Arbeidsnotat nr 22/01

Numerisk modellering av vertikale restriksjoner

av

Arngrim Hunnes

SNF Prosjekt Nr 4340
Vertikale restriksjoner.
Prosjektet er finansiert av Konkurransetilsynet.

STIFTELSEN FOR SAMFUNNS- OG NÆRINGSLIVSFORSKNING
Bergen, mai 2001
ISSN 0803-4028

Numerisk Modellering av Vertikale Restriksjoner *

Arngrim Hunnes†

Stiftelsen for Samfunns- og Næringslivsforskning

Breiviksveien 40, 5045 Bergen

Mai 2001

Sammendrag

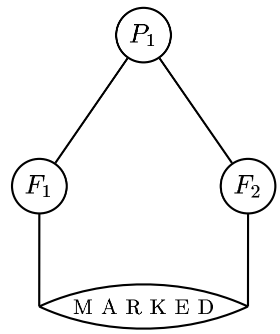
Dette notatet illustrerer numerisk modellering av den vertikale organiseringen mellom produsenter og forhandlere (vertical restraints). Avsnittene 1 og 2 presenterer forutsetninger og det analytiske grunnlaget. Avsnitt 3 gir en kort omtale av Computational Economics og det modelleringsverktøyet som er brukt — Maple. Avsnitt 4 ser på hvordan man kan bruke Maple til å kalibrere et lineært etterspørselssystem, mens avsnitt 5 viser noen numeriske eksempler. Mer spesifikt analyserer vi en næring hvor det forekommer eksklusivavtaler, og viser hvordan den numeriske modellen kan benyttes til å se på effekten av flere produsenter i næringen og vertikal integrasjon mellom produsenter og detaljister. Det siste avsnittet inneholder noen avsluttende kommentarer.

1 Innledning

Den vertikale organiseringen mellom produsenter og forhandlere i et distribusjonssystem omtales som vertikale restriksjoner (vertical restraints). Se for eksempel Tirole [1988] kapittel 4 eller Shy [1995] kapittel 14.3. Hensikten med dette notatet er å illustrere hvordan det er mulig å formulere en numerisk modell som fanger opp slike aspekter. Fra litteraturen vet vi at det finnes en rekke former for vertikale restriksjoner. Da hensikten er å illustrere hvordan en kan formulere en numerisk modell, har vi valgt å fokusere på en spesifikk form for

* Jeg ønsker å takke Magnus Hatlebakk, Lars Mathiesen og Lars Sørgard for nyttige kommentarer og innspill. Gjenstående feil og mangler er selvfølgelig undertegnedes ansvar.

† E-mailadresse: Arngrim.Hunnes@snf.no



Figur 1: Vertikal kjede med én produsent og to forhandlere.

vertikale restriksjoner. Vi analyserer en næring hvor det forekommer eksklusivavtaler, og viser hvordan den numeriske modellen kan benyttes til å se på effektene av flere produsenter i næringen og vertikal integrasjon mellom produsenter og detaljister.

Figur 1 viser en enkel struktur som vil være vårt utgangspunkt. Figuren viser én produsent (P_1) som selger sine produkter til sluttmarkedet gjennom to forhandlere (F_1 og F_2). Forhandler 1 selger produkt 1 mens forhandler 2 selger produkt 2.[1] Det antas at produktene er differensierte (heterogene), det vil si at konsumentene kan skille produktene fra hverandre ut fra gitte karakteristika. Dette i motsetning til homogene produkter. Sagt på en annen måte er differensierte produkter imperfekte substitutter.

Pris og mengde som beslutningsvariabler i en konkurransesituasjon omtales i oligopol-litteraturen som henholdsvis Bertrand- og Cournot-konkurranse. Se for eksempel Sørgard [1997]. Vi skal i dette notatet begrense oss til Bertrand-konkurranse.

I en slik struktur som i Figur 1 vil informasjon være viktig. Mer spesifikt, hvilken informasjon besitter produsenten om sluttetterspørselen? Observerer han den faktiske etterspørselen som den enkelte forhandler står overfor, eller har han kun informasjon om den aggregerte etterspørselen i markedet? Modellen i dette notatet forutsetter at produsenten "ser gjennom" forhandlerne. Det vil si at produsenten, for hver av forhandlerne han leverer produkter til, er i stand til

[1] Forutsetningen er altså at hver forhandler fører kun ett produkt, det vil si det som i litteraturen betegnes eksklusivavtale (exclusive dealing) mellom forhandler og produsent. Dersom den enkelte produsent kun hadde én forhandler ville vi hatt eneforhandleravtale (exclusive territories). Eksklusivavtaler er analysert i O'Brien og Shaffer [1993], mens eneforhandleravtaler er analysert i Rey og Stiglitz [1988, 1995]. Se Sørgard [1998] for beskrivelse av ulike typer vertikale restriksjoner.

å observere den etterspørselen som den enkelte forhandler står overfor. Dette er en standard forutsetning i litteraturen om vertikale restriksjoner.

Produktdifferensiering innebærer at den enkelte forhandler kan utøve en viss grad av markedsmakt. Med andre ord vil prisen være høyere enn hva tilfellet er i et fullkomment konkurranseregime, hvor pris settes lik marginalkostnad. Ved fallende etterspørselskurve impliserer dette at omsatt kvantum vil være lavere. Også produsenten besitter markedsmakt som han vil realisere gjennom sin margin (markup). I den vertikale kjeden har vi altså to ledd som utøver markedsmakt. Resultatet er det som i litteraturen er karakterisert som dobbel marginalisering.

På kostnadssiden forutsettes det at produsenten har en fast grensekostnad ($c \geq 0$) og at forhandlerne ikke har andre kostnader ut over det de betaler produsenten. Modellen kan imidlertid enkelt utvides ved å anta positive grensekostnader også på forhandlerleddet, samt en fast kostnad på forhandlerleddet.

Forutsetningene i notatet er altså:

1. Eksklusivavtaler.
2. Differensierte produkter.
3. Produsenten ser gjennom forhandlerne.
4. Markedsmakt i begge leddene (dobbel marginalisering).
5. Pris-/Bertrand-konkurranse.
6. Produsenten har en fast grensekostnad.
7. Forhandlerne har ingen kostnader utover det de betaler til produsenten.

En siste forutsetning er at vi skal begrense oss til lineære etterspørselsfunksjoner.

Vi skal modellere dette som et sekvensielt spill med to trinn. I det første trinnet vil produsenten sette priser til forhandlerne. I spillets andre trinn vil forhandlerne sette priser til sluttbrukerne. Spillet løses på tradisjonell måte, det vil si ved baklengs induksjon. Først løses spillet på trinn to, og gitt løsningen av spillet på trinn to, løses trinn en.

2 Førsteordensbetingelser (FOC)

La i betegne produsenter ($i = 1, \ldots, m$) og j forhandlere ($j = 1, \ldots, n$). Da hver forhandler j tar én pris i markedet vil det være n priser gitt ved p_j. Pris fra produsent i til forhandler j er angitt med p_{ij} og c_i betegner produsent i's marginalkostnad ($c_i \geq 0$ og konstant).

Forhandler j's beslutningsvariabel er p_j mens produsent i's beslutningsvariabler er gitt ved p_{ij}. La * betegne optimale verdier og p_{-ij} en prisvektor som viser alle priser fra produsent i til forhandlerne unntatt prisen fra produsent i til forhandler j. Videre la p_{-j} være en prisvektor som viser priser fra forhandlerne unntatt forhandler j.

Etterspørselen (q_j) etter forhandler j's produkt er

$$q_j = q_j(p_1, \ldots, p_n). \tag{1}$$

2.1 Forhandler j's FOC

Forhandler j ønsker å maksimere sin profitt

$$\max_{p_j} \quad \pi_j^F = (p_j - p_{ij})q_j. \tag{2}$$

FOC er gitt ved

$$\frac{\partial \pi_j^F}{\partial p_j} = q_j + (p_j - p_{ij})\frac{\partial q_j}{\partial p_j} = 0. \tag{3}$$

(3) gir pris for forhandler j som en funksjon av p_{ij} og p_{-j}. Optimal pris for den enkelte forhandler finnes ved å løse lingningsettet bestående av de j førsteordensbetingelsene. Den optimale prisen vil være en funksjon av inputprisene alene ($p_{ij}\,\forall i, j$).

$$p_j^* = p_j(p_{ij}, p_{-ij}). \tag{4}$$

Optimalt kvantum for forhandler j er en funksjon av hans egen optimale pris samt optimal pris for alle andre forhandlere.

$$\begin{aligned} q_j^* &= q_j(p_j^*, p_{-j}^*) \\ &= q_j(p_1^*(p_{i1}, p_{-i1}), \ldots, p_j^*(p_{ij}, p_{-ij}), \ldots, p_n^*(p_{in}, p_{-in})). \end{aligned} \tag{5}$$

Altså vil uttrykk (4) løse forhandlerens maksimeringsproblem og uttrykk (5) gir forhandlerens optimale kvanta.

2.2 Produsent i's FOC

Produsent i ønsker også å maksimere sin profitt.

$$\max_{p_{ij}} \quad \Pi_i^P = \sum_j (p_{ij} - c_i)\tilde{x}_{ij}. \tag{6}$$

La x_{ij} betegne salget fra produsent i til forhandler j og la verdien til $\tilde{x}_{ij}$ være gitt ved

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x_{ij} = 0, \\ q_j^* & \text{hvis } x_{ij} > 0. \end{cases}$$

Gitt at det eksisterer en indre løsning ($x_{ij} > 0$), er FOC for maksimeringsproblemet (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_i^P}{\partial p_{ij}} = (p_{i1} - c_i)\frac{\partial q_1^*}{\partial p_{ij}} + \ldots + (p_{ij-1} - c_i)\frac{\partial q_{j-1}^*}{\partial p_{ij}} + q_j^* + (p_{ij} - c_i)\frac{\partial q_j^*}{\partial p_{ij}} \\ + (p_{ij+1} - c_i)\frac{\partial q_{j+1}^*}{\partial p_{ij}} + \ldots + (p_{in} - c_i)\frac{\partial q_n^*}{\partial p_{ij}} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Uttrykk (7) gir optimal p_{ij} ($\forall\, j$ som oppfyller $x_{ij} > 0$) for produsent i. Merk at

$$\frac{\partial q_j^*}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial q_j}{\partial p_1}\frac{\partial p_1^*}{\partial p_{ij}} + \frac{\partial q_j}{\partial p_2}\frac{\partial p_2^*}{\partial p_{ij}} + \ldots + \frac{\partial q_j}{\partial p_j}\frac{\partial p_j^*}{\partial p_{ij}} + \ldots + \frac{\partial q_j}{\partial p_n}\frac{\partial p_n^*}{\partial p_{ij}}. \tag{8}$$

2.3 Et eksempel

Dette avsnittet tar sikte på å gi en indikasjon på hvordan strukturen i Figur 1 forholder seg til (i) et duopol og (ii) en integrert industri hvor forhandlerne og produsenten har slått seg sammen. Vi skal foreta både en analytisk og en numerisk gjennomgang.

2.3.1 Analytisk gjennomgang

Anta det er to forhandlere med etterspørselsfunksjoner

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha - \beta p_1 + \gamma p_2 \\ q_2 &= \alpha - \beta p_2 + \gamma p_1, \end{aligned}$$

hvor $\alpha, \beta, \gamma > 0$ og $\beta > \gamma$.[2]

[2]Denne siste betingelsen sier at egenpriseffekten skal være større enn krysspriseffekten. Mathiesen [2000] skriver på side 24

Duopol Selv om vi her skriver duopol skal vi tenke på dette som strukturen i Figur 1, men hvor produsenten ikke har markedsmakt slik at pris til forhandlerne blir lik marginalkostnaden ($p_{1j} = c$). Forhandlernes profittfunksjon og FOC er gitt ved henholdsvis

$$\pi_1 = (p_1 - c)q_1$$
$$\pi_2 = (p_2 - c)q_2$$

og

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = q_1 + (p_1 - c)\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = 0$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = q_2 + (p_2 - c)\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 0.$$

Ved å løse førsteordensbetingelsene finnes de optimale prisene som

$$p_1^* = -\frac{\alpha + \beta c}{\gamma - 2\beta}$$
$$p_2^* = -\frac{\alpha + \beta c}{\gamma - 2\beta}.$$

Optimale kvanta er

$$q_1^* = -\frac{\beta(\alpha - \beta c + c\gamma)}{\gamma - 2\beta}$$
$$q_2^* = -\frac{\beta(\alpha - \beta c + c\gamma)}{\gamma - 2\beta}.$$

Forhandlernes profitt er

$$\pi_1^* = \frac{(\alpha - \beta c + c\gamma)^2\beta}{(\gamma - 2\beta)^2}$$
$$\pi_2^* = \frac{(\alpha - \beta c + c\gamma)^2\beta}{(\gamma - 2\beta)^2}.$$

Samlet kvantum (q_F^D) og samlet profitt (π_F^D) er gitt ved henholdsvis

$$q_F^D = -2\frac{\beta(\alpha - \beta c + c\gamma)}{\gamma - 2\beta} \tag{9}$$

[...], er kjent bl.a. i teorien for generell likevekt, f.eks. i betingelser for entydighet av likevekt, prissystemets stabilitet (*gross substitutability*), input-output analyser, osv.

og

$$\pi_F^D = 2\frac{(\alpha - \beta c + c\gamma)^2 \beta}{(\gamma - 2\beta)^2}. \tag{10}$$

Duopol + produsentledd Anta strukturen i Figur 1, det vil si vi har én produsent og to forhandlere, samt markedsmakt i begge leddene. Forhandlernes profittfunksjoner er nå

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (p_1 - p_{11})q_1 \\ \pi_2 &= (p_2 - p_{12})q_2. \end{aligned}$$

Deriverer profittfunksjonene, finner FOC og løser mhp priser,

$$\begin{aligned} p_1^* &= -\frac{\alpha\gamma + 2\beta\alpha + 2\beta^2 p_{11} + \beta p_{12}\gamma}{-4\beta^2 + \gamma^2} \\ p_2^* &= -\frac{\alpha\gamma + 2\beta\alpha + 2\beta^2 p_{12} + \beta p_{11}\gamma}{-4\beta^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Ved å sette uttrykkene for optimale priser inn i etterspørselsfunksjonene oppnås

$$\begin{aligned} q_1^* &= -\frac{\beta(2\beta\alpha + \alpha\gamma - 2\beta^2 p_{11} + \beta p_{12}\gamma + p_{11}\gamma^2)}{-4\beta^2 + \gamma^2} \\ q_2^* &= -\frac{\beta(2\beta\alpha + \alpha\gamma - 2\beta^2 p_{12} + \beta p_{11}\gamma + p_{12}\gamma^2)}{-4\beta^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Produsentens profittfunksjon er

$$\Pi = (p_{11} - c)q_1^* + (p_{12} - c)q_2^*.$$

Ved å derivere profittfunksjonen og løse førsteordensbetingelsene finner vi at produsentens optimale priser er gitt som

$$\begin{aligned} p_{11}^* &= \frac{1}{2}\frac{\gamma c - \alpha - c\beta}{\gamma - \beta} \\ p_{12}^* &= \frac{1}{2}\frac{\gamma c - \alpha - c\beta}{\gamma - \beta}. \end{aligned}$$

Forhandlernes optimale priser er dermed

$$\begin{aligned} p_1^* &= -\frac{1}{2}\frac{2\alpha\gamma + \beta\gamma c - 3\beta\alpha - c\beta^2}{(\gamma - 2\beta)(\gamma - \beta)} \\ p_2^* &= -\frac{1}{2}\frac{2\alpha\gamma + \beta\gamma c - 3\beta\alpha - c\beta^2}{(\gamma - 2\beta)(\gamma - \beta)}, \end{aligned}$$

hvilket gir optimale kvanta

$$\begin{aligned} q_1^* &= -\frac{1}{2}\frac{\beta(\gamma c + \alpha - c\beta)}{\gamma - 2\beta} \\ q_2^* &= -\frac{1}{2}\frac{\beta(\gamma c + \alpha - c\beta)}{\gamma - 2\beta}. \end{aligned}$$

Samlet kvantum i industrien er dermed

$$q^{NI} = q_1^* + q_2^* = -\frac{\beta(\gamma c + \alpha - c\beta)}{\gamma - 2\beta}. \tag{11}$$

Produsentens profitt er

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\frac{(\gamma c + \alpha - c\beta)^2\beta}{(\gamma - 2\beta)(\gamma - \beta)},$$

mens forhandlernes profitt er

$$\begin{aligned} \pi_1^* &= \frac{1}{4}\frac{(\gamma c + \alpha - c\beta)^2\beta}{(\gamma - 2\beta)^2} \\ \pi_2^* &= \frac{1}{4}\frac{(\gamma c + \alpha - c\beta)^2\beta}{(\gamma - 2\beta)^2}. \end{aligned}$$

Forhandlernes samlede profitt er

$$\pi_F^{NI} = \pi_1^* + \pi_2^* = \frac{1}{2}\frac{(\gamma c + \alpha - c\beta)^2\beta}{(\gamma - 2\beta)^2}, \tag{12}$$

og den samlede profitten i industrien er

$$\begin{aligned} \Pi^{NI} &= \pi_F^{NI} + \Pi^* \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta(\gamma c + \alpha - c\beta)^2(2\gamma - 3\beta)}{(\gamma - 2\beta)^2(\gamma - \beta)}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Sammenligning av duopol og duopol + produsentledd

Kvantum Uttrykkene (9) og (11) viser det samlede kvantumet som omsettes i markedet i de to tilfellene. Det fremgår at

$$q^{NI} = \frac{1}{2}q_F^D,$$

det vil si at duopolet vil selge dobbelt så mye som ved duopol + produsentledd. Da etterspørselen er fallende med økende pris impliserer dette følgelig at prisen i markedet ved duopol + produsentledd er større enn ved duopol.

Profitt Samlet profitt for forhandlerne er gitt ved uttrykkene (10) og (12). Av uttrykkene ser vi at

$$\pi_F^{NI} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi_F^D\right),$$

hvilket betyr at forhandlerne ved duopol + produsentledd får kun 1/4 av den profitten de hadde ved duopol.

Profitten for industrien samlet sett er ved duopol gitt ved (10), mens samlet profitt ved duopol + produsentledd er gitt ved (13). Merk at vi kan uttrykke (13) som

$$\Pi^{NI} = \pi_F^D \frac{1}{4} \frac{2\gamma - 3\beta}{\gamma - \beta}. \tag{14}$$

Uttrykk (14) viser at dersom

$$\frac{2\gamma - 3\beta}{\gamma - \beta} \leq 4 \tag{15}$$

vil $\Pi^{NI} \leq \pi_F^D$. Betingelsen i (15) holder dersom $\beta \geq 2\gamma$.

Integrert industri Anta nå at industrien integreres, det vil si at produsenten og forhandlerne slår seg sammen. Maksimeringsproblemet er

$$\max_{p_1, p_2} \quad \Pi^I = (p_1 - c)q_1 + (p_2 - c)q_2.$$

Ved å løse optimeringsproblemet finner vi at optimale priser er

$$p_1^* = \frac{1}{2} \frac{\alpha + \beta c - \gamma c}{\beta - \gamma}$$
$$p_2^* = \frac{1}{2} \frac{\alpha + \beta c - \gamma c}{\beta - \gamma},$$

hvilket gir optimale kvanta

$$q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma c - \beta c)$$
$$q_2^* = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma c - \beta c),$$

det vil si at samlet kvantum i industrien er

$$q^I = q_1^* + q_2^* = \alpha + c(\gamma - \beta). \tag{16}$$

Industriens profitt er

$$\Pi^I = \frac{1}{2} \frac{(\alpha + \gamma c - \beta c)^2}{\beta - \gamma}. \tag{17}$$

	Duopol		*Duopol + prod.ledd*		*Int.industri*
Pris sluttmarkedet	p_j^*	$<$	p_j^*	$>$	p_j^*
Samlet profitt	π_F^D	$\geq$ [a]	Π^{NI}	$<$	Π^I
Samlet kvantum	q_F^D	$>$	q^{NI}	$<$	q^I

[a]Forutsatt at $\beta \geq 2\gamma$.

Tabell 1: Oppsummering av analytisk diskusjon.

Sammenligning duopol + produsentledd og integrert industri

Kvantum Uttrykkene (11) og (16) viser optimalt kvantum i de to tilfellene. Vi merker oss at (11) kan uttrykkes som

$$q^{NI} = -\frac{\beta}{\gamma - 2\beta} q^I.$$

Dersom

$$-\frac{\beta}{\gamma - 2\beta} > 1 \tag{18}$$

vil $q^{NI} > q^I$. Men uttrykk (18) er oppfylt dersom $\beta < \gamma$ hvilket strider mot vår forutsetning om at $\beta > \gamma$. Med andre ord vil omsatt kvantum ved en integrert industri alltid være større enn ved en struktur lik den i Figur 1. Dermed følger det også at markedsprisen er lavere ved den integrerte industrien enn ved duopol + produsentledd.

Profitt Sammenlign uttrykkene (13) og (17). Vi ser at det er mulig å skrive

$$\Pi^{NI} = \frac{\beta(2\gamma - 3\beta)}{-(\gamma - 2\beta)^2} \Pi^I.$$

Dersom

$$\frac{\beta(2\gamma - 3\beta)}{-(\gamma - 2\beta)^2} \leq 1 \tag{19}$$

vil $\Pi^{NI} \leq \Pi^I$. Ved å regne på (19) finner vi at uttrykket kan formuleres som $\beta^2 - 2\gamma\beta + \gamma^2 \geq 0$ som igjen kan formuleres som $(\beta - \gamma)^2 \geq 0$. Men da vi har antatt at $\beta > \gamma$ følger det at $(\beta - \gamma)^2 > 0$ hvilket impliserer at Π^{NI} alltid er mindre enn Π^I. Med andre ord vil en integrert industri alltid ha en større profitt enn en industri hvis struktur er som i Figur 1.

Tabell 1 gir en oppsummering av den analytiske diskusjonen.

2.3.2 Numerisk gjennomgang

Gitt parameterverdiene $\alpha = 120$, $\gamma = 1$ og $c = 20$, samt uttrykkene i Avsnitt 2.3.1 kan vi beregne Tabell 1.[3] Parameterverdien for β skal vi la anta to verdier; 2 og 2,5. Resultatet av beregningene foreligger i Tabellene 2 og 3. Prisen fra produsent til forhandlerne i de to tilfellene er henholdsvis 70 og 50.

	Duopol		*Duopol + prod.ledd*		*Int.industri*
Pris sluttmarkedet	$53\frac{1}{3}$	$<$	$86\frac{2}{3}$	$>$	70
Samlet profitt	$4444\frac{4}{9}$	$=$	$4444\frac{4}{9}$	$<$	5000
Samlet kvantum	$133\frac{1}{3}$	$>$	$66\frac{2}{3}$	$<$	100

Tabell 2: Numerisk eksempel med $\beta = 2$.

	Duopol		*Duopol + prod.ledd*		*Int.industri*
Pris sluttmarkedet	$42\frac{1}{2}$	$<$	$61\frac{1}{4}$	$>$	50
Samlet profitt	$2531\frac{1}{4}$	$>$	$2320\frac{5}{16}$	$<$	2700
Samlet kvantum	$112\frac{1}{2}$	$>$	$56\frac{1}{4}$	$<$	90

Tabell 3: Numerisk eksempel med $\beta = 2,5$.

3 Computational Economics

I de siste par tiårene har man fått en ny retning innenfor økonomisk forskning som kalles Computational Economics (CE). Løst kan man si at CE er en *metode* for å studere økonomiske problemstillinger ved hjelp av datamaskiner. Problemstillinger som for få år siden var vanskelige og/eller tidkrevende å gjennomføre kan i mange tilfeller i dag løses relativt raskt ved bruk av datamaskiner. Generell likevektsmodellering — Computable General Equilibrium (CGE)/Applied General Equilibrium (AGE) — er kanskje den retningen innenfor økonomifaget som har lengst tradisjon med å benytte numeriske beregninger. Mens man tidligere ofte prøvde å bygge store og komplekse modeller som skulle brukes til å analysere et bredt spekter av problemstillinger, er tendensen i dag at man bygger mindre og mer spesifikke modeller tilpasset den problemstillingen forskeren ønsker å studere. En viktig årsak til dette er blant annet tilgangen på bedre og mer brukervennlig programvare som i mange tilfeller gjør arbeidet med modellkonstruksjon både enklere og mindre tidkrevende. Vi skal ikke her gå inn på en diskusjon om fordelene og ulempene med CE. For de interesserte henviser jeg

[3]Parameterverdiene er hentet fra Oppgave 4.2 side 60 i Sørgard [1997].

til en artikkel av Kenneth Judd (Judd [1997]).[4,5,6]

Det finnes en mengde programvare å velge fra. Alt fra regneark som Excel til programmeringsspråk som Fortran. Kendrick og Amman [1999] er en fin oversiktsartikkel over noe av den programvaren som ”passer” for økonomisk forskning. I den videre diskusjonen i dette notatet benyttes det matematiske dataverktøyet Maple.[7,8]

Maple er intuitivt og enkelt å bruke og produserer output som er både fine og enkle å lese.[9] For de påfølgende beregningene er Maple-utskriftene presentert som vedlegg. I denne forbindelse kan man merke seg

- Alle Maple-kommandoer har `denne type font`. De begynner med tegnet ”>” og avsluttes med ”;”.
- Resultatene av den enkelte kommando følger her fortløpende og midtstilles på siden.
- Jeg har i mange tilfeller valgt å skrive kommentarer fortløpende underveis i beregningene. Disse starter alltid med tegnet ”#”.

4 Kalibrering av etterspørselssystem i Maple

I beregningene i Avsnitt 2.3.2 brukte vi parameterverdier uten å si noe om hva som lå bak valget av akkurat disse verdiene. Ved empiriske studier vil verdiene bli estimert/kalibrert. Mathiesen [2000] viser hvordan et etterspørselssystem basert på empiriske data kan kalibreres i Excel. I dette avsnittet forsøker jeg å vise hvordan dette kan gjøres i Maple ved hjelp av matrise-/vektoroperasjoner.[10]

---

[4] Se også kapittel 1 i Judd [1998].

[5] Hjemmesiden til The Society of Computational Economics finnes på nettadressen: `http://wuecon.wustl.edu/sce/`.

[6] I en leder i tidsskriftet *Computational Economics* skriver Hans Amman (Amman [1997])

> [...] in the next twenty-five years, Computational Economics will have a promising future. It is likely though, that Computational Economics will eventually follow the same course as Mathematical Economics. It will cease to exist. What we now call Computational Economics will become an integrated part of studying economics. A pity? No, it is as it should be.

[7] For en introduksjon om Maple på norsk vises det til for eksempel Pleym [1997].

[8] Se også `http://www.maplesoft.com/`.

[9] Eksempelvis er det enkelt å bruke greske bokstaver.

[10] Noen av de operasjonene som foretas i Maple, både når det gjelder kalibrering av etterspørselssytem og de påfølgende beregningene, kan nok gjøres både enklere og raskere etter hvert som man lærer programmet bedre å kjenne.

Anta den lineære etterspørselsfunksjonen

$$q_j = \alpha_j + \sum_k \beta_{jk} p_k \qquad j,k = 1,\ldots,n. \tag{20}$$

Som Mathiesen [2000] skriver på side 24 må (20) inneha egenskapene

$$\begin{aligned}
\beta_{jj} &< 0 && j = 1,\ldots,n \\
\beta_{jk} &> 0 && k \neq j \\
|\beta_{jj}| &> \sum_{k\neq j} \beta_{jk} && j = 1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

De partielle priselastisitetene er gitt ved

$$\varepsilon_{jk} = \frac{\partial q_j}{\partial p_k}\frac{p_k}{q_j} = \beta_{jk}\frac{p_k}{q_j} \qquad j,k = 1,\ldots,n. \tag{21}$$

Anta vi har observasjoner om priser ($\hat{p}_j$), kvanta ($\hat{q}_j$) og priselastisiteter ($\hat{\varepsilon}$) i et marked med $j = 1,\ldots,n$ aktører. Parameterverdiene β_{jk} finnes gjennom relasjonen

$$\beta_{jk} = \hat{\varepsilon}_{jk}\frac{\hat{q}_j}{\hat{p}_k}, \tag{22}$$

mens konstantleddet i (20) deretter er gitt ved

$$\alpha_j = \hat{q}_j - \sum_k \beta_{jk}\hat{p}_k. \tag{23}$$

For å forenkle notasjonen litt skal vi i resten av avsnittet betegne de observerte kvanta ($\hat{q}$), prisene ($\hat{p}$) og priselastisitetene ($\hat{\varepsilon}$) med q, p og ε. La $\mathbf{q}$ og $\mathbf{p}$ være to $n \times 1$-vektorer inneholdene henholdsvis obeserverte kvanta og priser.

$$\mathbf{q}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

For hjelp i den videre beregningen konstrueres to matriser A og B. La A være en $n \times n$-matrise hvor hver kolonne er vektoren $\mathbf{q}$. Matrisen B, som også er av dimensjon $n \times n$, konstruerer vi slik at prisene fremkommer på diagonalen mens de andre elementene er lik 0.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & \cdots & q_n \end{bmatrix} \qquad B_{n\times n} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

La matrisen C være den inverterte matrisen B

$$C_{n\times n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix},$$

og multipliser matrisene A og C. Benevn den nye matrisen E.

$$E_{n\times n} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{p_1} & \cdots & \frac{q_1}{p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_n}{p_1} & \cdots & \frac{q_n}{p_n} \end{bmatrix}$$

La de observerte/estimerte priselastisitetene inngå i en $n\times n$-(substitusjons)matrise S,

$$S_{n\times n} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \cdots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix}.$$

Multipliser deretter det enkelte element i matrisen E med det tilsvarende elementet i S, det vil si $E[a_{ij}]$ multipliseres med $S[a_{ij}]$, slik at vi får matrisen $\hat{\beta}$.[11]

$$\hat{\beta}_{n\times n} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\frac{q_1}{p_1} & \cdots & \varepsilon_{1n}\frac{q_1}{p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1}\frac{q_n}{p_1} & \cdots & \varepsilon_{nn}\frac{q_n}{p_n} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Med andre ord gir matrisen $\hat{\beta}$ uttrykk for verdiene på β-ene i etterspørselsfunksjonen (20).

Det neste vi må finne er nivået på konstantleddet α_j, og som er gitt i uttrykk (23). Elementet $\sum_k \beta_{jk}p_k$ er gitt i vektoren $\mathbf{v}$ definert som

$$\mathbf{v}_{n\times 1} = \hat{\beta}_{n\times n}\mathbf{p}_{n\times 1}.$$

[11] Merk at dette **ikke** er vanlig matrisemultiplikasjon! I denne forbindelse ønsker jeg å takke Associate Professor Douglas B. Meade ved Department of Mathematics, University of South Carolina, som via news-gruppen `comp.soft-sys.math.maple` hjalp meg med å formulere denne formen for matrisemultiplikasjon i Maple.

Konstantleddene beregner vi følgelig som

$$\hat{\alpha}_{n\times 1} = \mathbf{q}_{n\times 1} - \mathbf{v}_{n\times 1}. \tag{25}$$

Matrisen $\hat{\beta}_{n\times n}$ og vektoren $\hat{\alpha}_{n\times 1}$, det vil si uttrykkene (24) og (25), gir oss altså de kalibrerte parameterverdiene som inngår i etterspørselsfunksjonen (20).

Som et numerisk eksempel benytter jeg eksemplet i Mathiesen [2000] side 37. Mengde- og prisvektorer og matrisen med priselastisitetene er

$$\mathbf{q}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad S_{4\times 4} = \begin{bmatrix} -2,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -2,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -2,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & -2,5 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Ved å benytte fremgangsmåten beskrevet ovenfor finner vi at

$$\hat{\beta}_{4\times 4} = \begin{bmatrix} -15 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -15 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -15 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -15 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{\alpha}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

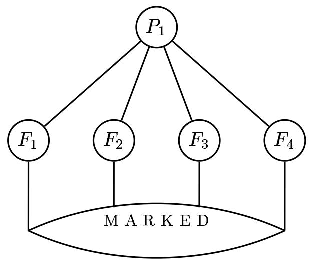
Det vil si at det kalibrerte etterspørselssystemet er

$$\begin{aligned} q_1 &= 6 - 15p_1 + 3(p_2 + p_3 + p_4) \\ q_2 &= 6 - 15p_2 + 3(p_1 + p_3 + p_4) \\ q_3 &= 6 - 15p_3 + 3(p_1 + p_2 + p_4) \\ q_4 &= 6 - 15p_4 + 3(p_1 + p_2 + p_3). \end{aligned} \tag{27}$$

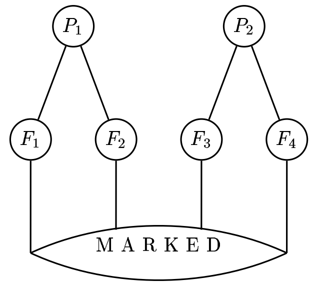
Maple-utskriften finnes i Vedlegg A på side 22.

5 Eksempler på numeriske beregninger

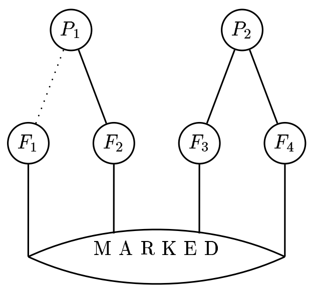
I dette avsnittet skal vi foreta noen numeriske beregninger. Figur 2 gir en oversikt over de ulike beregningene.



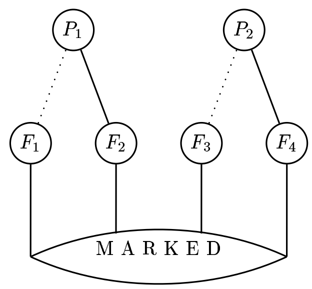
(a) 1 produsent og 4 forhandlere.



(b) 2 produsenter og 4 forhandlere.



(c) Produsent P_1 og forhandler F_1 integreres.



(d) Produsent P_1 og forhandler F_1 integreres og produsent P_2 og forhandler F_3 integreres.

Figur 2: Grafisk fremstilling av de beregningene som foretas.

Beregning nr 1 I denne beregningen har vi fire forhandlere og én produsent. Det første vi må løse er forhandlernes optimeringsproblem,

$$\begin{aligned}
\max_{p_1} \quad & \pi_1 = (p_1 - p_{11})q_1 \\
\max_{p_2} \quad & \pi_2 = (p_2 - p_{12})q_2 \\
\max_{p_3} \quad & \pi_3 = (p_3 - p_{13})q_3 \\
\max_{p_4} \quad & \pi_4 = (p_4 - p_{14})q_4.
\end{aligned}$$

Deretter kan vi løse produsentens optimeringsproblem,

$$\max_{p_{11},p_{12},p_{13},p_{14}} \quad \Pi_1 = (p_{11} - c_1)q_1^* + (p_{12} - c_1)q_2^* + (p_{13} - c_1)q_3^* + (p_{14} - c_1)q_4^*.$$

Beregning nr 2 Hensikten med denne beregningen er å se konsekvensen av to produsenter i steden for én. Forhandlernes og produsentenes optimeringsproblem er nå henholdsvis

$$\begin{aligned}
&\max_{p_1} \quad \pi_1 = (p_1 - p_{11})q_1 \\
&\max_{p_2} \quad \pi_2 = (p_2 - p_{12})q_2 \\
&\max_{p_3} \quad \pi_3 = (p_3 - p_{23})q_3 \\
&\max_{p_4} \quad \pi_4 = (p_4 - p_{24})q_4
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
&\max_{p_{11},p_{12}} \quad \Pi_1 = (p_{11} - c_1)q_1^* + (p_{12} - c_1)q_2^* \\
&\max_{p_{23},p_{24}} \quad \Pi_2 = (p_{23} - c_2)q_3^* + (p_{24} - c_2)q_4^*.
\end{aligned}$$

Beregning nr 3 Det antas nå at produsent P_1 og forhandler F_1 integreres. I det første steget må vi løse

$$\begin{aligned}
&\max_{p_2} \quad \pi_2 = (p_2 - p_{12})q_2 \\
&\max_{p_3} \quad \pi_3 = (p_3 - p_{23})q_3 \\
&\max_{p_4} \quad \pi_4 = (p_4 - p_{24})q_4,
\end{aligned}$$

mens vi i det andre steget må løse

$$\begin{aligned}
&\max_{p_1,p_{12}} \quad \Pi_1 = (p_1 - c_1)q_1^* + (p_{12} - c_1)q_2^* \\
&\max_{p_{23},p_{24}} \quad \Pi_2 = (p_{23} - c_2)q_3^* + (p_{24} - c_2)q_4^*.
\end{aligned}$$

Beregning nr 4 Denne beregningen er en utvidelse av den forrige beregningen ved at også produsent P_2 og forhandler F_3 integreres. Profittfunksjonene som må optimeres er gitt ved

$$\begin{aligned}
&\max_{p_2} \quad \pi_2 = (p_2 - p_{12})q_2 \\
&\max_{p_4} \quad \pi_4 = (p_4 - p_{24})q_4
\end{aligned}$$

og

$$\max_{p_1, p_{12}} \quad \Pi_1 = (p_1 - c_1)q_1^* + (p_{12} - c_1)q_2^*$$
$$\max_{p_3, p_{24}} \quad \Pi_2 = (p_3 - c_2)q_3^* + (p_{24} - c_2)q_4^*.$$

Vi skal benytte etterspørselsfunksjonene gitt i (27) i Avsnitt 4, som vi kalibrerte med bakgrunn i data gitt i (26). Marginalkostnaden antas konstant og settes lik 0,3. Beregningene er gjennomført i Maple og er dokumentert i Vedleggene B, C, D og E.[12]

De fire beregningene blir også gjennomført en gang til med det samme tallmaterialet som før, bortsett fra at vi antar at egenpriselastisitetene er -3 i steden for -2,5. Det vil si vi endrer hoved-diagonalen i S-matrisen i uttrykk (26) på side 15. Det nye kalibrerte etterspørselssystemet blir

$$\begin{aligned} q_1 &= 7,5 - 18p_1 + 3(p_2 + p_3 + p_4) \\ q_2 &= 7,5 - 18p_2 + 3(p_1 + p_3 + p_4) \\ q_3 &= 7,5 - 18p_3 + 3(p_1 + p_2 + p_4) \\ q_4 &= 7,5 - 18p_4 + 3(p_1 + p_2 + p_3). \end{aligned}$$

Maple-utskriftene for den nye kalibreringen og de fire siste beregningene er ikke vedlagt da kalibreringen og utregningene følger samme prosedyre som tidligere.

Resultatene for alle de 8 beregningene finnes i Tabell 4. Vi skal ikke presentere noen utfyllende analyse av beregningene, men kort trekke frem noen momenter.

Sammenligning beregning #1 og #2

- Pris fra produsent til forhandler går ned.
- Pris i sluttmarkedet går ned, og følgelig går omsatt mengde opp.
- Forhandlernes profitt går opp.
- Samlet profitt i industrien går opp.

Sammenligning beregning #2 og #3

[12] Merk at i Maple-beregningene er produsent 1 og 2 betegnet henholdsvis med i og j.

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
p_{11}	0,650	0,585	-	-	0,567	0,531	-	-
p_{12}	0,650	0,585	0,582	0,557	0,567	0,531	0,529	0,514
p_{13}/p_{23}	0,650	0,585	0,562	-	0,567	0,531	0,517	-
p_{14}/p_{24}	0,650	0,585	0,562	0,557	0,567	0,531	0,517	0,514
p_1	0,750	0,704	0,582	0,557	0,656	0,632	0,529	0,514
p_2	0,750	0,704	0,684	0,655	0,656	0,632	0,619	0,601
p_3	0,750	0,704	0,675	0,557	0,656	0,632	0,614	0,514
p_4	0,750	0,704	0,675	0,655	0,656	0,632	0,614	0,601
q_1	1,500	1,777	3,378	3,251	1,600	1,814	3,511	3,392
q_2	1,500	1,777	1,536	1,478	1,600	1,814	1,620	1,565
q_3	1,500	1,777	1,697	3,251	1,600	1,814	1,742	3,392
q_4	1,500	1,777	1,697	1,478	1,600	1,814	1,742	1,565
π_1	0,150	0,211	-	-	0,142	0,183	-	-
π_2	0,150	0,211	0,157	0,146	0,142	0,183	0,146	0,136
π_3	0,150	0,211	0,192	-	0,142	0,183	0,169	-
π_4	0,150	0,211	0,192	0,146	0,142	0,183	0,169	0,136
Π_i	2,100	1,014	1,384	1,214	1,707	0,838	1,177	1,063
Π_j	-	1,014	0,889	1,214	-	0,838	0,756	1,063
$\sum \pi$	0,600	0,843	0,541	0,219	0,569	0,731	0,483	0,272
$\sum \Pi$	2,100	2,028	2,272	2,428	1,707	1,676	1,933	2,126
$\sum \pi + \sum \Pi$	2,700	2,871	2,813	2,719	2,275	2,407	2,416	2,399
$\sum q$	6,000	7,109	8,307	9,458	6,400	7,255	8,614	9,914

Tabell 4: Resultater fra de numeriske eksemplene.

- P_1 vil ta den samme prisen for produkt 1 og 2. Forskjellen er at produkt 1 selges direkte i sluttmarkedet mens produkt 2 selges til forhandler F_2. Da F_2 vil ta en positiv mark-up, det vil si en pris i sluttmarkedet som overstiger hans marginalkostnad, hvilket er den prisen han må betale produsenten av produkt 2, vil prisen i sluttmarkedet bli høyere for produkt 2 enn for produkt 1. Faktisk vil produkt 2 ha den høyeste prisen i konsum-markedet.

- Fordi produkt 1 er det produktet med lavest pris i sluttmarkedet vil det også, på grunn av fallende etterspørselskurve, ha størst omsatt kvantum. For produkt 2 vil det motsatte være tilfelle; høyest pris og lavest kvantum. Etterspørselen etter produktene 3 og 4 vil gå ned som følge av integrasjonen mellom P_1 og F_1.

- Alle de gjenværende forhandlerne vil få redusert profitt og F_2 vil tape mest på sammenslåingen av P_1 og F_1.

- Før integrasjonen hadde F_1 og P_1 en samlet profitt på 1,225 (0,211 + 1,014). Etter integrasjonen har de en profitt på 1,384, altså en økning. Produsent P_2 har imidlertid en reduksjon i profitten.

- Samlet profitt i industrien går ned, mens samlet kvantum går opp med nærmere 17%.

Sammenligning beregning #3 og #4 Beregning #4 kan *løst* tolkes som om at P_2 og F_3 svarer på integrasjonen mellom P_1 og F_1 ved selv å integreres. Konsekvensene er:

- Prisene fra P_1 og P_2 går ytterligere ned slik at produktene 1 og 3 får lavest pris i sluttmarkedet og dermed størst omsatt mengde.
- De to gjenværende forhandlerne som ikke er integrert (F_2 og F_4) får en ytterligere reduksjon i profitten.
- P_2 og F_3 hadde før integrasjonen en samlet profitt på 1,081 (0,889 + 0,192) mens de etter integrasjonen har en profitt på 1,214; hvilket viser deres incentiv for en sammenslåing. P_1 får en reduksjon i profitten.
- Samlet profitt i industrien går ned, mens samlet kvantum øker med nærmere 14%.

6 Noen avsluttende kommentarer

Hensikten med dette notatet har vært å formulere en numerisk modell som kan anvendes til studier av et suksessivt oligopol.

Vi mener at den numeriske modellen vi har formulert i Maple kan utvides i ulike retninger og dermed skreddersys til studier av konkrete næringer. For eksempel kan en slik modell belyse følgende problemstillinger: Hvordan har et eventuelt hemmelig prissamarbeid mellom elektrogrossister slått ut i sluttbrukerprisene? Hvordan kan en fusjon mellom oljeselskaper slå ut i sluttbrukerprisene på bensin?

Referanser

Amman, H. M. [1997]. "Editorial: What is Computational Economics?" *Computational Economics* **10**, 103 – 105.

Judd, K. L. [1997]. "Computational Economics and Economic Theory: Substitutes or Complements?" *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 907 – 942.

Judd, K. L. [1998]. *Numerical Methods in Economics.*, The MIT Press.

Kendrick, D. A. og H. M. Amman [1999]. "Programming Languages in Economics." *Computational Economics* **14**, 151 – 181.

Mathiesen, L. [2000]. "Numerisk modellering av markeder med differensierte produkter." *SNF-rapport* nr 11, Stiftelsen for Samfunns- og Næringslivsforskning.

O'Brien, D. P. og G. Shaffer [1993]. "On the Dampening-of-Competition Effect of Exclusive Dealing." *Journal of Industrial Economics* **41**, 215 – 221.

Pleym, H. [1997]. *Bli kjent med Maple. Et matematisk dataverktøy.*, Høgskolen i Telemark, avdeling for teknologiske fag.

Rey, P. og J. Stiglitz [1988]. "Vertical Restraints and Producers' Competition." *European Economic Review* **32**, 561 – 568.

Rey, P. og J. Stiglitz [1995]. "The Role of Exclusive Territories in Producers' Competition." *RAND Journal of Economics.* **26**, 431 – 451.

Shy, O. [1995]. *Industrial Organization. Theory and Applications.*, The MIT Press.

Sørgard, L. [1997]. *Konkurransestrategi – eksempler på anvendt mikroøkonomi.*, Fagbokforlaget.

Sørgard, L. [1998]. "Vertikale relasjoner: Finnes det enkle, konkurransepolitiske regler?" *SNF-Rapport nr* 10, Stiftelsen for Samfunns- og Næringslivsforskning.

Tirole, J. [1988]. *The Theory of Industrial Organization.*, The MIT Press.

A Kalibrering av etterspørselssystem i Maple

```
> #Definerer kvantumsvektoren q
> q:= matrix(4,1,[[3],[3],[3],[3]]);
```

$$q := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> #Definerer prisvektoren p
> p:= matrix(4,1,[[.5],[.5],[.5],[.5]]);
```

$$p := \begin{bmatrix} .5 \\ .5 \\ .5 \\ .5 \end{bmatrix}$$

```
> #Konstruerer hjelpematrisen A
> A:= augment(q,q,q,q);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> #Konstruerer hjelpematrisen B
> B:= diag(.5, .5, .5, .5);
```

$$B := \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}$$

```
> #Inverterer B
> C:= inverse(B);
```

$$C := \begin{bmatrix} 2.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

```
> #Multipliserer matrisene A og C
> E:= multiply(A,C);
```

$$E := \begin{bmatrix} 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 \\ 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 & 6.0000 \end{bmatrix}$$

$$\%1 := [6.0000, 6.0000, 6.0000, 6.0000]$$

```
> #Legger inn matrisen med
> priselastisiteter S:=
> matrix(4,4,[[-2.5,.5,.5,.5],[.5,-2.5,.5,.5],[.5,.5,-2.5,.5],[.5,.5,.5,
> -2.5]]);
```

$$S := \begin{bmatrix} -2.5 & .5 & .5 & .5 \\ .5 & -2.5 & .5 & .5 \\ .5 & .5 & -2.5 & .5 \\ .5 & .5 & .5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

```
> #Definerer "non-standard"
> matrisemultiplikasjon
> multdotprod:=(E,S)->matrix(rowdim(E),coldim(E),(i,j)->E[i,j]*S[i,j]);
```

$$multdotprod := (E, S) \to \mathrm{matrix}(\mathrm{rowdim}(E), \mathrm{coldim}(E), (i, j) \to E_{i,j}\, S_{i,j})$$

```
> #Beregner E*S, dvs betaverdiene
> beta:=multdotprod(E,S);
```

$$\beta := \begin{bmatrix} -15.000 & 3.0000 & 3.0000 & 3.0000 \\ 3.0000 & -15.000 & 3.0000 & 3.0000 \\ 3.0000 & 3.0000 & -15.000 & 3.0000 \\ 3.0000 & 3.0000 & 3.0000 & -15.000 \end{bmatrix}$$

```
> #Lager hjelpevektoren v
> v:= multiply(beta,p);
```

$$v := \begin{bmatrix} -3.0000 \\ -3.0000 \\ -3.0000 \\ -3.0000 \end{bmatrix}$$

```
> #Finner til slutt konstantleddene
> alpha:= matadd(q,v,1,-1);
```

$$\alpha := \begin{bmatrix} 6.0000 \\ 6.0000 \\ 6.0000 \\ 6.0000 \end{bmatrix}$$

B Maple-utskrift for beregning nr 1

```
> restart;
> Digits:=5;
```

$$Digits := 5$$

```
> #Ettersporselsfunksjoner q[1]:= 6
> -15*p[1] + 3*(p[2] + p[3] + p[4]); q[2]:= 6 - 15*p[2] + 3*(p[1] +
> p[3] + p[4]); q[3]:= 6 - 15*p[3] + 3*(p[1] + p[2] + p[4]);
> q[4]:= 6 - 15*p[4] + 3*(p[1] + p[2] + p[3]);
```

$$q_1 := 6 - 15\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_2 := 6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_3 := 6 - 15\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4$$
$$q_4 := 6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3$$

```
> #Forhandlernes profittfunksjoner pi[1]:=
> (p[1] -p[i1])*q[1]; pi[2]:= (p[2] -p[i2])*q[2]; pi[3]:= (p[3]
> -p[i3])*q[3];
> pi[4]:= (p[4] -p[i4])*q[4];
```

$$\pi_1 := (p_1 - p_{i1})\,(6 - 15\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4)$$
$$\pi_2 := (p_2 - p_{i2})\,(6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4)$$
$$\pi_3 := (p_3 - p_{i3})\,(6 - 15\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4)$$
$$\pi_4 := (p_4 - p_{i4})\,(6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3)$$

```
> #Forhandlernes FOC foc_F[1]:=
> diff(pi[1], p[1]); foc_F[2]:= diff(pi[2], p[2]); foc_F[3]:=
> diff(pi[3], p[3]);
> foc_F[4]:= diff(pi[4], p[4]);
```

$$foc\_F_1 := 6 - 30\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4 + 15\,p_{i1}$$
$$foc\_F_2 := 6 - 30\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4 + 15\,p_{i2}$$
$$foc\_F_3 := 6 - 30\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4 + 15\,p_{i3}$$
$$foc\_F_4 := 6 - 30\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 15\,p_{i4}$$

```
> #Loser FOC og finner forhandlernes
> optimale priser solve({foc_F[1]=0, foc_F[2]=0, foc_F[3]=0,
> foc_F[4]=0}, {p[1],
> p[2], p[3], p[4]});
```

$$\{p_1 = \frac{2}{7} + \frac{40}{77}\,p_{i1} + \frac{5}{77}\,p_{i4} + \frac{5}{77}\,p_{i3} + \frac{5}{77}\,p_{i2},\ p_2 = \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{i1} + \frac{5}{77}\,p_{i4} + \frac{5}{77}\,p_{i3} + \frac{40}{77}\,p_{i2},$$
$$p_4 = \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{i1} + \frac{40}{77}\,p_{i4} + \frac{5}{77}\,p_{i3} + \frac{5}{77}\,p_{i2},\ p_3 = \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{i1} + \frac{5}{77}\,p_{i4} + \frac{40}{77}\,p_{i3} + \frac{5}{77}\,p_{i2}\}$$

```
> p[1]:=
> 2/7+40/77*p[i1]+5/77*p[i4]+5/77*p[i3]+5/77*p[i2]; p[2]:=
> 2/7+5/77*p[i1]+5/77*p[i4]+5/77*p[i3]+40/77*p[i2]; p[3]:=
> 2/7+5/77*p[i1]+5/77*p[i4]+40/77*p[i3]+5/77*p[i2];
> p[4]:= 2/7+5/77*p[i1]+40/77*p[i4]+5/77*p[i3]+5/77*p[i2];
```

$$p_1 := \frac{2}{7} + \frac{40}{77}\,p_{i1} + \frac{5}{77}\,p_{i4} + \frac{5}{77}\,p_{i3} + \frac{5}{77}\,p_{i2}$$

$$p_2 := \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{i1} + \frac{5}{77}\,p_{i4} + \frac{5}{77}\,p_{i3} + \frac{40}{77}\,p_{i2}$$

$$p_3 := \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{i1} + \frac{5}{77}\,p_{i4} + \frac{40}{77}\,p_{i3} + \frac{5}{77}\,p_{i2}$$

$$p_4 := \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{i1} + \frac{40}{77}\,p_{i4} + \frac{5}{77}\,p_{i3} + \frac{5}{77}\,p_{i2}$$

```
> #Finner optimale kvanta
> simplify(q[1]); simplify(q[2]); simplify(q[3]); simplify(q[4]);
```

$$\frac{30}{7} - \frac{555}{77}\,p_{i1} + \frac{75}{77}\,p_{i4} + \frac{75}{77}\,p_{i3} + \frac{75}{77}\,p_{i2}$$

$$\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{i1} + \frac{75}{77}\,p_{i4} + \frac{75}{77}\,p_{i3} - \frac{555}{77}\,p_{i2}$$

$$\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{i1} + \frac{75}{77}\,p_{i4} - \frac{555}{77}\,p_{i3} + \frac{75}{77}\,p_{i2}$$

$$\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{i1} - \frac{555}{77}\,p_{i4} + \frac{75}{77}\,p_{i3} + \frac{75}{77}\,p_{i2}$$

```
> #Produsentens profittfunksjon PI:=
> (p[i1] - .3)*q[1] + (p[i2] - .3)*q[2] + (p[i3] - .3)*q[3] +
> (p[i4] - .3)*q[4];
```

$$\begin{aligned}\Pi := {} & (p_{i1} - .3)\left(\frac{30}{7} - \frac{555}{77}\,p_{i1} + \frac{75}{77}\,p_{i4} + \frac{75}{77}\,p_{i3} + \frac{75}{77}\,p_{i2}\right)\\ & + (p_{i2} - .3)\left(\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{i1} + \frac{75}{77}\,p_{i4} + \frac{75}{77}\,p_{i3} - \frac{555}{77}\,p_{i2}\right)\\ & + (p_{i3} - .3)\left(\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{i1} + \frac{75}{77}\,p_{i4} - \frac{555}{77}\,p_{i3} + \frac{75}{77}\,p_{i2}\right)\\ & + (p_{i4} - .3)\left(\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{i1} - \frac{555}{77}\,p_{i4} + \frac{75}{77}\,p_{i3} + \frac{75}{77}\,p_{i2}\right)\end{aligned}$$

```
> #Produsentens FOC foc_p[1]:= diff(PI,
> p[i1]); foc_p[2]:= diff(PI, p[i2]); foc_p[3]:= diff(PI, p[i3]);
> foc_p[4]:= diff(PI, p[i4]);
```

$$foc\_p_1 := 5.5714 - \frac{1110}{77}\,p_{i1} + \frac{150}{77}\,p_{i4} + \frac{150}{77}\,p_{i3} + \frac{150}{77}\,p_{i2}$$

$$foc\_p_2 := \frac{150}{77}\,p_{i1} + 5.5714 + \frac{150}{77}\,p_{i4} + \frac{150}{77}\,p_{i3} - \frac{1110}{77}\,p_{i2}$$

$$foc\_p_3 := \frac{150}{77}\,p_{i1} + 5.5714 + \frac{150}{77}\,p_{i2} + \frac{150}{77}\,p_{i4} - \frac{1110}{77}\,p_{i3}$$

$$foc\_p_4 := \frac{150}{77}\,p_{i1} + 5.5714 + \frac{150}{77}\,p_{i2} + \frac{150}{77}\,p_{i3} - \frac{1110}{77}\,p_{i4}$$

```
> #Loser FOC og finner optimale
> produsentpriser solve({foc_p[1]=0, foc_p[2]=0, foc_p[3]=0,
> foc_p[4]=0}, {p[i1],
> p[i2], p[i3], p[i4]});
```

$$\{p_{i2} = .65000,\ p_{i4} = .65000,\ p_{i1} = .65000,\ p_{i3} = .65000\}$$

```
> #Optimale produsentpriser er altsa
> p[i1]:= .65; p[i2]:= .65; p[i3]:= .65; p[i4]:= .65;
```

$$p_{i1} := .65$$

$$p_{i2} := .65$$

$$p_{i3} := .65$$

$$p_{i4} := .65$$

```
> #Optimale forhandlerpriser er dermed
> p[1]; p[2]; p[3]; p[4];
                                  .75000
                                  .75000
                                  .75000
                                  .75000
> #Optimale kvanta
> q[1]; q[2]; q[3]; q[4];
                                  1.5000
                                  1.5000
                                  1.5000
                                  1.5000
> #Sum kvanta
> q[1] + q[2] + q[3] + q[4];
                                  6.0000
> #Forhandlernes profitt
> pi[1]; pi[2]; pi[3]; pi[4];
                                  .15000
                                  .15000
                                  .15000
                                  .15000
> #Sum profitt forhandlere
> pi[1] + pi[2] + pi[3] + pi[4];
                                  .60000
> #Produsentens profitt
> PI;
                                  2.1000
> #Samlet profitt i industrien
> PI + pi[1] + pi[2] + pi[3] + pi[4];
                                  2.7000
```

C Maple-utskrift for beregning nr 2

```
> restart;
> Digits:=5;
```

$$Digits := 5$$

```
> #Ettersporselsfunksjoner q[1]:= 6 -
> 15*p[1] + 3*(p[2] + p[3] + p[4]); q[2]:= 6 - 15*p[2] + 3*(p[1] +
> p[3] + p[4]); q[3]:= 6 - 15*p[3] + 3*(p[1] + p[2] + p[4]);
> q[4]:= 6 - 15*p[4] + 3*(p[1] + p[2] + p[3]);
```

$$q_1 := 6 - 15\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_2 := 6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_3 := 6 - 15\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4$$
$$q_4 := 6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3$$

```
> #Forhandlernes profittfunksjoner pi[1]:=
> (p[1] - p[i1])*q[1]; pi[2]:= (p[2] - p[i2])*q[2]; pi[3]:= (p[3] -
> p[j3])*q[3];
> pi[4]:= (p[4] - p[j4])*q[4];
```

$$\pi_1 := (p_1 - p_{i1})\,(6 - 15\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4)$$
$$\pi_2 := (p_2 - p_{i2})\,(6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4)$$
$$\pi_3 := (p_3 - p_{j3})\,(6 - 15\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4)$$
$$\pi_4 := (p_4 - p_{j4})\,(6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3)$$

```
> #Forhandlernes FOC foc_F[1]:=
> diff(pi[1], p[1]); foc_F[2]:= diff(pi[2], p[2]); foc_F[3]:=
> diff(pi[3], p[3]);
> foc_F[4]:= diff(pi[4], p[4]);
```

$$foc\_F_1 := 6 - 30\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4 + 15\,p_{i1}$$
$$foc\_F_2 := 6 - 30\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4 + 15\,p_{i2}$$
$$foc\_F_3 := 6 - 30\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4 + 15\,p_{j3}$$
$$foc\_F_4 := 6 - 30\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 15\,p_{j4}$$

```
> #Loser FOC og finner forhandlernes
> optimale priser solve({foc_F[1]=0, foc_F[2]=0, foc_F[3]=0,
> foc_F[4]=0}, {p[1],
> p[2], p[3], p[4]});
```

$$\{p_3 = \frac{2}{7} + \frac{40}{77}\,p_{j3} + \frac{5}{77}\,p_{j4} + \frac{5}{77}\,p_{i2} + \frac{5}{77}\,p_{i1},\ p_4 = \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{j3} + \frac{40}{77}\,p_{j4} + \frac{5}{77}\,p_{i2} + \frac{5}{77}\,p_{i1},$$
$$p_2 = \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{j3} + \frac{5}{77}\,p_{j4} + \frac{40}{77}\,p_{i2} + \frac{5}{77}\,p_{i1},\ p_1 = \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{j3} + \frac{5}{77}\,p_{j4} + \frac{5}{77}\,p_{i2} + \frac{40}{77}\,p_{i1}\}$$

```
> p[1]:=
> 2/7+5/77*p[j3]+5/77*p[j4]+5/77*p[i2]+40/77*p[i1]; p[2]:=
> 2/7+5/77*p[j3]+5/77*p[j4]+40/77*p[i2]+5/77*p[i1]; p[3]:=
> 2/7+40/77*p[j3]+5/77*p[j4]+5/77*p[i2]+5/77*p[i1];
> p[4]:= 2/7+5/77*p[j3]+40/77*p[j4]+5/77*p[i2]+5/77*p[i1];
```

$$p_1 := \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{j3} + \frac{5}{77}\,p_{j4} + \frac{5}{77}\,p_{i2} + \frac{40}{77}\,p_{i1}$$

$$p_2 := \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{j3} + \frac{5}{77}\,p_{j4} + \frac{40}{77}\,p_{i2} + \frac{5}{77}\,p_{i1}$$

$$p_3 := \frac{2}{7} + \frac{40}{77}\,p_{j3} + \frac{5}{77}\,p_{j4} + \frac{5}{77}\,p_{i2} + \frac{5}{77}\,p_{i1}$$

$$p_4 := \frac{2}{7} + \frac{5}{77}\,p_{j3} + \frac{40}{77}\,p_{j4} + \frac{5}{77}\,p_{i2} + \frac{5}{77}\,p_{i1}$$

```
> #Finner optimale kvanta
> simplify(q[1]); simplify(q[2]); simplify(q[3]); simplify(q[4]);
```

$$\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} - \frac{555}{77}\,p_{i1}$$

$$\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} - \frac{555}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1}$$

$$\frac{30}{7} - \frac{555}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1}$$

$$\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{j3} - \frac{555}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1}$$

```
> #Produsentenes profittfunksjoner PI[1]:=
> (p[i1] - .3)*q[1] + (p[i2] - .3)*q[2];
> PI[2]:= (p[j3] - .3)*q[3] + (p[j4] - .3)*q[4];
```

$$\Pi_1 := (p_{i1} - .3)\,(\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} - \frac{555}{77}\,p_{i1})$$
$$+ (p_{i2} - .3)\,(\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} - \frac{555}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1})$$

$$\Pi_2 := (p_{j3} - .3)\,(\frac{30}{7} - \frac{555}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1})$$
$$+ (p_{j4} - .3)\,(\frac{30}{7} + \frac{75}{77}\,p_{j3} - \frac{555}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1})$$

```
> #Produsentenes FOC foc_P[i1]:=
> diff(PI[1], p[i1]); foc_P[i2]:= diff(PI[1], p[i2]); foc_P[j3]:=
> diff(PI[2], p[j3]);
> foc_P[j4]:= diff(PI[2], p[j4]);
```

$$foc\_P_{i1} := 6.1558 + \frac{75}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} + \frac{150}{77}\,p_{i2} - \frac{1110}{77}\,p_{i1}$$

$$foc\_P_{i2} := \frac{150}{77}\,p_{i1} + 6.1558 + \frac{75}{77}\,p_{j3} + \frac{75}{77}\,p_{j4} - \frac{1110}{77}\,p_{i2}$$

$$foc\_P_{j3} := 6.1558 - \frac{1110}{77}\,p_{j3} + \frac{150}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1}$$

$$foc\_P_{j4} := \frac{150}{77}\,p_{j3} + 6.1558 - \frac{1110}{77}\,p_{j4} + \frac{75}{77}\,p_{i2} + \frac{75}{77}\,p_{i1}$$

```
> #Loser FOC og finner optimale
> produsentpriser solve({foc_P[i1]=0, foc_P[i2]=0, foc_P[j3]=0,
> foc_P[j4]=0}, {p[i1],
> p[i2], p[j3], p[j4]});
```

$$\{p_{i1} = .58518,\ p_{i2} = .58518,\ p_{j4} = .58518,\ p_{j3} = .58518\}$$

```
> #Optimale produsentpriser er altsa
> p[i1]:= .58518; p[i2]:= .58518; p[j4]:= .58518; p[j3]:= .58518;
```

$$p_{i1} := .58518$$

$$p_{i2} := .58518$$

$$p_{j4} := .58518$$

$$p_{j3} := .58518$$

```
> #Optimale forhandlerpriser er dermed
> p[1]; p[2]; p[3]; p[4];
```

$$.70370$$
$$.70370$$
$$.70370$$
$$.70370$$

```
> #Optimale kvanta
> q[1]; q[2]; q[3]; q[4];
```

$$1.7773$$
$$1.7773$$
$$1.7773$$
$$1.7773$$

```
> #Samlet kvantum
> q[1] + q[2] + q[3] + q[4];
```

$$7.1092$$

```
> #Forhandlernes profitt
> pi[1]; pi[2]; pi[3]; pi[4];
```

$$.21065$$
$$.21065$$
$$.21065$$
$$.21065$$

```
> #Sum profitt forhandlere
> pi[1] + pi[2] + pi[3] + pi[4];
```

$$.84260$$

```
> #Produsentenes profitt
> PI[1]; PI[2];
```

$$1.0140$$
$$1.0140$$

```
> #Sum produsentenes profitt
> PI[1] + PI[2];
```

$$2.0280$$

```
> #Samlet profitt i industrien
> PI[1] + PI[2] + pi[1] + pi[2] + pi[3] + pi[4];
```

$$2.8708$$

D Maple-utskrift for beregning nr 3

```
> restart;
> Digits:=5;
```

$$Digits := 5$$

```
> #Ettersporselsfunksjoner q[1]:= 6 -
> 15*p[1] + 3*(p[2] +p[3] +p[4]); q[2]:= 6 - 15*p[2] + 3*(p[1]
> +p[3] +p[4]); q[3]:= 6 - 15*p[3] + 3*(p[1] +p[2] +p[4]);
> q[4]:= 6 - 15*p[4] + 3*(p[1] +p[2] +p[3]);
```

$$q_1 := 6 - 15\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_2 := 6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_3 := 6 - 15\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4$$
$$q_4 := 6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3$$

```
> #Forhandlernes profittfunksjoner pi[2]:=
> (p[2] - p[i2])*q[2]; pi[3]:= (p[3] - p[j3])*q[3];
> pi[4]:= (p[4] - p[j4])*q[4];
```

$$\pi_2 := (p_2 - p_{i2})\,(6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4)$$
$$\pi_3 := (p_3 - p_{j3})\,(6 - 15\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4)$$
$$\pi_4 := (p_4 - p_{j4})\,(6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3)$$

```
> #Forhandlernes FOC foc_F[2]:=
> diff(pi[2], p[2]); foc_F[3]:= diff(pi[3], p[3]);
> foc_F[4]:= diff(pi[4], p[4]);
```

$$foc\_F_2 := 6 - 30\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4 + 15\,p_{i2}$$
$$foc\_F_3 := 6 - 30\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4 + 15\,p_{j3}$$
$$foc\_F_4 := 6 - 30\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 15\,p_{j4}$$

```
> #Loser FOC og finner forhandlernes
> optimale priser solve({foc_F[2]=0, foc_F[3]=0, foc_F[4]=0},
>{p[2], p[3],
> p[4]});
```

$$\{p_3 = \frac{1}{4} + \frac{45}{88}\,p_{j3} + \frac{5}{88}\,p_{j4} + \frac{1}{8}\,p_1 + \frac{5}{88}\,p_{i2},\ p_4 = \frac{1}{4} + \frac{5}{88}\,p_{j3} + \frac{45}{88}\,p_{j4} + \frac{1}{8}\,p_1 + \frac{5}{88}\,p_{i2},$$
$$p_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{88}\,p_{j3} + \frac{5}{88}\,p_{j4} + \frac{1}{8}\,p_1 + \frac{45}{88}\,p_{i2}\}$$

```
> p[2]:=
> 1/4+5/88*p[j3]+5/88*p[j4]+1/8*p[1]+45/88*p[i2]; p[3]:=
> 1/4+45/88*p[j3]+5/88*p[j4]+1/8*p[1]+5/88*p[i2];
> p[4]:= 1/4+5/88*p[j3]+45/88*p[j4]+1/8*p[1]+5/88*p[i2];
```

$$p_2 := \frac{1}{4} + \frac{5}{88}\,p_{j3} + \frac{5}{88}\,p_{j4} + \frac{1}{8}\,p_1 + \frac{45}{88}\,p_{i2}$$
$$p_3 := \frac{1}{4} + \frac{45}{88}\,p_{j3} + \frac{5}{88}\,p_{j4} + \frac{1}{8}\,p_1 + \frac{5}{88}\,p_{i2}$$
$$p_4 := \frac{1}{4} + \frac{5}{88}\,p_{j3} + \frac{45}{88}\,p_{j4} + \frac{1}{8}\,p_1 + \frac{5}{88}\,p_{i2}$$

```
> #Finner optimale kvanta
> simplify(q[1]); simplify(q[2]); simplify(q[3]); simplify(q[4]);
```

$$\frac{33}{4} - \frac{111}{8}\,p_1 + \frac{15}{8}\,p_{j3} + \frac{15}{8}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_{i2}$$
$$\frac{15}{4} + \frac{75}{88}\,p_{j3} + \frac{75}{88}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 - \frac{645}{88}\,p_{i2}$$
$$\frac{15}{4} - \frac{645}{88}\,p_{j3} + \frac{75}{88}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 + \frac{75}{88}\,p_{i2}$$
$$\frac{15}{4} + \frac{75}{88}\,p_{j3} - \frac{645}{88}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 + \frac{75}{88}\,p_{i2}$$

```
> #Produsentenes profittfunksjoner PI[1]:=
> (p[1] - .3)*q[1] + (p[i2] - .3)*q[2];
> PI[2]:= (p[j3] - .3)*q[3] + (p[j4] - .3)*q[4];
```

$$\Pi_1 := (p_1 - .3)\,(\frac{33}{4} - \frac{111}{8}\,p_1 + \frac{15}{8}\,p_{j3} + \frac{15}{8}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_{i2})$$
$$+ (p_{i2} - .3)\,(\frac{15}{4} + \frac{75}{88}\,p_{j3} + \frac{75}{88}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 - \frac{645}{88}\,p_{i2})$$

$$\Pi_2 := (p_{j3} - .3)\,(\frac{15}{4} - \frac{645}{88}\,p_{j3} + \frac{75}{88}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 + \frac{75}{88}\,p_{i2})$$
$$+ (p_{j4} - .3)\,(\frac{15}{4} + \frac{75}{88}\,p_{j3} - \frac{645}{88}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 + \frac{75}{88}\,p_{i2})$$

```
> #Produsentenes FOC foc_P[1]:=
> diff(PI[1], p[1]); foc_P[2]:= diff(PI[1], p[i2]); foc_P[3]:=
> diff(PI[2], p[j3]);
> foc_P[4]:= diff(PI[2], p[j4]);
```

$$foc\_P_1 := 11.851 - \frac{111}{4}\,p_1 + \frac{15}{8}\,p_{j3} + \frac{15}{8}\,p_{j4} + \frac{15}{4}\,p_{i2}$$
$$foc\_P_2 := \frac{15}{4}\,p_1 + 5.3864 + \frac{75}{88}\,p_{j3} + \frac{75}{88}\,p_{j4} - \frac{645}{44}\,p_{i2}$$
$$foc\_P_3 := 5.6932 - \frac{645}{44}\,p_{j3} + \frac{75}{44}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 + \frac{75}{88}\,p_{i2}$$
$$foc\_P_4 := \frac{75}{44}\,p_{j3} + 5.6932 - \frac{645}{44}\,p_{j4} + \frac{15}{8}\,p_1 + \frac{75}{88}\,p_{i2}$$

```
> #Loser FOC og finner optimale
> produsentpriser solve({foc_P[1]=0, foc_P[2]=0, foc_P[3]=0,
> foc_P[4]=0}, {p[1],
> p[i2], p[j3], p[j4]});
```

$$\{p_1 = .58159,\ p_{j3} = .56191,\ p_{i2} = .58156,\ p_{j4} = .56191\}$$

```
> p[1]:= .58159; p[j3]:= .56191; p[i2]:= .58156; p[j4]:= .56191;
```

$$p_1 := .58159$$
$$p_{j3} := .56191$$
$$p_{i2} := .58156$$
$$p_{j4} := .56191$$

```
> #Forhandlerpriser
> p[2]; p[3]; p[4];
```

$$.68395$$
$$.67501$$
$$.67501$$

```
> #Optimale kvanta
> q[1]; q[2]; q[3]; q[4];
```

3.3780

1.5358

1.6967

1.6967

```
> #Samlet kvanta
> q[1] + q[2] + q[3] + q[4];
```

8.3072

```
> #Forhandlernes profitt
> pi[2]; pi[3]; pi[4];
```

.15725

.19190

.19190

```
> #Sum profitt forhandlere
> pi[2] + pi[3] + pi[4];
```

.54105

```
> #Produsentenes profitt
> PI[1]; PI[2];
```

1.3836

.88872

```
> #Sum produsentenes profitt
> PI[1] + PI[2];
```

2.2723

```
> #Samlet profitt i industrien
> PI[1] + PI[2] +pi[2] + pi[3] + pi[4];
```

2.8134

E Maple-utskrift for beregning nr 4

```
> restart;
> Digits:=5;
```

$$Digits := 5$$

```
> #Ettersporselsfunksjoner q[1]:= 6 -
> 15*p[1] + 3*(p[2] + p[3] + p[4]); q[2]:= 6 - 15*p[2] + 3*(p[1] +
> p[3] + p[4]); q[3]:= 6 - 15*p[3] + 3*(p[1] + p[2] + p[4]);
> q[4]:= 6 - 15*p[4] + 3*(p[1] + p[2] + p[3]);
```

$$q_1 := 6 - 15\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_2 := 6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4$$
$$q_3 := 6 - 15\,p_3 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_4$$
$$q_4 := 6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3$$

```
> #Forhandlernes profittfunksjoner pi[2]:=
> (p[2] - p[i2])*q[2];
> pi[4]:= (p[4] - p[j4])*q[4];
```

$$\pi_2 := (p_2 - p_{i2})\,(6 - 15\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4)$$
$$\pi_4 := (p_4 - p_{j4})\,(6 - 15\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3)$$

```
> #Forhandlernes FOC foc_F[2]:=
> diff(pi[2], p[2]);
> foc_F[4]:= diff(pi[4], p[4]);
```

$$foc\_F_2 := 6 - 30\,p_2 + 3\,p_1 + 3\,p_3 + 3\,p_4 + 15\,p_{i2}$$
$$foc\_F_4 := 6 - 30\,p_4 + 3\,p_1 + 3\,p_2 + 3\,p_3 + 15\,p_{j4}$$

```
> #Loser FOC
> solve({foc_F[2]=0, foc_F[4]=0}, {p[2], p[4]});
```

$$\{p_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\,p_1 + \frac{1}{9}\,p_3 + \frac{5}{99}\,p_{j4} + \frac{50}{99}\,p_{i2},\ p_4 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\,p_1 + \frac{1}{9}\,p_3 + \frac{50}{99}\,p_{j4} + \frac{5}{99}\,p_{i2}\}$$

```
> p[2]:=
> 2/9+1/9*p[1]+1/9*p[3]+5/99*p[j4]+50/99*p[i2];
> p[4]:= 2/9+1/9*p[1]+1/9*p[3]+50/99*p[j4]+5/99*p[i2];
```

$$p_2 := \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\,p_1 + \frac{1}{9}\,p_3 + \frac{5}{99}\,p_{j4} + \frac{50}{99}\,p_{i2}$$
$$p_4 := \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\,p_1 + \frac{1}{9}\,p_3 + \frac{50}{99}\,p_{j4} + \frac{5}{99}\,p_{i2}$$

```
> #Optimale kvanta
> simplify(q[1]); simplify(q[2]); simplify(q[3]); simplify(q[4]);
```

$$\frac{22}{3} - \frac{43}{3}\,p_1 + \frac{11}{3}\,p_3 + \frac{5}{3}\,p_{j4} + \frac{5}{3}\,p_{i2}$$
$$\frac{10}{3} + \frac{5}{3}\,p_1 + \frac{5}{3}\,p_3 + \frac{25}{33}\,p_{j4} - \frac{245}{33}\,p_{i2}$$
$$\frac{22}{3} - \frac{43}{3}\,p_3 + \frac{11}{3}\,p_1 + \frac{5}{3}\,p_{j4} + \frac{5}{3}\,p_{i2}$$
$$\frac{10}{3} + \frac{5}{3}\,p_1 + \frac{5}{3}\,p_3 - \frac{245}{33}\,p_{j4} + \frac{25}{33}\,p_{i2}$$

```
> #Produsentenes profittfunksjoner PI[1]:=
> (p[1] - .3)*q[1] + (p[i2] - .3)*q[2];
> PI[2]:= (p[3] - .3)*q[3] + (p[j4] - .3)*q[4];
```

$$\Pi_1 := (p_1 - .3)\,(\frac{22}{3} - \frac{43}{3}\,p_1 + \frac{11}{3}\,p_3 + \frac{5}{3}\,p_{j4} + \frac{5}{3}\,p_{i2})$$
$$+ (p_{i2} - .3)\,(\frac{10}{3} + \frac{5}{3}\,p_1 + \frac{5}{3}\,p_3 + \frac{25}{33}\,p_{j4} - \frac{245}{33}\,p_{i2})$$

$$\Pi_2 := (p_3 - .3)\,(\frac{22}{3} - \frac{43}{3}\,p_3 + \frac{11}{3}\,p_1 + \frac{5}{3}\,p_{j4} + \frac{5}{3}\,p_{i2})$$
$$+ (p_{j4} - .3)\,(\frac{10}{3} + \frac{5}{3}\,p_1 + \frac{5}{3}\,p_3 - \frac{245}{33}\,p_{j4} + \frac{25}{33}\,p_{i2})$$

```
> #Produsentenes FOC foc_P[1]:=
> diff(PI[1], p[1]); foc_P[2]:= diff(PI[1], p[i2]); foc_P[3]:=
> diff(PI[2], p[3]);
> foc_P[4]:= diff(PI[2], p[j4]);
```

$$foc\_P_1 := 11.133 - \frac{86}{3}\,p_1 + \frac{11}{3}\,p_3 + \frac{5}{3}\,p_{j4} + \frac{10}{3}\,p_{i2}$$
$$foc\_P_2 := \frac{10}{3}\,p_1 + 5.0606 + \frac{5}{3}\,p_3 + \frac{25}{33}\,p_{j4} - \frac{490}{33}\,p_{i2}$$
$$foc\_P_3 := 11.133 - \frac{86}{3}\,p_3 + \frac{11}{3}\,p_1 + \frac{10}{3}\,p_{j4} + \frac{5}{3}\,p_{i2}$$
$$foc\_P_4 := \frac{10}{3}\,p_3 + 5.0606 + \frac{5}{3}\,p_1 - \frac{490}{33}\,p_{j4} + \frac{25}{33}\,p_{i2}$$

```
> #Loser FOC solve({foc_P[1]=0,
> foc_P[2]=0, foc_P[3]=0, foc_P[4]=0}, {p[1],
> p[i2], p[3], p[j4]});
```

$$\{p_{i2} = .55666,\ p_{j4} = .55666,\ p_3 = .55665,\ p_1 = .55665\}$$

```
> p[1]:= .55665; p[i2]:= .55666; p[3]:= .55665; p[j4]:= .55666;
```

$$p_1 := .55665$$
$$p_{i2} := .55666$$
$$p_3 := .55665$$
$$p_{j4} := .55666$$

```
> #Forhandlerpriser
> p[2]; p[4];
```

.65517

.65517

```
> #Optimale kvanta
> q[1]; q[2]; q[3]; q[4];
```

3.2512

1.4779

3.2512

1.4779

```
> #Samlet kvantum
> q[1] + q[2] + q[3] + q[4];
```

9.4582

```
> #Forhandlernes profitt
> pi[2]; pi[4];
```

.14559

.14559

```
>  #Sum profitt forhandlere
>  pi[2] + pi[4];
```

.29118

```
>  #Produsentenes profitt
>  PI[1]; PI[2];
```

1.2138

1.2138

```
>  #Sum profitt produsenter
>  PI[1] + PI[2];
```

2.4276

```
>  #Samlet profitt i industrien
>  pi[2] + pi[4] + PI[1] + PI[2];
```

2.7188