for skatt. Dette beløpet kan uttrykkes ved $\xi(1-\tau)A_t$ og vil i denne sammenhengen dekkes ved å benytte midler fra kontoen for akkumulert EBIT. Med en slik forutsetning kan det oppstå to ulike scenarier på tidspunkt Γ:

i. Dersom verdien av akkumulert EBIT er større enn akkumulert kupong, det vil si $S_\Gamma \geq \xi(1-\tau)A_\Gamma$, vil EBIT-kontoen dekke forpliktelsene overfor kreditorene, og eventuelt overskytende beløp deles ut til aksjonærene som dividende.

ii. I tilfellet hvor akkumulert EBIT er mindre enn akkumulert kupong, det vil si $S_\Gamma < \xi(1-\tau)A_\Gamma$, vil beløpet på EBIT-kontoen i sin helhet bli benyttet til å betale kreditorene. Differansen $\xi(1-\tau)A_\Gamma - S_\Gamma$ dekkes ved at selskapet foretar en aksjeemisjon for å skaffe midler til å oppfylle forpliktelsen.

Fra tidspunktet hvor selskapet returnerer til solvent tilstand vil selskapet slippe å betale konkurskostnader ω, og kupong og dividende kan betales fortløpende ut til henholdsvis långivere og aksjonærer som vanlig for en solvent bedrift. Man har oppfylt sine forpliktelser fra konkursperioden, noe som modelleres ved at akkumulert kupong og EBIT-kontoene nullstilles i det selskapet igjen blir likvid. Se kapittel 4.3.2.1 og 4.3.2.2 for hvordan denne nullstillingen gjøres rent teknisk. Selskapet kan imidlertid bli konkurs igjen, og da vil konkursprosedyrene begynne på nytt. Det modelleres ingen hukommelse med henhold til tidligere konkurshistorie, slik at konkursprosedyrene vil være de samme uavhengig av hvor mange ganger og hvor lenge selskapet har vært konkurs før. Galai, Raviv og Wiener (2003) presenterer en modell hvor det implementeres en ”likvideringstrigger” som akkumulerer lengde og alvorlighet av tidligere og nåværende reorganiseringsprosess(-er).

4.4.4 – Betingelser for å bli likvidert og konsekvenser av dette (”Chapter 7”)

Det andre utfallet av reorganiseringsprosessen er at selskapet blir likvidert. I vårt modelloppsett kan likvidering av selskapet forekomme på to ulike hovedmåter.

For det første kan selskapet bli likvidert dersom det oppholder seg i konkurs tilstand i en tidsperiode som overstiger nådeperioden d. I praksis tilsvarer dette at konkursdomstolen fjerner ”automatic stay” av eiendelene ved nådeperiodens utløp samtidig som kreditorene ikke er villige til å utvide denne.

For det andre inntreffer likvidering av selskapet dersom verdien av EBIT faller ned på et kritisk nivå δ_L innen nådeperiodens slutt. Dette kritiske nivået bestemmes i modellen ut fra betingelsen om at egenkapitalverdien er 0, tilsvarende Leland (1994). I tillegg vil selskapet likvideres på sluttidspunktet T (ved forfall av gjelden) dersom de totale verdiene i selskapet ikke overstiger selskapets forpliktelse til å betale kupong og prinsipal til kreditor. Også dette vil tilsvare en situasjon hvor egenkapitalverdien er 0.

Ved likvidering påløper en likvideringskostnad. Denne kostnaden uttrykkes som en andel α av (totale) gjenværende verdier på likvideringstidspunktet. For å opprettholde absolutt prioritet regelen, antar vi at den gjenværende verdien justert for likvideringskostnader tilfaller kreditorene i sin helhet inntil denne verdien overstiger kupong og prinsipal. Det beløpet som eventuelt måtte være igjen etter kreditorene har fått dekket sin prinsipal og kupong vil tilfalle aksjonærene. En slik situasjon, hvor også aksjonærene mottar en kontantstrøm etter at selskapet er likvidert, vil for eksempel kunne inntreffe dersom selskapet likvideres som følge av at nådeperioden er utløpt.

Tidspunktet for likvidering av selskapet vil naturlig nok være en kritisk størrelse i forhold til verdsetting av selskapets gjeld og egenkapital. For å bestemme dette tidspunktet, trenger vi formuleringer for ulike muligheter for likvideringstidspunkt.

Tidspunktet for likvidering som følge av utløp av nådeperioden kan defineres som:

$$\pi_t^d = \inf\left\{s \ge t : s - \tau_s^{\delta_B} \ge d : \delta_s \le \delta_B\right\}$$

Videre kan tidspunkt for likvidering som følge av at egenkapitalverdien faller til 0 defineres som:

$$\pi_t^{\delta_L} = \inf\left\{s \ge t : E\left(\delta_s\right) = 0\right\}$$

Dermed vil det være formålstjenelig å definere tidspunktet for likvidering som:

$$\Pi_t = \min(\pi_t^d, \pi_t^{\delta_L})$$

Likvideringstidspunktet vil altså være det første tidspunktet av likvidering som følge av utløp av nådeperioden og likvidering som følge av at egenkapitalverdien faller til 0.

4.5 – Gjeldsstruktur og reorganiseringsmuligheter

I statiske modeller vil størrelsen på kupong C og prinsipal P knyttet til obligasjonsgjeld være gitt for all framtid. I vår modell ønsker vi å legge til en egenskap som tilsier at gjelden kan restruktureres ved at den tidligere utstedte gjelden kan kjøpes tilbake og ny nullkupongsgjeld kan utstedes. Intuisjonen for å gjennomføre en slik restrukturering, er at det kan oppstå forhold som vil gjøre det gunstig for selskapet å kjøpe tilbake gjelden.

Modeller for dynamisk restrukturering av gjeld har blant annet blitt foreslått av Kane, Marcus, og McDonald (1984, 1985) og Fischer, Heinkel, og Zechner (1989). Anderson og Sundaresan (1996) og Mella-Barral og Perraudin (1997) har gjort viktige bidrag videre på dette området, selv om mange vil si at disse ikke er helt dynamiske da disse modellene i liten grad er egnet til å vise hvordan et selskap kan komme seg ut av konkursfare. Disse modellene vil typisk kun endre på kupongen og ikke prinsipalen, og de representerer dermed ikke en total restrukturering av selskapets kapitalstruktur.

Vi ønsker å modellere en situasjon med endelig gjeld. På tidspunkt t har gjelden forfall på tidspunkt T hvor $T \geq t$. Bakgrunnen for valget av gjeld med endelig løpetid fremfor gjeld med uendelig horisont, har sammenheng med at modellimplementeringen innebærer Monte-Carlo simulering. Følgelig vil vi av praktiske årsaker foretrekke endelig løpetid på gjelden. Dessuten er endelig løpetid på gjelden mer vanlig i praksis enn uendelig løpetid.

På ethvert tidspunkt $t < T$ tar aksjonærene stilling til hvorvidt det vil lønne seg å kjøpe tilbake ("calle") gjelden som initialt ble utstedt ved å utstede en ny nullkupongsobligasjon til *markedsvilkår*. Følgelig vil selskapet kunne dra fordel av at utviklingen i kortrenten endrer verdien av selskapets utestående forpliktelse overfor kreditorene. Siden nullkupongsobligasjonen kan utstedes til markedsvilkår, vil det være optimalt for aksjonærene å kjøpe tilbake gjelden på tidspunkt t dersom verdien av den utstedte gjelden på dette tidspunktet overstiger prinsipalen på gjelden. Vi antar at selskapet ikke har rett til å innfri lånet dersom selskapet befinner seg i konkurs tilstand. Det er også viktig å understreke at tilbakekjøp av gjelden kun kan inntreffe på maksimalt ett tidspunkt – det vil ikke være mulig med nytt gjenkjøp av gjelden etter førstegangs tilbakekjøp.

Kriteriet for gjenkjøp av gjelden vil altså være at verdien av den utstedte gjelden overstiger prinsipalen på lånet. Her er det imidlertid viktig å huske på at selskapet får en skattefordel ved å utstede kupongobligasjon. Følgelig vil det relevante kriteriet for tilbakekjøp av gjeld være at den *skattejusterte* verdien av det utstedte lånet overstiger prinsipalen. I implementeringen vil verdien av det utstedte lånet beregnes ved hjelp av den såkalte (ikke-skattejusterte) ”Continuation value” av gjelden CV_t^D. Beregning av CV_t^D diskuteres i detalj i kapittel 5.2.4. Siden betaling av prinsipalen på lånet ikke gir skattefordel, vil den relevante verdien av gjelden for aksjonærene være $CV_t^D(1-\tau)+\tau Pe^{-R(T-t)}$, for et passende avkastningskrav R. Aksjonærene vil kjøpe tilbake gjelden dersom denne verdien overstiger prinsipalen på gjelden.

Vi definerer tidspunktet π_t^G for tilbakekjøp av gjeld som

$$\pi_t^G = \inf\left\{s \geq t : CV_s^D(1-\tau)+\tau Pe^{-R(T-s)} > P : \delta_s > \delta_B\right\}$$

Som en hjelpevariabel defineres dessuten tidspunktet Π_t^G som det tidspunktet hvor aksjonærene innfrir sine forpliktelser overfor kreditorene, gitt at selskapet ikke likvideres:

$$\Pi_t^G = \min\left(\pi_t^G, T\right)$$

Vi antar til slutt at det ikke er knyttet kostnader til å ta restrukturere gjelden, verken i forhold til å kjøpe tilbake gjelden før forfall eller når det gjelder å utstede den nye gjelden. I følge mange forskningsarbeid som Kane, Marcus og McDonald (1985), Fischer, Heinkel og Zechner (1989), Goldstein, Ju og Leland (2001) og Childs, Mauer og Ott (2003) vil utelatelse av restruktureringskostnader medføre at selskapet vil restrukturere gjelden kontinuerlig. I vårt oppsett unngår vi imidlertid dette problemet da vi åpner for at restrukturering kun kan inntreffe på ett tidspunkt.

4.6 – Risikonøytral verdsettelse av kontantstrømmen

For å verdsette egenkapital, gjeld og det totale selskapet vil vi benytte metoden for risikonøytral verdsettelse av kontantstrømmer.

I standard finans verdsettes ofte aktiva ved å neddiskontere den sanne fremtidige forventede verdien av en kontantstrøm med et passende avkastningskrav k. Dette avkastningskravet kalles et risikojustert avkastningskrav da det tar hensyn til aktivumets risiko. Avkastningskravet k kan typisk bestemmes ved hjelp av CAPM-modellen eller alternative fremgangsmåter, se for eksempel Brealey og Myers (2000). Generelt kan vi da formulere verdien av et krav (i diskret tid) som:

$$V_t(X) = \sum_{i=t+1}^{T} \frac{E[X_i]}{(1+k)^i}$$

I kvantitativ finans benyttes ofte en alternativ fremgangsmåte for å verdsette finansielle aktiva. Metoden går ut på at man risikojusterer forventet verdi av aktivumet i stedet for å risikojustere avkastningskravet. Aktivumets risiko vil på den måten tas hensyn til i den risikonøytrale forventede verdien. På den måten kan vi diskontere med det risikonøytrale avkastningskravet som er den risikofrie renten. Generelt kan vi da formulere verdien av et krav (i diskret tid) som:

$$V_t(X) = \sum_{i=t+1}^{T} \frac{E^Q[X_i]}{(1+r)^i}$$

Fra "Fundamental Theorem of Asset Pricing" vet vi at metoden for risikofri verdsetting og metoden med risikojustert avkastningskrav skal gi samme verdi. For teori rundt "Fundamental Theorem of Asset Pricing", se blant annet Bingham og Kiesel (1998) eller Hull (1999). Dette er bakgrunnen for metoden med risikonøytral verdsettelse av kontantstrømmer.

Vårt oppsett modellerer utviklingen av EBIT og kortrenten under det risikonøytrale sannsynlighetsmålet Q. Følgelig vil kontantstrømmene som oppstår i modellen være risikojusterte. Dermed er rammeverket etablert for å kunne prise egenkapitalen og gjelden ved hjelp av risikofri verdsettelse. De relevante kontantstrømmene kan dermed neddiskonteres ved å multipliseres med faktoren $P(t,T)$ fra kapittel 4.2 for passende t og T.

4.7 – Verdsettelse av egenkapital, gjeld og totalverdi av selskapet

Med utgangspunkt i modelloppsettet etablert ovenfor kan vi bestemme verdien på egenkapitalen

$$E(\delta_t)=E_t^Q\left[\int_t^{\min(\Pi_t,\Pi_t^G)} e^{-\int_t^s r_u du}\left\{(\delta_s-(1-\tau)C)1_{\{\delta_s\geq\delta_B\}}-\omega V_s 1_{\{\delta_L<\delta_s\leq\delta_B\}}+(S_s-\xi(1-\tau)A_s)1_{\{\delta_s=\delta_B\}}\right\}ds\right]$$
$$+E_t^Q\left[\int_{\Pi_t^G}^T e^{-\int_t^s r_u du}\delta_s ds\right]+E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du}\Psi\left(1-1_{\{s\in\{\Pi_t\}\}}\right)\right]-E_t^Q\left[e^{-\int_t^{\Pi_t^G} r_u du}P\left(1-1_{\{s\in\{\Pi_t\}\}}\right)\right] \tag{4.12}$$

I den første forventningen uttrykker det første leddet at det tas hensyn til at aksjonærene bare mottar dividende så lenge selskapet er likvid. Ledd nummer to uttrykker at en andel ω av verdien av selskapets aktiviteter påløper som kostnader for selskapet når det er i konkurs tilstand. Det tredje leddet representerer at akkumulert EBIT og akkumulert kupong konto gjøres opp når selskapet igjen returnerer til solvent tilstand. Siden verdien av kontoene S_t og A_t er null for $\delta_t \geq \delta_B$, dette leddet vil kun bidra til egenkapitalverdien når man returnerer til $\delta_t = \delta_B$ fra konkurs tilstand. Alle de tre første leddene tilfaller egenkapitalen inntil gjelden eventuelt tilbakekjøpes.

Den neste forventningen uttrykker verdien for aksjonærene ved å motta EBIT fra gjelden eventuelt calles, frem til tidspunktet for salg av selskapet T. I denne perioden vil aksjonærene slippe å betale ut kupong til kreditorene. Samtidig fjernes også muligheten for å gå konkurs/likvideres før forfall, ettersom det ikke er noen kupongutbetaling.

Videre beregnes verdien for aksjonærene av å kunne selge selskapet til scrap-value på tidspunkt T, gitt at selskapet ikke likvideres innen dette tidspunktet.

Til slutt må også aksjonærene tilbakebetale prinsipalen på lånet gitt at selskapet ikke likvideres. Tilbakebetalingen skjer altså eventuelt på tidspunktet Π_t^G.

Tilsvarende kan vi uttrykke verdien på gjelden på følgende måte:

$$
\begin{aligned}
D(\delta_t) = & E_t^Q\left[\int_t^{\min(\Pi_t,\Pi_t^G)} e^{-\int_t^s r_u du}\left\{C1_{\{\delta_s \geq \delta_B\}} + \xi A_s 1_{\{\delta_s = \delta_B\}}\right\}ds\right] \\
& + (1-\alpha)E_t^Q\left[e^{-\int_t^{\Pi_t} r_u du}\left(V_{\Pi_t} + S_{\Pi_t}\right)1_{\{s\in\{\Pi_t\}\}}\right] + E_t^Q\left[e^{-\int_t^{\Pi_t^G} r_u du} P\left(1 - 1_{\{s\in\{\Pi_t\}\}}\right)\right]
\end{aligned}
\qquad (4.13)
$$

Det første leddet innebærer at kreditorene mottar kupongutbetaling så lenge selskapet er i likvid tilstand og inntil gjelden eventuelt tilbakekjøpes. Det neste leddet uttrykker at kreditorene mottar en andel ξ av akkumulert kupong fra konkursperioden i det selskapet returnerer til solvent tilstand, også dette inntil gjelden tilbakekjøpes. Videre tas det hensyn til at kreditorene mottar de resterende verdiene i selskapet justert for likvideringskostnader på likvideringstidspunktet, dersom selskapet likvideres. Det siste leddet uttrykker verdien av å motta prinsipalen på tidspunktet for innfrielse av lånet, gitt at selskapet ikke likvideres.

Dermed kan vi ganske enkelt bestemme totalverdien av selskapet som summen av verdien av gjeld (4.13) og egenkapital (4.12):

$$
v(\delta_t) = E(\delta_t) + D(\delta_t) \qquad (4.14)
$$

Disse uttrykkene for gjeldsverdi og verdi av egenkapitalen kan ikke bestemmes analytisk. Numeriske løsningsmetoder må benyttes. I kapittel 5 vil vi presentere en numerisk fremgangsmåte for verdsettelse av gjeld og egenkapital i dette rammeverket basert på Monte-Carlo simulering.

Kapittel 5: En ny modell: Implementering

I dette kapittelet vil vi implementere modellen som er redegjort for i kapittel 4. For å illustrere modellen vil vi benytte Monte-Carlo simulering.

Først vil vi diskutere og begrunne valg av referanseparamtere som vil benyttes i modellen. Deretter vil den numeriske implementeringen diskuteres i detalj, samt framgangsmåten for metoden. Til slutt vil vi presentere funn fra modellen.

5.1 – Referanseverdier

Parameter	Verdi
δ_0	5
σ_δ	20 %
Ψ	55
κ	22,6 %
θ	6,2 %
σ_r	4,68 %
r_0	5 %
ρ	-0,15
Levetid selskap T	9
Δt	1
Prinsipal P	40
C	5
Løpetid lån T	9
τ	35 %
ω	2 %
α	20 %
ξ	50 %
d	2
Antall simuleringer N	10 000

Vi velger å sette initialverdien av δ til 5. Initialverdien kan fastsettes vilkårlig uten tap av generalitet.

Volatiliteten til selskapets EBIT σ_δ er ikke observerbar i markedet. Av den grunn vil det være svært vanskelig å empirisk estimere denne volatiliteten. Imidlertid kan man finne estimat på volatiliteten til egenkapitalen. Som nevnt tidligere ligger den historiske volatiliteten til avkastningen på en representativ aksje rundt 20 % p.a. Ettersom avkastningen på en aksje i teorien skal reflektere verdiskapning i bedriften på sikt, anser vi det som naturlig å velge referanseverdien til σ_δ på 20 %.

Scrap-value blir i dette oppsettet valgt til å være 55. Bakgrunnen for dette valget tar utgangspunkt i startverdien på EBIT. Scrap-value er estimert som en tilnærmingsverdi av neddiskontert verdi av å motta EBIT fra tidspunkt 9 med uendelig horisont. Scrap-value vil uansett måtte velges noe arbitrært, men verdien 55 står i noenlunde forhold til inntjeningen til selskapet.

Parametrene for Vasicek modellen bestemmes med utgangspunkt i studier gjort av Huang & Huang (2003) og Ait-Sahalia (1999) som referanse. Ait-Sahalia estimerer parametrene ved hjelp av såkalt "Maximum Likelihood" estimering fra månedlige Federal Funds data fra 1963-1998. Studien utført av Huang & Huang finner parameterverdier som i stor grad er i overensstemmelse med tallene fra Ait-Sahalia. Vi velger derfor å benytte verdiene $\kappa = 22{,}6\%$, $\theta = 6{,}2\%$, $\sigma_r = 4{,}68\%$ fra Huang & Huang (2003).

Korrelasjonen mellom Brownian motion for EBIT-prosessen og renteprosessen settes lik $\rho = -0{,}15$. Longstaff og Schwartz (1995) finner en verdi som er $\rho = -0{,}25$. I vårt oppsett vil imidlertid utvikling av EBIT også påvirkes av impulser fra renteendringer i og med at driftleddet i EBIT-prosessen er den risikofrie rentesatsen. Derfor velger vi å nedjustere verdien som er funnet i Longstaff og Schwartz (1995). Intuitivt er det naturlig at denne størrelsen er negativ. En økning i rentenivået ofte innebærer at selskap reduserer sin investeringsetterspørsel som følge av dyrere finansiering, noe som igjen innebærer redusert inntjening for bedriften.

Videre velger vi dagens kortrente r_0 til 5 %. Dette tilsvarer 1 års US Treasury yield per mai 2006 (se www.ustreas.gov).

Vi ønsker her å gjøre et begrunnet valg av periodelengde og tidspunkt for forfall av gjeld T, og vi bruker et resonnement fra Leland (2002) som utgangspunkt for dette valget. Stohs og Mauer (1996) finner at gjennomsnittslig forfallstid for obligasjoner er 4,92 år for B-ratede selskaper. Med en antakelse om uniform fordeling av forfallstidspunkt for obligasjoner kan vi beregne $4{,}92 = \frac{T}{2} \Leftrightarrow T = 9{,}84 \approx 10$ år. Levetiden til selskapet tallfestes i denne numeriske implementeringen til 9 år. For å kunne gjennomføre simulering med tanke på verdsettelse av egenkapital og gjeld, må man velge et endelig antall år man ønsker å simulere over. Av praktiske årsaker, blant annet knyttet til størrelsen av regneark, velges derfor levetiden til 9 år.

Hver periodelengde Δt antas å være på ett år. Også dette valget er tatt på bakgrunn av hva som er mest praktisk i forhold til simuleringen.

Verdi på prinsipal og initial kupong er i utgangspunktet valgt noe arbitrært i og med at vi i modellimplementeringen vil forsøke å optimalisere totalverdien av selskapet med hensyn på nettopp prinsipal og kupong. Verdiene er initialt valgt til $C = 5$ og $P = 50$, verdier som er relativt realistiske gitt størrelsen på δ_0 og Ψ. Se kapittel 5.2.6 for optimalisering av verdier av kupong og prinsipal.

Den amerikanske selskapsskatteraten er 35 %, og vi velger å benytte denne raten for den videre analysen.

Distress kostnadene antas å være på 2 %. Disse kostnadene påløper selskapet kontinuerlig så lenge det er i konkurs tilstand. Av den grunn er det naturlig at verdien velges noe lavt. Et tilsvarende lavt anslag finnes også i Broadie, Chernov og Sundaresan (2005).

Likvideringskostnadene antas å være 20 %. Dette valget følger av tilsvarende diskusjon i kapittel 3.3 i denne utredning.

Andel av akkumulert kupong ξ som selskapet må tilbakebetale til kreditorene settes til 50 % som referanseverdi. I kapittel 4.3.3 diskuteres forhandlingsspillet mellom kreditorer og aksjonærer mer i detalj. Studier, som for eksempel White (1994), viser at andelen av oppsamlet kupong som kreditorene tilgir er betydelig. For illustrasjonsformål velger vi derfor å sette $\xi = 50\%$.

Lengden på nådeperioden d vil være svært individuelt for hvert enkelt selskap. Enkelte bedrifter kan være under ”Chapter 11” prosedyren i flere tiår, mens andre kan returnere til vanlig drift i løpet av noen få måneder. Altman, Edward og Eberhart (1994) og Bekter (1995) finner at en nådeperiode vil i gjennomsnitt vare mellom 2 og 2,5 år. Hotchkiss (1995) beregner at nådeperioden i snitt varer mellom 1,5 år og 2,5 år. Helwege (1999) kommer fram til en typisk nådeperiode på 18 måneder. I vårt oppsett har vi valgt referanseverdien på nådeperiodens lengde til å være 2 år ut i fra disse empiriske resultatene.

Til slutt velger vi å la antall realiserte verdier N for hvert tidspunkt være 10 000. Et større antall simuleringer kunne vært ønskelig, ettersom flere simuleringer øker presisjonen til modellen. Imidlertid vil den relative økningen i presisjon være liten for N større enn 10 000. Samtidig vil økt antall simuleringer øke beregningstiden betraktelig i og med at modellen er relativt kompleks i utgangspunktet. For å imøtekomme disse avveiningene, velger vi altså $N = 10\,000$.

5.2 – Numerisk implementering

Vi vil nå i detalj beskrive fremgangsmåten for numerisk implementering av modellen presentert i kapittel 4. Modellen ”løses” ved hjelp av simulering, og benytter seg blant annet av Longstaff og Schwartz (1999) sin metode. Se appendiks C for en generell presentasjon av denne metoden.

Vi benytter altså Monte Carlo simulering for å implementere modellen numerisk. Simuleringstilnærmingen er relativt enkel å implementere og er velegnet for å analysere de problemstillingene som er presentert i kapittel 4. Interesserte lesere henvises til Boyle (1977) eller Broadie og Glasserman (1996) for en nøye gjennomgang av Monte Carlo simulering. Vi vil her gjengi fremgangsmåten for å implementere modellen.

5.2.1 – Diskretisering av verdiprosessene

Første steg er å diskretisere utviklingen av EBIT, renten, akkumulert kupong og akkumulert EBIT.

Vi genererer N uavhengige replikeringer av bedriftens inntjening EBIT for n intervaller av lengde Δt ved å tilnærme likning (4.7) som:

$$\delta_{t+\Delta t}^{(i)} = \delta_t^{(i)} \exp\left[\left(r_t - \frac{\sigma_\delta^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_\delta \rho \sqrt{\Delta t} Z_1^{(i)} + \sigma_\delta \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta t} Z_2^{(i)}\right] \text{ for } i = 1,2,...,N \tag{5.1}$$

$Z_1^{(i)}$ og $Z_2^{(i)}$ er to uavhengige standard normalfordelte variable, generert ved hjelp av Box-Müller transformasjonen, se Box og Müller (1958).

Tilsvarende kan vi generere N uavhengige replikeringer av kortrenten for n intervaller av lengde Δt ved å tilnærme likning (4.2) som:

$$r_{t+\Delta t}^{(i)} = \left(r_t^{(i)} - \theta\right)e^{-\kappa\Delta t} + \theta + \sigma_r \sqrt{\frac{1-e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} Z_1^{(i)} \qquad \text{for } i = 1,2,...,N \tag{5.2}$$

hvor $Z_1^{(i)}$ er den samme standard normalfordelte variabel som benyttes for simulering av EBIT.

Dermed kan vi bestemme verdien på nullkupongene $P^{(i)}(t+\Delta t, t+2\Delta t)$ og $P^{(i)}(t+\Delta t, T)$ for hver av de realiserte verdiene av kortrenten $r_{t+\Delta t}^{(i)}$. Dette gjøres ved å sette inn for den simulerte verdien $r_{t+\Delta t}^{(i)}$ i formel (4.6).

Følgelig bestemmes verdien av selskapets aktiviteter enkelt ut i fra den simulerte verdien av EBIT:

$$V_{t+\Delta t}^{(i)} = \delta_{t+\Delta t}^{(i)}\left(T - (t+\Delta t)\right) + P^{(i)}(t+\Delta t, T)\Psi \tag{5.3}$$

Vi ønsker dessuten å simulere utviklingen i akkumulert kupong konto. Denne bestemmes ved:

$$A_{t+\Delta t}^{(i)} = \begin{cases} A_t^{(i)} e^{r_t^{(i)}\Delta t} + C_{t+\Delta t} & hvis \;\; \delta_L \le \delta_t < \delta_B \\ 0 & hvis \;\; \delta_t \ge \delta_B \end{cases} \tag{5.4}$$

For akkumulert EBIT-konto simuleres utviklingen som følger:

$$S_{t+\Delta t}^{(i)} = \begin{cases} S_t^{(i)} e^{r_t^{(i)}\Delta t} + \delta_{t+\Delta t} & hvis \;\; \delta_L \le \delta_t < \delta_B \\ 0 & hvis \;\; \delta_t \ge \delta_B \end{cases} \tag{5.5}$$

5.2.2 - Tilstandsvariable

For hvert tidspunkt t i modellen, vil det være svært nyttig å introdusere noen tilstandsvariable som etablerer en metode for blant annet å avgjøre hvorvidt man befinner seg i konkurs tilstand. Disse indikatorfunksjonene beregnes for hver enkelt sti j. Variablene er ikke essensielle for å implementere modellen, men vil forenkle beregningene betraktelig.

Tilstandsvariabel 1: Denne variabelen I_t^A er 1 dersom selskapet er i konkurs tilstand, og 0 dersom selskapet er i solvent tilstand:

$$I_t^A = \begin{cases} 1 & hvis \;\; \delta_t < \delta_B \\ 0 & hvis \;\; \delta_t \ge \delta_B \end{cases} \tag{5.6}$$

Indikatorfunksjonen I_t^A vil være nyttig i forhold til beregning av hvor lenge man har vært i konkurs, og i forbindelse med avregning av kostnader som følge av at selskapet befinner seg i konkurs tilstand.

Tilstandsvariabel 2: Denne variabelen I_t^B gir en oversikt over hvor lenge selskapet kontinuerlig har oppholdt seg i konkurs tilstand. Variabelen nullstilles når selskapet igjen returnerer til solvent tilstand. Indikatorfunksjonen I_t^B vil være hensiktsmessig i forhold til å avgjøre om selskapet skal likvideres som følge av at nådeperioden er utløpt.

Tilstandsvariabel 3: Denne variabelen I_t^C angir hvorvidt selskapet på tidspunkt t skal likvideres som følge av at selskapet har oppholdt seg lengre i konkurs tilstand enn hva nådeperioden tillater.

$$I_t^C = \begin{cases} 1 & hvis \;\; I_t^B > d \\ 0 & hvis \;\; I_t^B \leq d \end{cases} \tag{5.7}$$

Følgelig vil I_t^C kunne benyttes til å bestemme verdien på gjeld og egenkapital avhengig av om selskapet likvideres eller ikke på det relevante tidspunktet.

Tilstandsvariabel 4: Variabelen I_t^D angir hvorvidt selskapet er blitt likvidert på et tidspunkt. $u < t$.

$$I_t^D = \begin{cases} 1 & hvis \;\; I_u^C = 1 \;\; \text{for en eller flere } u < t \\ 0 & hvis \;\; I_u^C = 0 \;\; \text{for } \forall \;\; u < t \end{cases} \tag{5.8}$$

Dersom selskapet er blitt likvidert på et tidligere tidspunkt $u < t$, vil dette medføre at verdien av egenkapital og gjeld settes til 0 for tidspunkt t. Dette er naturlig, siden modellen ”slutter” når selskapet likvideres.

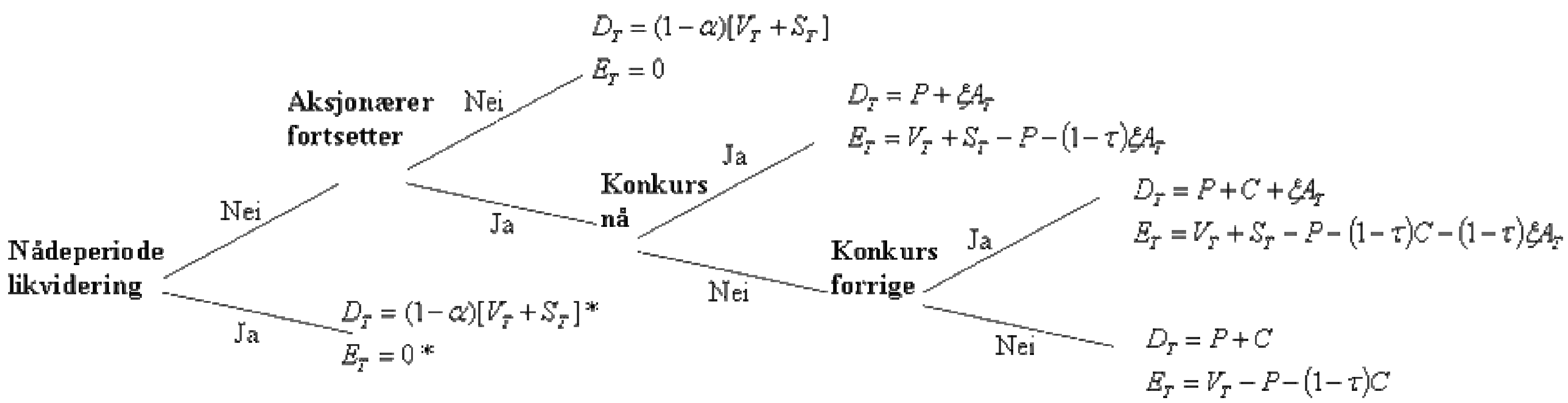
5.2.3 – Verdi av egenkapital og gjeld ved forfall av gjeld

På tidspunkt T hvor gjelden forfaller og aksjonærene selger selskapet, kan vi finne uttrykk for verdien av gjeld og egenkapital.

Hvordan disse verdiene fastslåes avhenger kritisk av hvilken tilstand selskapet befinner seg i på sluttidspunktet. Av relevante faktorer kan nevnes aspekter knyttet til om selskapet er i konkurs tilstand eller ikke.

I og med at det finnes et større antall kombinasjoner av hvilken tilstand selskapet befinner seg i, ønsker vi å illustrere egenkapital- og gjeldsverdien for ulike tilstander i en trestruktur. Gitt at aksjonærene ikke benytter seg av muligheten til å likvidere selskapet tidligere, vil utbetaling til egenkapital og gjeld kunne illustreres som i figur under:

Verdi av egenkapital og gjeld ved forfall av gjeld



*Dersom $(1-\alpha)[V_T + S_T] > (P + C)$ får vi :

$D_T = (P + C)$

$E_T = (1-\alpha)[V_T + S_T] - (P + C)$

Vi vil kort skissere bakgrunnen for at verdien på gjeld og egenkapital blir som i figuren.

Det første vi kan legge merke til er at verdien av gjelden ved likvidering av selskapet som følge av at selskapet har oppholdt seg i konkurs i en periode som overstiger nådeperioden, er gitt ved $D_T = (1-\alpha)[V_T + S_T]$. Ved likvidering mottar altså kreditorene totale verdier i selskapet, det vil si $V_T + S_T$, justert for andelen α som forsvinner til likvideringskostnader. Verdien av egenkapitalen blir $E_T = 0$ ettersom kreditorene har prioritet foran aksjonærene i forbindelse med fordeling av gjenværende verdier i selskapet etter at likvideringskostnader er fratrukket.

For at ikke utbetaling til kreditorene skal overstige det kreditorene har krav på, det vil si verdien av prinsipalen på gjelden og kupongen som påløper ved forfall, vil gjeldsverdien imidlertid være $D_T = P + C$ for $(1-\alpha)[V_T + S_T] > P + C$. En slik situasjon kan oppstå siden konkurs i modelloppsettet inntreffer som følge av likviditetsproblemer og ikke nødvendigvis realøkonomiske problemer knyttet til driften av selskapet. Dermed unngår vi at kreditorene mottar større verdier enn de egentlig har krav på i forbindelse med likvidering ved nådeperiodens slutt. Følgelig vil verdien av egenkapitalen i denne situasjonen være $E_T = (1-\alpha)[V_T + S_T] - (P + C)$

På sluttidspunktet vil aksjonærene likvidere selskapet dersom totale verdier i selskapet ikke er tilstrekkelig til å dekke betalingen $P + (1-\tau)C$ til kreditorene. Beregning av verdi av gjeld og egenkapital i dette tilfellet er tilsvarende som ved likvidering ved nådeperiode konkurs. Det vil si $D_t = (1-\alpha)[V_t + S_t]$ og $E_t = 0$. Dessuten følger det av definisjonen på aksjonærenes likvidering i en slik sammenheng at totale verdier i selskapet er mindre enn aksjonærenes forpliktelser overfor kreditorene.

Videre kan vi bestemme verdien av gjeld og egenkapital når selskapet befinner seg i konkurs tilstand, gitt at selskapet ikke likvideres. I dette tilfellet vil gjelden motta prinsipalen samt andelen ξ av akkumulert kupong. Følgelig blir gjeldsverdien $D_T = P + \xi A_T$. Egenkapitalen vil samtidig være totale verdier av selskapet fratrukket (skattejustert) utbetaling gjelden. Det vil si $E_T = V_T + S_T - P - (1-\tau)\xi A_T$.

Dersom bedriften ikke er i konkurs ved tid T, men selskapet var i konkurs ved tid $T-\Delta t$, vil gjeldsverdien bestemmes av summen av prinsipal på lånet samt kupong og en andel ξ av akkumulert kupong fra forrige periode. Da finner vi gjeldsverdien som: $D_T = P + C + \xi A_T$. Siden egenkapitalen mottar verdiene som er i selskapet justert for (skattejustert) utbetaling til kreditorene, finner vi egenkapitalverdien som $E_T = V_T + S_T - P - (1-\tau)C - (1-\tau)\xi A_T$.

I tilfellet hvor selskapet ikke er i konkurs ved tid T, og selskapet ikke var i konkurs ved tid $T-\Delta t$, bestemmes gjeldsverdien ganske enkelt som summen av prinsipal og kupong. Det vil si $D_T = P + C$. Egenkapitalverdien vil følgelig være gitt som totale verdier i selskapet minus den (skattejusterte) utbetalingen til kreditorene; $E_T = V_T - P - (1-\tau)C$.

På bakgrunn av dette kan vi for hver enkelt sti i simuleringen beregne egenkapitalverdien og gjeldsverdien for selskapet på tidspunktet for forfall av gjelden. Når disse verdiene er etablert, kan vi benytte Longstaff Schwartz metode for å bestemme verdien av gjeld og egenkapital på tidspunkt $t < T$.

5.2.4 – Verdi av egenkapital og gjeld før forfall av gjeld

For å kunne beregne egenkapitalverdien og gjeldsverdien på tidspunkt før forfall av gjelden, benytter vi Longstaff og Schwartz (1999) prosedyre.

Som illustrert i appendiks C er beregning av såkalt "continuation value" nøkkelen for å bestemme egenkapitalverdien og gjeldsverdien. "Continuation value" av egenkapitalen kan sees på som den forventede verdien for aksjonærene ved å ikke likvidere selskapet på det gitte tidspunktet. Denne verdien bestemmes ved å utføre en regresjonsanalyse på fremtidige egenkapitalverdier. Mer presist ønsker vi å utføre en regresjon på neddiskontert verdi av neste periodes egenkapital på verdien av EBIT, kvadrert EBIT-verdi, kortrenten, kvadrert kortrente og produktet av kortrenten og EBIT-verdien.

I utgangspunktet skal regresjonen utføres på såkalte in-the-money opsjoner. For analysen av gjelds- og egenkapitalverdier i dette oppsettet vil det imidlertid ikke eksistere noen entydig kriterie for hvilke stier av simuleringen som er in-the-money på ethvert tidspunkt. Av den grunn utføres regresjonen for alle stier.

For hvert tidspunkt t beregner vi altså verdien av følgende vektorer av forklaringsvariable: $\delta_t, \delta_t^2, r_t, r_t^2$ og $\delta_t r_t$.

Basert på verdiene på disse forklaringsvariable for alle stier j, samt den tilhørende neddiskonterte verdien av egenkapitalen, utføres en multippel regresjonsanalyse basert på minste kvadraters metode. Appendix D gir en detaljert beskrivelse av teorien bak minste kvadraters metode, samt en utledning av hvordan koeffisientene bestemmes i en slik modell.

For hvert enkelt tidspunkt t beregnes deretter koeffisientene for hvordan forklaringsvariablene henger sammen med den avhengige variabelen.

Basert på resultatet av denne regresjonen kan vi beregne "continuation value" av egenkapitalen CV_t^E for hver enkelt sti. Dette gjøres ved å multiplisere koeffisientene fra regresjonsanalysen med de respektive verdiene for forklaringsvariablene.

Selskapet har på tidspunkt t en forpliktelse om å betale den skattejusterte kupongen $(1-\tau)C$. Derfor vil aksjonærene ønske å fortsette som aksjonærer dersom den forventede verdien av å fortsette som aksjonær overstiger den forpliktelsen de må oppfylle på tid t. Alternativt kan aksjonærene velge å likvidere selskapet dersom forventet verdi av å fortsette som aksjonær ikke overstiger forpliktelsen overfor kreditorene. Likvidering inntreffer følgelig når verdien av egenkapitalen er ikke-positiv på dette tidspunktet.

For å forenkle den analysen implementeres en indikatorfunksjon I_t^E som angir hvorvidt aksjonærene velger å fortsette som aksjonærer eller om de velger å likvidere på tidspunkt t:

$$I_t^E = \begin{cases} 1 & hvis \;\; CV_t^E > (1-\tau)C \\ 0 & hvis \;\; CV_t^E \leq (1-\tau)C \end{cases} \tag{5.9}$$

Indikatorfunksjonen I_t^E kan følgelig benyttes til å bestemme egenkapitalverdi og gjeldsverdi avhengig av om aksjonærene velger å benytte seg av sin "opsjon" til ikke å oppfylle sine forpliktelser overfor kreditorene.

Videre åpner også modellen for tilbakekjøp (”call”) av den utstedte gjelden. Av den grunn vil det på et gitt tidspunkt være nødvendig å bestemme verdien av gjelden, gitt at aksjonærene fortsetter som aksjonærer. Med bakgrunn i den beregnede ”contiuation value” av egenkapitalen, bestemmes ”contiuation value” av gjelden CV_t^D ved følgende sammenheng:

$$CV_t^D = V(t,T) - CV_t^E$$

Intuisjonen er ganske enkelt at verdien av selskapets aktiviteter må være lik summen av ”continuation value” for gjeld og egenkapital.

Som presisert i kapittel 4.5 antas det at selskapet på et gitt tidspunkt t kan ta opp et $(T-t)$ periodes nullkupong lån til markedsvilkår for å kjøpe tilbake gjelden de har utstedt. Her er det viktig å presisere antakelsen om at nullkupong lånet kan tas opp til markedsvilkår. Følgelig vil selskapet kjøpe tilbake gjelden dersom den skattejusterte verdien av gjelden $CV_t^D(1-\tau)+\tau Pe^{-R(T-t)}$ overstiger prinsipalen på det opprinnelige obligasjonslånet. Dersom selskapet velger å innfri det opprinnelige lånet, vil kreditorene motta prinsipalen på lånet samt kupongutbetalingen; det vil si at de mottar $P+C$.

Vi etablerer videre en indikatorfunksjon I_t^F som angir hvorvidt selskapet velger å innfri det opprinnelige lånet:

$$I_t^F = \begin{cases} 1 & hvis \;\; CV_t^D(1-\tau)+\tau Pe^{-R(T-t)} > P \\ 0 & hvis \;\; CV_t^D(1-\tau)+\tau Pe^{-R(T-t)} \leq P \end{cases} \tag{5.10}$$

Denne indikatorfunksjonen vil være avgjørende for hvordan gjelds- og egenkapitalverdien beregnes med avhengig av om gjelden tilbakekjøpes eller ikke.

Neste steg i Longstaff Schwartz metoden blir så å bestemme verdien på gjelden og egenkapitalen for hver enkelt sti på det gitte tidspunkt. Hvordan disse verdiene fastslåes avhenger kritisk av hvilken tilstand selskapet befinner seg i. Hvorvidt selskapet er i konkurs tilstand eller om gjelden er blitt tilbakekjøpt er bare noen av elementene som påvirker beregningen. Det er i forbindelse med denne beregningen at de 6 indikatorfunksjonen som er definert kommer til sin rett.

I og med at det finnes et større antall kombinasjoner av hvilken tilstand selskapet befinner seg i, ønsker vi å illustrere egenkapital- og gjeldsverdien for ulike tilstander i en trestruktur.
Vi vil gi en kort intuisjon for hvordan verdiene bestemmes slik som i trestrukturen under.

For tilfellene med likvidering av selskapet er beregningen av gjeldsverdi og egenkapitalverdi identisk med beregning forklart ovenfor i kapittel 5.2.3.

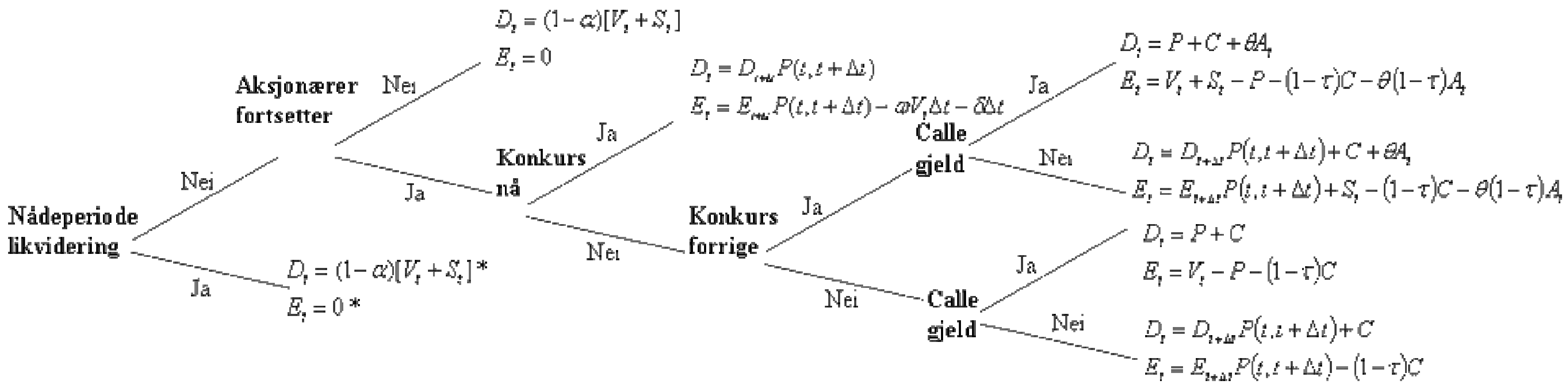
Dersom selskapet befinner seg i konkurs tilstand, gitt at selskapet ikke likvideres, vil kreditorene ikke motta den kontraktsfestede kupongen. Som diskutert i kapittel 4.4.2 vil kupongen imidlertid akkumuleres på en konto A_t. Vi antar at selskapet ikke får tilbakekjøpe gjelden dersom man befinner seg i konkurs tilstand. Av den grunn vil verdien av gjelden være gitt som den neddiskonterte verdien av gjelden for neste periode, det vil si $D_t = D_{t+\Delta t} P(t, t + \Delta t)$. På tilsvarende måte vil egenkapitalen ikke motta dividende når selskapet befinner seg i konkurs tilstand. Imidlertid vil det påløpe en reell kostnad ωV_t i perioden knyttet til konkurstilstanden. Derfor vil verdien av egenkapitalen kunne uttrykkes som: $E_t = E_{t+\Delta t} P(t, t + \Delta t) - \omega V_t \Delta t - \delta \Delta t$.

Neste steg er å vurdere gjelds- og egenkapitalverdi i tilfeller hvor selskapet ikke er konkurs.

Først ser vi på tilfellet hvor selskapet var i konkurs tilstand forrige periode og gjelden kjøpes tilbake. En slik situasjon tilsvarer at aksjonærene innfrir lånet ved å betale kreditorene prinsipal på lånet, samt kupong for den gitte perioden og akkumulert kupong fra tidligere periode. Derfor vil gjeldsverdien være $D_t = P + C + \theta A_t$. Aksjonærene vil på sin side sitte igjen med de gjenværene verdiene i selskapet etter at kreditorene har fått sin andel. Derfor vil egenkapitalen ha verdien $E_t = V_t + S_t - P - (1-\tau)C - \theta(1-\tau)A_t$.

Dersom selskapet var i konkurs i forrige periode og gjelden ikke tilbakekjøpes, vil verdien av gjelden være gitt som $D_t = D_{t+\Delta t} P(t, t + \Delta t) + C + \theta A_t$. Dette følger av at verdien for obligasjonseierne vil være neddiskontert verdi av neste periodes gjeldsverdi i tillegg til

Verdi av egenkapital og gjeld før forfall av gjeld



*Dersom $(1-\alpha)[V_t + S_t] > (P + C)$ får vi :

$D_t = (P + C)$

$E_t = (1-\alpha)[V_t + S_t] - (P + C)$

verdien av å motta kupong og akkumulert kupong fra tidligere periode. Aksjonærene må på det gitte tidspunktet betale kupong og akkumulert kupong til kreditorene. Samtidig mottar de den oppsamlede verdien av EBIT. Verdien av egenkapitalen blir da den neddiskonterte verdien av neste periodes egenkapital, justert for de nevnte kontantstrømmene. $E_t = E_{t+\Delta t} P(t, t+\Delta t) + S_t - (1-\tau)C - \theta(1-\tau)A_t$.

Anta så at selskapet ikke var i konkurs tilstand i forrige periode. Dersom gjelden blir innfridd, vil kreditorene motta prinsipal og kupong på lånet. Siden selskapet ikke var i konkurs i forrige periode vil det ikke være noen akkumulert kupong. Derfor vil gjeldsverdien være $D_t = P + C$. Verdien av egenkapitalen vil derfor ganske enkelt være $E_t = V_t - P - (1-\tau)C$, siden aksjonærene mottar de resterende verdiene i selskapet etter at lånet er innfridd.

Det siste mulige tilfellet oppstår dersom selskapet ikke var konkurs forrige periode i tillegg til at gjelden ikke tilbakebetales. Kreditorene vil i denne situasjonen motta kupongen C, og verdien av gjelden må derfor være summen av kupong og neddiskontert verdi av gjelden på neste tidspunkt: $D_t = D_{t+\Delta t} P(t, t+\Delta t) + C$. Tilsvarende vil aksjonærene måtte betale ut den skattejusterte kupongen $(1-\tau)C$. Da vil egenkapitalverdien være $E_t = E_{t+\Delta t} P(t, t+\Delta t) - (1-\tau)C$, som er neddiskontert verdi av neste periodes egenkapital fratrukket den skattejusterte kupongutbetalingen.

5.2.5 - Verdien på tidspunkt 0 av egenkapitalen, gjelden og totalverdien

Verdien av egenkapitalen på tidspunkt 0 bestemmes ganske enkelt som snittet av neddiskontert verdi av egenkapitalen på tidspunkt 1:

$$\overline{E}_0(\delta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P(0,1) E_1^i \tag{5.11}$$

Tilsvarende er gjeldsverdien gitt ved:

$$\overline{D}_0(\delta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P(0,1) D_1^i \tag{5.12}$$

Følgelig må estimatet for totalverdien av selskapet være gitt ved summen av likning (5.11) og (5.12):

$$\bar{v}_0(\delta) = \bar{E}_0(\delta) + \bar{D}_0(\delta) \tag{5.13}$$

Dermed kan vi finne et estimat på gjeldsandelen i selskapet:

$$\bar{L}_0(\delta) = \frac{\bar{D}_0(\delta)}{\bar{v}_0(\delta)} \tag{5.14}$$

Yield spreaden YS er definert som den renten selskapet betaler på sin gjeld minus den renten man betaler på risikofritt lån.

Renten r som betales på risikofritt lån bestemmes enkelt ut fra:

$$P(0,T) = e^{-rT}$$

Dermed er rente på risikofritt lån gitt som:

$$r = \frac{-\ln(P(t,T))}{T} \tag{5.15}$$

Renten y for selskapets risikofylte gjeld bestemmes som internrenten som tilfredsstiller:

$$D(\delta) = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-yi} + Pe^{-yT} \tag{5.16}$$

Yield spreaden beregnes da fra uttrykkene for renten på risikofylt gjeld (5.16) og den risikofrie avkastningen (5.15):

.

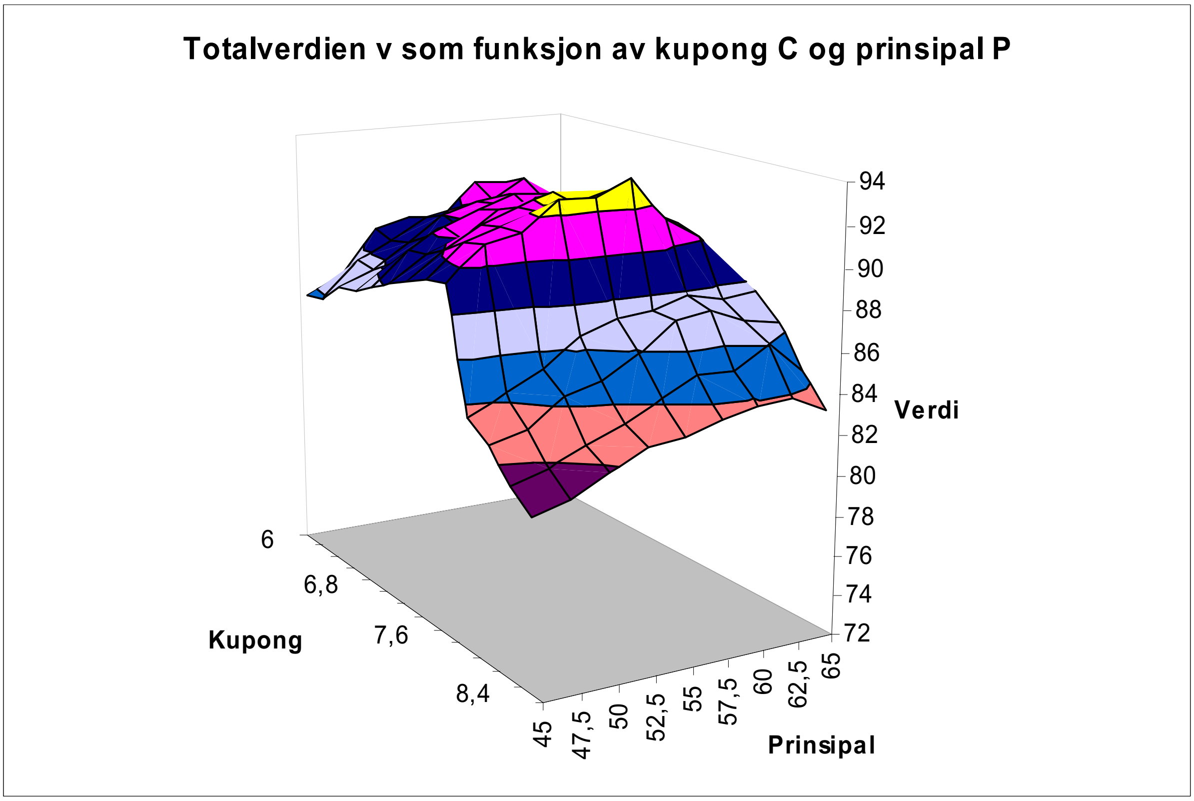
$$YS = y - r \tag{5.17}$$

Dermed har vi etablert en metode for å beregne egenkapitalverdi, gjeldsverdi, totalverdi, gjeldsandel og yield-spread på tidspunkt 0.

5.2.6 – Endogenisering av kupong og prinsipal

Til nå har vi antatt at størrelsen på kupongen og prinsipalen er eksogent gitt. Det er imidlertid ønskelig å bestemme kupongen og prinsipalen for gjelden endogent i modellen. Vi antar at kupongen og obligasjonen på den utstedte obligasjonen bestemmes ut fra kriteriet om maksimering av totalverdi av selskapet.

De optimale verdiene på kupong og prinsipal bestemmes simultant, og det tas utgangspunkt i "startverdiene" for henholdsvis C og P. For optimalisering av disse verdiene varierer vi verdiene for C og P simultant. Ved å foreta simuleringen skissert ovenfor for ulike verdier av kupong C og prinsipal P, kan vi bestemme hvilken kombinasjon av disse som maksimerer totalverdien. Dermed har vi funnet et estimat for optimal kupong C^* og prinsipal P^*. Ved å utføre denne analysen finner vi følgende figur:



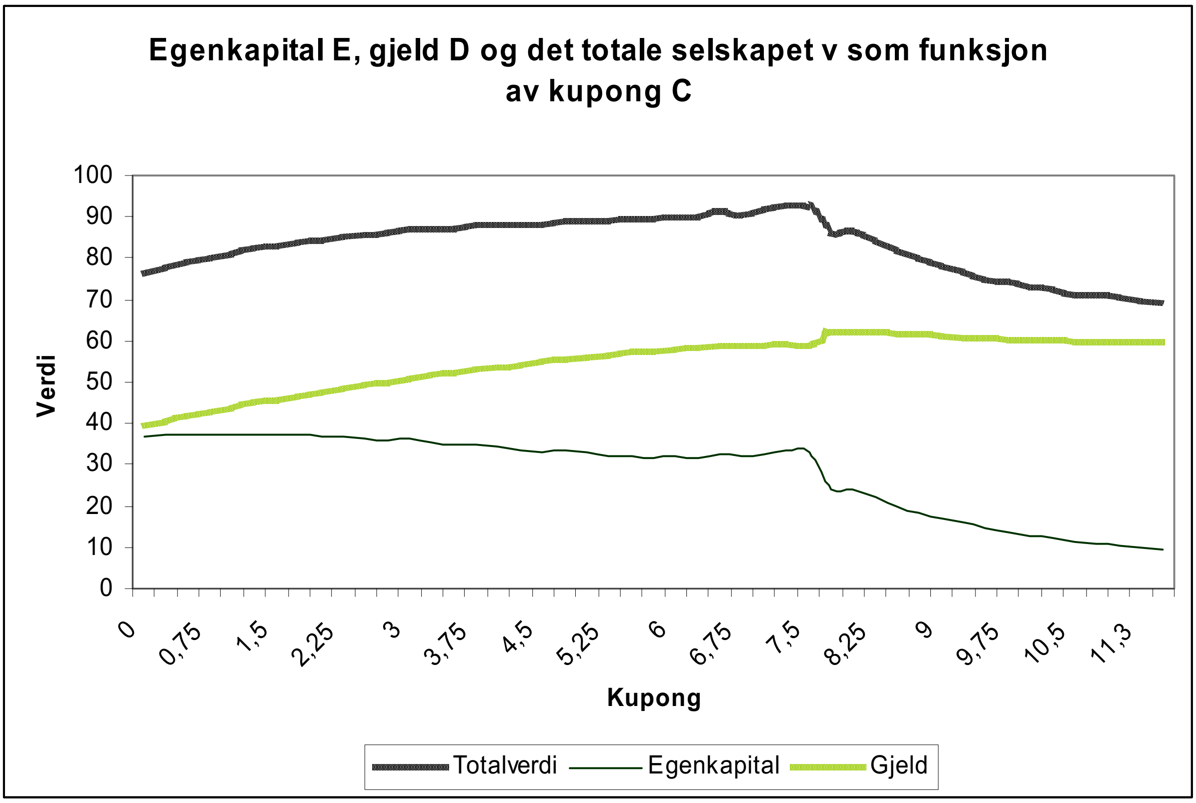
Vi ser at for de gitte parametrene spesifisert i kapittel 5.1, vil totalverdien av selskapet maksimeres for en kupong $C^* = 7{,}6$ og en prinsipal $P^* = 57{,}5$. De optimale verdiene C^* og P^* vil vi benytte i den videre analysen.

5.3 – Komparativ statikk

I det følgende vil vi utføre en følsomhetsanalyse knyttet til denne nye modellen. Her ønsker vi å se på hvordan endring i parametere påvirker verdi av gjeld, egenkapital, det totale selskapet, gjeldsandel og yield spread.

Det må her presiseres tydelig at vi kun har tatt med utvalgte følsomhetsanalyser ut i fra hvilke vi synes er mest interessante. I den sammenheng ønsker vi å sette fokus på analyser som fanger opp sentrale aspekter ved modellen, samt resultater som i utgangspunktet kan fremstå som uventede. Vi har valgt ut 13 slike analyser av mange forskjellige som vi hadde tilgjengelig. I tilfellene hvor det faller seg naturlig, har vi kommentert funn i denne modellen i forhold til resultater fra benchmarkmodellen.

5.3.1 – Komparativ statikk av kupong C



Denne figuren er generert med utgangspunkt i en prinsipal på lånet $P^* = 57{,}5$. Vi observerer at totalverdien stiger initialt. Når kupongen øker, vil det være en forholdsvis sterk økning i skattefordelene knyttet til å ha gjeld. Alt annet likt vil økt kupong også øke sannsynligheten for restrukturering av gjelden. Ved restrukturering vil disse skattefordelene falle bort. Samtidig vil selskapet oppleven en økning av konkurs- og likvideringskostnadene. Totaleffekten av disse effektene vil være at totalverdien stiger for lave kupongverdier.

Når kupongen er ca 7,6, vil totalverdien være på sitt toppunkt. Som presisert i kapittel 4.4.1 vil kupongkostnaden etter skatt tilsvare konkursbarrieren. Totalverdien vil altså maksimeres når kupongkostnaden etter skatt er like under startverdien 5 av EBIT (da starter selskapet i første periode i likvid tilstand). Deretter vil totalverdien synke betraktelig når kupongkostnaden etter skatt er like over startverdien av EBIT, det vil si når selskapet starter i konkurs tilstand i første periode. Når kupongen blir høyere enn 7,6, vil konkurskostnadene og likvideringskostnadene vokse så betydelig at totalverdien av selskapet synker. Det kan her vises til kapittel 5.2.6 hvor det utredes for at kupong på 7,6 vil være optimalt for selskapet som helhet.

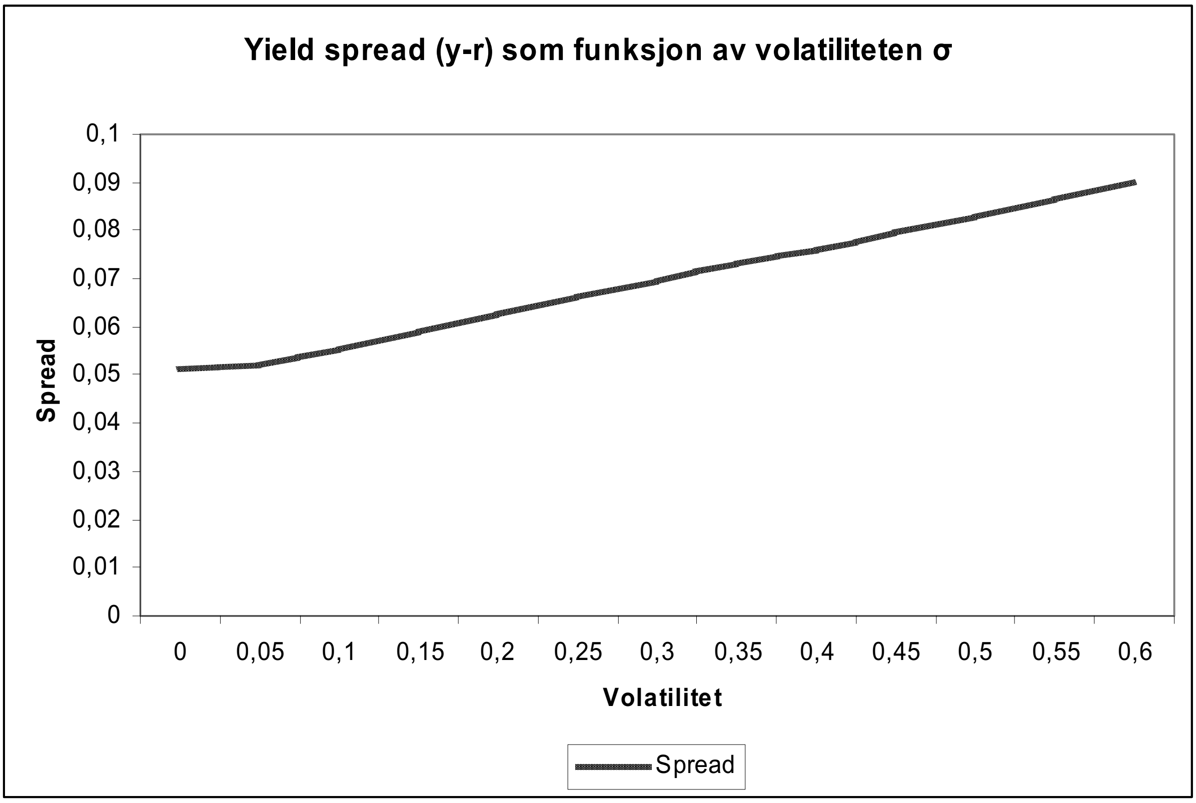
Det kan videre observeres at egenkapitalverdien gjennomgående synker når kupongen stiger. Dette kan forklares med at økt kupong medfører større kontantstrøm ut av selskapet samt stigende konkursrisiko. Økt kupong gir også skattefordeler og større mulighet for gevinst ved restrukturering av gjelden. Disse effektene vil virke i motsatt retning, men vil ikke overstige de økte kostnadene ved økt kupong. Vi registrerer noe overraskende at egenkapitalen stiger noe når kupongen er cirka 7,6. Dette kan skyldes at kupongnivået her er i nærheten av konkursbarrieren. Når kupongen er mindre enn 7,6, vil selskapet starte første periode i likvid tilstand. Når kupongen er større enn 7,6, vil imidlertid selskapet starte første periode i konkurs tilstand.

Gjeldsverdien vil også stige initialt. Ett viktig moment her er at økt kupong vil øke gjeldsverdien gjennom å bidra til høyere kontantstrøm. På den annen side vil høyere kupong medføre større mulighet for at konkurskostnader og likvideringskostnader vil påløpe. Dessuten vil høyere kupong isolert sett øke faren for at aksjonærene velger å restrukturere gjelden, noe som er negativt for gjeldsverdien. Vi ser videre at gjeldsverdien får et toppunkt når kupongen er cirka 7,7. Dette toppunktet er altså for et høyere kupongnivå enn toppunktet for totalverdien og egenkapitalen. Et slikt fenomen fikk vi også i benchmarkmodellen. Forklaringen på at kupongnivået som maksimerer gjeldsverdien er høyere enn kupongnivået som maksimerer totalverdien, er at kreditorene ikke taper skattefordeler ved en eventuell konkurs. Kreditorene er dermed villig til å ta på seg mer konkurskostnader og restruktureringsrisiko, fordi de er mer opptatt av å få økt kontantstrøm ut av selskapet gjennom høyere kuponger.

Når kupongen blir høyere enn cirka 7,7, synker deretter gjeldsverdien. Dette skyldes at konkurskostnadene og likvideringskostnadene øker når selskapet starter i konkurs i første periode.

Vi ser at for øvrig at disse tre kurvene er på samme form som tilsvarende kurver fra benchmarkmodellen.

5.3.2 – Komparativ statikk av EBIT-volatiliteten σ

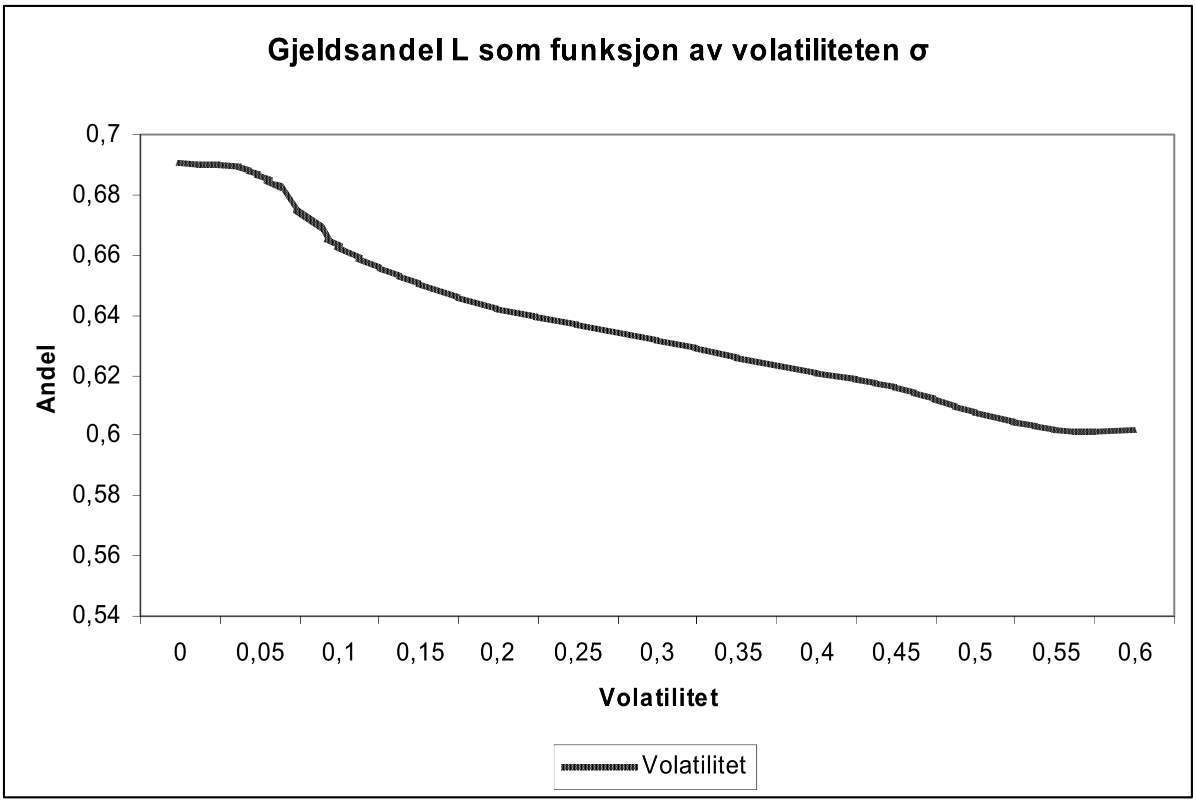


Av figuren ser vi at yield spreaden øker når EBIT-volatiliteten stiger. Høyere EBIT-volatilitet medfører at EBIT vil være mindre forutsigbar og kan variere mer. I en slik situasjon vil selskapets evne til å betale kupong være mer usikker – og ut i fra dette vil långiverne kreve høyere yield spread som kompensasjon for den risikoen som de tar.

Vi registrerer at yield spreaden er ca. 5 prosentpoeng når EBIT-volatiliteten er 0. Dette kan virke oppsiktsvekkende høyt. Intuitivt kan imidlertid en så høy yield spread delvis forklares ved at aksjonærenes har mulighet til å foreta gjenkjøp av gjelden og dermed bidra til å påføre långiverne ett tap som långiverne krever kompensasjon for gjennom økt yield spread. Videre er det også mulighet for at långiverne kan bli påført tap i siste periode når prinsipal skal betales, det vil si i tilfellet hvor alle aktiva i selskapet ikke er nok til å dekke siste periodes kupong og prinsipal. Følgelig er det større muligheter for at selskapet likvideres i løpet av selskapets levetid.

For å forstå hvorfor yield spreaden kan være 5 prosentpoeng når EBIT-volatiliteten er 0, kan vi betrakte benchmarkmodellen hvor yield spreaden går mot 0 når volatiliteten til V nærmer seg 0. I benchmarkmodellen har vi imidlertid ikke åpnet opp for verken tilbakekjøp av gjeld eller prinsipal på gjelden. Vi forstår derfor at långiverne i benchmarkmodellen ikke løper noen risiko når volatiliteten til V er tilnærmet lik 0. I denne nye modellen fører imidlertid tilstedeværelsen av restruktureringsmuligheten og prinsipal til at långiverne løper risiko selv om EBIT-volatiliteten er tilnærmet lik 0.

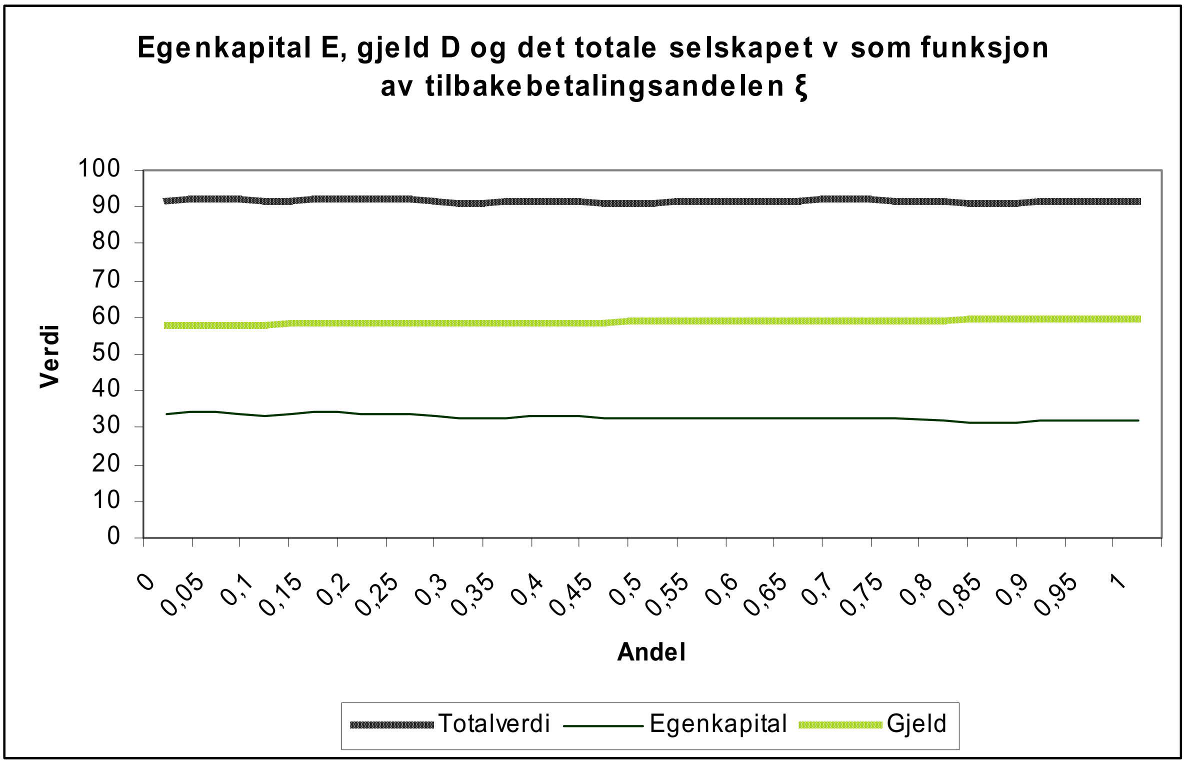
Vi kan forøvrig kommentere at yield spreaden i benchmarkmodellen også øker når volatiliteten stiger. Det kan også nevnes at yield spreaden her i den nye modellen er betydelig høyere enn i benchmarkmodellen for alle nivåer av volatiliteten.



Gjeldsandelen synker entydig når EBIT-volatiliteten stiger. Høyere EBIT-volatilitet kan føre til at konkurs og likvidering vil inntreffe oftere, og dette vil redusere gjeldsverdien. Gjeldsverdien vil kun oppleve større nedside som følge av økt EBIT-volatilitet. Egenkapitalen vil imidlertid vokse med økt EBIT-volatilitet fordi egenkapitalen har begrenset nedside og ubegrenset oppside. I sum vil altså gjeldsandelen synke.

I benchmarkmodellen faller også gjeldsandelen når volatiliteten øker, og den nye modellen er altså helt på linje med benchmarkmodellen når det gjelder denne sammenhengen. Benchmarkmodellen vil imidlertid antyde gjeldsandel opp mot 100 % når volatiliteten går mot 0. I denne nye modellen vil gjeldsandelen være betraktelig lavere. Dette kan skyldes at restrukturering av gjeld vil påføre kreditorene ett tap, og en slik restrukturering vil kunne inntreffe selv om EBIT-volatiliteten er tilnærmet lik 0. En annen grunn til at gjeldsandelen vil være lavere i den nye modellen er at kravet om å betale prinsipal utgjør en risiko for kreditorene selv om EBIT-volatiliteten er tilnærmet lik 0.

5.3.3 – Komparativ statikk av tilbakebetalingsandelen ξ



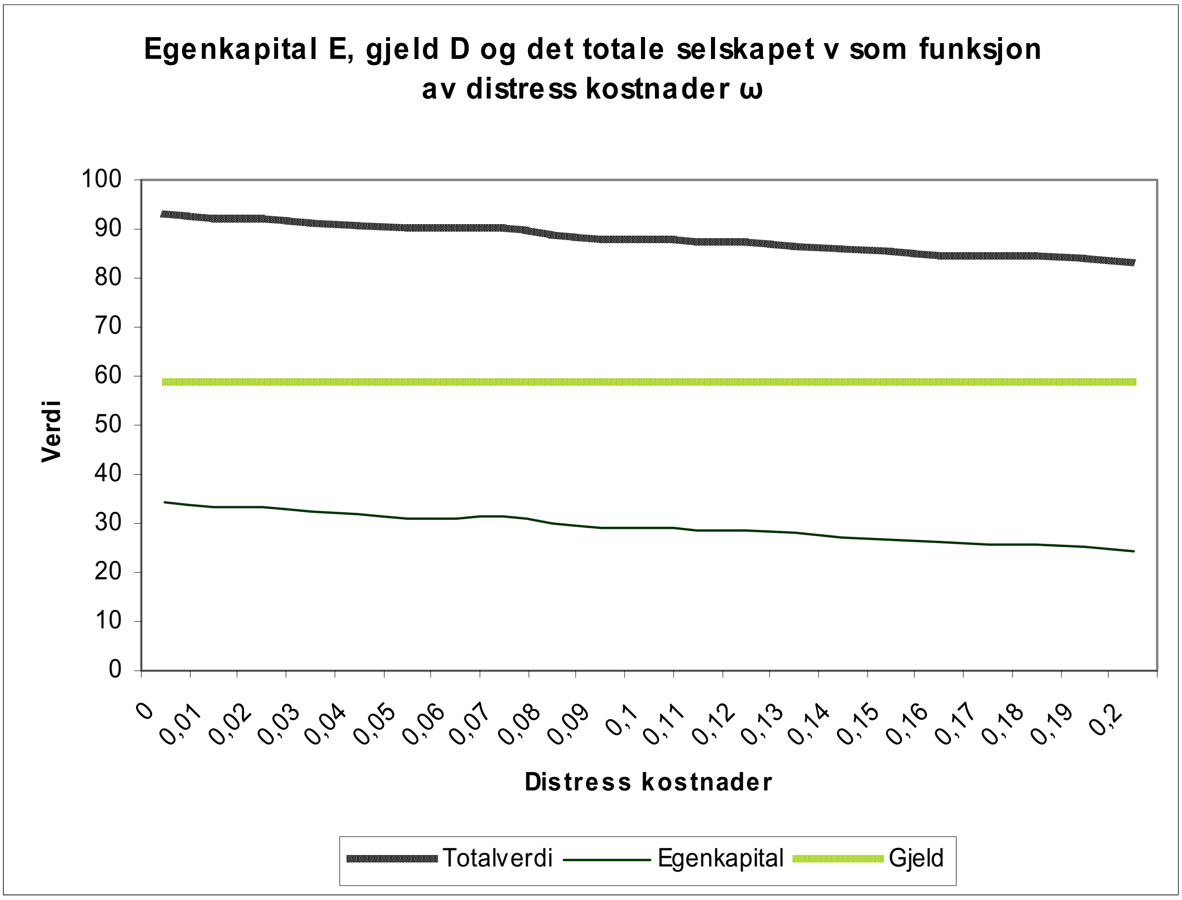
Hovedinntrykket vårt her er at verdien av egenkapital, gjeld og det totale selskapet er forholdsvis uavhengig av nivået på tilbakebetalingsandelen. Dette kan skyldes at selskapet relativt sjeldent vil oppleve å gå fra konkurstilstand til likvid tilstand. Årsaken til at denne overgangen skjer sjelden kan være flersidig. For det første kan distress kostnader under konkurs til en viss grad redusere sannsynligheten for å gjenoppstå til likvid tilstand. En annen, og trolig mer sannsynlig forklaring er at selskapet ofte vil kjøpe tilbake gjelden på et tidlig tidspunkt. På den måten vil man sjeldnere oppleve at selskapet går fra konkurs til likvid tilstand enn hva som ville vært tilfellet uten mulighet for å "calle" gjelden. Videre vil modellen i flere tilfeller medføre likvidering av selskapet. På den måten reduseres også antall overganger fra konkurs til solvent tilstand.

Vi ser at totalverdien er forholdsvis uberørt når tilbakebetalingsandelen stiger. Intuitivt kan dette forklares at tilbakebetalingsandelen kan betraktes som en ren overføring mellom aksjonærene og långiverne, og at totalverdien av selskapet dermed ikke vil bli berørt av hvor stor denne andelen er.

Vi observerer at gjeldsverdien stiger noe når tilbakebetalingsandelen stiger. Dette virker rimelig ettersom høyere andel medfører at långiverne får høyere kontantstrøm utbetalt hvis selskapet går fra konkurs til likvid tilstand.

Vi registrerer at egenkapitalverdien gjennomgående synker noe når tilbakebetalingsandelen vokser. Dette skjønner vi intuitivt ettersom høyere andel resulterer i at aksjonærene får en mindre del av kupongene fra konkursperioden ettergitt hvis selskapet klarer å komme tilbake til likvid tilstand.

5.3.4 – Komparativ statikk av distress kostnader ω

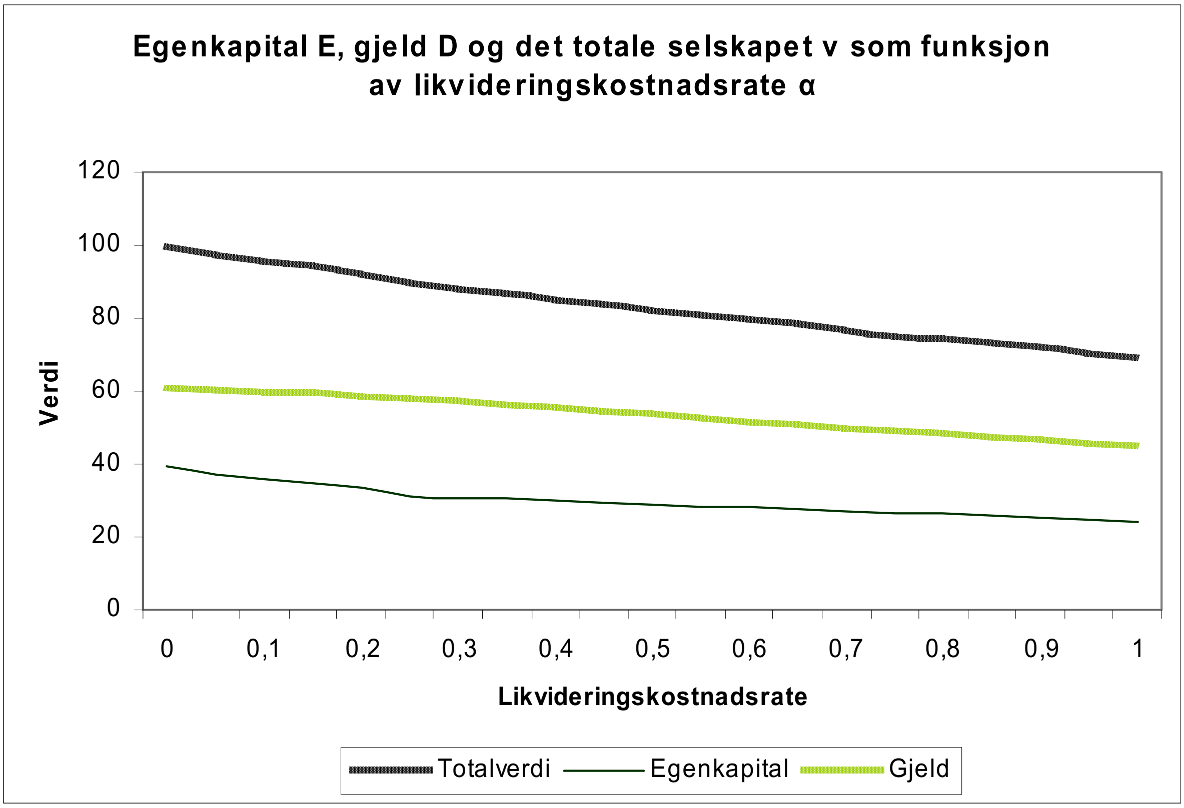


Det første vi kan legge merke til ved denne figuren er at totalverdien reduseres når distress kostnadene øker. Økende distress kostnader innebærer ingen fordeler eller gevinstmuligheter for selskapet, men derimot kun voksende kostnader, og vil således føre til at totalverdien av selskapet reduseres.

Samtidig registrerer vi at egenkapitalverdien synker når distress kostnadene stiger. Dette virker naturlig ettersom distress kostnadene trekkes direkte av egenkapitalen som redegjort for i kapittel 4.4.2.

Vi ser videre at gjeldsverdien er tilnærmet uavhengig av distress kostnadene. Intuitivt skjønner vi at dette har sin forklaring i at distress kostnadene trekkes av egenkapitalen, og dermed vil gjeldsverdien være uberørt. Følgelig vil altså optimal gjeldsandel øke med økt distress kostnad, ettersom det vil favorisere mer gjeld siden gjeldsverdien er upåvirket av disse kostnadene.

5.3.5 – Komparativ statikk av likvideringskostnadsrate α



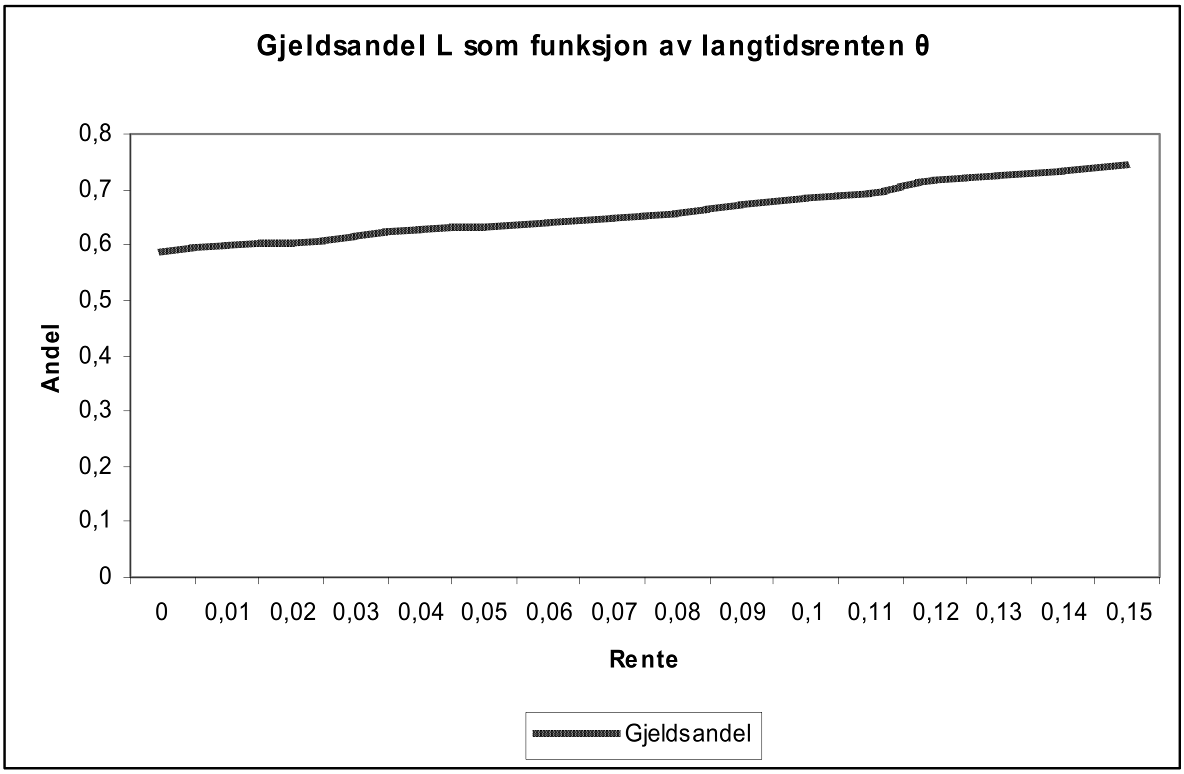
På bakgrunn av figuren ser vi at totalverdien av selskapet reduseres når likvideringskostnadsraten øker. Likvideringskostnader innebærer utelukkende kostnader som går ut av selskapet, og det er dermed naturlig at totalverdien synker når konkurskostnadsraten stiger. Vi ser fra figuren at likvideringskostnadsraten vil ha forholdsvis stor påvirkning på totalverdien – dette kan skyldes at likvidering er en relativt alminnelig begivenhet i vårt oppsett og valg av øvrige parametere.

Vi ser videre at gjeldsverdien synker når likvideringskostnadsraten stiger. Dette virker intuitivt ettersom når likvideringskostnadsraten blir høyere, vil långiverne gjennomgående få mindre utbetalt ved likvidering. Her er det viktig å huske på at i denne nye modellen vil långivernes kontantstrøm ved konkurs være den minste av verdien av selskapet fratrukket konkurskostnader og verdien av kupong og prinsipal. I noen tilfeller hvor verdien av kupong og prinsipal ved konkurs er større enn verdien av selskapet fratrukket likvideringskostnader, vil altså gjeldsverdien være uavhengig av likvideringskostnadsraten. Dette kan forklare hvorfor totalverdien av selskapet faller mer enn gjeldsverdien når likvideringskostnadsraten øker. I benchmarkmodellen hadde likvideringskostnadsraten isolert sett større betydning for gjeldsverdien fordi i den modellen ble det modellert at långiverne alltid fikk verdien av selskapet fratrukket likvideringskostnader ved konkurs – man foretok ingen vurdering i forhold til verdien av prinsipal og kupong.

Vi observerer også at egenkapitalverdien synker når likvideringskostnadsraten øker. Dette er annerledes enn i benchmarkmodellen hvor egenkapitalverdien stiger i takt med likvideringskostnadsraten. Vi vurderer det slik at egenkapitalverdien synker her fordi høyere likvideringskostnadsrate medfører at aksjonærene sjeldnere kan få noe ved konkurs. Aksjonærene kan i noen tilfeller få verdi ved konkurs når verdien av selskapet fratrukket likvideringskostnader er større enn verdien av kupong og prinsipal.

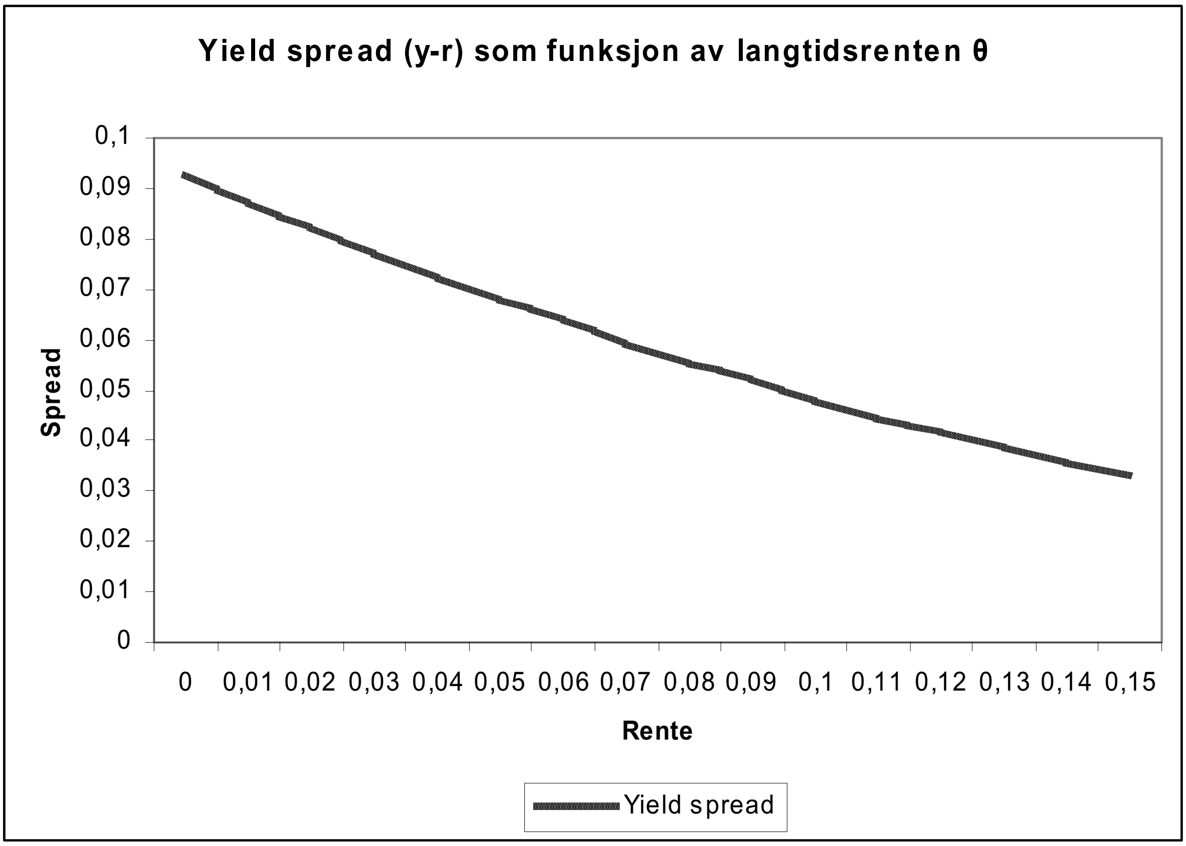
5.3.6 – Komparativ statikk av langtidsrenten θ

Vi velger å utføre komparativ statikk av langtidsrentenivået θ framfor den initiale renten r_0. Dette vil være mer meningsfylt fordi θ er et mer representativt uttrykk for det generelle rentenivået i løpet av selskapets levetid enn det initiale rentenivået.



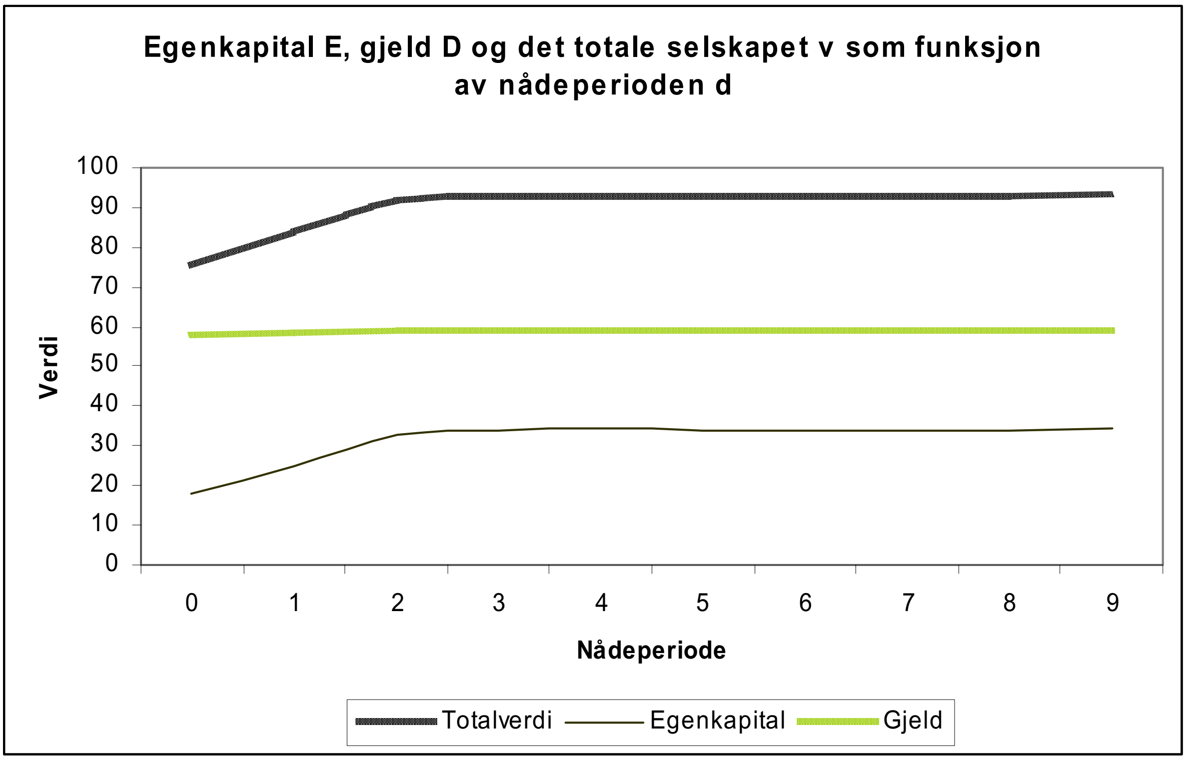
Vi ser at gjeldsandelen øker når langtidsrenten stiger. Også i benchmarkmodellen fikk vi tilsvarende sammenheng. Intuitivt kan gjeldsandelens vekst i denne nye modellen skyldes at restrukturering av gjelden vil skje sjeldnere. Her må vi huske på at restruktureringsbetingelsen tilsvarer at den diskonterte verdien av resterende skattejusterte kuponger og prinsipal, beregnet ved hjelp av regresjonsanalyse, må være større enn prinsipalen. Med et generelt høyere rentenivå vil denne betingelsen sjeldnere bli oppfylt. Ettersom restrukturering inntreffer sjeldnere, vil kreditorene sjeldnere risikere at selskapet kjøper tilbake gjelden, og følgelig vil verdien av gjelden øke. Ettersom restruktureringseffekten til en viss grad er en overføring av verdier mellom kreditorer og aksjonærer, vil ikke totalverdien av selskapet øke like mye som gjeldsverdien. Dermed vil gjeldsandelen her øke.

En annen effekt som også kan medføre at gjeldsandelen stiger, er knyttet til hva som skjer under konkurs. Ved konkurs vil både EBIT og kuponger akkumuleres opp på kontoer. Kupongkontoen vil generelt være større enn EBIT-kontoen gitt de forutsetningene som er tatt i forhold til størrelse på konkursbarrieren. Når renten på kontoene øker, skjønner vi at kupongkontoen da vil stige mer enn EBIT-kontoen. Dermed vil egenkapitalen reduseres i verdi, gjelden øker sin verdi og gjeldsandelen stiger. Det må understrekes at dette i de aller fleste tilfeller vil være en marginal effekt. Effekten for restrukturering på gjeldsandelen må nok regnes for å være dominerende.



Vi ser at yield spreaden synker når langtidsrenten øker. Dette er tilsvarende resultat som vi fikk i benchmarkmodellen. I denne nye modellen har vi ovenfor forklart intuitivt hvorfor gjeldsverdien stiger når langtidsrenten øker. Den viktigste effekten her er knyttet til restrukturering. Når renten øker, er risikoen for restrukturering mindre. Dermed trenger kreditorene mindre risikopåslag i renten, og yield spreaden synker.

5.3.7 – Komparativ statikk av nådeperioden d



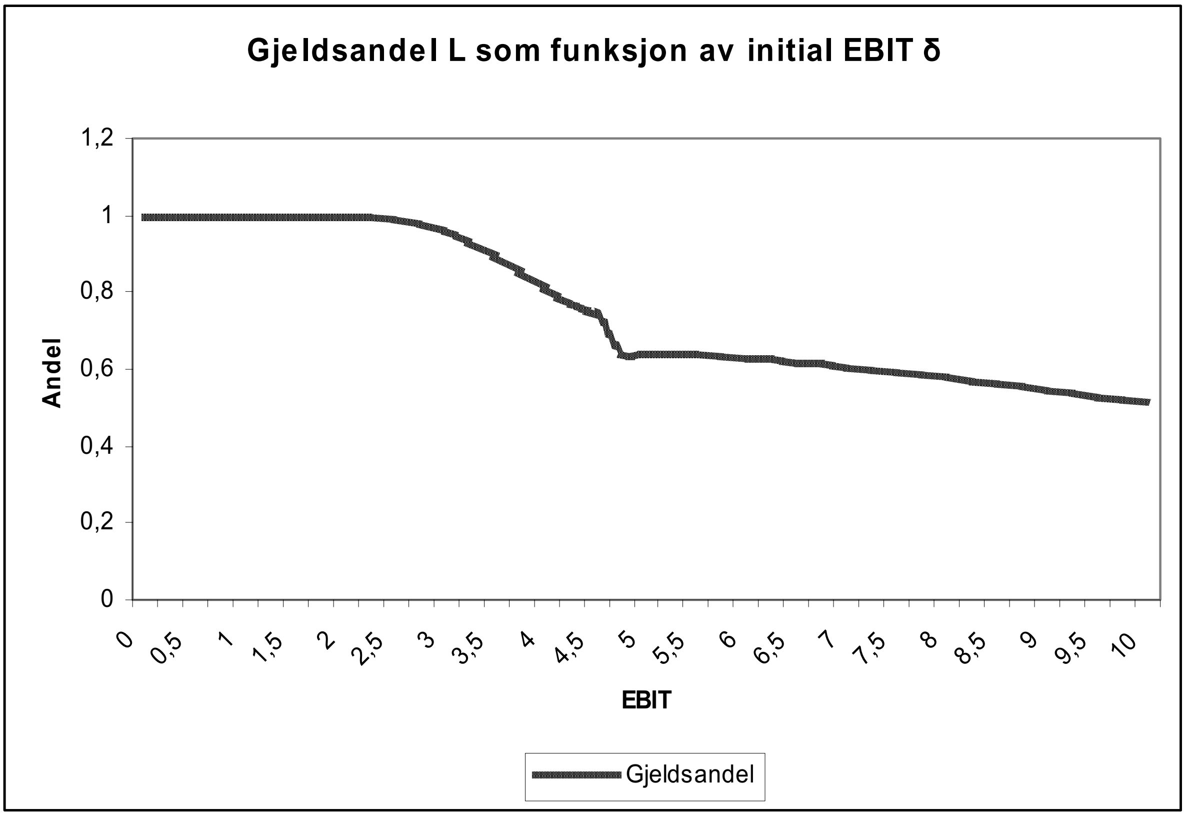
Vår første observasjon er at når nådeperioden er lik 0, får vi at konkurs er ensbetydende med likvidasjon av selskapet, noe som svarer til slik vi modellerte i benchmarkmodellen.

Videre ser vi at totalverdien av selskapet stiger når nådeperioden går fra 0 til 2 år. Intuitivt kan vi tolke dette resultatet som at selskapet har bruk for muligheten til å være i nådeperioden – selskapet kan da få tid til å komme tilbake til likvid tilstand. Totalverdien er imidlertid tilnærmet uendret når nådeperioden økes ytterligere enn 2 år. Dette kan skyldes at fordelen ved den økte sannsynligheten for å returnere til solvent tilstand som følge av lengre nådeperiode ikke i like stor grad overgår kostnadene knyttet til å være i konkurs tilstand.

Vi observerer at gjeldsverdien er tilnærmet uendret for alle valg av nådeperiodelengder. Dette kan skyldes at långiveren ikke i så stor grad straffes for at selskaper er i konkurs – distress kostnadene som løper under konkurs trekkes nemlig direkte av egenkapitalen. Det som påvirker verdien av gjelden i konkurs tilstand er hvor stor andel av de oppsamlede kupongene som kreditorene får tilbakebetalt. Vi har imidlertid tidligere vist at gjeldsverdien er relativt lite sensitiv til endringer i ξ, og følgelig vil lengden på nådeperioden ha lite å si i forhold til gjeldsverdien.

Av figuren ser vi at egenkapitalverdien øker når nådeperioden går fra 0 til 2 år. Vi skjønner at det kan være en fordel her å betrakte egenkapitalen som residualen av totalkapitalen minus gjeldsverdien. Egenkapitalen vil dermed vokse i verdi når nådeperioden øker til 2 år og deretter stabilisere seg. Det er altså en betydelig fordel for aksjonærene å kunne benytte seg av ”Chapter 11” lovverket, og den marginale effekten er spesielt stor for de første 2 årene med nådeperiode.

5.3.8 – Komparativ statikk av EBIT δ_0

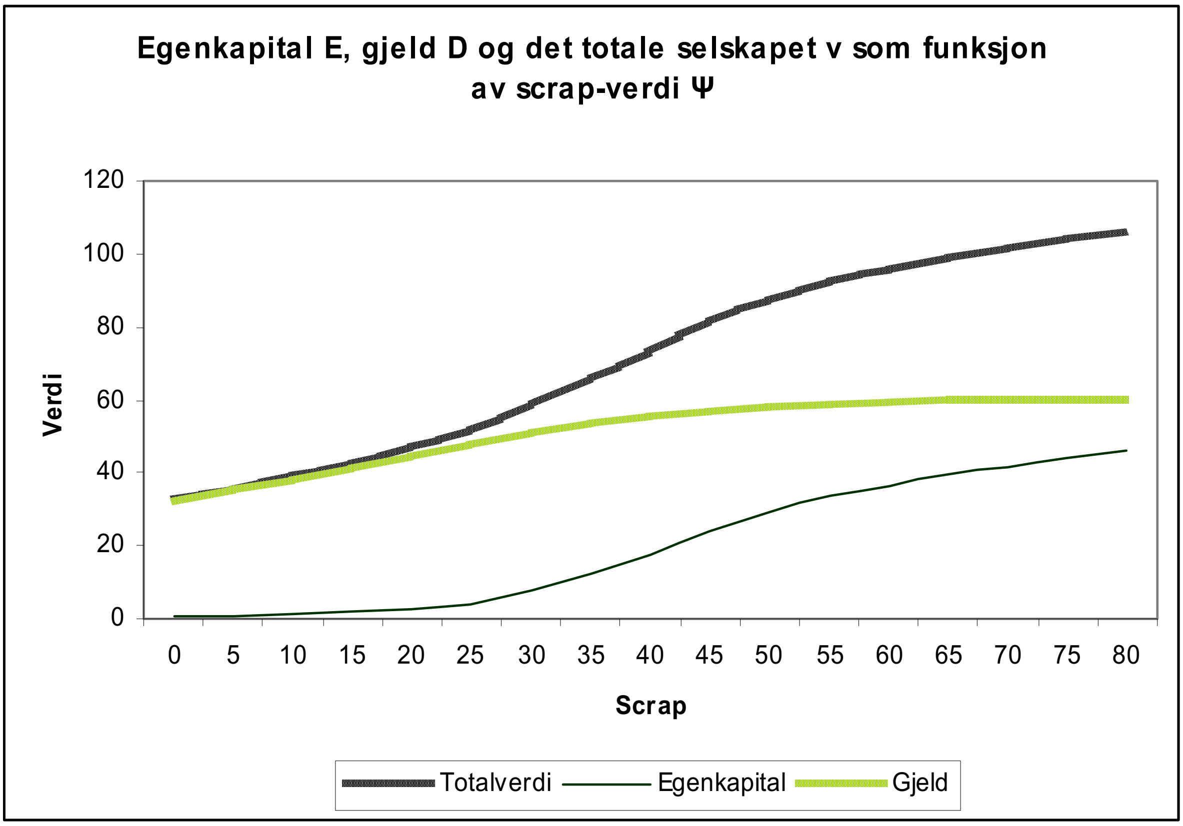


Vi ser at gjeldsandelen synker når den initiale EBIT-verdien stiger. Når den initiale EBIT-verdien er lav, vil egenkapitalen ha relativt lav verdi på grunn av høy konkurs- og likvideringsfare, og dermed vil gjeldsandelen være forholdsvis stor. Når den initiale EBIT-verdien er stor, vil egenkapitalen ha relativt høy verdi på grunn av mindre betydelig konkurs- og likvideringsfare, og dermed vil gjeldsandelen være forholdsvis mindre.

Det kan være interessant å registrere at når EBIT er lavere enn 2, ser vi av figuren at gjeldsandelen er tilnærmet lik 1. I denne situasjonen vil altså egenkapitalverdien være tilnærmet lik 0 – og det til tross for at det er en betydelig scrap-verdi på tidspunkt T. En mulig grunn for dette kan være at med så lav EBIT som 2, vil selskapet gå umiddelbart inn i konkurs tilstand og sannsynligheten for å bli likvidert før tidspunkt T er stor. Ettersom scrap-verdien må diskonteres tilbake til dette likvideringstidspunktet, vil det i svært få tilfeller være verdier igjen til aksjonærene etter at kreditorene har fått sitt.

Vi legger for øvrig merke til at når EBIT er mellom cirka 2 og 5, synker gjeldsandelen stadig raskere når EBIT øker. Når den initiale EBIT-verdien er mellom 2 og 5, starter selskapet i første periode i konkurs. Vi ser at gjeldsandelen stabiliserer seg i større grad når EBIT-verdien er cirka 5 eller høyere. Da starter selskapet i likvid tilstand. Vi skjønner her at egenkapitalverdien vokser betydelig raskere enn gjeldsverdien når EBIT vokser fra cirka 2 til 5, og at egenkapitalverdien vokser noe raskere enn gjeldsverdien når EBIT allerede er større enn cirka 5. Når EBIT er mellom 2 og 5, og EBIT øker, vil gjeldsverdien bli litt sikrere på å få dekket sine krav, mens egenkapitalen øyner muligheten til at EBIT kan komme seg ut av konkurstilstanden. Når EBIT er over cirka 5, vil kreditorene allerede være noenlunde sikre på å få dekket sine krav og får ikke så stor verdiøkning av økt EBIT. Imidlertid vil egenkapitalsverdien øke mer enn gjeldsverdien når EBIT allerede er over cirka 5 og øker litt til – dette skyldes at egenkapitalen er opptatt av residualen etter at kreditorene har tatt sitt.

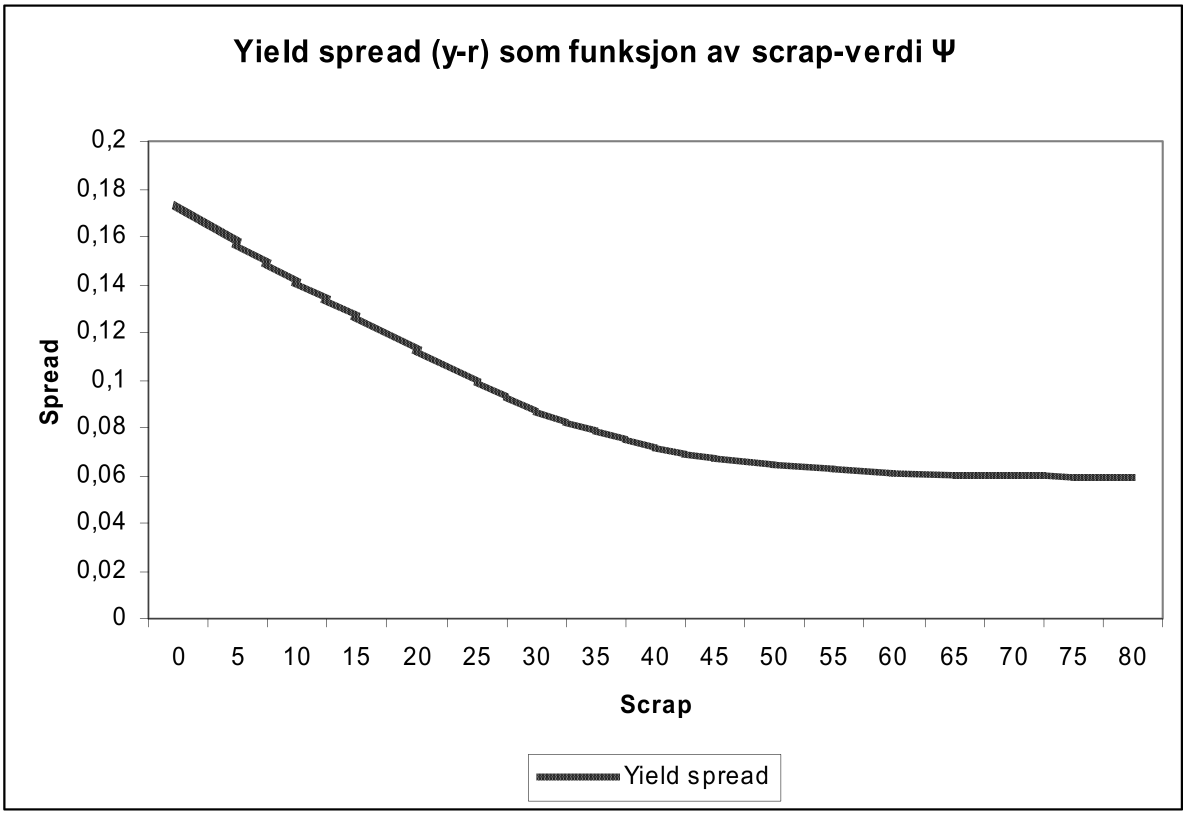
5.3.9 – Komparativ statikk av scrap-verdi Ψ



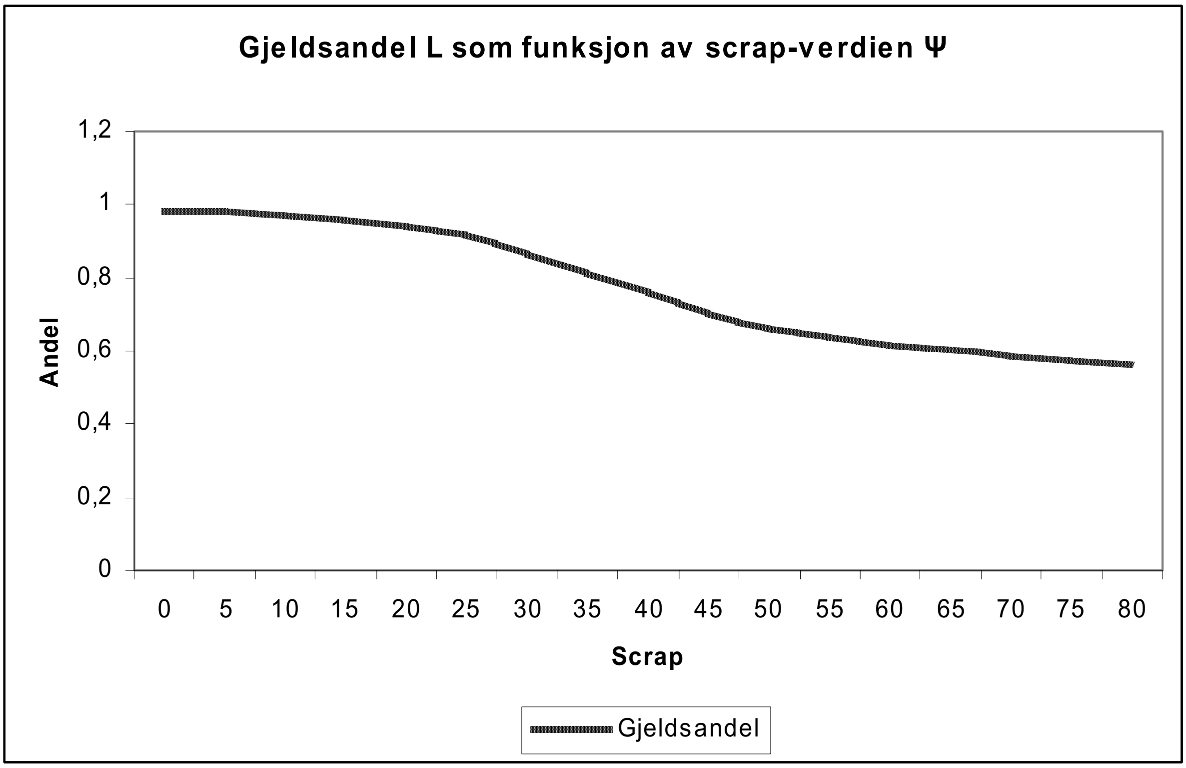
Analysen viser at det totale selskapet stiger i verdi når scrap-verdien øker. Dette virker rimelig ettersom høyere scrap-verdi betyr at selskapet har en høyere verdi på tidspunkt T. Denne høyere scrap-verdien medfører også at risikoen for likvidering reduseres ettersom likvidering oftere inntreffer jo lavere verdien av selskapets aktiviteter er.

Vi observerer at gjeldsverdien stiger i verdi når scrap-verdien vokser. Dette virker naturlig siden långiverne får bedre sikkerhet med høyere scrap-verdi. Spesielt gjelder dette med tanke på om långiverne får betalt tilbake prinsipalen – høyere scrap-verdi øker sannsynligheten for at prinsipalen blir tilbakebetalt. Vi registrerer at gjeldsverdiens vekst faller ned mot 0 etter hvert som scrap-verdien blir høyere; dette skyldes at jo større scrap-verdien er, desto større sannsynlighet er det at kreditorene mottar det de har krav på.

Egenkapitalen vokser også med høyere scrap-verdi. Vi forstår dette på grunn av absolutt prioritetsregelen som sier at aksjonærene får det som er igjen etter at kreditorene (og likvideringskostnadene) har tatt sitt – høyere scrap-verdi vil altså gi mer til kreditorene i de tilfeller hvor kreditors krav ikke er fulldekket. Når scrap-verdien er lav vil kreditorenes krav sjeldent være fulldekket, og dermed vil aksjonærene sjeldent få noe av scrap-verdien. Når scrap-verdien derimot er stor, vil kreditors krav ofte bli dekket, og i disse tilfeller vil aksjonærene kunne motta en del av scrap-verdien.



Vi ser at yield spreaden faller når scrap-verdien øker. Intuitivt kan dette skyldes at sikkerheten for lånet øker, dermed reduseres kreditorenes risiko, og vil kreve lavere kompensasjon for risiko. Følgelig reduseres yield spreaden. Vi legger merke til at yield spreaden faller betraktelig for lave verdier av scrap-verdien, mens fallet i yield spreaden for høye verdier av scrap-verdien er mye mindre. For lave verdier av scrap-verdien vil en økning i scrap-verdi være en verdiøkning som relativt ofte vil tilfalle kreditor siden de er prioritert fremfor aksjonærene. For høye verdier av scrap-verdien vil imidlertid en økning i scrap-verdi være en verdiøkning som relativt sjeldent vil tilfalle kreditor – kreditorene har begrenset oppside og verdiøkningen fra økt scrap-verdi vil fra et visst punkt stort sett tilfalle aksjonærene.



Fra figuren observerer vi at gjeldsandelen synker når scrap-verdien stiger. Ved lav scrap-verdi vil egenkapitalen ha liten verdi fordi mye av eller hele EBIT blir brukt til kuponger, og på tidspunkt T blir scrap-verdien i de aller fleste tilfeller gitt til kreditorene for å dekke prinsipal og kupong. Følgelig vil svært lite av verdiene i selskapet tilfalle aksjonærene. Gjelden vil ha forholdsvis høy verdi fordi kreditorene i utgangspunktet har rett på kupong hver periode, og i de fleste tilfeller vil kreditorene få hele scrap-verdien på tidspunkt T. Etter hvert som scrap-verdien stiger, vil aksjonærene få stigende nytte av å få overskytende fra scrap-verdien etter at kreditorene har fått det de har krav på. Egenkapitalen vil dermed vokse stadig mer i verdi når scrap-verdien øker. Kreditorene vil imidlertid ikke dra like stor nytte av økt scrap-verdi som aksjonærene fordi kreditorene har begrenset oppside, og veksten i gjeldsverdien vil derfor være begrenset. Dermed er det naturlig at gjeldsandelen vil falle når scrap-verdien stiger.

5.4 – Resultater fra den nye modellen

Ved å benytte referanseverdiene presentert i kapittel 5.1 gir vår nye modell følgende resultater gitt optimalisert kupong og prinsipal:

Egenkapital	32,64723	St.dev	0,178011
Gjeld	59,00376	St.dev	0,074815
Totalverdi	91,65099	St.dev	0,220337
Gjeldsandel	0,643787	St.dev	0,001564
Yield Spread	0,063187		
Verdi av selskapets aktiviteter	85,5221		

For å vurdere nøyaktigheten av estimatene, kan det være hensiktsmessig å beregne standardavviket til estimatene. Vi ser at standardavvikene til estimatene våre er relativt lave. De lave standardavvikene kan trolig forklares med et relativt stort antall simuleringer.

5.4.1 – Sammenlikning av resultater i forhold til empiri

Vi observerer at estimatet for totalverdien av selskapet er en verdi på cirka 92. Dette er noe større enn verdien av selskapets aktiviteter på rundt 85. Gjennom å ta opp gjeld og dermed oppnå skattefordelene og utsette seg for konkurskostnader har dermed totalverdien økt med cirka 7.

Gjeldsandelen estimeres til å optimaliseres ved en andel på cirka 64 %. Dette er vesentlig lavere enn gjeldsandelen indikert av benchmarkmodellen (ca 85 %). Imidlertid er det fremdeles noe høyt i forhold til Myers (2001) som beregnet at gjennomsnittlig gjeldsandel for amerikanske selskaper i 1991 er cirka 28 %.

Vi ser også at yield spreaden er på noe i overkant av 600 basispunkter. Dette er vesentlig høyere en et empirisk arbeid til Datta, Iskandar-Datta og Patel (1998) som har beregnet yield spreaden til å være 68 basispunkter i gjennomsnitt for amerikanske selskaper. At yield spreaden er såpass høy i vår modell, kan trolig forklares ut i fra muligheten for gjenkjøp av gjeld. Siden kreditorene risikerer at gjelden blir tilbakekjøpt når det er ugunstig for deres vedkommende, vil de kreve kompensasjon for dette i form av økt yield spread. Følgelig vil det være misvisende å sammenligne yield spread fra denne nye modellen med yield spread basert på standard gjeld uten mulighet for gjenkjøp.

5.4.2 – Sammenlikning av resultater i forhold til benchmarkmodell

Vi har nå sett på 2 modeller som beskriver bedriftens valg av optimal kapitalstruktur og beregner yield spread. Det må nevnes at modellene er så forskjellig i oppbygning og struktur at ikke alle resultater kan sammenlignes direkte. Vi har valgt å fokusere på resultatene for optimal gjeldsandel og yield spread. I tillegg har vi tatt med det prosentvise forholdet mellom totalverdi og verdi av bedriftens aktiviteter.

I følgende tabell har vi oppsummert resultatene for benchmarkmodellen og den nye modellen:

	Benchmarkmodellen	*Den nye modellen*
Totalverdi selskapet / Verdi av bedriftens aktiviteter	137,478 %	107,166 %
Gjeldsandel	0,851718877	0,643787
Yield spread	0,0043023	0,063187

Når det gjelder totalverdien i forhold til verdien av selskapets aktiviteter, ser vi at benchmarkmodellen i mye større grad enn den nye modellen øker totalverdien av selskapet gjennom å ta opp gjeld. Hovedårsaken til dette tror vi er at restruktureringsmuligheten som vi åpner opp for i den nye modellen. Ved å restrukturere gjelden vil selskapet miste framtidige skattefordeler og konkurskostnader. At den nye modellen kun modellerer en periode på 9 år, mens benchmarkmodellen ser på en uendelig horisont, kan også tale for å forklare dette avviket mellom modellene.

Vi ser at gjeldsandelen er betraktelig lavere i den nye modellen enn i benchmarkmodellen. At gjeldsandelen er lavere i den nye modellen enn i benchmarkmodellen, kan nok først og fremst skyldes at kreditorene frykter tap ved restrukturering. Konkurskostnadene kan også tenkes å være større i den nye modellen, fordi i den nye modellen taper kreditorene noe ved å være i konkursperiode(-r) – en slik konkursperiode finnes jo ikke i benchmarkmodellen. Videre vil kreditorene ofte få mer ved likvidering i benchmarkmodellen enn i den nye modellen, fordi i benchmarkmodellen får kreditorene verdien av selskapet fratrukket konkurskostnader, mens i den nye modellen vil kreditorenes utbetaling ved likvidering kunne bli begrenset av verdien av kupong og prinsipal. I og med at gjelden har en endelig løpetid, kan også likvidering inntreffe i den nye modellen som følge av at selskapet ikke har midler til å betale prinsipalen på gjelden ved forfall. Kombinert med at likvidering kan inntreffe som følge av at nådeperioden utløper, vil hyppigheten av likvidering delvis kunne forklare den lave gjeldsandelen.

Det kan også observeres at yield spreaden er betydelig høyere i den nye modellen enn i benchmarkmodellen. En grunn til denne forskjellen kan være at den nye modellen åpner opp for restrukturering av gjelden. Kreditorene vil dermed risikere at gjelden blir tilbakekjøpt når det er ugunstig for dem, og vil følgelig kreve kompensasjon for dette gjennom økt yield spread. Avgjørelsen om gjelden skal restruktureres avhenger blant annet av hvordan rentenivået er på det gitte tidspunktet. I den sammenheng spiller den stokastiske renteprosessen introdusert i den nye modellen en sentral rolle. Vi vil påstå at denne restruktureringsmuligheten medfører at gjelden her må betraktes som helt annerledes enn alminnelig gjeld uten slike opsjonsmuligheter. En annen grunn til forskjellen i yield spread mellom modellene kan være knyttet til at i den nye modellen taper kreditorene noe ved å være i konkurs tilstand, mens en slik konkursperiode ikke finnes i benchmarkmodellen. Videre kan denne forskjellen skyldes ulike spesifikasjoner knyttet til når likvidering av selskapet inntreffer, se tilsvarende diskusjon for gjeldsandelen ovenfor.

Kapittel 6 – Konklusjon

I denne rapporten studerer vi problemstillinger knyttet til optimal kapitalstruktur og yield spread basert på strukturelle kredittrisikomodeller. Vi analyserer også hvilke faktorer og parametere som påvirker optimal kapitalstruktur og yield spread. To forskjellige modeller er brukt; en benchmarkmodell basert på Leland (1994) og en ny modell utviklet med basis i senere tids forskning innenfor fagområdet strukturelle kredittrisikomodeller.

Fra benchmarkmodellen med endogen konkursbarriere og kupong har vi at parametrene som bestemmer optimal gjeldsandel og yield spread er verdien av selskapets aktiviteter, risikofri rente, skattesats, konkurskostnadsrate og volatiliteten til verdien av selskapets aktiviteter. Vi gjennomfører en komparativ statikk-analyse hvor vi undersøker hvordan disse parametrene påvirker benchmarkmodellen. Parametrene som undersøkes, er skattesats, kupong, risikofri rente, konkurskostnadsrate, volatilitet og gjeldsandel.

Vi finner at den optimale gjeldsandelen ifølge benchmarkmodellen er markant høyere enn hva vi ser empirisk. Benchmarkmodellen gir dessuten noe lavere yield spread enn hva vi observerer i praksis. Ut i fra at benchmarkmodellen har innebygd strenge forutsetninger som for eksempel gjeld med uendelig horisont, synes vi at resultatene fra benchmarkmodellen må kunne beskrives som relativt tilfredsstillende i forhold til empiri.

Ut i fra de selskapsspesifikke parametrene knyttet til benchmarkmodellen, det vil si konkurskostnadsraten og volatiliteten, beregner vi optimal kapitalstruktur og yield spread for 4 forskjellige typer bedrifter. Vi finner at tradisjonell industri typisk vil ha høy gjeldsandel og lav yield spread, noe som stemmer med hva vi vanligvis ser i praksis. Det vises at høyteknologiske bedrifter med høy volatilitet vil ha lavere gjeldsandel enn tradisjonell industri, og dette er også utvilsomt i tråd med praksis. Analysene tyder på at benchmarkmodellen generelt har gode muligheter til å tilpasses selskapsspesifikke forhold.

I kapittel 4 og 5 utvikler vi en ny modell for å optimalisere kapitalstruktur og finne yield spread. Denne modellen er basert på senere tids forskning innenfor forskningsområdet strukturelle kredittrisikomodeller. Her tar vi høyde for en EBIT-prosess, stokastisk renteprosess, mulighet for å restrukturere gjeld og konkursprosedyrer etter amerikansk lov.

Det legges opp til gjeld med endelig horisont – og kupong og prinsipal beregnes slik at de maksimerer totalverdien av selskapet. Det benyttes numeriske løsningsmetoder som simulering og Longstaff Schwartz metode.

I denne modellen ser vi at det er betydelig flere parametere som bestemmer optimal kapitalstruktur og yield spread. Vi gjennomfører komparativ statikk for å undersøke betydningen av parametrene i modellen. Parametrene som velges ut, er kupong, EBIT-volatilitet, tilbakebetalingsandel, distress kostnad, konkurskostnadsrate, langtidsrente, nådeperiode, initialt EBIT-nivå og scrap-verdi. Vi kommenterer likheter og ulikheter i forhold til benchmarkmodellen der hvor det er naturlig.

Vi sammenligner resultater mellom den nye modellen og empiri. Vi får at den nye modellen antyder markant høyere gjeldsandel og yield spread enn empiriske data. Det foretas også sammenligning mellom resultater fra den nye modellen og benchmarkmodellen. Vi finner at den nye modellen antyder lavere optimal gjeldsandel og betydelig høyere yield spread enn benchmarkmodellen. Vi redegjør for hvordan disse forskjellene skyldes ulikheter i modellenes spesifikasjoner.

Avslutningsvis vil vi antyde hvordan den nye modellen vil kunne utvikles videre. For det første synes vi det kunne være interessant å implementere en metode for å bestemme tilbakebetalingsandelen ζ. En aktuell metode er utledet av Francois og Morellec (2004) hvor det brukes en Nash-likevekt. For det andre kunne det være interessant å implementere en mulighet til å restrukturere gjelden når selskapet er i konkursfare. En slik metode er gjort rede for blant annet av Christensen, Flor, Lando og Miltersen (2002). For det tredje kunne det være av verdi å ta med problemstillinger knyttet til asymmetrisk informasjon og prinsipal-agent problemet. Per dags dato er disse problemstillingene lite innarbeidet i fagområdet strukturelle kredittrisikomodeller. Det er ventet at mye av forskningen i framtiden på dette området kommer til å dreie seg om å integrere teorier fra fagfelt knyttet til asymmetrisk informasjon og prinsipal-agent problemet med fagområdet strukturelle kredittrisikomodeller. Et viktig bidrag til dette arbeidet er gjort av Bank og Lawrenz (2005).

Appendiks A - Nullkupongobligasjon under Vasiceks rentemodell

Formålet med dette appendikset er å utlede verdien av en nullkupongobligasjon i et rentemiljø karakterisert ved Vasiceks modell. Utledningen baserer seg blant annet på Mamon (2004).I kapittel 4.2 presenteres Vasiceks rentemodell ved prosessen:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^{rQ} \tag{A.1}$$

Under det risikonøytrale sannsynlighetsmålet Q vil prisen på tid t av en nullkupongobligasjon med forfall T og pålydende 1 bestemmes ved:

$$P(t,T) = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du} \mid F_t \right] \tag{A.2}$$

Dermed blir utfordringen å beregne denne forventningen. Fra sannsynlighetsteorien har vi at:

$E\left[e^{R_t}\right] = e^{E[R_t] + \frac{1}{2}Var[R_t]}$ når R_t er normalfordelt.

Dermed kan vi beregne verdien av nullkupongobligasjonen ved å bestemme forventning og varians til uttrykket $\left(-\int_t^T r_u du \right)$ siden dette er normalfordelt.

For å forenkle noen av beregningene definerer vi:

$$X(u) = r_u - \theta \tag{A.3}$$

Hvor $X(u)$ er løsningen av Ornstein-Uhlenbeck likningen gitt ved:

$$dX(t) = -\kappa X(t)dt + \sigma_r dW_t^{rQ} \qquad X(0) = r_0 - \theta$$

Ved å benytte Itôs lemma på den integrerende faktoren $f(x,t) = xe^{\kappa t}$ finner vi at:

$$d(Xe^{\kappa t}) = \left[f_1(x,t)(-\kappa X(t)) + \frac{1}{2} f_{11}(x,t)\sigma_r^2 + f_2(x,t) \right] dt + f_1(x,t)\sigma_r dW_t^{rQ}$$
$$= \left[e^{\kappa t}(-\kappa X(t)) + \kappa X(t) e^{\kappa t} \right] dt + \sigma_r e^{\kappa t} dW_t^{rQ}$$

Dette gir:

$$d\left(Xe^{\kappa t}\right) = \sigma_r e^{\kappa t} dW_t^{rQ}$$

Vi integrerer uttrykket og finner:

$$\int_0^u d(Xe^{\kappa t}) = \sigma_r \int_0^u e^{\kappa v} dW_v^{rQ}$$
$$X(u)e^{\kappa u} - X(0)e^0 = \sigma_r \int_0^u e^{\kappa v} dW_v^{rQ}$$

Dermed kan vi skrive prosessen $X(u)$ som:

$$X(u) = e^{-\kappa u}\left[X(0) + \sigma_r \int_0^u e^{\kappa v} dW_v^{rQ} \right] \tag{A.4}$$

Av uttrykket (A.4) ser vi enkelt at $X(u)$ er normalfordelt. Resonnementet er tilsvarende det vi gjør i kapittel 4.2. Ettersom $X(u)$ er normalfordelt vil også $\int_0^t X(u)du$ være normalfordelt. Av uttrykket for $X(u)$ finner vi enkelt at forventningen av $X(u)$ er gitt ved:

$$E^Q[X(u)] = X(0)e^{-\kappa u}$$

Dermed finner vi forventningen av $\int_0^t X(u)du$ som følger:

$$E^Q\left[\int_0^t X(u)du \right] = \int_0^t X(0)e^{-\kappa u} du = X(0)\left[-\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u} \right]_0^t$$

$$E^Q\left[\int_0^t X(u)du\right] = \frac{1}{\kappa}X(0)\left[1-e^{-\kappa t}\right] \tag{A.5}$$

Videre ønsker vi å bestemme variansen til $\int_0^t X(u)du$. For å gjøre dette beregner vi først kovariansen mellom $X(t)$ og $X(u)$ ved å sette inn fra uttrykk (A.4):

$$Cov^Q[X(t),X(u)] = E^Q\left[(X(t)-E^Q[X(t)])(X(u)-E^Q[X(u)])\right]$$
$$= E^Q\left[\left(e^{-\kappa t}X(0)+e^{-\kappa t}\sigma_r\int_0^t e^{\kappa s}dW_s^{rQ} - e^{-\kappa t}X(0)\right)\left(e^{-\kappa u}X(0)+e^{-\kappa u}\sigma_r\int_0^u e^{\kappa v}dW_v^{rQ} - e^{-\kappa u}X(0)\right)\right]$$

Dette kan skrives som:

$$Cov^Q[X(t),X(u)] = \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+t)}E^Q\left[\int_0^t e^{\kappa s}dW_s^{rQ}\int_0^u e^{\kappa v}dW_v^{rQ}\right]$$
$$= \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+t)}Cov^Q\left[\int_0^t e^{\kappa s}dW_s^{rQ}, \int_0^u e^{\kappa v}dW_v^{rQ}\right]$$

Vi ønsker å se nærmere på uttrykket $Cov^Q\left[\int_0^t e^{\kappa s}dW_s^{rQ}, \int_0^u e^{\kappa v}dW_v^{rQ}\right]$. Som et hjelpemiddel i beregningen innføres en indikatorfunksjon $\mathbf{1}_{\{x\}}$ for hendelsen x. Denne funksjonen er karakterisert ved at funksjonsverdien er 1 dersom x er sann og 0 ellers.
Vi omskriver uttrykket ved hjelp av indikatorfunksjoner:

$$Cov^Q\left[\int_0^t e^{\kappa s}dW_s^{rQ}, \int_0^u e^{\kappa v}dW_v^{rQ}\right] = Cov^Q\left[\int_0^T e^{\kappa s}1_{\{s\in[0,t]\}}dW_s^{rQ}, \int_0^u e^{\kappa v}1_{\{v\in[0,u]\}}dW_v^{rQ}\right]$$

Ved hjelp av Itôs isometri finner vi da:

$$Cov^Q\left[\int_0^t e^{\kappa s} dW_s^{rQ}, \int_0^u e^{\kappa v} dW_v^{rQ}\right] = E^Q\left[\int_0^T e^{\kappa s} 1_{\{s\in[0,t]\}} e^{\kappa s} 1_{\{s\in[0,t]\}} ds\right]$$

$$= \int_0^T 1_{\{s\in[0,t]\}} 1_{\{s\in[0,t]\}} e^{2\kappa s} ds$$

Dette gir oss at denne kovariansen er:

$$Cov^Q\left[\int_0^t e^{\kappa s} dW_s^{rQ}, \int_0^u e^{\kappa v} dW_v^{rQ}\right] = \int_0^{\min(u,t)} e^{2\kappa s} ds$$

Innsatt i uttrykket for kovariansen mellom $X(t)$ og $X(u)$:

$$Cov^Q[X(t), X(u)] = \sigma_r^2 e^{-\kappa(u+t)} \int_0^{\min(u,t)} e^{2\kappa s} ds$$

Ved å integrere og sette inn for integralgrensene får vi uttrykket:

$$Cov^Q[X(t), X(u)] = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} e^{-\kappa(u+t)}\left(e^{2\kappa(\min(u,t))} - 1\right)$$

Ettersom $\min(u,t) = \frac{1}{2}(u + t - |u - t|)$ finner vi:

$$Cov^Q[X(t), X(u)] = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa}\left(e^{-\kappa|u-t|} - e^{-\kappa(u+t)}\right)$$

Dersom vi setter $u = t$ finner vi til slutt:

$$Cov^Q[X(t), X(u)] = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(u+t)}\right)$$

Følgelig kan vi bestemme variansen til $\int_0^t X(u)du$ på følgende måte:

$$Var^Q\left[\int_0^t X(u)du\right] = Cov^Q\left[\int_0^t X(u)du, \int_0^t X(s)ds\right]$$
$$= E^Q\left[\left(\int_0^t X(u)du - E^Q\left[\int_0^t X(u)du\right]\right)\left(\int_0^t X(s)ds - E^Q\left[\int_0^t X(s)ds\right]\right)\right]$$

Dette kan lett omskrives til:

$$Var^Q\left[\int_0^t X(u)du\right] = \int_0^t\int_0^t E^Q\left[\left(X(u) - E^Q[X(u)]\right)\left(X(s) - E^Q[X(s)]\right)\right]duds$$
$$= \int_0^t\int_0^t Cov^Q[X(u), X(s)]duds$$

Ved å benytte uttrykket vi fant for kovariansen ovenfor finner vi:

$$Var^Q\left[\int_0^t X(u)du\right] = \int_0^t\int_0^t \frac{\sigma_r^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(u+s)}\right)duds$$

Vi kan beregne dette dobbeltintegralet (se for eksempel Apostol (1969) for teori om multiple integral):

$$Var^Q\left[\int_0^t X(u)du\right] = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3}\left(2\kappa t - 3 + 4e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}\right) \tag{A.6}$$

Fra den konstruerte sammenhengen (A.3) har vi da at:

$$E^Q\left[-\int_0^t r_u du\right] = E^Q\left[-\int_0^t (X(u) + \theta)du\right]$$

Vi kan dermed bestemme forventningen til $\left(-\int_t^T r_u du\right)$ ved hjelp av (A.5):

$$E_t^Q\left[-\int_t^T r_u du\right] = -E_t^Q\left[\int_t^T X(u)du\right] - E_t^Q\left[\int_t^T \theta du\right]$$

Dette gir forventningen:

$$E_t^Q\left[-\int_t^T r_u du\right] = -\frac{r_t-\theta}{\kappa}\left[1-e^{-\kappa(T-t)}\right] - \theta(T-t) \tag{A.7}$$

På tilsvarende måte kan vi bestemme variansen til $\left(-\int_t^T r_u du\right)$:

$$Var_t^Q\left[-\int_t^T r_u du\right] = Var_t^Q\left[-\int_t^T (X(u)+\theta)du\right] = Var_t^Q\left[\int_t^T X(u)du\right]$$

Ved å benytte uttrykket for variansen til (A.6) finner vi da:

$$Var_t^Q\left[-\int_t^T r_u du\right] = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3}\left[2\kappa(T-t)-3+4e^{-\kappa(T-t)}-e^{-2\kappa(T-t)}\right] \tag{A.8}$$

Fra Itô integral representasjonen av r_t kan vi slutte at kortrenteprosessen er Markov. Det vil si at fremtidig kortrente kun er avhengig av verdien på dagens kortrente, og ikke tidligere kortrenter. Da vet vi:

$$E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du} \mid F_t\right] = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u du} \mid r_t\right] = E_t^Q\left[e^{-\int_t^T r_u(r_t) du} \mid r_t\right]$$

På grunn av Markov egenskapen er altså renteprosessen r_u en funksjon av renten r_t på tidspunkt t.

Dermed kan vi skrive verdien av nullkupongobligasjonen som:

$$P(t,T) = e^{E_t^Q\left[-\int_t^T r_u(r_t)du\right]+\frac{1}{2}Var_t^Q\left[-\int_t^T r_u(r_t)du\right]} \tag{A.9}$$

Ved å sette inn for forventningen (A.7) og variansen (A.8) får vi:

$$P(t,T) = e^{-\frac{r_t-\theta}{\kappa}\left[1-e^{-\kappa(T-t)}\right]-\theta(T-t)+\frac{\sigma_r^2}{4\kappa^3}\left[2\kappa(T-t)-3+4e^{-\kappa(T-t)}-e^{-2\kappa(T-t)}\right]}$$

$$= e^{-\left[\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right]r_t+\theta\left[\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}-(T-t)\right]-\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\left[\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right]+\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}(T-t)-\frac{\sigma_r^2}{4\kappa}\left[\frac{1-2e^{-\kappa(T-t)}+e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa^2}\right]}$$

Videre manipulasjon gir:

$$P(t,T) = e^{-B(t,T)r_t+\theta B(t,T)-\theta(T-t)-\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}B(t,T)+\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}(T-t)-\frac{\sigma_r^2}{4\kappa}B(t,T)^2} \tag{A.10}$$

Dermed er verdien på tid t av en nullkupongobligasjon med forfall T gitt ved:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)} \tag{A.11}$$

hvor

$$B(t,T) = \left(\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right) \tag{A.11i}$$

$$A(t,T) = e^{\left[(B(t,T)-(T-t))\left(\theta-\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right)-\frac{\sigma_r^2}{4\kappa}(B(t,T))^2\right]} \tag{A.11ii}$$

Dermed har vi funnet et analytisk uttrykk for verdien på tid t av en nullkupongobligasjon med forfall T i et Vasicek rentemiljø.

Appendiks B - Sammenheng EBIT δ og verdi av selskapets aktiviteter V

Vi ønsker i dette appendikset å etablere en sammenheng mellom EBIT δ og verdien av selskapets aktiviteter V i et stokastisk rentemiljø. Verdien V bestemmes som verdien av å motta all inntjening fra selskapet i hele dets levetid. I tilfellet med en konstant rente r er denne sammenhengen relativt enkel å etablere, se for eksempel Goldstein, Ju og Leland (2001) for resultat. Dersom renten derimot modelleres som en stokastisk prosess vil sammenhengen bli mer komplisert å utlede. Dette appendikset bygger i stor grad på Dierker, Miltersen og Torous (2006), hvor det presenteres en mer generell utledning som tillater parametrene å være tidsavhengige.

Vi tar utgangspunkt i en EBIT-prosess under sannsynlighetsmålet Q gitt på følgende måte:

$$d\delta_t = (\mu + \beta + \eta r_t)\delta_t dt - \sigma_\delta \delta_t dW_t^{\delta Q} \tag{B.1}$$

Driftleddet vil altså generelt kunne avvike fra den risikofri rentesatsen. Kortrenten modelleres etter Vasiceks rentemodell:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^{rQ} \tag{B.2}$$

Som antatt i kapittel 4.2 er korrelasjonen mellom de to Brownian Motions gitt ved:

$$d\left\langle W^{\delta Q}, W^{rQ} \right\rangle_t = \rho dt$$

For enkelhets skyld antas alle parametrene $\mu, \beta, \eta, \sigma_\delta, \kappa, \theta, \sigma_r$ å være konstanter. Se Dierker, Miltersen og Torous (2006) for tilfellet med tidsavhengige parametere.

Verdien av å motta all profitt fra selskapet i perioden $[t, T]$, det vil si verdien av selskapets aktiviteter, vil være gitt ved:

$$V(t,T) = E_t^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^u r_s ds} \delta_u du\right] \tag{B.3}$$

For å kunne beregne denne forventningen må vi definere noen hjelpevariable:

$$\gamma_t = \int_0^t r_s ds \tag{B.4}$$

Dermed kan vi uttrykke (B.4) som:

$$d\gamma_t = r_t dt$$

Videre defineres:

$$\varepsilon_t = \ln(\delta_t) \tag{B.5}$$

Ved hjelp av Itôs lemma finner vi følgende prosess for (B.5):

$$d\varepsilon_t = \left[(\mu + \beta + \eta r_t)\delta_t \frac{1}{\delta_t} + \left(\frac{1}{2}\sigma_\delta^2 \delta_t^2\right)\left(-\frac{1}{\delta_t^2}\right)\right]dt + \sigma_\delta \delta_t dW_t^{\delta Q}$$
$$d\varepsilon_t = \left(\mu + \beta + \eta r_t - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)dt + \rho\sigma_\delta dW_{1t}^Q + \sigma_\delta\sqrt{1-\rho^2}\,dW_{2t}^Q$$

hvor W_{1t}^Q og W_{2t}^Q er to uavhengige Brownian motions spesifisert ved $dW_t^{rQ} = dW_{1t}^Q$ og $dW_t^{\delta Q} = \rho dW_{1t}^Q + \sqrt{1-\rho^2}\,dW_{2t}^Q$.

For å forenkle den videre beregningen definerer vi transformasjonene:

$$x_t = e^{\kappa t} r_t \tag{B.6}$$

$$y_t = \eta \frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa} r_t + \varepsilon_t \tag{B.7}$$

$$z_t = \frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa} r_t + \gamma_t \tag{B.8}$$

Siden x_t, y_t, z_t er funksjoner av $r_t, \varepsilon_t, \gamma_t$ kan vi benytte Itôs lemma for å bestemme prosessene de vil følge:

$$dx_t = \left[\left(\kappa\left(\theta - r_t\right)\right)e^{\kappa t} + \kappa e^{\kappa t} r_t\right]dt + \sigma_r e^{\kappa t} dW_{1t}^Q$$
$$dx_t = \kappa\theta e^{\kappa t} dt + e^{\kappa t}\sigma_r dW_{1t}^Q$$

Videre får vi

$$dy_t = \left[\left(\kappa(\theta - r_t)\right)\eta \frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa} - \eta e^{\kappa t} r_t\right]dt + \sigma_r \eta \frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa} dW_{1t}^Q$$
$$+\left(\mu + \beta + \eta r_t - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)dt + \rho\sigma_\delta dW_{1t}^Q + \sigma_\delta\sqrt{1-\rho^2}\, dW_{2t}^Q$$
$$dy_t = \left[\eta\theta\left(1 - e^{\kappa t}\right) + \mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right]dt + \left[\eta\frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa}\sigma_r + \rho\sigma_\delta\right]dW_{1t}^Q + \sigma_\delta\sqrt{1-\rho^2}\, dW_{2t}^Q$$

Tilsvarende beregning for z_t gir oss:

$$dz_t = \left[\left(\kappa(\theta - r_t)\right)\frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa} - e^{\kappa t} r_t\right]dt + \sigma_r \frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa} dW_{1t}^Q + r_t dt$$
$$dz_t = \theta\left(1 - e^{\kappa t}\right)dt + \frac{1-e^{\kappa t}}{\kappa}\sigma_r dW_{1t}^Q$$

Ettersom vi nå har etablert prosessene x_t, y_t, z_t vil følge, kan vi integrere uttrykkene med hensyn på tiden, og finner:

$$x_t = x_s + \kappa\theta \int_s^t e^{\kappa v} dv + \sigma_r \int_s^t e^{\kappa v} dW_{1v}^Q$$

$$x_t = x_s + \theta\left(e^{\kappa t} - e^{\kappa s}\right) + \sigma_r \int_s^t e^{\kappa v} dW_{1v}^Q$$

Dermed kan vi benytte sammenhengen mellom x_t og r_t fra (B.6). Fra dette vet vi at:

$$r_t = e^{-\kappa t} x_t$$

$$r_t = e^{-\kappa(t-s)} r_s + \theta\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + \sigma_r \int_s^t e^{-\kappa(t-v)} dW_{1v}^Q \tag{B.9}$$

På samme måte kan vi uttrykke y_t som:

$$y_t = y_s + \int_s^t \left(\eta\theta\left(1 - e^{\kappa v}\right) + \mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right) dv + \int_s^t \left(\eta \frac{1 - e^{\kappa v}}{\kappa} \sigma_r + \rho\sigma_\delta\right) dW_{1v}^Q + \int_s^t \sigma_\delta \sqrt{1 - \rho^2}\, dW_{2v}^Q$$

$$y_t = y_s - \frac{\eta\theta}{\kappa}\left(e^{\kappa t} - e^{\kappa s}\right) + \left(\eta\theta + \mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)(t - s) + \int_s^t \left(\eta \frac{1 - e^{\kappa v}}{\kappa} \sigma_r + \rho\sigma_\delta\right) dW_{1v}^Q + \sigma_\delta \int_s^t \sqrt{1 - \rho^2}\, dW_{2v}^Q$$

Dermed kan vi bestemme ε_t ved å benytte sammenhengen (B.7):

$$\varepsilon_t = y_t - \eta \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa} r_t$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t = \varepsilon_s &+ \left(\eta \frac{1 - e^{\kappa s}}{\kappa} - \eta \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa} e^{-\kappa(t-s)}\right) r_s - \frac{\eta\theta}{\kappa}\left(e^{\kappa t} - e^{\kappa s}\right) + \left(\eta\theta + \mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)(t - s) - \eta \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa} \theta\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) \\ &+ \int_s^t \left(\eta \frac{1 - e^{\kappa v}}{\kappa} \sigma_r + \rho\sigma_\delta - \eta \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa} \sigma_r e^{-\kappa(t-v)}\right) dW_{1v}^Q + \sigma_\delta \int_s^t \sqrt{1 - \rho^2}\, dW_{2v}^Q\end{aligned}$$

Dette gir da:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_s + \frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right)r_s - \frac{\eta\theta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + \left(\eta\theta + \mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)(t-s)$$
$$+ \int_s^t \left(\frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{\kappa(t-v)}\right)\sigma_r + \rho\sigma_\delta\right) dW_{1v}^Q + \sigma_\delta \int_s^t \sqrt{1-\rho^2}\, dW_{2v}^Q \tag{B.10}$$

Tilsvarende kan vi også finne uttrykk for z_t :

$$z_t = z_s + \theta\int_s^t \left(1 - e^{\kappa v}\right)dv + \frac{\sigma_r}{\kappa}\int_s^t \left(1 - e^{\kappa v}\right)dW_{1v}^Q$$
$$z_t = z_s + \theta(t-s) - \frac{\theta}{\kappa}\left(e^{\kappa t} - e^{\kappa s}\right) + \frac{\sigma_r}{\kappa}\int_s^t \left(1 - e^{\kappa v}\right)dW_{1v}^Q$$

Ved å ta utgangspunkt i sammenhengen mellom γ_t og z_t gitt i (B.8) oppnår vi følgende resultat:

$$\gamma_t = z_t - \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa} r_t$$
$$\gamma_t = \gamma_s + \left(\frac{1 - e^{\kappa s}}{\kappa} - \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa} e^{-\kappa(t-s)}\right) r_s + \theta(t-s) - \frac{\theta}{\kappa}\left(e^{\kappa t} - e^{\kappa s}\right) - \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa}\theta\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right)$$
$$+ \int_s^t \left(\frac{\sigma_r}{\kappa}\left(1 - e^{\kappa v}\right) - \frac{1 - e^{\kappa t}}{\kappa} e^{-\kappa(t-v)}\sigma_r\right) dW_{1v}^Q$$

Dermed blir:

$$\gamma_t = \gamma_s + \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right)r_s + \theta(t-s) - \frac{\theta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + \frac{\sigma_r}{\kappa}\int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(t-v)}\right)dW_{1v}^Q \tag{B.11}$$

Ved hjelp av uttrykkene vi har kommet fram til for $\gamma_t, \varepsilon_t, r_t$ kan vi benytte dette til å beregne verdien av å motta all profitt fra selskapets drift i perioden $[t, T]$ gitt av likning (B.3):

$$V(t,T) = E_t^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^u r_s ds} \delta_u du\right]$$

Ved å benytte at integral er definert som en sum i tillegg til setningen om at forventningen til en sum er lik summen av forventningene, finner vi:

$$V(t,T) = \int_t^T E_t^Q\left[e^{-\int_t^u r_s ds} \delta_u\right] du$$

Dermed kan vi benytte hjelpevariablene definert i dette appendikset til å omformulere dette til:

$$V(t,T) = \int_t^T E_t^Q\left[e^{-\gamma_u + \gamma_t + \varepsilon_u}\right] du \tag{B.12}$$

Følgelig vil vi være interessert i å beregne forventningen:

$$E_t^Q\left[e^{-\gamma_u + \gamma_t + \varepsilon_u}\right] = e^{E_t^Q[-\gamma_u + \gamma_t + \varepsilon_u] + \frac{1}{2} Var_t^Q[-\gamma_u + \gamma_t + \varepsilon_u]} \tag{B.13}$$

Vi har at:

$$\begin{aligned} E_t^Q[-\gamma_u + \gamma_t + \varepsilon_u] &= E_t^Q[-\gamma_u + \gamma_t] + E_t^Q[\varepsilon_u] \\ &= E_t^Q[-\gamma_u + \gamma_t] + \varepsilon_t + \frac{\eta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(u-t)}\right) r_t - \frac{\eta\theta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(u-t)}\right) + \left(\eta\theta + \mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)(u-t) \end{aligned}$$

Siden $\gamma_t = \gamma_s + \frac{1}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) r_s + \theta(t-s) - \frac{\theta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + \frac{\sigma_r}{\kappa}\int_s^t \left(1 - e^{-\kappa(t-v)}\right) dW_{1v}^Q$ får vi:

$$E_t^Q[-\gamma_u + \gamma_t + \varepsilon_u] = (1-\eta) E_t^Q[-\gamma_u + \gamma_t] + \varepsilon_t + \left(\mu + \beta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)(u-t) \tag{B.14}$$

På samme måte kan det vises at variansen er gitt ved:

$$Var_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t+\varepsilon_u]=(1-\eta)^2 Var_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]-(1-\eta)\frac{2\rho\sigma_r\sigma_\delta}{\kappa^2}\left(\kappa(u-t)-1+e^{-\kappa(u-t)}\right)+\sigma_\delta^2(u-t) \qquad \text{(B.15)}$$

Dermed kan vi enkelt bestemme forventningen ved å sette inn for (B.14) og (B.15) i uttrykk (B.13):

$$E_t^Q\left[e^{-\gamma_u+\gamma_t+\varepsilon_u}\right]=e^{(1-\eta)E_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]+\varepsilon_t+\left(\mu+\beta-\frac{1}{2}\sigma_\delta^2\right)(u-t)+\frac{1}{2}(1-\eta)^2 Var_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]-(1-\eta)\frac{2\rho\sigma_r\sigma_\delta}{\kappa^2}\left(\kappa(u-t)-1+e^{-\kappa(u-t)}\right)+\sigma_\delta^2(u-t)}$$

$$=e^{(1-\eta)E_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]+\varepsilon_t+(\mu+\beta)(u-t)+\frac{1}{2}(1-\eta)^2 Var_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]-(1-\eta)\frac{\rho\sigma_r\sigma_\delta}{\kappa^2}\left(\kappa(u-t)-1+e^{-\kappa(u-t)}\right)}$$

Generelt vil dermed verdien av selskapets aktiviteter bestemmes ved:

$$V(t,T)=\int_t^T e^{(1-\eta)E_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]+\varepsilon_t+(\mu+\beta)(u-t)+\frac{1}{2}(1-\eta)^2 Var_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]-(1-\eta)\frac{\rho\sigma_r\sigma_\delta}{\kappa^2}\left(\kappa(u-t)-1+e^{-\kappa(u-t)}\right)}du \qquad \text{(B.16)}$$

Vi ønsker imidlertid å se på to spesialtilfeller, nemlig $\eta=0$ og $\eta=1$.

For $\eta=0$ forenkles forventningsuttrykket (B.14) til:

$$E_t^Q\left[e^{-\gamma_u+\gamma_t+\varepsilon_u}\right]=e^{E_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]+\frac{1}{2}Var_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]}e^{\varepsilon_t+(\mu+\beta)(u-t)}e^{-\frac{\rho\sigma_r\sigma_\delta}{\kappa^2}\left(\kappa(u-t)-1+e^{-\kappa(u-t)}\right)}$$

Siden verdien av nullkupongobligasjon bestemmes ved:

$$P(t,u)=E_t^Q\left[e^{-\int_t^u r_s ds}\right]=E_t^Q\left[e^{-\gamma_u+\gamma_t}\right]=e^{E_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]+\frac{1}{2}Var_t^Q[-\gamma_u+\gamma_t]}$$

finner vi at:

$$E_t^Q\left[e^{-\gamma_u+\gamma_t+\varepsilon_u}\right]=P(t,u)\delta_t e^{(\mu+\beta)(u-t)}e^{-\frac{\rho\sigma_r\sigma_\delta}{\kappa^2}\left(\kappa(u-t)-1+e^{-\kappa(u-t)}\right)} \quad \text{(B.17)}$$

hvor uttrykket for $P(t,T)$ er tilsvarende uttrykket vi fant i appendiks A:

$$P(t,T)=A(t,T)e^{-B(t,T)}$$

hvor

$$B(t,T)=\left(\frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}\right)$$

$$A(t,T)=e^{\left[(B(t,T)-(T-t))\left(\theta-\frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2}\right)-\frac{\sigma_r^2}{4\kappa}(B(t,T))^2\right]}$$

Ved å sette inn for forventningen (B.17) i likning (B.12), finner vi at for $\eta=0$ blir verdien av selskapets aktiviteter i perioden (t,T):

$$V(t,T)=\delta_t\int_t^T P(t,u)e^{(\mu+\beta)(u-t)}e^{-\frac{\rho\sigma_r\sigma_\delta}{\kappa^2}\left(\kappa(u-t)-1+e^{-\kappa(u-t)}\right)}du \quad \text{(B.18)}$$

Dersom $\eta=1$ kan forventningen skrives som:

$$E_t^Q\left[e^{-\gamma_u+\gamma_t+\varepsilon_u}\right]=e^{\varepsilon_t+(\mu+\beta)(u-t)}$$

Det vil si at:

$$E_t^Q\left[e^{-\gamma_u+\gamma_t+\varepsilon_u}\right]=\delta_t e^{(\mu+\beta)(u-t)} \quad \text{(B.19)}$$

For $\eta=1$ finner vi verdien ved å sette inn for forventningen (B.19) og utføre integrasjonen:

$$V(t,T) = \delta_t \int_t^T e^{(\mu+\beta)(u-t)} du$$

Dette gir:

$$V(t,T) = \begin{cases} \dfrac{\delta_t}{\mu - \beta}\left(e^{(\mu+\beta)(T-t)} - 1\right) & hvis \quad \mu + \beta \neq 0 \\ \delta_t (T-t) & hvis \quad \mu + \beta = 0 \end{cases} \tag{B.20}$$

Det vil si at dersom man antar at EBIT følger en prosess på formen:

$$d\delta_t = r_t \delta_t dt - \sigma_\delta \delta_t dW_t^{\delta Q}$$

vil verdien av selskapets aktiviteter i perioden (t,T) være

$$V(t,T) = \delta_t (T-t)$$

Dette uttrykket kan tolkes med utgangspunkt i at V bestemmes som neddiskontert verdi av fremtidig inntjening EBIT. Dersom EBIT antas å ha en drift lik den rentesatsen som benyttes til neddiskontering, vil forventet neddiskontert verdi være δ_t på ethvert tidspunkt, og følgelig vil forventet neddiskontert verdi for perioden (t,T) være $\delta_t (T-t)$.

Appendiks C - Longstaff Schwartz metoden

C.1 - Bakgrunn for metoden

Metoden ble utviklet som en alternativ tilnærming til verdsettelse av verdipapir med ”American-style” utøvelsesegenskaper. Med ”American style” utøvelsesegenskaper mener vi at eier av verdipapiret har rett, men ikke plikt, til å utøve verdipapiret før forfallstidspunktet.

Longstaff Schwartz metoden muliggjør verdsettelse av slike verdipapir ved simulering. Inntil Longstaff og Schwartz (2001) presenterte metoden i sin artikkel, var oppfatningen at simuleringsmetoder ikke var fruktbare for verdsettelse av opsjoner (og andre verdipapir) av amerikansk type. ”Finite difference” metoder og binomiske teknikker var dominerende metoder for slik verdsettelse. Imidlertid blir disse metodene svært kompliserte og lite praktiske i situasjoner hvor verdien på derivatet avhenger av flere faktorer (og ikke bare verdien på underliggende på det gitte tidspunktet). Eksempler på slike opsjoner er såkalte asiatiske gjennomsnittsopsjoner med mulighet for utøvelse før forfallstidspunktet for derivatet.

Simuleringsmetoder har imidlertid den egenskapen at man forholdsvis enkelt kan implementere at derivatets verdi avhenger av flere faktorer. Samtidig åpner metoden for å la tilstandsvariabelen følge mer kompliserte stokastiske prosesser enn standard Brownian Motion. Eksempelvis tillater simuleringsmetoden at det underliggendes prisprosess følger en såkalt hopp-prosess, som presentert i Merton (1976), ikke-Markovian prosesser som i Heath, Jarrow og Morton (1992) eller generelle semi-Martingaler som i Harrison og Pliska (2002). Videre er simuleringsteknikkene relativt enkle, gjennomsiktige og fleksible.

C.2 - Skisse av metoden

Utgangspunktet er verdipapir hvor man har en utøvelsesrett på tidspunkt før forfall. Dette skiller denne typen kontrakter fra kontrakter av europeisk type hvor utøvelse kun kan inntreffe ved forfall. Amerikanske kontrakter innebærer med andre ord mer fleksibilitet for eieren av verdipapiret.

På ethvert tidspunkt hvor utøvelse er tillatt, vil eieren av et amerikansk derivat sammenligne payoff ved umiddelbar utøvelse med forventet payoff ved å fortsette. Dersom umiddelbar utøvelse viser seg å være mest verdifullt, vil selvsagt en rasjonell aktør velge å utøve umiddelbart. Ofte vil payoff ved umiddelbar utøvelse kunne beregnes relativt enkelt. Utfordringen i verdsettingssammenheng ligger følgelig i stor grad i å bestemme den betingede forventningen av å la opsjonen forsette å leve.

Longstaff og Schwartz presenterer en tilnærming til hvordan denne betingede forventningen kan bestemmes. Fremgangsmåten kan kort presenteres teoretisk:

i. Simuler et stort antall stier for alle variablene som påvirker verdien på verdipapiret som skal bestemmes.
ii. Beregn payoff for verdipapiret på sluttidspunktet basert på den simulerte verdien for de underliggende variablene.
iii. Deretter jobber man bakover fra tidspunktet for forfall av verdipapiret T. For hvert enkelt tidspunkt $0 < t < T$ og for underrommet av in-the-money stier, tas avgjørelsen mellom umiddelbar utøvelse og fortsettelse av verdipapiret. Den betingede forventningen ved å la opsjonen leve bestemmes av regresjonsanalyse av neste periodes neddiskonterte payoff på funksjoner av tilstandsvariablenes verdi.
iv. På bakgrunn av om eier av verdipapiret velger å utøve eller å la papiret fortsette å leve, beregnes verdien av opsjonen på det gitte tidspunktet.
v. Et estimat for dagens verdi på verdipapiret finnes til slutt ved å neddiskontere den gjennomsnittlige verdien av opsjonen på tidspunkt 1.

Utgangspunktet er altså å estimere den betingede forventningen av å fortsette ut i fra tverrsnittdata fra simuleringen ved hjelp av regresjonsanalyse, mer presist minste kvadraters metode. For en innføring i regresjonsanalyse ved hjelp av minste kvadraters metode henvises leseren til appendiks D. Det utføres regresjon av ex post realisert payoff ved å fortsette på funksjoner av tilstandsvariabelens verdi. Man utfører kun regresjonen for stier hvor derivatet er in-the-money, det vil si tilfeller hvor umiddelbar utøvelse gir payoff større enn 0, for det gitte tidspunkt. Dette gjøres fordi det gir et bedre estimat for betinget forventning funksjonen i tilfellene hvor utøvelse er relevant og øker dessuten effektiviteten til algoritmen.

I artikkelen gis det bevis for at regresjonslikningen vil gi et effisient og forventningsrett estimat på den betingede forventningen ved å fortsette for hver enkelt sti i simuleringen. Ved å estimere den betingede forventningen ved alle utøvelsestidspunkt, kan man etablere en optimal utøvelsesstrategi for hver enkelt sti i simuleringen.

C.3 - Illustrasjon

Vi ønsker her å vise intuisjonen av Longstaff Schwartz metoden gjennom et illustrasjonseksempel. Eksempelet er hentet fra artikkelen Longstaff og Schwartz (2001).

Vi tar utgangspunkt i en amerikansk salgsopsjon på en ikke-dividende betalende aksje. Salgsopsjonen er mulig å utøve på en kontraktspris 1,10 på tidspunkt 1, 2 og 3, hvor tidspunkt 3 er forfallstidspunktet for opsjonen. Den risikofrie renten er 6 %. I dette illustrasjonseksempelet modellerer vi at aksjen kun har 8 stier. Disse stiene modelleres under det risikonøytrale målet og vises i følgende matrise:

Aksjeprisbaner

Sti	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
1	1,00	1,09	1,08	1,34
2	1,00	1,16	1,26	1,54
3	1,00	1,22	1,07	1,03
4	1,00	0,93	0,97	0,92
5	1,00	1,11	1,56	1,52
6	1,00	0,76	0,77	0,90
7	1,00	0,92	0,84	1,01
8	1,00	0,88	1,22	1,34

Målet vårt er å løse for en ”stopping” regel som maksimerer verdien langs hver enkelt sti. Vi må løse dette problemet baklengs og begynner på tidspunkt 3. Gitt at opsjonen ikke er utløst tidligere, vil kontantstrømmen som blir utløst på tidspunkt 3 være følgende:

Kontantstrøm på tidspunkt 3

Sti	t = 1	t = 2	t = 3
1	-	-	0,00
2	-	-	0,00
3	-	-	0,07
4	-	-	0,18
5	-	-	0,00
6	-	-	0,20
7	-	-	0,09
8	-	-	0,00

Disse kontantstrømmene er identiske de kontantstrømmene som ville kommet om opsjonen var en europeisk opsjon istedenfor en amerikansk opsjon.

Hvis opsjonen er "in the money" på tidspunkt 2, må opsjonsinnehaveren avgjøre om han/hun vil utløse opsjonen umiddelbart eller la opsjonen forbli levende fram til det endelige forfallstidspunkt 3. Fra aksjeprisbanen ser vi at det er 5 stier hvor opsjonen gir positiv payoff ved umiddelbar utøvelse på tidspunkt 2. La X være aksjeprisen på tidspunkt 2 for disse 5 stiene og Y være de tilhørende diskonterte kontantstrømmene som blir mottatt på tidspunkt 3 om salgsopsjonen ikke blir utøvd på tidspunkt 2. Vi bruker som nevnt tidligere kun in-the-money stier fordi dette forbedrer evnen til å estimere betingede forventningsfunksjoner hvor utøvelse er relevant og fordi dette i betydelig grad øker algoritmens effektivitet. Intuitivt kan vi her tenke at "in the money" stier er passende å bruke fordi det kun her er aktuelt å utøve på tidspunkt 2. Stiene som er "out of the money" på tidspunkt 2 vil man jo vente med å utøve uansett fordi det er ingen kontantstrøm å hente på tidspunkt 2. Vi setter opp regresjon basert på følgende data:

Regresjonsdata på tidspunkt 2

Sti	Y	X
1	0,00*0,94176	1,08
2	-	-
3	0,07*0,94176	1,07
4	0,18*0,94176	0,97
5	-	-
6	0,20*0,94176	0,77
7	0,09*0,94176	0,84
8	-	-

For å estimere forventet kontantstrøm ved å la opsjonen leve fra tidspunkt 2 til 3, estimerer vi Y på en konstant, X og X^2. Dette er en av de enkleste spesifikasjonene; det finnes også andre mer avanserte spesifikasjoner som er nevnt i artikkelen. Intuitivt kan vi forstå denne regresjonen ved å tenke på at vi estimerer verdien av framtidig utbetaling opsjonsutbetaling som en funksjon av aksjekursen i dag. Dette virker rimelig, da salgsopsjonen er kritisk avhengig av framtidig aksjekurs, og framtidig aksjekurs jo er sterkt avhengig av dagens aksjekurs. Hvis aksjekursen i dag er høy, er det mer sannsynlig at aksjekursen vil være høy i framtiden enn om aksjekursen i dag er lav.

Regresjonen gir følgende betingede regresjonsfunksjon:

$$E[Y \mid X] = -1{,}070 + 2{,}983X - 1{,}813X^2$$

Med denne betingede regresjonsfunksjonen sammenligner vi verdien av umiddelbar utøvelse på tidspunkt 2 med den forventete verdien av å la opsjonen leve videre:

Optimal tidlig utøvelsesbeslutning på tidspunkt 2

Sti	Utøvelse	La opsjonen leve
1	0,02	0,0369
2	-	-
3	0,03	0,0461
4	0,13	0,1176
5	-	-
6	0,33	0,1520
7	0,26	0,1565
8	-	-

Verdien av utøvelse er gitt som $1{,}10 - X$ for de stier som er in-the-money og 0 for de som er out-of-the-money. Verdien av å la opsjonen leve bestemmes ved og sett inn X i den betingede regresjonsfunksjonen for hver enkelt sti.

Vi ser av tabellen at det er rasjonelt å utøve opsjonen på tidspunkt 2 for den fjerde, sjette og syvende stien. Dette gir oss den følgende tabellen, som viser kontantstrømmen til opsjonsinnehaveren gitt at han/hun ikke utøver før tidspunkt 2:

Kontantstrøm på tidspunkt 2

Sti	t = 1	t = 2	t = 3
1	-	0,00	0,00
2	-	0,00	0,00
3	-	0,00	0,07
4	-	0,13	0,00
5	-	0,00	0,00
6	-	0,33	0,00
7	-	0,26	0,00
8	-	0,00	0,00

Legg spesielt merke til at når opsjonen blir utøvd på tidspunkt 2, vil kontantstrømmen for den samme stien på tidspunkt 3 blir 0. Dette skyldes at opsjonen kun kan bli utøvd en gang.

Vi fortsetter å jobbe baklengs og ser nå på om opsjonen skal utøves på tidspunkt 1. Fra aksjeprisbanene ser vi at det er 5 stier som gjør at opsjonen blir in-the-money på tidspunkt 1. For disse stiene definerer vi igjen Y som den diskonterte verdien av påfølgende kontantstrømmer. Vi bruker kun virkelig realisert kontantstrøm langs stien som data for Y – vi bruker altså ikke data fra den betingede regresjonsfunksjonen. Hvis vi hadde brukt denne betingede regresjonsfunksjonen, kunne vi ifølge Longstaff og Schwartz (2001) opplevd en overprising av opsjonen.

Siden opsjonen kun kan utøves en gang, vil framtidig kontantstrøm bare kunne inntreffe på tidspunkt 2 eller 3, men ikke begge deler. Kontantstrømmer på tidspunkt 2 blir diskontert tilbake en periode til tidspunkt 1, mens kontantstrømmer på tidspunkt 3 blir diskontert 2 perioder tilbake til tidspunkt 1. Variabelen X vil representere aksjekursen på tidspunkt 1 for de stiene hvor opsjonen er in-the-money på tidspunkt 1. Vi bruker dermed følgende data for regresjonen:

Regresjonsdata på tidspunkt 2

Sti	Y	X
1	0,00*0,94176	1,09
2	-	-
3	-	-
4	0,13*0,94176	0,93
5	-	-
6	0,33*0,94176	0,76
7	0,26*0,94176	0,92
8	0,00*0,94176	0,88

Den betingede regresjonsfunksjonen på tidspunkt 1 er estimert ved å la Y være den avhengige variabelen som bestemmes av en konstant, X og X^2. Dette er tilsvarende regresjon som ble gjort på tidspunkt 2 ovenfor. Vi får følgende betingede regresjonsfunksjon:

$$E[Y \mid X] = 2{,}038 - 3{,}335X + 1{,}356X^2$$

Ved å sette inn aksjeverdier X inn i denne funksjonen, får vi forventede opsjonsverdier ved å la opsjonen leve videre fra tidspunkt 1.

Vi setter opp følgende tabell som sammenligner verdi av opsjon ved å utøves på tidspunkt 1 i forhold til å la opsjonen leve videre fra tidspunkt 1:

Optimal tidlig utøvelsesbeslutning på tidspunkt 1

Sti	Utøvelse	La opsjonen leve
1	0,01	0,0139
2	-	-
3	-	-
4	0,17	0,1092
5	-	-
6	0,34	0,2866
7	0,18	0,1175
8	0,22	0,1533

Vi kan bruke tabellen til å bestemme de optimale utøvelsesbeslutningene på tidspunkt 1, og kombinert med det vi tidligere har bestemt om utøvelsesbeslutninger på tidspunkt 2 og 3, får vi følgende tabell:

Utøvelsesregel

Sti	t = 1	t = 2	t = 3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Nå er det rett fram å bestemme kontantstrømmen som blir realisert ved å følge disse utøvelsesreglene. Dette gjøres ved å utløse opsjonen på de tidspunkt som utøvelsesreglene sier og beregne tilhørende kontantstrøm som vi kan oppsummere i følgende tabell

Opsjons kontantstrøm

Sti	t = 1	t = 2	t = 3
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,07
4	0,17	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,34	0,00	0,00
7	0,18	0,00	0,00
8	0,22	0,00	0,00

Vi kan nå verdsette opsjonen basert på disse kontantstrømmene. Dette gjøres ved å diskonterte hver kontantstrøm tilbake til tidspunkt 0, summere dem sammen og dividere på antallet stier (8).

Vi får verdien av den amerikanske salgsopsjonen til å bli 0,1144.

Dette er omtrent dobbelt så mye som den tilsvarende europeiske salgsopsjonen som har verdi 0,0564. Verdien for den europeiske kan finnes ved å diskontere ned kontantstrømmene fra tidspunkt 3 ned til tidspunkt 0 og ta gjennomsnittet. Det virker rimelig at den amerikanske opsjonen har en del større verdi da utøvelsesreglene viste tydelig at det lønner seg for flere av stiene å utøve tidligere enn tidspunkt 3.

Dette illustrasjonseksempelet viser hvordan minste kvadraters metode kan brukes for å bruke informasjonen i de simulerte stiene til å estimere den betingede regresjonsfunksjonen. Denne funksjonen blir så brukt til å beregne verdien av å la opsjonen forbli levende, og denne verdien kan sammenliknes mot verdien av umiddelbar utøvelse av opsjonen. Som vi har sett er denne metoden forholdsvis enkel å implementere og er et fleksibelt verktøy å bruke i mange forskjellige sammenhenger.

Appendiks D - Klassisk lineær regresjonsmodell (CLRM)

Økonometriske metoder som regresjonsanalyse kan bidra til å løse problemer med usikkerhet og gi føringer knyttet til planlegging og beslutningstaking. Den klassiske lineære regresjonsmodellen (CLRM) er et verktøy for å undersøke forholdet mellom en avhengig variabel Y og en eller flere uavhengige forklaringsvariabler (X_i). Vi ønsker å få kjennskap til om og i hvilken grad forklaringsvariablene samvarierer med den avhengige variabelen. På denne måten kan vi forstå og/eller forutse verdien av Y basert på ulike verdier av forklaringsvariablene.

Det kan være verdt å nevne at vi ser her på krysseksjonelle data. I vår oppgave simulerer vi data, og vi kan dermed produsere ett stort utvalg data for hver tidsperiode.

Vi bruker her vektorform da dette er mest generelt og relevant for vår oppgave. Lesere som ønsker en innføring i CRLM uten vektorform kan for eksempel lese kapittel 6 i William, H.G. (1997).

Vi antar at Y og X_i har følgende sammenheng:

$$E(Y) = \beta X \tag{D.1}$$

hvor $X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & . & . & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & . & . & X_{k2} \\ 1 & X_{23} & X_{33} & . & . & X_{k3} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & & & X_{kn} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix}$ og $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ . \\ . \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$.

X består altså av en $n \times k$ matrise av data fra utvalget av forklaringsvariablene. Legg merke til at den i'te raden i X består av verdier fra det i'te utvalget, mens den j'te kolonnen hører sammen med alle data knyttet til den j'te forklaringsvariabelen. Siden vi har med et konstantledd, vil X_1 alltid være 1 (langs hele kolonnen).

Y er en $n \times 1$ kolonnevektor som viser det tilhørende utvalget av virkelige verdier for Y.

$\hat{\beta}$ er en $k \times 1$ kolonnevektor som angir parametrene for hvordan forklaringsvariablene henger sammen med den avhengige variabelen. Vi skal senere vise hvordan disse parametrene beregnes ved hjelp av minste kvadraters metode.

Likningen $E(Y) = \beta X$ kalles populasjonsregresjonslikningen. De virkelige verdiene av Y vil ikke alltid være lik verdiene for $E(Y)$. Vi kan skrive:

$$Y = E(Y) + u \tag{D.2}$$

hvor $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$.

som ved å sette inn for (D.1) gir oss:

$$Y = \beta X + u \tag{D.3}$$

hvor u er en $n \times 1$ kolonnevektor som viser avvik mellom predikert verdi og virkelig verdi. Et vanlig navn for u er feilleddet. Det er mange grunner til at slike avvik kan oppstå:

1. Utelatelse av forklaringsvariabler. Selv om man allerede har tatt med noen forklaringsvariabler i populasjonsregresjonslikningen, kan det være andre forklaringsvariabler som er relevante for å forklare den avhengige variabelen. Disse andre forklaringsvariablene kan for eksempel være ukjente eller vanskelig å måle.
2. Aggregering av variabler. I mange situasjoner er det ønskelig med et begrenset antall forklaringsvariabler. Vi forsøker da å velge forklaringsvariabler som med spesielt god forklaringskraft, og vi kan dermed likevel oppnå en brukbar approksimasjon av Y.

3. Modellspesifikasjon. Vi kan ha spesifisert modellen på feil måte. Hvis vi for eksempel har forestilt oss at en forklaringsvariabel skal være kvadrert, men dette ikke er tilfelle, vil leddet u fange opp denne feilen.
4. Misspesifikasjon av funksjonen. Forholdet mellom X og Y kan være ikke-lineært. Med ikke-lineært mener vi at parametrene ikke kan formuleres lineært, for eksempel $\sqrt{\beta_i}$ være en formulering som modellen her ikke vil fange opp.
5. Målefeil. Hvis målingene av en eller flere variabler ikke er korrekt, så vil disse feilene mest sannsynlig forplante seg videre og bli en del av feilleddet.

For å undersøke populasjonsregresjonslikningen $E(Y) = \beta X$ med utgangspunkt i datautvalget trengs det en metode. I både litteraturen og praksis er minste kvadraters metode (OLS) den mest anbefalte og benyttete, se for eksempel kapittel 3 i Asteriou, D. (2006). OLS tar utgangspunkt i den sanne populasjonsregresjonslikningen:

$$Y = \beta X + u$$

OLS estimerer utvalgsregresjonslikningen på følgende måte:

$$\hat{Y} = \hat{\beta} X$$

hvor $\hat{\beta}$ er et estimat for populasjonsparameteren β. Det er her viktig å illustrere at $\hat{\beta}$ er basert på utvalget og vil i nesten alle praktiske sammenhenger avvike fra den sanne populasjonsparametrene β.

$\hat{Y}$ er den predikerte verdien for Y. Vi skjønner at $\hat{Y}$ i de aller fleste tilfeller vil avvike fra Y, men vi forstår likevel at $\hat{Y}$ kan være en god approksimering av Y.

OLS forutsetter at følgende betingelser er oppfylt:

1. Den avhengige variabelen er en lineær funksjon av forklaringsvariablene.
2. Alle forklaringsvariablene har verdier som er ikke-stokastiske. Dette betyr at verdiene for forklaringsvariablene blir valgt og ikke er et resultat av en stokastisk prosess. Et

eksempel kan være et eksperiment hvor man velger en innsatsfaktor X og måler tilhørende verdier av Y.

3. $E(u_i) = 0$, det vil si at forventningen til u er lik 0.
4. $Var(u_i) = \sigma^2$, det vil si at variansen til u er konstant.
5. $Cov(u_i, u_j) = 0$ for alle $i \neq j$.
6. Alle u_i er normalfordelt.
7. Det finnes ingen eksakte sammenhenger mellom to eller flere forklaringsvariabler fra utvalgsdatasettet.

OLS har en rekke ønskelige egenskaper som gjør at den foretrekkes:

1. Ved å minimere de kvadrerte avvikene vil alle residualene motta lik viktighet uansett om de er over eller under den estimerte regresjonslikningen. La oss ta et eksempel. Hvis vi istedenfor ønsket å minimere summen av residualene, ville positive og negative feilledd nøyaktig balansere hverandre ut om den estimerte regresjonslikningen settes til et gjennomsnitt. Denne estimerte regresjonslikningen ville imidlertid neppe vært en god approksimering av populasjonsregresjonslikningen.
2. Ved å minimere de kvadrerte avvikene vil man legge mer vekt på residualene som er mer spredt.
3. OLS-metoden velger β parametrene slik at disse oppfyller en rekke ønskelige egenskaper. Det kan vises at OLS oppfyller Best Linear Unbiased Estimators (BLUE) gitt at betingelsene ovenfor er oppfylt. Kort fortalt betyr BLUE at β blir valgt slik at de er lineære, forventningsrette, konsistente og har minst varians av alle mulige estimatorer. Mer om dette kan leses i for eksempel kapittel 5 i Asteriou, D. (2006).

Vi skal nå skissere hvordan parametrene β blir beregnet ved hjelp av OLS. Vi tar utgangspunkt i populasjonsregresjonslikningen:

$$Y = \beta X + u$$

OLS ønsker å minimere de kvadrerte avvikene:

$$RSS = u'u \tag{D.4}$$

hvor $u = Y_i - \hat{Y} = Y_i - \hat{\beta} X$, det vil si differansen mellom den virkelige Y_i og den predikerte $\hat{Y}$, som er gitt ved sammenhengen $\hat{Y} = \hat{\beta} X$.

Ved innsetting og manipulasjon av (D.4) finner vi:

$$RSS = u'u = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$$
$$= (Y' - X'\hat{\beta}')(Y - X\hat{\beta})$$

Vi multipliserer sammen:

$$RSS = Y'Y - YX'\hat{\beta}' - Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

og sorterer slik at vi får:

$$RSS = Y'Y - 2YX'\hat{\beta}' + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \tag{D.5}$$

Vi ønsker å minimere RSS og deriverer følgelig (D.5) med hensyn på $\hat{\beta}$. Dette gir oss:

$$\frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

som er et sett av k likninger og k ukjente. Vi skriver denne likningen om til:

$$X'Y = X'X\hat{\beta}$$

og ved å multiplisere på begge sider med $(X'X)^{-1}$ så får vi:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) \tag{D.5}$$

som er løsningen for OLS estimatorene.

Vi vil her kort skissere hvordan $\hat{\beta}$ praktisk sett løses ut i fra likningen ovenfor:

1. Beregn matrise produktene $X'X$ og $X'Y$.
2. Finn den inverse av matriseproduktet $X'X$. Ettersom $X'X$ er på formen $k \times k$, vil også dens invers $(X'X)^{-1}$ bli på formen $k \times k$.
3. Multipliser sammen $(X'X)^{-1}$ og $X'Y$. Dette uttrykket kommer på formen $k \times 1$ og gir oss $\hat{\beta}$.

Med flere forklaringsvariabler blir dette åpenbart en arbeidskrevende prosess uten bruk av datamaskin. For eksempel med fire forklaringsvariabler må man inversere en 5×5 matrise. Med bruk av Excel eller andre verktøy er imidlertid dette forholdsvis greit å gjennomføre.

Referanseliste

Aghion, P., Hart, O., og Moore, J., 1992, The economics of bankruptcy reform, Journal of Law, Economics, and Organization 8, 523-546.

Altman, E.I., 1984, A Further Empirical Investigation of the Bankruptcy Cost Question, Journal of Finance 39, 1067-1089.

Altman, E. I. og Eberhart, A.C., 1994, Do Priority Provisions Protect a Bondholder's Investment? Journal of Portfolio Management 20, 67-75.

Anderson, R. og Sundaresan, S., 1996, The Design and Valuation of Debt Contracts, Review of Financial Studies 9, 37-68.

Andrade, G. og Kaplan, S., 1998, How Costly is Financial (not Economic) distress? Evidence from Highly Leveraged Transactions that Became Distressed, Journal of Finance 53, 1443-1493.

Apostol, T.M., 1969, Calculus Volume 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability (2. utgave), Blaisdell.

Asteriou, D., 2006, Applied Econometrics (1. utgave), Palgrave Macmaillian.

Aven, T. og Jensen, U., 1999, Stochastic Models in Reliability, Springer.

Bank, M. og Lawrenz, J., 2005, Informational Asymmetry Between Managers and Investors in the Optimal Capital Structure Decision, Working Paper, University of Innsbruck.

Bebchuk, L., 1998, Chapter 11, The New Palgrave Dictionary of Economics and the Law 3, 219-224.

Bebchuk, L. 1988. A new approach to corporate reorganizations. Harvard Law Review 101, 775-804.

Betker, B., 1995, An Empirical Examination of Prepackaged Bankruptcy, Financial Management 24, 3-18.

Bingham, N.H. og Kiesel, R., 1998, Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives, Springer.

Black, F. og Cox, J., 1976, Valuing Corporate Securities: Some effects of Bond Indenture Provisions, Journal of Finance 31, 351-367.

Black, F. and Scholes, M., 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81, 637-654.

Box, G. og Müller, M., 1958, A note on the Generation of Random Normal Deviates, Annals of Mathematical Statistics, 610-611.

Boyle, P., 1977, Options: a Monte Carlo Approach, Journal of Financial Economics 4, 322-338.

Brealey, R. og Myers, S., 2000, Principles of Corporate Finance, McGraw-Hill.

Brennan, M. og Schwartz, E., 1978, Corporate Income Taxes, Valuation and the Problem of Optimal Capital Structure, Journal of Business 51, 103-114.

Broadie, M.J., Chernov, M. og Sundaresan, S., 2005, Optimal Debt and Equity Values in the Presence of Chapter 7 and Chapter 11, Working Paper, Columbia University.

Broadie, M.J. og Glasserman, P., 1996, Estimating Security Price Derivatives using Simulation, Management Science 42, 269-285.

Broadie, M.J. og Kaya, Ö., 2005, A Binomial Lattice Method for Pricing Corporate Debt and Modelling Chapter 11 Proceedings, Working Paper, Columbia University.

Cairns, A.J.G., 2004, Interest Rate Models – An Introduction, Princeton University Press.

Childs, P., Mauer, D. og Ott, S., 2003, Interaction of Corporate Financing and Investment Decisions: The Effects of Agency Conflicts, Journal of Financial Economics, kommende.

Christensen, P., Flor, C., Lando, D. og Miltersen, K., 2002, Dynamic Capital Structure with Callable Debt and Debt Renegotiations, Working Paper, NHH.

Copeland, T.S og Weston, F., 1988, Financial Theory and Corporate Policy (3. utgave), Addison Wesley.

Crosbie, P. og Bohn, J., 2002, Modelling Default Risk, KMV

Cutler, D.M. og Summers, L.H., 1988, The Costs of Conflict Resolution and Financial Distress: Evidence from the Texaco-Pennzoil Litigation, Rand Journal of Economics 19, 157-172.

Dattaa, S., Iskandar-Dattab, M. og Patelc, A., 1999, Bank Monitoring and the Pricing of Corporate Public Debt, Journal of Financial Economics 51, 435-449.

Dierker, M., Miltersen, K.R. og Torous, W.N., 2006, Test and Estimate of Optimal Capital Structure for Rental Entities, Working Paper, NHH.

Duffie, D., 2001, Dynamic Asset Pricing Theory, 3rd edition, Princeton University Press.

Duffie, D., 1999, Credit Swap Valuation, Financial Analysts Journal.

Duffie, D. og Huang, M., 1996, Swap Rates and Credit Quality, Journal of Finance 51, 921–949.

Eberhart, A.C., Moore, W.T., og Roenfeldt, R.L., 1990, Security Pricing and Deviations from the Absolute Priority Rule in Bankruptcy Proceedings, Journal of Finance 45, 1457-1469.

Eom, Y.H., Helwege, J. og Huang, J.Z., 2004, Structural Models of Corporate Bond Pricing: an Empirical Investigation, Review of Financial Studies 17, 499-544.

Ericsson, J., Reneby J. og Wang, H., 2005, Can Structural Models Price Default Risk? Evidence from Bond and Credit Derivative Markets, Working Paper, McGill University.

Ericsson, J. og Reneby, J., 2002, A Note on Contingent Claims Pricing with Non-Traded Assets, Working Paper, Stockholm School of Economics.

Fischer, E., Heinkel, R. og Zechner, J., 1989, Dynamic Capital Structure Choice: Theory and Tests, Journal of Finance 44, 19-40.

Francois, P. and Morellec, E., 2004, Capital Structure and Asset prices: Some Effects of Bankruptcy Procedures, Journal of Business 77, 387-411.

Franks, J.R. og Torous, W.N., 1989, An Empirical Investigation of U.S. Firms in Reorganization. Journal of Finance 44, 747-769.

Galai, D., Raviv, A. og Wiener, Z., 2003, Liquidation Triggers and the Valuation of Equity and Debt, Working Paper, Hebrew University of Jerusalem.

Gertner, R. og Scharfstein, D., 1991, A theory of Workouts and the Effects of Reorganization Law. Journal of Finance 46, 1189-1222.

Goldstein, R., Ju, N. og Leland, H., 2001, An EBIT-based Model of Dynamic Capital Structure, Journal of Business 74, 483-512.

Harrison, J.M. og Pliska, S.R., 1981, Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continous Trading, Stochastic Processes and their Applications 11, 261-271.

Heath, D., Jarrow, R. og Morton, A., 1992, Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates, Econometrica 60, 77-106.

Helwege, J., 1999, How Long do Junk Bonds Spend in Default? Journal of Finance 44, 341-357.

Hotchkiss, E.S., 1995, Postbankruptcy Performance and Management Turnover, Journal of Finance, 3-21.

Huang, J. og Huang, M., 2003, How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk? Results from a New Calibration Approach, Working Paper, Stanford GSB.

Hull, J.C., 1999, Options, Futures and Other Derivatives (4.utgave), Pearson Higher Education.

Jensen, 1991, Corporate control and the politics of finance, Journal of Applied Corporate Finance 4, 13-33.

Ju, N. og Ou-Yang, H., 2005, Capital Structure, Debt Maturity, and Stochastic Interest Rates, Working Paper, University of Maryland og Duke University.

Kane, A., Marcus, A. og McDonald, R., 1985, Debt Policy and the Rate of Return Premium to Leverage, Journal of Financial and Quantitative Analysis 20, 479-499.

Kane, A., Marcus, A. og MacDonald, R., 1984, How big is the tax advantage to debt? Journal of Finance 39, 841–852.

Kare, D.D., 1996, Corporate Bond Maturity Decision: an Agency and Transaction Cost Explanation, Applied Financial Economics 6, 443-448.

Lando, D., 2004, Credit Risk Modeling: Theory and Applications, Princeton University Press.

Leland, H., 2002, Predictions of Expected Default Frequencies in Structural Models of Debt, Journal of Investment Management, kommende.

Leland, H., 1994, Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, Journal of Finance 49, 1213-1252.

Leland, H.E. og Pyle, D.H., 1977, Informational Asymmetries, Financial Structure, and Financial Intermediation, Journal of Finance 32, 371-387.

Lillestøl, J., 1997, Sannsynlighetsregning og Statistikk med Anvendelser (5. reviderte utgave), Cappelen Akademisk Forlag.

Longstaff, F.A. og Schwartz, E.S., 2001, Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, Review of Financial studies 14, 113-147.

Longstaff, F.A. og Schwartz, E.S., 1995, Valuing Risky Debt: a New Approach, Journal of Finance, 789 - 820.

Mamon, R.S., 2004, Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasicek Model, Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences 8, 1-14.

Mella-Barral, P. og Perraudin, W., 1997, Strategic Debt Service, Journal of Finance 52, 531–556.

Merton, R., 1976, Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous, Journal of Financial Economics 3, 125-144.

Merton, R., 1974, On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates, Journal of Finance 29, 449-470.

Modigliani, F. og Miller, M., 1958, The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment, American Economic Review 48, 261-297.

Moraux, F., 2002, Valuing Corporate Liabilities When the Default Threshold is not an Absorbing Barrier, Working Paper, Université de Rennes I.

Morellec, E., 2004, Can Managerial Discretion Explain Observed Leverage Ratios? Review of Financial Studies 17, 257-294.

Myers, S., 2001, Capital Structure, Journal of Economic Perspectives Volume 15, 81-102.

Myers, S.C., 1977, Determinants of Corporate Borrowing, Journal of Financial Economics 5, 147-175.

Myers, S.C. og Majluf, N.S., 1984, Corporate Financing and Investment Decisions when Firms have Information that Investors do not have. Journal of Financial Economics 13, 187-221.

Roe, M., 1983, Bankruptcy and Debt: a New Model for Corporate Reorganization, Columbia Law Review 83, 527-602.

Ross, S.A., 1977, The Determination of Financial Structure: The Incentive-Signalling Approach, Bell Journal of Economics 8, 23-40.

Ornstein, L.S. og Uhlenbeck, G.E., 1930, On the Theory of Brownian Motion, Physical Review 36.

Shleifer, A., og Vishny, R., 1992, Liquidation value and debt capacity: a market equilibrium approach, Journal of Finance 47, 4.

Stohs, M.H. og Mauer, D.C, 1996, The Determinants of Corporate Debt Maturity Structure, Journal of Business 69, 279-312.

Sydsæter, K., Seierstad, A. og Strøm, A., 2002, Matematisk Analyse - Bind 2, Gyldendal Akademiske Forlag.

Vasicek, O., 1977, An Equilibrium Characterisation of the Term Structure, Journal of Financial Economics 5, 339-348.

Weiss, L.A., 1990, Bankruptcy Resolution: Direct Costs and Violation of Priority of Claims, Journal of Financial Economics 27, 285-314.

White, M.J., 1994, Corporate Bankruptcy as a Filtering Device: Chapter 11 Reorganizations and out-of-court Debt Restructurings, Journal of Law, Economics, & Organization 10, 268-295.

William, H.G., 1997, Econometric Analysis (3. utgave), Prentice-Hall International

Øksendal, B., 2003, Stochastic Differential Equations (6. utgave), Springer.

Nettsteder:

1. Amerikanske statspapirer:

   www.ustreas.gov

2. Den amerikanske konkursloven:

   http://uscode.house.gov/download/title_11.shtml