

Kupongsertifikater

-Et verdifullt bidrag i spareproduktjungelen?

av

Glenn Kvisler

Veileder: Professor Petter Bjerksund

Selvstendig arbeid innen masterstudiet i økonomi og administrasjon, hovedprofil i Finansiell økonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Dette selvstendige arbeidet er gjennomført som ledd i masterstudiet i økonomi- og administrasjon ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at Høyskolen innestår for de metoder som er anvendt, de resultater som er fremkommet eller de konklusjoner som er trukket i arbeidet.

Sammendrag

Denne masteroppgaven er gjennomført som et ledd av den toårige Masterutdanningen ved Norges Handelshøyskole. Temaet for oppgaven er en analyse av kupongsertifikater, en forholdsvis ny type strukturerte produkter i det norske markedet.

Oppgaven innledes med en kort belysning av hvem som kan være interessert i denne typen spareprodukt, hvor adferdspsykologi og nyttefunksjoner er tatt med i bildet. Deretter settes det opp et teoretisk rammeverk for å kunne analysere denne typen spareprodukt. Analysen er foretatt ved hjelp av Monte Carlo simulering, da det ikke er noen lukket løsning for verdsettelse av slike produkter. Oppgaven gir først et kort overblikk over elementene bak produktet. Videre tar oppgaven for seg viktigheten av en god generering av prisbaner. Problematikken rundt generering av uniforme fordelinger, og den videre konvertering til en normalfordeling settes i fokus. Deretter følger en analyse av de utvalgte kupongsertifikatene. I denne oppgaven er det to kupongsertifikater utstedt av Handelsbanken som vil bli analysert. De sentrale elementene i analysen er verdsettelse, forventet avkastning, løpetid og risiko for å tape penger. Avslutningsvis er det foretatt en sensitivitetsanalyse av de ulike inndatavariablene. Av denne analysen ser det ut til prospektene gir et relativt godt bilde på hva investorer kan vente seg av produktet, men det er allikevel muligheter til forbedring.

Forord

Masterutredningen har uten tvil vært den mest lærerike delen av studiet. Gjennom oppgaven har jeg fått bruk for kunnskap fra en rekke fag, samtidig som jeg har tilegnet meg svært mye nytt.

Jeg vil gjerne benytte anledningen til å takke min veileder professor Petter Bjerksund for glimrende veiledning og god dialog underveis i arbeidet. Hans sterke faglige kompetanse og gode innspill er sterkt verdsatt.

Til slutt vil jeg takke forelesere og medstudenter for en fin tid ved Norges Handelshøyskole.

Norges Handelshøyskole

Bergen, våren 2010

Glenn Kvisler

Innholdsfortegnelse

Sammendrag	1
Forord	1
1. Innledning	3
2. Hvem vil være interessert i å kjøpe strukturerte spareprodukter?	4
3. Rammeverk	7
3.1 Opsjoner og obligasjoner	7
3.2 Aksjekursens bevegelse	16
3.3 Monte Carlo simulering	23
3.4 Generering av uniforme tall	25
3.5 Generere normalfordelte sekvenser	39
3.6 Inndataestimering og sannsynlighetsteoretiske argumenter	43
3.7 Teori knyttet til sensitivitetsanalyse av opsjoner	48
4. Analyse av kupongsertifikatene	49
4.1 Presentasjon av sertifikatene	50
4.2 Estimering av inndata til modellen	52
4.3 Risikonøytral verdsetting - basisestimerer	60
4.4 Sannsynlighetsteoretiske utsagn	61
5. Sensitivitetsanalyser	68
5.1 Endring i risikonøytral verdi	68
5.2 Sannsynlighetsteoretiske utsagn	71
5.2.1 Forventet avkastning	71
5.2.2 Forventet løpetid	74
5.2.3 Risiko knyttet til mulig tap - nominelle verdier	77
5.2.4 Risiko knyttet til mulig tap - reelle verdier	79
6. Avslutning	82
6.1 Hva kan investorer forvente seg ved investering i kupongsertifikater?	82
6.2 Oppsummering - et verdifullt bidrag i spareproduktjungelen?	82
6.3 Svakheter ved oppgaven, samt videre utvidelser og undersøkelser	83
7. Referanser:	85
8. Vedlegg	88
8.1 Vedlegg 1	88
8.2 Vedlegg 2	89
8.3 Vedlegg 3	91
8.4 Vedlegg 4	92

1. Innledning

I media har det vært mye snakk om ulike typer spareprodukter den siste tiden. I mai ble Fokus Bank dømt av Oslo tingrett til å betale erstatning til kunder som hadde kjøpt strukturerte spareprodukter. Hvorvidt dette er endelig dom i saken er per dags dato uvisst. Videre venter det dom i en tilsvarende sak mot DnB Nor. Professor Thore Johnsen sa blant annet i Oslo tingrett i forbindelse med spareproduktet DnB Nor hadde solgt var "Et hån mot kunden"¹. I disse tilfellene er det snakk om de etiske spørsmålene hvorvidt det er kommet godt nok frem hvilken risiko som var knyttet til produktene. Et enkelt søk på Dine Penger sine sider gir et dystert bilde på strukturerte produkter. Når strukturerte produkter har fått et relativt dårlig rykte på deg, mener jeg det er viktig at en ser på nye produkter som dukker opp.

Det skal riktignok bemerkes at de produktene som skal analyseres i denne oppgaven ikke har den samme lånefinansieringen som mange andre strukturerte produkter har. De lånefinansierte produktene har blitt ansett som verstingen blant de strukturerte produktene. Men det skal også nevnes at egenkapitalfinansierte produkter også har vist seg å være en mindre god investering. I en analyse av Kredittilsynet (2008) ble 350 spareprodukter analysert. De viste at en kunne regne med rundt 3% årlig avkastning når en tok hensyn til gebyrer på det utvalget de hadde med i undersøkelsen. Når en ser dette opp mot den risikofrie renten på rundt 5% for perioden, kan det ikke sies å være spesielt gunstig.

Hvorvidt kupongsertifikater skal sees på som en endring i hvilken type produkter banker vil tilby fremover er vanskelig å si noe om, men det er i alle fall et nytt bidrag i denne jungelen av spareprodukter.

¹ DnB Nor solgte ekstremt risikabel sparing, VG Dine Penger (21.04.2010)

2. Hvem vil være interessert i å kjøpe strukturerte spareprodukter?

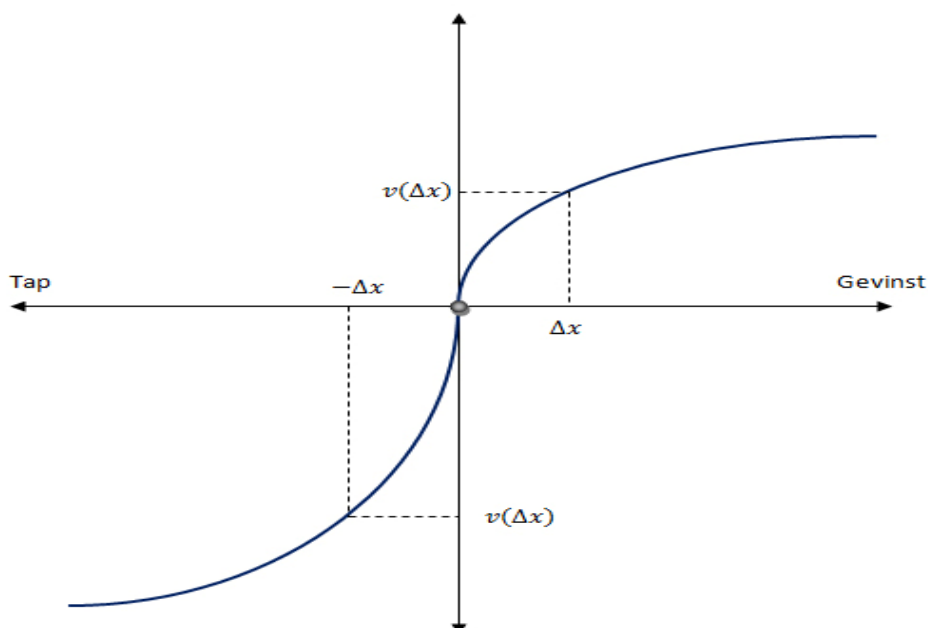
Produktdesign, for eksempel ulike varianter av strukturerte produkter, vil være en viktig del av den servicen ulike investeringsbanker tilbyr sine kunder. Dette gjelder både for banken og kundene. Banken vil tjene penger fordi de selger sin ekspertise og tilgang til avanserte finansielle markeder kunder normalt sett ikke har tilgang til. Bankene har også mulighet til å benytte seg av stordriftfordeler hva gjelder for eksempel kostnadene ved å sikre posisjonene, samt eventuelle kostnader knyttet til kjøp og salg av finansielle instrumenter. Kundene vil på sin side få tilgang til produkter som gjenspeiler deres risikoprofiler.

Hvis kundes nyttefunksjon hadde vært helt perfekt rasjonell, ville svært få strukturerte produkter hatt den verdien for kundene de har per i dag. Men som vi vet ut i fra hvordan mennesker handler i virkeligheten, er det vanskelig å si at de handler rasjonelt til en hver tid når det er snakk om finansielle beslutninger. Hens og Backmann hevder i boken "Behavioural Finance for private banking" (2008) at det er flere ulike brudd på rasjonelle handlinger innen finans. Dette er ikke noe som kommer til å bli presentert i noen dybde i denne oppgaven, men det er interessant å gi en kort introduksjon til hvorfor investorer er interessert i å kjøpe denne typen produkter.

Hovedpunktene i boken baserer seg på teori rundt verdifunksjonen til Kahneman og Tversky (1976)(1992). Disse vant nobelprisen i økonomi for deres arbeid innen "prospect theory".

Figuren under illustrer hvordan gevinst og tap, representert ved Δx , havner på nyttefunksjonen til en investor.

Figur 1 Nyttfunksjon for hvordan en investor betrakter gevinster og tap. Figuren er gjenskapt ut i fra illustrasjonen i Behavioural Finance av Hens og Backmann.



Ut i fra funksjonen ser vi tydelig at investorer vektlegger tap mye tyngre enn en tilsvarende gevinst. Funksjonen ovenfor er gitt ved :

$$(2.1) \quad v(\Delta x) = \begin{cases} \Delta x^\alpha & \text{for } \Delta x \geq 0 \\ -\beta(-\Delta x)^\alpha & \text{for } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Eksperimenter av Henz og Backmann viser at gjennomsnittlig risiko og tapsaversjon er gitt ved $\alpha = 0,88$ og $\beta = 2,25$. Her ser vi tydelig grunnen til at kunder velger å betale en premie for å unngå nedsiden, som igjen gir et marked for tilretteleggerne av strukturerte spareprodukter. Ved å fange et stort marked av slike kunder, vil banken kunne sikre posisjonene billigere enn hva kundene er villige til å betale. Dette er også grunnen til at strukturerte produkter vil være en inntektskilde for bankene, samtidig som de yter en service til kundene. I utgangspunktet vil det derfor være mulig i teorien å strukturere produkter hvor begge sider vil ha glede av produktet, og ikke bare den ene siden av bordet slik det ofte kan se ut media.

Det største problemet for mange av produktene har vært den enorme mengden lånefinansiering. Med denne typen produkter har det vist seg å være vanskelig å få en god avkastning hvis markedet har gått litt i feil retning. I denne oppgaven vil det ikke være fokus på denne typen produkter, så jeg velger å stoppe diskusjonen av lånefinansiering her.

Det er vanskelig å definere hva som er optimal produktdesign. Dette vil være avhengig av hvem som blir spurt og hvilken risikoprofil vedkommende har. Mest sannsynlig vil ikke klienten ha en helt risikonøytral profil, men en profil der klienten også har innslag av adferdpsykologi, som skifter denne profilen i ulike retninger. Det mest sannsynlige er at investoren er avvers med tanke på tap, og har en avtagende nyttefunksjon når det kommer til å tjene penger eller å ta større tap. Funksjonen vil derfor ha form som den generelle funksjonen som ble presentert ovenfor. Investoren vil derfor være villig til å gi opp en andel av oppsiden mot å være beskyttet mot små og middels store tap. Kunden vil derfor akseptere et produkt der det er en begrenset oppside, hvis produktet tar bort området rett nedenfor referansepunktet. Store tap derimot vil fortsatt være med i produktet siden investorens nyttefunksjon ikke avtar noe særlig etter tapene har nådd et visst nivå.

Dette høres veldig ut som det type produkt jeg vil fokusere på i denne oppgaven, nemlig kupongsertifikater hvor betalingsprofilen er avhengig av et underliggende aktivum. Disse produktene garanterer for nedsiden så lenge verdien på underliggende ikke faller under et gitt

nivå, også kjent som barrierenivået for produktet. Oppsiden er begrenset av kupongutbetalingen som er satt på forhånd.

Ved å sette spareproduktet opp mot adferdspsykologi og nyttefunksjoner ser vi ganske lett at det alltid vil være et marked for denne typen produkter. Det som blir viktig videre blir å sette retningslinjer for hvordan disse skal markedsføres, slik at den virkelige risikoen knyttet til produktet kommer frem. Det skal ikke være slik at dette blir en type produkter som skal "stjele" penger fra småsparere, men heller være et bidrag i spekteret av mulige spareformer.

3. Rammeverk

3.1 Opsjoner og obligasjoner

Spareprodukter blir konstruert ved hjelp av ulike derivater og obligasjoner. Jeg velger derfor å starte oppgaven med å gi en kort innføring av de elementene som er relevante i forhold til å konstruere strukturerte produkter. Gjennomgangen av de ulike elementene baserer seg på fremstillingen gjort i Hull (2006) og McDonald (2006). Denne overfladiske introduksjonen til disse elementene vil finnes i de fleste lærebøker som tar for seg dette temaet. Så om leseren er interessert i mer informasjon rundt dette er lærebøkene nevnt ovenfor en god kilde til fordypning.

Opsjoner

Det som gjør opsjoner så verdifulle innen finans er deres utrolige allsidighet. De gjør det mulig å tilpasse seg nesten alle situasjoner, så lenge markedet fungerer som det skal, hvor dette kan være av en spekulativ eller mer konservativ art. Det betyr for eksempel at det både er muligheter for å beskytte nedsiden i en posisjon, samt satse direkte på bevegelser i ulike markeder og indekser. Men det er viktig å merke seg at denne allsidigheten kommer til en viss pris, opsjoner kan nemlig være nokså komplekse og risikofylte. Skal investorer spekulere gjennom disse instrumentene er det viktig å vite hva man gjør. Nedenfor skal jeg derfor gå i gjennom de viktigste aspektene rundt opsjoner, slik at man får en grunnleggende forståelse av dette finansinstrumentet. Dette vil igjen vise viktigheten av opsjonselementet i spareproduktet, og hvorfor et slikt element benyttes i strukturerte produkter.

I hovedsak finnes det to typer opsjoner, kjøpsopsjoner (calls) og salgsopsjoner (puts). Begge disse kan både kjøpes og selges til ulike kontraktspriser og forfallstidspunkter. Det er disse faktorene som vil være byggesteinene til mer komplekse strategier. Jeg vil først gå igjennom hva en kjøp- og en salgsopsjon er.

Kjøpsopsjon

En opsjon er en finansiell avtale mellom to ulike parter, der den aller enkleste formen for en opsjon vil være kjøpsopsjonen som gir innehaveren en rett, men ikke en plikt til å kjøpe et underliggende aktivum til en bestemt pris, kontraktsprisen, med et bestemt forfallstidspunkt. Utstederen på sin side er pliktig til å selge det underliggende dersom innehaver velger å utøve opsjonen. For denne plikten mottar utsteder en avgift eller premie. Det vil si at den som sitter på kjøpsopsjonen er interessert i at det underliggende stiger. Hvis utfallet skulle bli at underliggende faller i verdi, vil det ikke være fornuftig for den som sitter på opsjonen å utøve rettigheten. Tapet vil da bli den prisen som ble betalt for rettigheten.

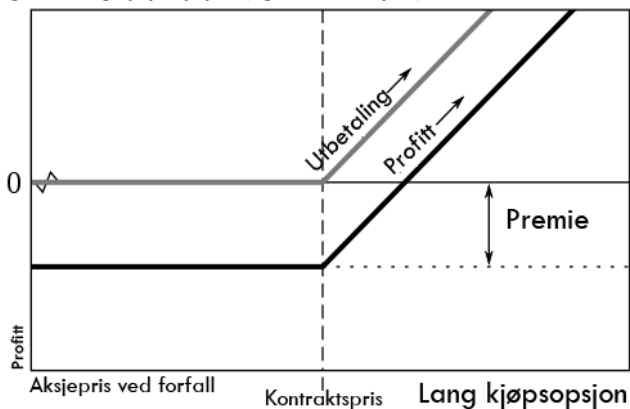
Utbetalingsfunksjonen til det underliggende hvor vi har S som aksjepris og K som kontraktspris, vil en opsjon på forfallstidspunktet være verdt:

$$(3.1) \quad \text{Lang posisjon: } C_T = \max(S_T - K, 0)$$

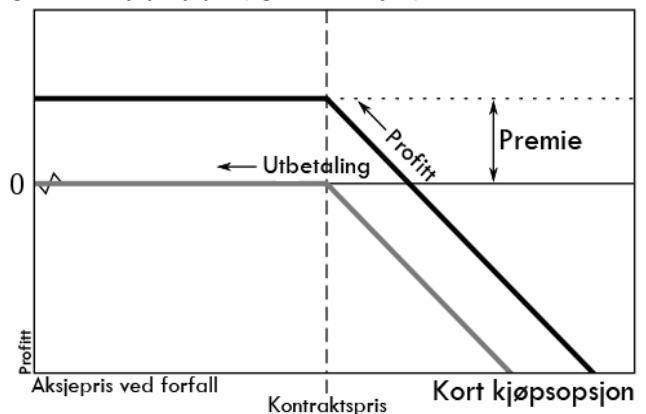
$$(3.2) \quad \text{Kort posisjon: } C_T = -\max(S_T - K, 0)$$

Kontantstrømmene vil se slik ut for en lang og en kort kjøpsopsjon:

Figur 2 Lang kjøpsopsjon (Egen illustrasjon)



Figur 3 Kort kjøpsopsjon (Egen illustrasjon)



Salgsopsjon

Det motsatte av en kjøpsopsjon vil være en salgsopsjon, som er en rett til å selge et underliggende aktivum til en bestemt pris på et gitt tidspunkt. Innehaver av en salgsopsjon vil være en person som tror verdien av underliggende vil falle før forfall. Bakgrunnen for et slik kjøp kan enten være å beskytte en langsiktig lang posisjon i underliggende, eller ren spekulering i verdifall. Motparten i en slik avtale, den som utsteder salgsopsjonen, tror det underliggende vil stige, eller holde seg i ro. På denne måten tjener utstederen opsjonspremien.

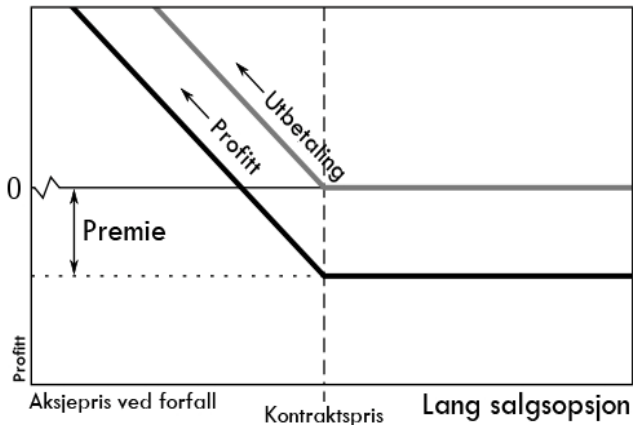
For en salgsopsjon vil utbetalingsfunksjonen se slik ut:

$$(3.3) \quad \text{Lang posisjon: } P_T = \max(K - S_T, 0)$$

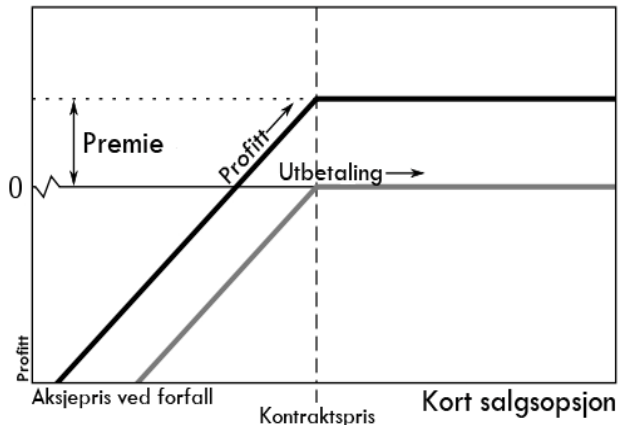
$$(3.4) \quad \text{Kort posisjon: } P_T = -\max(K - S_T, 0)$$

Kontantstrømmene kan skisseres slik for en lang og en kort salgsopsjon:

Figur 4 Lang salgsopsjon (Egen illustrasjon)



Figur 5 Kort salgsopsjon (Egen illustrasjon)



Det er verdt merke seg at det finnes et utall ulike typer kjøp- og salgsopsjoner, hvor jeg kommer til å komme tilbake til noen av dem. De to mest vanlige er europeiske og amerikanske opsjoner. Europeiske opsjoner holdes helt til forfall, mens de amerikanske har den muligheten at de kan utøves på hvilket som helst tidspunkt frem til forfall.

Black-Scholes opsjonsprisindeksmodell - prising av europeiske opsjoner

I 1973 publiserte Fisher Black og Myron Scholes artikkelen "*The Pricing of Options & Corporate Liabilities*". Dette var med på å redefinere hvordan man betraktet derivater, og blir sett på som en av de viktigste artiklene innenfor finanst teori. Rammeverket blir brukt til å prise flere forskjellige typer derivater, blant annet opsjoner på råvarer, finansielle aktiva og opsjoner til ansatte.

Modellen bygger på følgende forutsetninger:

- Kontinuerlig handel.
- Aksjen betaler ikke dividende over opsjonens løpetid.
- Opsjonen kan bare utøves på forfallstidspunktet. (europeisk opsjon)
- Efsiente markeder. (følger en Itô prosess - bevegelsen kan ikke predikeres)
- Det er ingen transaksjonskostnader eller skatter.
- Konstant risikofri rente.
- Avkastningen følger en logaritmisk fordeling.
- Alle kan plassere eller låne til risikofri rente.
- Variansen eller standardavviket til det underliggende er konstant over opsjonens løpetid.

Prisingsformel for en europeisk kjøpsopsjon for en aksje uten dividendeutbetaling:

$$(3.5) \quad C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

Definisjoner:

C: Teoretisk pris på kjøpsopsjonen
S: Aksjepris i dag
t: Tid til forfall
K: Kontraktspris
r: Risikofri rente
N: Den kumulative normalfordelingen
 σ : Volatiliteten til aksjen

For å konstruere den kumulative normalfordelingen kan følgende funksjon benyttes:

$$(3.6) \quad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Ved innplugging av de ulike variablene vil en få priset en kjøpsopsjon. For å finne prisen på den tilhørende salgsoptionsen er den enkleste måten å bruke put-call pariteten. I neste avsnitt vil det derfor være en rask presentasjon av denne sammenhengen, og hvorfor det må være slik.

Put-Call paritet

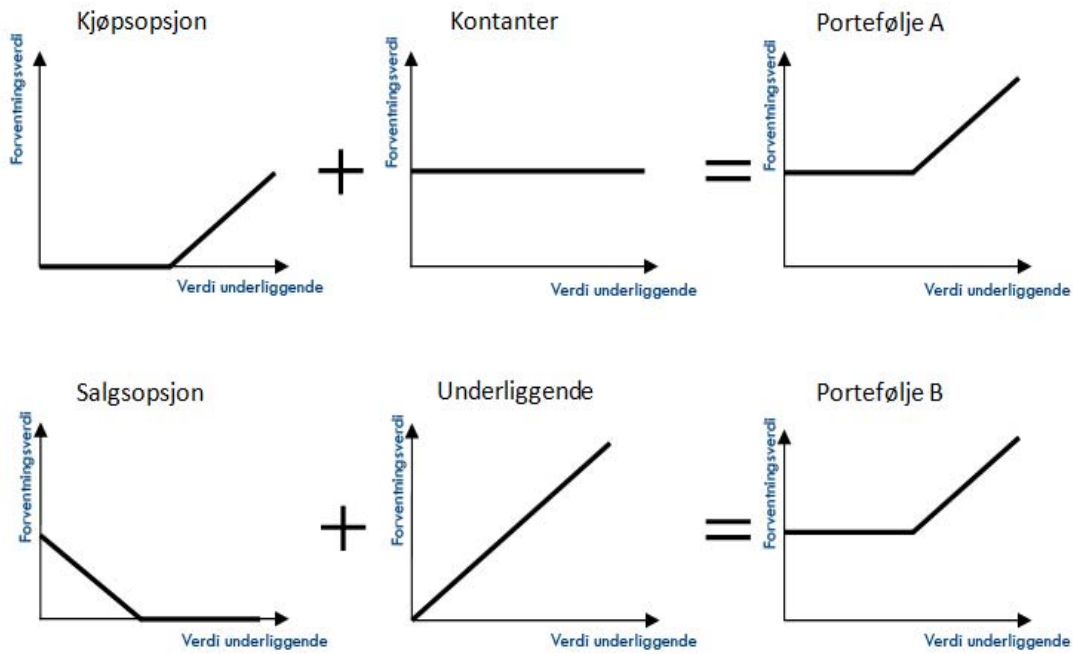
Put-call pariteten er en av de viktigste sammenhengene innen opsjonsprising. Bakgrunnen for denne viktige sammenhengen dukker opp når ulike finansielle instrumenter blir satt sammen. Jeg velger å illustrere pariteten i lys av Black-Scholes ovenfor. Det betyr at man har følgende sammenheng:

$$(3.7) \quad P(S, t) = Ke^{-r(T-t)} - S + (SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)) = Ke^{-r(T-t)} - S + C(S, t)$$

Denne likningen finnes i flere ulike versjoner hvor opsjonen sammenlignes med forwardkontrakter, aksjer eller obligasjoner som underliggende, men sammenhengen er den samme. For de ulike aktivaklassene er det bare små endringer, grunnet ulike formler for nåverdien til ulike aktiva. Jeg velger å ikke gå nærmere inn på de andre aktivaklassene da de ikke bidrar noe mer til illustrasjonen vedrørende denne pariteten.

Under følger en grafisk illustrasjon av hvorfor det må være en sammenheng mellom pris på kjøp- og salgsoptjoner.

Figur 6 Illustrasjon av put-call paritet (Egen illustrasjon)



Av figuren ser vi tydelig at det er mulig å konstruere en portefølje med både en kjøpsopsjon og en salgsoptjon. For at det ikke skal være noen arbitrasjemuligheter må prissammenhengen ovenfor holde.

Faktorer som påvirker opsjonsprisen

I hovedsak er det disse faktorene som påvirker verdien på en opsjon:

1. Pris på underliggende i dag og kontraktspris
2. Volatilitet
3. Tid til forfall
4. Risikofri rente
5. Utbytte

For å få en grunnleggende forståelse for hvordan prisen på produktene i analysen fremkommer, er det viktig å se sammenhengen mellom elementene ovenfor, og hvordan disse

påvirker verdien av opsjonselementet i produktet. Under vil jeg derfor gå raskt igjennom disse.

Pris på underliggende i dag og kontraktspris

Utbetalingen i fremtiden vil være gitt ut i fra differansen mellom prisen på underliggende og kontraktsprisen. Verdien over løpetiden vil derfor bestemmes ut i fra endringer i underliggende, siden kontraktsprisen bestemmes på forhånd. Verdien på en kjøpsopsjon vil øke dersom verdien på underliggende stiger, og synke med høyere kontraktspris. En salgsopsjon vil ha motsatte egenskaper.

Volatilitet

Hovedregelen med vanlige opsjoner er at økt volatilitet vil øke verdien på opsjonen. Dette gjelder både for kjøp- og salgsopsjoner. Ved økt volatilitet øker muligheten for at aksjen gjør store bevegelser i en eller annen retning, som igjen øker mulighetene for at opsjonen skal bli verdifull. Forskjellen mellom å eie aksjen og opsjonen gjør seg gjeldene når det er snakk om volatilitet. En investor som eier aksjen vil ikke være spesielt interessert i store svingninger da dette sees som risiko. Eieren av kjøpsopsjonen vil dra fordelene av både pris- og volatilitet økninger, samt at nedsiden er begrenset til opsjonsprisen. Det samme gjelder for salgsopsjoner, men der drar investoren fordel av prisnedgang i stedet. Eneste unntaket til den generelle sammenhengen om at økt volatilitet gir økt verdi gjelder med visse barriereopsjoner, der økt volatilitet gjør at verdien på opsjonen synker.

Tid til forfall

Når det gjelder tid til forfall vil økt tid som regel øke prisen på opsjonen. Grunnen til dette er at når tiden øker, øker også muligheten for at den skal bli verdifull. Dette gjelder både for kjøp- og salgsopsjoner. Hvis man ser på to forskjellige amerikanske opsjoner med ulike forfallstidspunkter vil dette bare gi flere muligheter til utøvelse. Det sier seg derfor selv at lenger tid vil øke verdien på opsjonen.

Når det gjelder europeiske opsjoner er det naturlig å tenke at det samme er tilfelle, men det finnes et unntak. Grunnen til dette er at europeiske opsjoner bare kan utøves på forfallstidspunktet. Hvis det er en forventet utbyttebetaling før opsjons forfallstidspunkt, vil dette redusere verdien på opsjonen. Det betyr at økt tid til forfall i noen tilfeller vil redusere verdien på opsjonen.

Risikofri rente

Hvordan risikofri rente påvirker verdien på opsjoner er ikke like klar som mange av de andre faktorene. Her er det flere ting som spiller inn, og hvordan samspillet mellom disse effektene

til slutt påvirker opsjonsprisen. Den første effekten relaterer seg til investorers avkastningskrav, som ofte øker når rentene i økonomien øker. Dette sammen med at nåverdien til de fremtidige kontantstrømmene vil falle. Disse to effektene vil samlet gjøre at kjøpsopsjoner øker i verdi, mens salgsopsjoner synker i verdi. Her er det viktig å merke seg at det er et par forutsetninger bak for at dette skal holde. For at dette resonnetet skal holde er det viktig at man antar at alt annet også holdes like, slik at aksjeprisene ikke endres som følge av at rentenivået endres. Dette vil neppe holde i praksis da aksjepris har en negativ korrelasjon med renter, slik at de faller når rentenivået øker og vice versa. Det som derfor da kan skje er at aksjeprisnedgangen som følge av renteøkningen gjør at kjøpsopsjonen vil synke i verdi, mens salgsopsjonen øker. Det er derfor vanskelig å gi noen fasit på hvordan opsjonspriser oppfører seg som følge av endringer i risikofri rente i praksis.

Utbytte

Det er en del enklere å se hvordan opsjonsprisen blir påvirket av utbytte. Når en aksje går ex-dividende synker aksjeprisen tilsvarende utbyttet som ble utbetalt. Når aksjeprisen synker vil verdien på en kjøpsopsjon synke, mens verdien på en salgsopsjon vil stige jamfør punkt 1.

Tabell 1 Oppsummeringstabell som viser hvordan ulike variabler påvirker opsjonspriser under Black-Scholes m/dividende

Oppsummeringstabell Black-Scholes m/dividende		
Kjøpsopsjon		
Hvis vi har en økning i:		Endring i opsjonsverdi
Aksjekurs		Positiv
Innløsningskurs		Negativ
Rentesats		Positiv
Tid til forfall		Positiv
Volatilitet		Positiv
Utbytte		Negativ
Salgsopsjon		
Hvis vi har en økning i:		Endring i opsjonsverdi
Aksjekurs		Negativ
Innløsningskurs		Positiv
Rentesats		Negativ
Tid til forfall		Positiv
Volatilitet		Positiv
Utbytte		Positiv

Barriereopsjoner

Barriereopsjoner er en type opsjoner der utbetalingene er avhengig av hvorvidt prisen på det underliggende har nådd et spesielt nivå i løpet av levetiden, kalt barrieren. Opsjoner av denne typen starter eller stopper å eksistere første gangen underliggende treffer det gitte barrierenivået. Hvis ikke det underliggende i løpet av perioden før forfall skulle nå barrieren som er satt og slått ut, vil opsjonen fungere på lik linje med en standardopsjon.

Siden barriereopsjoner aldri vil ha en utbetaling som er høyere enn en standardopsjon, vil de også være mindre verdt. Dette er også en del av grunnen til at de blir brukt i praksis. Med et lavere kjøpsgebyr er det billigere å bruke dem som sikring, nettopp fordi forventet utbetaling er tilsvarende lavere.

Det finnes i hovedsak tre typer barriereopsjoner:

1. Knock-out opsjoner
2. Knock-in opsjoner
3. Rebate opsjoner

Knock-out opsjonen slutter å eksistere hvis prisen på underliggende når en gitt barriere. Hvis prisen på underliggende må falle for å nå barrieren, er det en "down-and-out" opsjon. Må prisen stige for å nå barrieren er det en "up and out" opsjon.

Knock-in opsjon er motparten til Knock-out opsjonen. Denne begynner å eksistere når barrieren blir nådd. Også her er det to varianter. Med "down-and-in" må prisen på det underliggende falle for å aktivere opsjonen. Hvis prisen må stige for å aktivere, er det en "up-and-in" opsjon.

Den tredje typen av barriereopsjoner er det såkalte "rebate opsjoner". Denne typen opsjon har en fast utbetaling om prisen på det underliggende når barrieren som er satt. Denne utbetalingen kan skje enten når barrieren blir nådd, eller når opsjonen utløper. Også her er det to typer som de foregående avhenging om barrieren ligger over eller under prisen i dag.

En viktig sammenheng mellom barriereopsjoner og vanlige opsjoner er følgende paritet:

$$\text{Knock-in opsjon} + \text{Knock-out opsjon} = \text{Vanlig opsjon}$$

Denne sammenheng forutsetter at alt annet bak opsjonene er likt. Av denne sammenheng ser vi at barriereopsjonene må være billigere å kjøpe enn standardopsjonene, siden opsjonsgebyrer ikke vil kunne være negative. I spareproduktene som blir analysert i denne

oppgaven vil utbetalingen det siste året være konstruert ved hjelp av en barriereopsjon, noe jeg vil vise senere i oppgaven.

Obligasjoner

Obligasjonsteorien baserer seg på litteraturen til Bodie et al (2008). En obligasjon er et rentebærende gjeldsbrev som blir utstedt av en lånetaker som forteller at utsteder skylder innehaveren av obligasjoner penger. Hvordan denne renten skal betales varierer fra obligasjon til obligasjon, men alle obligasjoner vil ha visse forhåndssatte forpliktelser over perioden obligasjonen gjelder. I utgangspunktet er det to hovedtyper obligasjoner, nullkupong- og kupongobligasjoner. Hovedforskjellen mellom disse er hvordan tilbakebetalingen skjer. For nullkuponger betales bare hovedstolen tilbake ved forfall. Ved kupongobligasjoner vil det være en årlig kupong i tillegg til hovedstolen. Det er viktig å merke seg at dette ikke har noe å si for den årlige avkastningen for en investor. De kan begge være konstruert på en slik måte at de gir den samme årlige avkastningen. Dette vil da blir regulert når obligasjonen blir utstedt, hvor de vil ha ulik pris.

De vanligste utstederne av obligasjoner er stat, kommune og store aksjeselskap, da særlig innenfor banksektoren. Dette er den enkleste måten for store aktører å låne store beløp, siden de da ofte må låne av ulike kilder. Ved å dele lånet opp i obligasjoner blir det lettere å foreta denne oppsplittingen av lånet.

Obligasjoner blir som regel priset ut i fra en gitt risikofri rente, pluss diverse påslag hvor det blir tatt hensyn til kreditt- likviditets- og tidsrisiko etc. Et vanlig mål på risikofri rente er statsobligasjoner. Det er kanskje verdt å merke seg at etter uroen i finansmarkedene er det visse statsobligasjoner som ikke lenger er helt risikofrie, men for velutviklede land vil staten følge opp de betalingsforpliktelsene den har. I denne oppgaven vil ikke det bli noen problemstilling, i og med at Norge må anses som godt stilt finansielt sett. Når det gjelder obligasjoner som er utstedt av banker og lignede, vil det være en viss fare for konkurs. Siden det vil være en viss risiko knyttet til denne obligasjonen, må dette tas hensyn til.

I oppbyggingen av strukturerte produkter vil ofte en del av produktet bestå av en nullkupongobligasjon. Dette er på grunn av at mange produkter garanterer for innskuddet. Denne typen obligasjon er relativt kurant å prise når man vet hvor lang tid det er til forfall. Formelen for å prise en nullkupongobligasjon er som følger:

$$(3.8) \quad P_0 = \frac{\text{Pålydende}}{(1+r)^T}$$

I denne formelen er r definert som en diskret rente. I de tilfeller hvor en har en kontinuerlig rente i stedet vil formelen bli som følger:

$$(3.9) \quad P_0 = e^{-kT} * P_{\text{ålydende}}$$

Jeg valgte her å bruke k som variabel for kontinuerlig rente. Ofte blir også denne renten definert ved r , men siden det her er snakk om både diskret og kontinuerlig forrentning, synes jeg det er viktig at det kommer tydelig frem at det er forskjellige verdier på disse.

3.2 Aksjekursens bevegelse

I dette kapitlet vil jeg se på hvordan aksjekurser beveger seg, og hvordan dette kan brukes videre for å verdsette opsjonselementet i spareprodukter. For å simulere aksjekursens bevegelse og estimere verdien på produktet vil jeg ta i bruk Monte Carlo simulering.

Aksjekursens bevegelse vil i hovedsak baseres på litteraturen til John Hull (2006) og Kerry Back (2005), og deres fremstillinger. Diskusjonen rundt ulike metoder for å forbedre Monte Carlo simuleringen vil komme til slutt. Dette vil innebære og se på ulike måter å generere tilfeldige tall, samt ulike teknikker for å øke effektiviteten på simuleringen med hensyn på både kvalitet og hurtighet.

For å kunne si noe om verdien på en opsjon må man vite noe om verdien på det underliggende til opsjonen. Det kan være alt fra en enkelt aksje, en kurv med aksjer, eller en eller annen gitt indeks. Når det gjelder handel av enkeltaksjer vil det bare være mulig å handle disse på bestemte tidspunkter. Det norske aksjemarkedet er åpent for kontinuerlig handel fra 09.00 til 17.20 på hverdager. Med bakgrunn i dette vil jeg derfor definere dette som en diskret variabel, siden ikke markedet er åpent hele tiden. For at vi skal kunne gjennomføre en MC analyse med kontinuerlige variabler må vi ta hensyn til helger og ulike helligdager. Et gjennomsnittlig handelsår er derfor ofte definert ved 252 handelsdager, Loven, T og Garås, J.E.L. (2008). I denne oppgaven vil ikke dette ha veldig stor påvirkning da de strukturere produktene som skal analyseres kun har mulige forfall en gang i året. Men dette er noe det er viktig å tenke på om analysen skulle tatt for seg produkter som er avhengig av hele prisbanen. Det eneste punktet dette blir relevant er ved estimering av volatilitet fra daglige avkastningstall.

En annen faktor som er verdt å merke seg er at det i enkeltaksjer vil kunne oppstå asynkron handel, siden omsetningen vil variere. Dette vil dog ikke være noe stort problem i de produktene jeg skal analysere senere i oppgaven, siden underliggende aktivum har relativt god

omsetning. Med bakgrunn i dette kommer jeg til å velge å se bort i fra dette problemet videre i oppgaven.

For å simulere aksjekursen vil jeg bruke stokastiske variabler som beskrevet av Øksendal (2003), hvor en på kort sikt velger å si at aksjekursen er tilfeldig og uavhengig av tidligere bevegelser.

Wienerprosess

Som en introduksjon til modelleringen av aksjekursen vil jeg først presentere den generelle wienerprosessen. Dette er for å få byggesteinene på plass før jeg går videre til å vinkle denne generelle prosessen til en mer tilpasset variant for å prise finansielle instrumenter.

Det første som er viktig å påpeke er at denne prosessen bygger på to essensielle egenskaper. Disse egenskapene er oppsummert som følgende to punkter.

1. I en kort periode Δt , vil endringen Δz være gitt ved $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, hvor ε er definert som et tilfeldig tall trukket fra en standard normalfordeling.
2. Verdien Δz vil være uavhengig for to korte tidsintervall.

En generell wienerprosess kan defineres ved x som følgende:

$$(3.10) \quad dx = a dt + b dz, \text{ hvor } a \text{ og } b \text{ er konstanter}$$

Fra prosessen ser vi at det første leddet ($a dt$) vil være den forventede drifraten med størrelsen a per tidsenhet. Det andre leddet ($b dz$) i likningen er et slags støyledd i prosessen, slik at ikke prosessen er en rett linje med en gitt drifrate. Denne sammenhengen kan enkelt vises ved en integrasjon. Hadde man bare hatt den første delen av likningen, $dx = a dt$, og integrert med hensyn på tiden, ville vi fått uttrykket:

$$(3.11) \quad x = x_0 + at$$

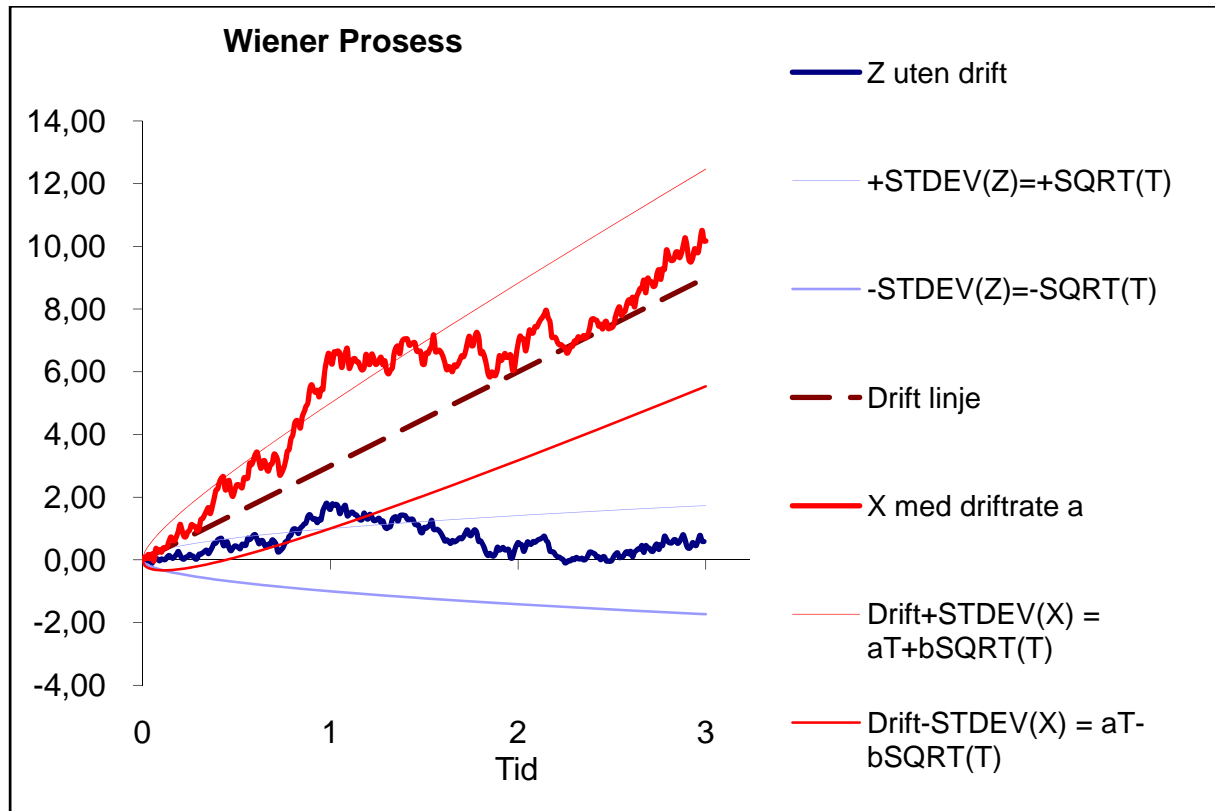
Av likningen ville x her bare steget med faktoren a for hver tidsperiode, og x ville økt med størrelsen på leddet at . Den bakre halvdel av uttrykket i (3.10), $b dz$, er den variabiliteten vi opplever i en wienerprosess. Størrelsen på faktoren b bestemmer størrelsen på denne støyen. En generell wienerprosess der b er definert som standardavviket til prosessen, og Δx er definert som et kort tidsintervall, vil prosessen være gitt som følgende:

$$(3.12) \quad \Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

De ulike verdiene av Δx vil ha en normalfordeling med gjennomsnitt $a\Delta t$ og varians lik $b^2\Delta t$.

Under følger en mulig realisasjon av to genererte prisbaner:

Figur 7 Et eksempel på en generert wienerprosess (Generert selv i Excel, men basert på en idé fra Hull (2006))



Figuren over viser en illustrasjon av to ulike generelle wienerprosesser, både med og uten drift. Prosessen er gjort over en tidsperiode på tre år, med et tidsintervall $\Delta x = 0,01$. Det vil si at simuleringen er gjort over 300 perioder. Variansleddet b er satt til to per år, mens driftraten a er satt til tre per år.

Som vi ser av figuren er det lagt til litt mer enn akkurat selve prosessene. Når det gjelder driftlinjen er den basert på likning (3.11), som er stigningsfaktoren til prosessen uten støyleddet. Til prosessen uten drift blir det naturlig x-aksen til grafen som er denne driftlinjen, mens for den med drift er stigning markert som en stiplet linje. På begge sider av prosessene er det lagt til en linje som er ett standardavvik fra driftlinjen for å illustrere i hvilket område en kan forvente å finne stien. Disse linjene er markert som tynne hele linjer i figuren ovenfor.

Utledning av stokastisk prosess for aksjer

Som vi så ovenfor gir stokastiske prosesser fine stier over ulike tidshorisonter. Den generelle wienerprosessen gir muligheter til å sette både forventede driftrater og variansrater, men den har en vesentlig mangel når det gjelder modellering av aksjepriser. Hovedmangelen til den generelle prosessen er at den ikke gir noen mulighet for å fange opp det faktum at investorer ikke ser på den absolutte prisendringen på en aksje, men den prosentvise endringen.

Avkastningskrav er gitt ved en prosent, og er uavhengig av aksjens prisnivå. Det spiller ikke noen rolle hvorvidt en aksje er verdt 10 eller 100 kroner, avkastningskravet vil allikevel være det samme. Det må derfor foretas en omskrivning av den generelle wienerprosessen som ble presentert over. Den konstante forventede driftraten må byttes ut med en konstant forventet avkastning. Også her velger jeg å holde på forutsetningen om at det ikke betales ut noen dividende over perioden. For å modellere inn denne endringen må det innføres et par andre antagelser også. For korte tidsintervall antas forventet endring i aksjeprisen S å være gitt ved $\mu S \Delta t$. Den andre antagelsen er at vi antar at den prosentvise endringen i avkastning for korte tidsintervall er uavhengig av hva aksjeprisen er.

Når Δt går mot 0 får vi da følgende sammenheng:

$$(3.13) \quad dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

For å få denne sammenhengen til å vise en prosentvis endring, dividerer vi begge sider av likningen med aksjeprisen S . Etter denne operasjonen får vi følgende likning:

$$(3.14) \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

Denne likningen er veldig mye brukt for å modellere aksjekursenes bevegelse da den tar hensyn til at investorer krever lik avkastning uavhengig av verdi.

En annen stokastisk prosess som er mye brukt er en Itô-prosess. Det er en variant av likning (3.10), hvor konstantene a og b er byttet ut med funksjoner i stedet. Disse funksjonene beskriver verdien på en variabel x ved tiden t . Den omskrevde varianten av (3.10) vil derfor se ut som dette:

$$(3.15) \quad dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

For å finne differensialet til denne typen stokastisk funksjon er det vanlig innenfor matematikken å bruke Itô's Lemma, etter Kiyoshi Ito (1951). Innenfor matematisk finans er det kanskje mest kjent brukt på utledningen av Black-Scholes opsjonsprisindeformel. Før vi

går videre i omskrivningen, er det verdt å merke seg at det i senere tid har dukket opp arbeider rundt dette fenomenet av Doebin, så Itô Lemma går også under Itô-Doebin² teoremet. Det er definert som følgende:

$$(3.16) \quad dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} x^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

Vi utfører så samme omskrivning som ovenfor i likning (3.14) for å få frem endringen i aksjepris. Ved å gjøre denne omskrivningen får vi følgende resultat fra Itô's Lemma:

$$(3.17) \quad dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

Hvis vi antar at en aksjepris følger prosessen som er gitt i likning (3.13), kan vi skrive om likning (3.17) til en logaritmisk funksjon ved hjelp av Itô's lemma. Dette kan gjøres ved å definere ($G = \ln S$). Det vil igjen si at dG er den logaritmiske avkastningen til underliggende aktivum. Ved Itô's Lemma kan vi da vise følgende:

$$(3.18) \quad dG = d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma S dz$$

Ut i fra Back (2005) er likning (3.14) og (3.18) ekvivalente. I likningen (3.18) er μ og σ konstanter, hvor G følger en generalisert wienerprosess. Endringer i aksjeavkastninger kan derfor sies få følge en normalfordeling $\Phi(\mu, \sigma)$. Herfra er det en relativt smal sak å skrive om denne funksjonen til diskret tid. Grunnen til dette er antagelsene om normalfordelte aksjeavkastninger. Når logaritmen til en variabel er normalfordelt, vil variabelen være lognormalfordelt. Ved å benytte sammenhengen: $e^{\ln(S)} = S$, kan likning (3.18) skrives om til følgende:

$$(3.19) \quad S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}}$$

Dette er en likning som kommer til å dukke opp ved flere anledninger videre, da denne vil danne grunnlaget for konstruksjonen av ulike stier for aksjepriser i Monte Carlo simuleringen senere i oppgaven. I denne oppgaven er produktene basert på hva som skjer årlig, så differensiallikningene ovenfor vil ikke blir bruk direkte i denne oppgaven. De ble tatt med for å illustrere hvordan likning (3.19) fremkommer.

² [^] "Stochastic Calculus :: Itô-Döbblin formula", Michael Stastny

Black-Scholes-Mertons differensiallikning

Siden store deler av denne oppgaven dreier om verdsetting ved simulering av aksjeprisbaner, velger jeg kort å presentere Black-Scholes-Mertons differensiallikning basert på Björk (1998) sin utledning. I og med at jeg ikke gjør en full utledning i denne oppgaven, er dette en god artikkel for hele utledningen med gitte forutsetninger. Som nevnt ovenfor er kanskje Itô's Lemma best kjent innenfor finans akkurat i forbindelse med denne differensiallikningen. Hvordan differensiallikningen kommer frem ved en fullstendig utledning matematisk velger jeg å se bort i denne oppgaven, men jeg gir heller gi en kort forklaring på hvorfor den må være akkurat som den er. For å forenkle denne likningen må det først antas at derivatet er knyttet til et ikke dividendeutbetalende aktivum. Dette er for å forenkle forklaringen om at det ikke er noen arbitrasjemuligheter. Når det ikke finnes noen arbitrasjemuligheter, vil det også si at det er mulig å replisere den risikofrie renten ved å konstruere en risikofri portefølje bestående av derivatet og aksjen. Dette er en konstruksjon som er mulig siden derivatet har den samme underliggende risikoen som aksjen, nemlig prisbevegelser. Hadde ikke denne argumentasjonen holdt, og det var mulig å konstruere en portefølje hvor arbitrasje var mulig, kunne investorer lånt penger for å investere i porteføljen. Det følger derfor av prisdynamikk og ingen arbitrasjemuligheter at følgende likning kan utledes:

$$(3.20) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

For at denne likningen skal kunne sies å være risikofri, er det viktig at det påpekes at det er kun i svært korte tidsintervall. Siden $\frac{\partial f}{\partial t}$ og $\frac{\partial f}{\partial S}$ vil endres, vil også den risikofrie renten endres. For å holde porteføljen risikofri må det relative forholdet mellom aksjen og derivatet hele tiden rebalanseres. Dette er i litteraturen til Black og Scholes (1973) kjent som den kontinuerlige rebalanseringen.

Denne likningen (3.20) har flere løsninger ut i fra hvilke typer derivater den knyttes opp mot. Nedenfor vil to ulike derivater presenteres, og hvorfor løsningene blir forskjellige. Når denne likningen skal løses vil svaret være avhengig av hvilke randbetingelser som blir satt. De ulike randbetingelsene er knyttet til ulike derivater. For kjøpsopsjoner og salgsopsjoner er randbetingelsene som følger (3.21)(3.22):

$$(3.21) \quad f(S, T) = \max(S - K, 0), f(0, t) = 0 \text{ og } f(S, t) \sim S \text{ når } S \rightarrow \infty$$

$$(3.22) \quad f(S, T) = \max(K - S, 0), f(0, t) = K * e^{-r*(T-t)}, f(S, t) \sim 0 \text{ når } S \rightarrow \infty$$

Risikonøytral verdsetting

Dette punktet vil kanskje oppsummere den viktigste egenskapen bak en analyse av hvilken verdi et derivat har. Dette er et svært viktig moment når en ser litt nærmere på likning (3.20) ovenfor. Når hverken tiden (t), aksjen (S) eller volatiliteten (σ) er påvirket av risikopreferanser gjør det at det er mulig å foreta en risikonøytral verdsetting. Hadde likningen inneholdt variabel om forventet avkastning (μ), ville ulike investorer hatt ulike avkastningskrav. Når ikke likningen inneholder noen variabler som er påvirket av risikopreferanser kan en risikonøytral verdsetting foretas. Når det finnes en løsning som er uavhengig av risikopreferanser, kan en forenkle det hele ved å anta at alle investorer er risikonøytrale. Med antagelsen om en risikonøytral verden, vil alle aktiva ha risikofri rente som forventet avkastning, og det vil ikke være noen ekstra premie for risiko. Nåverdien av de ulike kontantstrømmene vil derfor kunne diskonteres ved hjelp av risikofri rente.

Ved å bevege seg over til en setting hvor en investor anses å være risikoaverse, vil den forventede vekstraten og diskonteringsrenten endres. Denne endringen vil da skje på en slik måte at de vil utligne hverandre. Ved å introdusere risikonøytral verdsetting unngås det subjektive sannsynlighetsmålet med forventet avkastning μ og relevante krav ut i fra hver enkelt investor individuelle krav. En omskrivning av prosessen presentert i (3.13) kan i følge Øksendal (2003) også presenteres på en slik måte at man unngår et subjektivt sannsynlighetsmål P , og heller bruke det ekvivalente martingalmålet Q . Denne omskrivningen er også kjent som Girsanovs teorem, og er definert på følgende måte:

$$(3.23) \quad d\tilde{z} = dz + \lambda * dt$$

I denne likningen er $d\tilde{z}$ en Wienerprosess hvor det nye målet Q tas i bruk i stedet for det gamle subjektive sannsynlighetsmålet P , mens λ blir et mål på markedsrisikoen på risiko ved bruk av Q som mål. Ved å kombinere dette med likning (3.13) får man følgende risikojustert prosess.

$$(3.24) \quad dS = S(\mu - \sigma * \lambda) * dt + S\sigma * d\tilde{z}$$

Videre vil en kombinasjon av den risikojusterte prosessen (3.24) og markedspremien for risiko gitt ved ligning (3.25) gi en risikonøytral verdsettelse.

$$(3.25) \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Denne omskrivningen vil kunne presenteres på følgende måte ved likning (3.26). I tillegg til dette vil dividende bli introdusert. Dividende er definert som en kontinuerlig dividende δ . Når dividende blir definert som kontinuerlig, kan den enkelt inkorporeres ved å redusere

rentekomponenten med den kontinuerlige dividenden. En risikonøytral aksjeprisprosess i diskret tid hvor dividende tas hensyn til vil se slik ut:

$$(3.26) \quad S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left((r-\delta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}}$$

Dette vil være modellen som vil bli brukt i simuleringen av prisbaner i denne oppgaven. Ved å simulere prisbaner på denne måten kan flere ulike forfallstidspunkt modelleres inn, samt eventuell dividende. Et nøkkelresultat ved denne likningen er at verdien på derivatet kan skrives som en diskontert (r) forventning (Q). Dette vil derfor være en modell som inneholder de elementene som trengs for å simulere en nøytral verdi på en strukturert produkt.

3.3 Monte Carlo simulering

Monte Carlo simulering stammer i utgangspunktet fra 1930 tallet, og ble innen fysikken brukt til å beregne egenskaper på partikler innen kvantefysikk. Innen finans ble det introdusert av Phelim Boyle (1977), som verktøy for å prise opsjoner. Etter dette har Monte Carlo simulering vist seg å være et svært effektivt og nyttig verktøy for å prise ulike derivater som ikke nødvendigvis har en "closed form solution", hvor en enkel utregning med for eksempel Black - Scholes er tilstrekkelig. Ideen i denne oppgaven blir å bruke Monte Carlo simulering til å beregne hva forventet diskontert verdi vil være på de ulike produktene.

For ulike tidspunkter vil likning (3.26) endres som følgende:

$$(3.27) \quad S_h = S_0 e^{\left((r-\delta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma \varepsilon_1 \sqrt{h}}$$

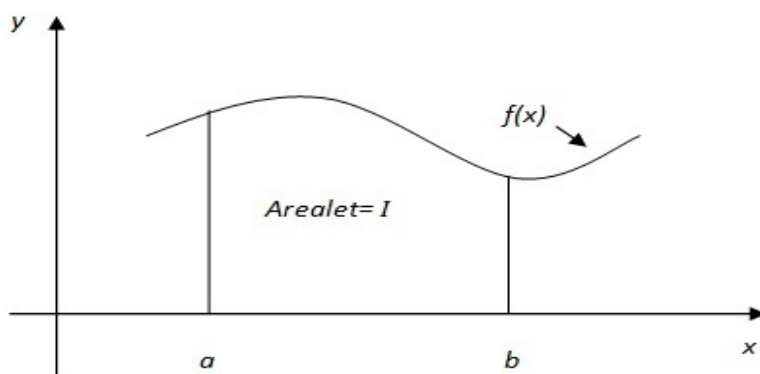
$$(3.28) \quad S_{2h} = S_h e^{\left((r-\delta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma \varepsilon_2 \sqrt{h}}$$

$$(3.29) \quad S_{nh} = S_{(n-1)h} e^{\left((r-\delta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma \varepsilon_n \sqrt{h}}$$

Tradisjonell Monte Carlo (MC) integrasjon

Monte Carlo integrasjon bruker tilfeldige punkter for å måle arealet under en gitt funksjon som vist i bildet under.

Figur 8 Illustrasjon av et integral som kan beregnes ved MC.



For å finne dette arealet numerisk kan man gjøre dette ved å generere et stort antall tilfeldige tall x_i i intervallet $[a, b]$ for så å lage et gjennomsnitt av disse bidragene til $f(x_i)$

$$(3.30) \quad I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Eksempelet over viser at Monte Carlo simulering kan brukes til å simulere numeriske løsninger på integral. Integral som det over vil selvfølgelig være enklest å løse analytisk, men fordelene ved MC-simulering er at det kan utvides til å gjelde flere dimensjoner, der det vil være vanskelig å finne en lukket løsning analytisk. Ripley (1987) har følgende generelle form for å løse et flerdimensjonalt problem med forventning $E[\varphi(X)]$

$$(3.31) \quad I = \int_B \varphi(x) f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in B}}^N \varphi(x_i)$$

hvor $x_i, i = 1, \bar{N}$, er N uavhengige tilfeldige tall fra en multidimensjonal uniform fordeling

Nedenfor vil jeg gå igjennom hvilke fordeler og ulemper man har ved å bruke Monte Carlo analyser generelt, kort oppsummert fra Niederreiter (1992).

Fordeler

- MC er som regel veldig lett å implementere på svært avanserte problemer rundt ulike integraler. Det eneste man trenger er et stort nok antall tilfeldige punkter, for så å evaluere disse i forhold til funksjonen $f(x)$
- Denne metoden vil også kunne løse problemer der man har flere dimensjoner hvor det ville være så og si umulig å finne en lukket løsning ved en analytisk fremgangsmåte.
- MC metoden gir også muligheten til å se på problemer i høye dimensjoner, siden standardavviket ikke er avhengig av dette.

Svakheter

- Før selve simuleringen må det bestemmes hvor mange tilfeldige punkter som skal settes slik at konvergensen blir god nok.
- MC metoden konvergerer relativt sakte på grunn sammenhengen mellom hvor fort feilleddet minker i forhold til antallet i utvalget. Sammenhengen mellom dem er som følger: $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{N}}$, hvilket betyr at for å halvere feilleddet, trenger man fire ganger så mange tall. Dette vil ikke være et stort problem med den datakraften som finnes lett tilgjengelig i dag, men det er fortsatt et punkt som er verdt å bemerke da komplekse problemer vil ta relativt lang tid å estimere.
- MC simuleringen er sterkt avhengig av hvilken generering av tilfeldige tall som er tilgjengelig. Er funksjonen av tilfeldige tall svak, vil også MC analysen dra denne svakheten med seg videre, og resultatene blir dårlige.

Den generelle fremgangsmåten for å estimere en funksjon ved hjelp av MC simulering består av følgende basialgoritme:

1. Generere en sekvens av tilfeldige tall (x_1, x_2, \dots, x_N) til funksjonen $f(x)$.
2. Summere funksjonen $\hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi_i)$ som er en tilnærming av uttrykket $\theta = \int_B \varphi(x) f(x) dx$
3. Evaluere variansen til θ : $S_N^2 \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\varphi(x_i) - \hat{\theta}_N)^2$
4. Estimere feilleddet: $SE(\hat{\theta}_N) = \frac{\sqrt{S_N^2}}{N}$ Feilleddet er et mål gitt med standardavviket til $\hat{\theta}_N$
Dette feilleddet vil også være tilfeldig, grunnet at den er et gjennomsnitt av de genererte tallene.
5. Det siste man må gjøre er å finne den nødvendige størrelsen på N for å få feilleddet mindre eller likt med ε , hvor $\varepsilon_\alpha = \frac{2S_N}{\sqrt{N}}$. Fra det over med et konfidensintervall på $(1 - \alpha)$ får vil følgende: $P\left(|\hat{\theta}_N - \theta| < \frac{2S_N}{\sqrt{N}}\right) \geq (1 - \alpha)$

3.4 Generering av uniforme tall

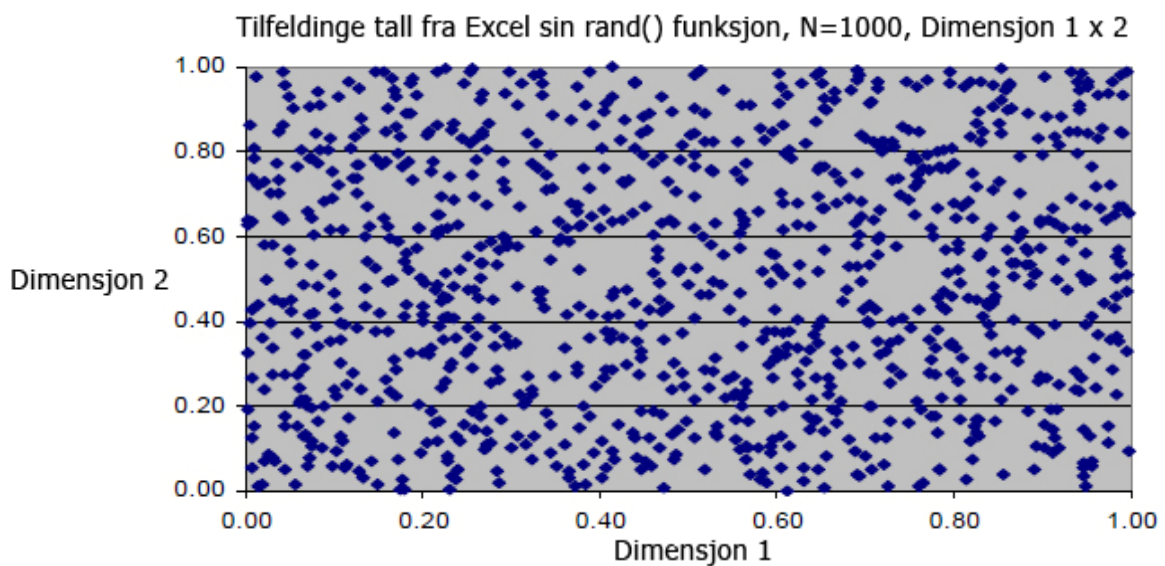
I utgangspunktet kan generering av tall gjøres på to måter. Den ene metoden er å måle et eller annet fysisk fenomen som er forventet å være tilfeldig, for så å justere resultatene for ulike målefeil. Den andre metoden er å bruke algoritmer for å produsere tilfeldige tall i lange serier,

også kjent som pseudorandom nummegeratorer. Den siste måten kan vanskelig kalles helt tilfeldig, da tallene er generert fra en gitt algoritme. Siden det vil være vanskelig å måle et fysisk fenomen når det skal genereres tusenvis av tall, vil jeg i de neste avsnittene se på ulike algoritmer, for så å finne den som er mest passende for å generere tallene i denne oppgaven.

For å finne den metoden som er best for å generere databaserte tilfeldige tall, vil jeg se på hvor tilfeldige tallene de genererer er, og hvor rask genereringen er. Det første punktet vil være det som blir hovedfokus, siden datamaskiner i dag har mindre problemer med å generere store mengder av tilfeldige tall enn man hadde tidligere.

Standardmetoden til Excel og Visual Basic sliter med å generere tilfeldige tall. Med *rand()* funksjonen i Excel har de tilfeldige tallene en tendens til å klumpe seg, og det vil derfor ta lengre tid før Monte Carlo simuleringen vil konvergere mot den grensen man er ute etter. En generering av 1000 tall med *rand()* funksjonen vil se slik ut i et scatter plot.

Figur 9 Tilfeldige tall generert ved hjelp av Excels innebygde tallgenerator. Figuren er et dataplot av simuleringen.



I dette diagrammet ser vi tydelig at det er en opphoping av tall, og ikke en jevn fordeling av punkter over hele området. Dette vil gjøre at MC-simuleringen vil ta lenger tid, siden konvergeringen ikke vil være optimal når slik opphoping er til stede.

Siden standardfunksjonen som er innebygd i Excel ikke er god nok, vil jeg derfor analysere de mest relevante alternativene. Etter analysen vil jeg deretter velge den mest passende algoritmen for simuleringen i denne oppgaven.

Low Discrepancy (LD)-sekvenser

Det finnes en godt utvalg av denne typen sekvenser, hvor de mest relevante vil bli tatt for seg i de neste avsnittene. "Low Discrepancy" er et mål på hvor god den uniforme fordelingen er. Det er målet på avviket som er i fordelingen av punkter i D ($D=[0,1]^s$). Forskjellen mellom denne typen sekvenser og vanlige generatorer som produserer tilfeldige tall er at denne typen sekvenser ikke er "tilfeldige". La oss sammenligne denne typen generatorer med den som er innebygd i Excel. Ved bruk av Excel vil hvert enkelt tall blir generert tilfeldig, det vil si at hvis ti tall blir generert i en uniform fordeling, er det ingenting i veien for at alle disse tallene kan havne i den ene halvdel av intervallet. Det ellefte tallet vil allikevel ha 50% sjanse for å også havne i dette intervallet. En slik opphoping av tall i den ene delen av intervallet vil ikke være mulig med LD-sekvenser. Når tallene blir generert av algoritmer er spredningen gitt på forhånd. Det neste tallet i algoritmen "vet" hvor de tidligere tallene er plassert, så dette tallet plasserer seg på en slik måte at det blir en god fordeling over hele intervallet. Denne typen sekvenser er svært nyttig i de tilfeller hvor det ikke er gitt hvor mange punkter det trengs for å få en god konvergering. Grunnen til dette er at det er mulig å stoppe når som helst uten at verdiene som kommer ut blir helt feil. Det neste tallet som blir generert blir plassert på en slik måte at det uansett ikke blir noen skjev fordeling i intervallet. Nedenfor vil fire ulike LD-sekvenser bli presentert:

Van der Corput

Van der Corput sekvensen baseres på en veldig enkel ide av den nederlandske matematikeren J.G van der Corput, og ble introdusert så tidlig som 1935. Sekvensen tar utgangspunkt i en algoritme som genererer et sett med punkter innenfor et gitt intervall. Disse punktene blir fordelt på en slik måte at hvert nytt tall i intervallet blir plassert slik at det er lengt mulig unna tidligere fordelte punkter. På denne måten får man en god fordeling av tallene innenfor intervallet. For å forklare sekvensen vil jeg først matematisk vise hvordan punktene fra algoritmen fremkommer, for deretter å illustrere hvordan punktene fordeles i et gitt eksempel.

Van der Corput sekvensen er en veldig enkel endimensjonal LD-sekvens. For å generere det n -te punktet x_n trengs det først å estimeres en n ut i fra primtallet i base p . Det n -te punktet estimeres som følger:

$$(3.32) \quad n = \sum_{i=0}^l a_i(n) * p^i$$

Etter n er estimert, kan x_n genereres med følgende formel:

$$(3.33) \quad x_n = \Phi_p(n) = \sum_{i=0}^l \frac{a_i(n)}{p^{i+1}}$$

For å illustrere hvordan sekvensen fungerer vil det nedenfor bli generert et tall i intervallet $[0,1]$ med $p=3$ og $n=19$

$19=2*3^2+0*3^1+1*3^0=201$ Dette transformert blir da:

$$x_{19} = \Phi_3(19) = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \frac{2}{27} = \frac{11}{27}$$

En sekvens med 2 som base vil de første tallene i sekvensen se ut slik:

$$n = 0: \quad x_1 = \Phi_0(0) = 0$$

$$n = 1: \quad 1 = 1 * 2^0 = 1, \quad x_1 = \Phi_1(1) = \frac{1}{2}$$

$$n = 2: \quad 2 = 1 * 2^0 + 0 * 2^0 = 2, \quad x_2 = \Phi_2(2) = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ved å fortsette denne sekvensen for de 16 første tallene i base to vil punktene fordele seg på følgende måte:

Figur 10 Illustrasjon på fordeling av punkter ved bruk av Van der Corput. Dette er en modifisert utgave en figuren i LaValle (2006) hvor overskriftene i utgangspunktet var på engelsk.

i	Grunnleggende sekvens	Binær	Invers binær	Van der Corput	Punkter mellom $[0,1]$
1	0	.0000	.0000	0	
2	1/16	.0001	.1000	1/2	
3	1/8	.0010	.0100	1/4	
4	3/16	.0011	.1100	3/4	
5	1/4	.0100	.0010	1/8	
6	5/16	.0101	.1010	5/8	
7	3/8	.0110	.0110	3/8	
8	7/16	.0111	.1110	7/8	
9	1/2	.1000	.0001	1/16	
10	9/16	.1001	.1001	9/16	
11	5/8	.1010	.0101	5/16	
12	11/16	.1011	.1101	13/16	
13	3/4	.1100	.0011	3/16	
14	13/16	.1101	.1011	11/16	
15	7/8	.1110	.0111	7/16	
16	15/16	.1111	.1111	15/16	

Av fordelingen ser vi at de nye tallene settes så langt unna de tidligere satte punktene som mulig. Dette prinsippet gjør at det blir en god fordeling av punkter, hvor det unngås for eksempel opphopninger av tall, og en får en raskere konvergering ved estimering av integralet.

I denne typen fordelingen vil de ulike basene ha forskjellige lengder på syklene, altså det antall tall som trengs for å dekke intervallet $[0,1]$. I sekvensen over består den første syklusen av to tall par som fordeler seg, parene $(0, 1/2)$ og $(1/4, 3/4)$. Nedover i figuren øker denne sykluslengden, og lengden på en slik syklus er gitt ved $N=2^n-1$.

Som nevnt innledningsvis er dette en veldig simpel variant av en LD-sekvens, men den er allikevel grunnsteinen til de som er mer relevante for denne oppgaven. For å oppnå et godt resultat med Quasi Monte Carlo(QMC) metoder er det to hovedpunkter som må være oppfylt. Det første er å kunne generere gode sekvenser ved høye dimensjoner, samt en god utnyttelse av disse sekvensene for å danne gode prisbaner. Ved generering av sekvenser ved høye dimensjoner finnes det en god del muligheter. De viktigste innenfor QMC er Halton-, Faure- og Sobolsekvansen. Videre kommer jeg derfor til å presentere de ulike algoritmene, for så å velge ut en passende generator for denne typen oppgave.

Haltonsekvansen

Haltonsekvansen er den enkleste sekvensen for bruk ved flere dimensjoner. Denne sekvensen er egentlig bare en utvidelse av den endimensjonale van der Corputsekvansen som ble vist over. Haltonsekvansen kan sees på som en generalisert variant. Den første basen med 2 som primtall blir helt lik som van der Corput eksempelet. Forskjellen kommer frem når det blir flere dimensjoner. Dette er også den lille endringen som gir fordeler når vi har flere dimensjoner. Ved problemer som har flere dimensjoner vil hver dimensjon ha et unikt primtall. Sekvensene blir derfor ulike, og korrelasjonen mellom de reduseres. Under følger en rask oppskrift på hvordan en slik sekvens genereres. Den matematiske formelen er den samme som Van der Corputsekvansen over.

Algoritmen for å generere et Haltontall er bygget opp som følgende: $(\{H_n\}, n = 1, \bar{N})$

1. Først skrives et tall n som et tall i base p . La oss is at vi setter $p=3$ og $n=22$, omskrevet blir det som følgende: $22=2*3^2+1*3^1+3^0=211$
2. Det neste man gjør er å reversere rekkefølgen på disse desimalene for så å sette de bak 0,xxx, i dette tilfellet 0,112

3. Resultatet blir så H_n på samme måte som i van der Corput.

Haltosekvensen for de tre første dimensjonene blir som følgende:

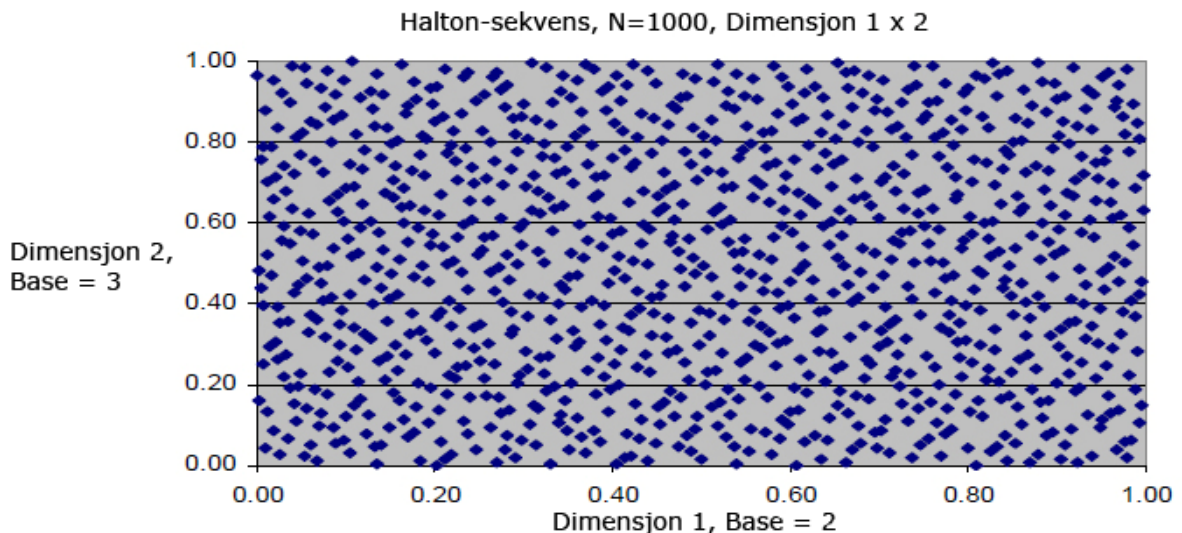
Tabell 2 Haltosekvensen for de tre første dimensjonene. Egengenerert simulering av de første åtte punktene for tre ulike primtall.

	Dim = 1 (base 2)	Dim = 2 (Base 3)	Dim = 3 (Base 5)
n=1	1/2	1/3	1/5
n=2	1/4	2/3	2/5
n=3	3/4	1/9	3/5
n=4	1/8	4/9	4/5
n=5	5/8	7/9	1/25
n=6	3/8	2/9	6/25
n=7	7/8	5/9	11/25
n=8	1/16	8/9	16/25

I tabellen kommer det ganske tydelig frem at grunnlaget er det samme som van der Corput. Den første kolonnen med 2 som base er helt lik som tabellen i forrige avsnitt.

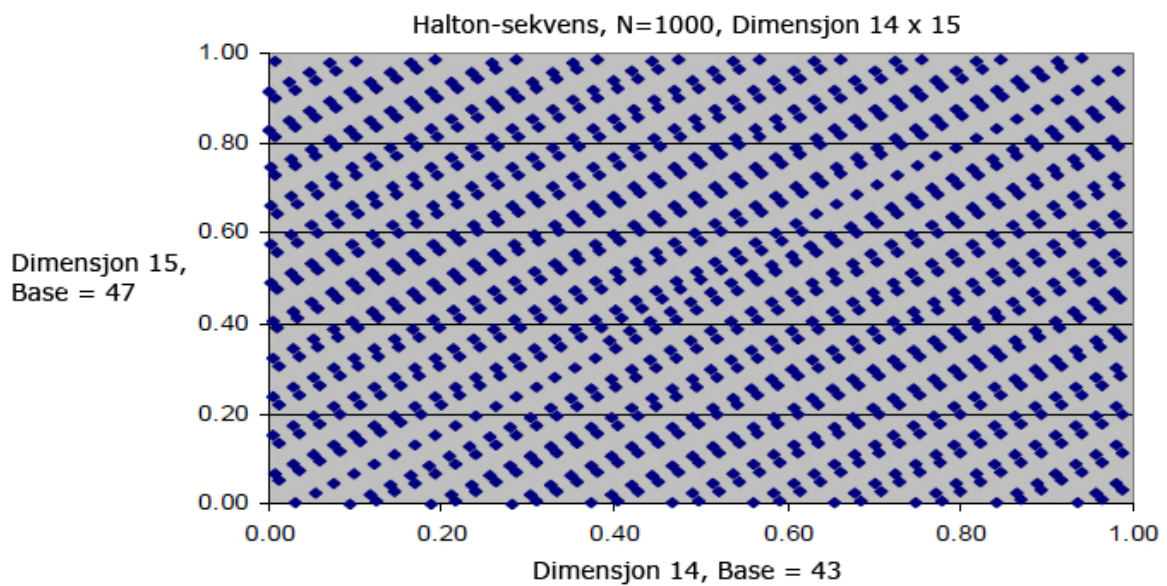
Under følger en illustrasjon hvordan en generering av 1000 punkter ved hjelp av Haltosekvensen ser ut for de to laveste dimensjonene.

Figur 11 Haltosekvensen - dimensjon 1 x 2. Dataplot fra Excel av egen tallgenerering.



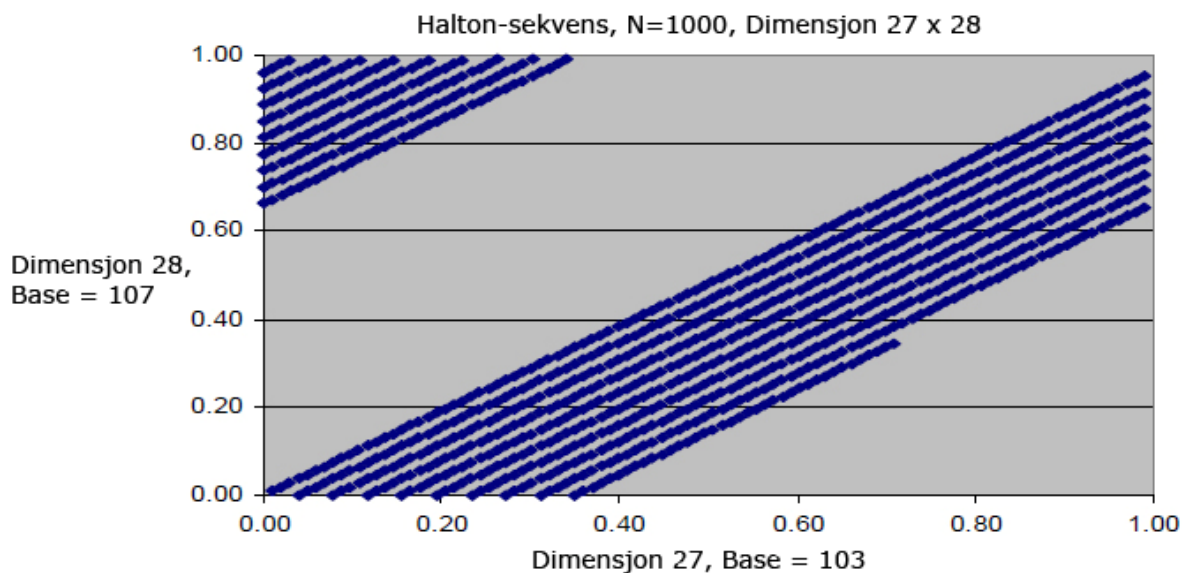
Denne fordelingen ser veldig mye bedre ut enn hva Excel klarte å generere med den innebygde `rand()` funksjonen, hvor det var en mye større opphopning av tall, og ikke en jevn fordeling. Det neste diagrammet viser dimensjon 14 og 15 mot hverandre.

Figur 12 Haltonsekvensen - dimensjon 14 x 15. Dataplot fra Excel av egen tallgenerering.



I dette diagrammet begynner det å dukke opp små svakhetstegn i genereringen, men fortsatt er det en relativt god fordeling av tallene, selv om det begynner å dukke opp et mønster. Ved høyere dimensjoner begynner man virkelig å se svakheter ved Haltonsekvensen. En grafisk fremstilling av dimensjon 27 og 28 (primtallene 103 og 107) blir seende slik ut.

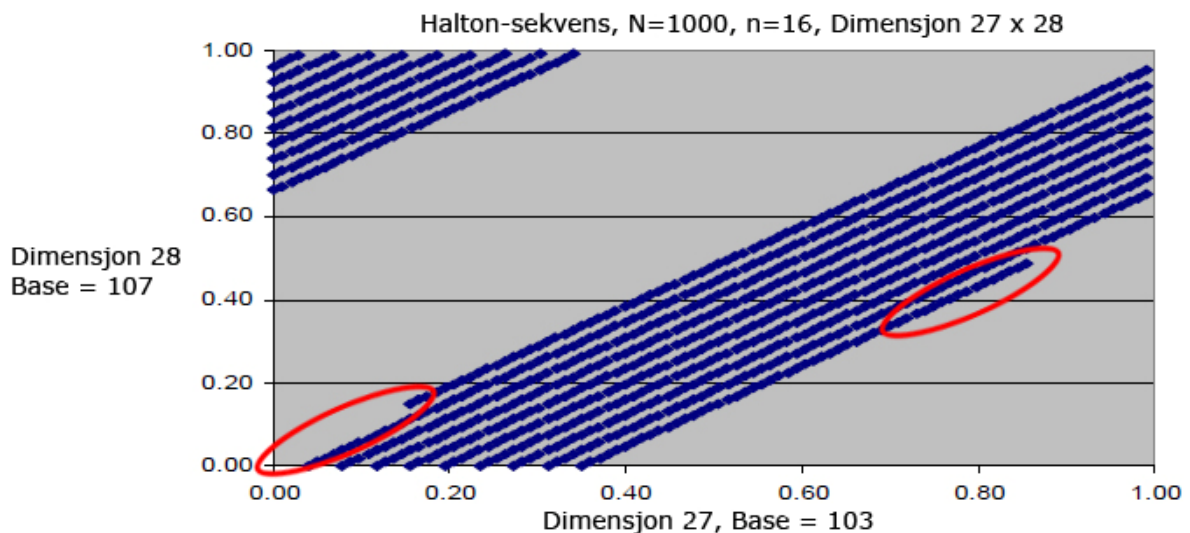
Figur 13 Haltonsekvensen - dimensjon 27 x 28. Dataplot fra Excel av egen tallgenerering.



Ved konstruksjoner av sekvenser med høye primtall, kan det være lurt å fjerne de første tallene i sekvensen på grunn av perfekt lineær korrelasjon mellom tallene. Dette vil øke uniformiteten i de høyere dimensjonene (Galanti & Jung, 1997, side 69). I en ny generering av dimensjon 27 mot 28 har jeg derfor valgt å fjerne de første 15 tallene. Når det blir foretatt

en generering av kun 1000 tall vil det ikke bli en full utfylling av dimensjonene på grunn av lengden på syklusen, men det er allikevel mulig å se endringen ved å fjerne det første 15 tallene. I figuren under er opphopingen rundt null nå svært mye bedre. Når en slik enkel endring eliminerer en del av opphopingen av tall rundt 0, vil det føre til en bedre estimering av integralet.

Figur 14 Haltonsekvensen - dimensjon 27 x 28 hvor det første 15 tallene er fjernet. Dataplot fra Excel av egen tallgenerering.



Prosessen rundt generering av en uniform fordeling i intervallet $[0,1]$ blir vanskeligere og vanskeligere etter hvert som dimensjonene øker. Grunnen til dette er at ettersom syklusene blir større, blir "tomrommet" i sekvensen vanskeligere å fylle ut. Dette problemet er noe som blir veldig tydelig i figuren over. Her mangler det mange punkter for å fullføre hele sekvensen slik at en oppnår en komplett uniform fordeling for dimensjonene.

Dette er grunnen til at Haltonsekvensen blir utilfredsstillende rundt dimensjon 14, men i praksis på grunn av korrelasjonen er det mange som unngår å bruke Haltonsekvensen for dimensjoner over 8.

Fauresekvensen

Fauresekvensen er også en generell s -dimensjonal sekvens, og har veldig mye til felles med Haltonsekvensen, men i motsetning til Haltonsekvensen bruker den bare en base for alle dimensjonene. Presentasjonen av materialet som knytter seg til denne sekvensen baserer seg på artiklene til Faure (1982) og Joy et al. (1999). Basen i en Faure sekvens er det minste primtallet som er større eller likt med det antall dimensjoner som er i problemet. Det vil si at basen må oppfylle følgende kriterier; $p \geq s$ og $p \geq 2$. Den første dimensjonen vil være helt

lik en van der Corput sekvens i base p . Men ved høyere dimensjoner kommer forskjellene tydeligere frem. Settes Fauresekvensen mot Haltonsekvensen for eksempel i dimensjon 50, vil Haltonsekvensen bruke primtall nummer 50 som er 229 som base, mens Faure vil bruke det første etter 50, som er 53. Dette fører til at Faure sekvensen raskere vil klare å fylle ut "de tomme områdene" i høye dimensjoner. Den generelle formelen for lengden av en n -te syklus i base p er: $p^n - 1$. Det vil si at hvis $p = 4$, vil de fire første syklene være 3, 15, 63 og 255.

For å konstruere en Faure s -dimensjonal sekvens er det litt mer komplisert enn hva det var med van der Corput- og Haltonsekvensen. Matematisk kan Faure sekvensen uttrykkes på følgende måte:

$$(3.34) \quad n = \sum_{i=0}^l a_i^1(n) * p^i$$

$$(3.35) \quad x_n^1 = \varphi_p^1(n) = \sum_{i=0}^l \frac{a_i^1(n)}{p^{i+1}}$$

For å kunne generere en Fauresekvens må det antas er at $a_i^{k-1}(n)$ er kjent. Når denne antagelsen holder kan $a_i^k(n)$ utledes ved følgende formel:

$$(3.36) \quad a_i^k(n) = \sum_{j=i}^l \frac{j!}{i!(j-i)!} a_i^{k-1}(n) \text{ mod } p$$

der $a \text{ mod } p$ er det resterende etter a er dividert med p

$$(3.37) \quad \binom{i}{j} = \frac{j!}{i!(j-i)!}$$

Matriseform er en god måte å illustrere verdiene som kommer ut av denne formelen. Jeg velger en 4 x 4 matrise for å illustrere hvordan det ser ut.

$$\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \dots \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{1}{2} & \binom{1}{3} & \dots \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

Faurepunktene kommer til slutt frem gjennom følgende formel:

$$(3.38) \quad x_n^k = \Phi_p^k(n) = \sum_{i=0}^l \frac{a_i^k(n)}{p^{i+1}}, \quad 2 \leq k \leq s, n = 1, \bar{N}$$

Under følger en Fauresekvens for de tre første dimensjonene:

Tabell 3 Fauresekvens for de tre første dimensjonene. Tabell basert på utregning av de første åtte punktene for tre ulike dimensjoner.

	Dim=1 (Base 3)	Dim=2 (Base 3)	Dim=3 (Base 3)	Dim=1 (Base 3)	Dim=2 (Base 3)	Dim=3 (Base 3)
	$a_0(n)$	$a_1(n)$	$a_2(n)$	x_n^1	x_n^2	x_n^3
n=1	1	0	0	1/3	1/3	1/3
n=2	2	0	0	2/3	2/3	2/3
n=3	0	1	0	1/9	4/9	7/9
n=4	1	1	0	4/9	4/9	7/9
n=5	2	1	0	7/9	1/9	4/9
n=6	0	2	0	2/9	8/9	5/9
n=7	1	2	0	5/9	2/9	8/9
n=8	2	0	1	8/9	5/9	2/9

Av matematikken ser vi at det er en ganske møysommelig prosess å generere en Fauresekvens. De to foregående algoritmene hadde en mye enklere struktur enn hva Faure har. Dette er også noe som vil vektlegges med tanke på hvilken sekvens som vil ble valgt til selve programmeringen av sekvensene.

Fauresekvenser fungerer reeltivt godt i lave dimensjoner. Resultatet er også her mye bedre enn hva Excel klarer med sin generator. Men også i Fauresekvensen dukker det opp problemer når høyere dimensjoner blir plottet mot hverandre. Når høye primtall brukes blir korrelasjonen med "nabotallet" svært høy.

Galanti og Jung (1997) finner i deres rapport at også Fauresekvensen har visse problemer. I starten av sekvenser i høye dimensjoner oppleves det også i denne sekvensen en opphopning av tall rundt null. For å redusere dette problemet i Fauresekvensen foreslår de at de første $n = (p^4 - 1)$ tallene fjernes, hvor p er base. En praktisk notis kan derfor være å forkaste de første tallene når det genereres tall ut i fra slike sekvenser på generell basis, da LD-sekvenser har problemer i starten. Men det er viktig å ha i bakhodet at dette vil skape "hull" i sekvensen, og at en slik eliminering av tall kan føre til en mindre uniform fordeling av tallene.

Avslutningsvis er det verdt å nevne at det finnes litt ulike varianter av denne sekvensen. Det finnes blant annet en generalisert Fauresekvens av Tezuka (1998) som er basert på Haltonsekvensen ved hjelp av polynomer. Dette er ikke noe jeg kommer til å gå nærmere inn på i denne oppgaven da det ikke er spesielt relevant for verdsettelsen.

Sobolsekvensen

Dette er en flerdimensjonal sekvens som bruker primtallet $p = 2$ i alle dimensjoner som sin base. Sekvensens originalverk knyttes til artikkelen Sobol (1967). Presentasjonen her er en forenklet utgave av dette, men gir en god illustrasjon av hvordan sekvensen er bygget opp. Det første som defineres i en sekvens som dette er et polynom i F_2 , som vi definerer som $p_j(z)$.

Dette kan skrives som:

$$(3.39) \quad p_j(z) = z^{d_j} + a_{j,1}z^{d_j-1} + \dots + a_{j,d_j}$$

hvor $a_{j,1} \in F_2$, $d_j = \text{dimensjon av } p_j(z)$

For å få dette uttrykket på en mer fornuftig form, slik at matriseform etter hvert kan benyttes vil det utføres en liten omskrivning av uttrykket. Vi skriver derfor d_j på en måte som benytter seg av binære punkter.

$$(3.40) \quad v_{j,r} = \frac{m_{j,r}}{2^r},$$

hvor $m_{j,r}$ er oddetall mellom 1 og $2^r - 1$ for $r = 1, \bar{d}_j$

Genereringen av sekvensen på matriseform kan da skrives som:

$$(3.41) \quad v_{j,r} = v_{j,r,1}2^{-1} + v_{j,r,2}2^{-2} + \dots + v_{j,r,d_j}2^{-d_j}$$

$$(3.42) \quad v_{j,r} = a_{j,1}v_{j,r-1} \oplus \dots \oplus a_{j,d_j-1}v_{j,r-d_j+1} \oplus v_{j,r-d_j} \oplus (v_{j,r-d_j}/2^{d_j})$$

der \oplus noterer *bit – by – bit exclusive – or – operation (XOR)*

Matematisk ser dette kanskje litt uoversiktlig ut, men jeg vil prøve å vise ved et par eksempler hvordan selve konstruksjonen av sekvensen fungerer med tall. Hvis vi først setter $j = 3$, medfører det at $p_3(z) = z^2 + z + 1$. For å fullføre denne sekvensen trengs to retningstall. La $v_{3,1} = \frac{1}{2}$ og $v_{3,2} = \frac{3}{4}$. Omskrevet til vektorer vil det si $v_{3,1} = (1,0)$ og $v_{3,2} = (1,1)$. Ut i fra definisjonen av $p_3(z)$, har vi at $a_{3,1} = a_{3,2} = 1$, som medfører at;

$$(3.43) \quad v_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3.44) \quad v_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De fire første radene og kolonnene vil da bli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den tilhørende uniforme fordelingen vil da bli $0, 1/2, 3/4, 1/4, 3/8, 7/8, 5/8, 1/8, 9/16, 1/16, 5/16, 13/16, 15/16, 7/16, 3/16, 11/16$

I 1979 presenterte Antonov og Saleev (1979) en mer effektiv måte å konstruere Sobolsekvenser med noe de kalte Graykoden.

$$(3.45) \quad G(j) = j \oplus \text{int} \left[\frac{j}{2} \right], \text{ der } \text{int}[x] \text{ er det største heltallet mindre eller lik } x$$

Fremgangsmåte for å konstruere en Sobolsekvens for hver dimensjon av k

1. Først velger man et tilfeldig tall x , for eksempel $x = 2$. Dette tallet vil fungere som startpunktet for hele sekvensen.
2. Deretter kalkuleres Graykoden for x ved $G(x)$ som forklart over.
3. Transformer deretter $G(x)$ til et binærtall $G(2) = 3 = 1*2^1 + 1*2^0 = 11$
4. Summer bit-by-bit (XOR) som er forskjellige fra null som er knyttet til tallene fra $G(x)$. I dette eksempelet er både det første og andre forskjellige fra null. XOR må derfor gjøres med det første som blir 0,1, og det andre som blir 0,11.
 $y(2; k) = 0,1 \oplus 0,11 = 0,01$
5. Det siste man må gjøre da er å transformere resultatet tilbake til en vanlig desimaltall. Dette gjøres ved å multiplisere hver av desimalene med 2^{-l} , hvor l er hvilken posisjon desimaltallet er når man teller fra venstre mot høyre. Soboltallet fra eksempelet her blir da følgende:

$$S(2, k) = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 0,250$$

Sobolsekvens med tre dimensjoner:

Tabell 4 Sobolsekvens for de tre første dimensjonene.

	Dim=1 (Base 2)	Dim=2 (Base 2)	Dim=3 (Base 2)
n=1	1/2	1/2	1/2
n=2	3/4	1/4	3/4
n=3	1/4	3/4	1/4
n=4	3/8	3/8	5/8
n=5	7/8	7/8	1/8
n=6	5/8	1/8	3/8
n=7	1/8	5/8	7/8
n=8	3/16	5/16	5/16

Ettersom hver dimensjon k i Sobol sekvensen blir laget med et unikt polynom vil begrensningen ligge i hvor mange unike polynomer som finnes. Dette blir nesten bare teoretisk, siden det i praksis finnes det mer enn nok polynomer til å dekke så og si alle tenkelige finansielle problemstillinger som måtte dukke opp. Galanti og Jung (1997) viser i deres artikkel at Sobolsekvensen fungerte godt helt opp til dimensjon 260. Dette er mye høyere enn hva Faure og Haltonsekvensen klarte. Men i motsetning til Halton- og Fauresekvensene er dette en mye mer kompleks måte å generere tilfeldige tall, i alle fall med tanke på selve programmeringen i VBA. På den andre siden har Sobolsekvensen en svært god uniform fordeling, samt at den er relativt rask med tanke på generering av store mengder tall.

Selv om Sobolsekvensen er overlegen i høye dimensjoner i forhold til de andre, er den som sagt svært komplisert å programmere. I denne oppgaven vil det ikke være behov for flere enn fem dimensjoner. Med bakgrunn i dette vil jeg derfor i simuleringen benytte meg av Haltonsekvensen siden den er mer enn god nok ved så få dimensjoner. Dette sammen med at den er veldig grei å implementere i programmeringen. Hvis en vil har mer fordypning i evaluering av denne typen sekvenser er artikkelen til Krykova (2003) en mulighet. Her blir det foretatt en dypere analyse av samtlige sekvenser.

Variansreducerende teknikker

I utgangspunktet er det to hovedgrunner til at det implementeres variansreducerende teknikker i Monte Carlo simuleringene. Enten er det for å redusere variansen til resultatet, eller for å redusere antallet simuleringer som er nødvendig for å komme innenfor en gitt feilmargin. Det finnes et stort antall av disse teknikkene i Jäckel (2002), men i denne oppgaven velger jeg å legge vekt på antitetiske trekkninger og kontrollvariatmetoden.

Antitetiske trekninger

Denne typen variansreducerende teknikk tar i bruk det faktum at alle punkter som blir trukket fra en fordeling som er symmetrisk, har den egenskapen at det finnes et "speilbilde" av trekningen på motsatt side av gjennomsnittet. Siden den standardiserte normalfordelingsfunksjonen er symmetrisk rundt null, vil hvert tall med positivt fortegn ha et tilsvarende negativt tall med lik sannsynlighet. Hvis vi definerer det første tallet som blir trukket som ε_1 , vil det andre tallet bli $-\varepsilon_1$, altså bare en endring av fortegnet. Ved å implementere dette i Monte Carlo simuleringen vil vi få to prisestimat på opsjonen, V_1 og V_2 . Denne teknikken vil da gi en variansreduksjon i følge Jäckel (2002) dersom følgende er oppfylt:

$$(3.46) \quad \text{Var} \left[\frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right] < \text{Var}[V_1], \text{ hvilket vil si at } \text{Cov}[V_1, V_2] < 0$$

Dette er ofte oppfylt, og prisestimatet vil da bli $\frac{1}{2} (V_1 + V_2)$. Dette estimatet vil dermed ligge nærmere den korrekte verdien enn hva man ville fått med vanlig Monte Carlo simulering med like mange simuleringer.

Kontrollvariatteknikken

Denne formen for variansreducerende teknikk fordrer at det er en lukket løsning på en opsjon og at vi har en lignende struktur på den opsjonen vi skal prise. I denne oppgaven vil ikke produktet ha en slik struktur, så det vil være vanskelig å benytte seg av en slik variansreducerende teknikk. Men kort fortalt kan standardavviket reduseres for hver enkelt simulering, slik at en raskere når en korrekt verdi.

La oss si vi har to derivater, A og B , hvor begge har en analytisk løsning og samme karakteristika. Ved simulering får vi prisestimatene P_a' og P_b' fra generering av tilfeldige tall. Et bedre estimat for verdien på A vil være $P_a = P_a' - P_b' + P_b$ hvor P_b er den kjente verdien til B . I og med at Monte Carlo simulering gir oss et forventningsrett estimat, vet vi at $E(P_a') = P_a$ og $E(P_b') = P_b$. Ved å forutsette at derivatene har samme karakteristika, vil det også være høy sannsynlighet for at derivatene har en sterk korrelasjon. Når vi har sammenhengen;

$$(3.47) \quad \text{Var}(P_a) = \text{Var}(P_a') + \text{Var}(P_b') - 2\text{Cov}(P_a' - P_b')$$

vil vi med kontrollvariatteknikken redusere variansen.

I denne oppgaven vil det ikke bli brukt variansreducerende teknikker. I stedet vil det bli brukt et stort antall simuleringer for å øke presisjonen til estimatet. Grunnen til at det ikke vil bli

brukt er den litt spesielle utbetalingsfunksjonen til produktet. Dette er en mulig utvidelse av undersøkelsen av denne typen produkter, noe jeg også vil nevne i avsnittet som tar for seg svakheter ved denne oppgaven.

3.5 Generere normalfordelte sekvenser

En uniform fordeling kan genereres enten ved såkalte pseudo-tilfeldige tall eller quasi-tilfeldige tall. Etter det er blitt generert et uniformt tall mellom 0 og 1, finnes det ulike algoritmer som transformerer den uniforme fordelingen til en gitt fordeling. Hovedmåten å gjøre dette på er å transformere tallet ved den inverse av den kumulative fordelingsfunksjonen. Den viktigste fordelingen når det er snakk om finans er en standard normalfordelt funksjon. Den kumulative funksjonen for en standard normalfordeling ser ut som følgende:

$$(3.48) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

Gjennom de ulike simuleringsprosessene genereres en uniform fordeling gitt ved $\Phi(x) \sim U[0,1]$. I selve verdisimuleringen er det ikke dette tallet vi er interessert i å bruke, men det tilhørende tallet i normalfordelingen. Det vi derfor er ute etter er den inverse av funksjonen som er beskrevet over, altså $x(\Phi)$. Denne inverteringen kan gjøres på flere ulike måter. Nedenfor vil jeg gå igjennom noen av valgene som finnes, og hvilke fordeler og ulemper de ulike metodene har.

Excels innebygde - NormSInv

Den første metoden er Excels innebygde metode med NormSInv kommandoen. I Excel vil en transformasjon ha følgende syntaks:

$$(3.49) \quad N01(i) = \text{NormSInv}(Xj(i))$$

hvor $Xj(i)$ er et uniformt tall i intervallet $[0,1]$. Fordelen med en slik invertering er at den vil være svært enkel å implementere i Visual Basic siden det er en innebygd funksjon. Den negative siden ved denne metoden er at den er relativt treg, samt at den har litt problemer i halen av funksjonen.

Box-Muller

En annen metode er å konvertere den uniforme fordelingen ved hjelp av en Box-Muller transformasjonen som blant annet er presentert i Jäckel (2002). Dette er kanskje den mest kjente algoritmen for å invertere uniforme tall til en normalfordeling. Algoritmen fungerer på

en slik måte at det blir trukket to tilfeldige tall (u, v) fra den uniforme fordelingen, for så å transformere dem til (x, y) ved hjelp av følgende to formler:

$$(3.50) \quad x = \sqrt{-2 \ln u} \sin(2\pi v)$$

$$(3.51) \quad y = \sqrt{-2 \ln u} \cos(2\pi v)$$

Dette er en veldig klassisk måte å transformere uniforme tall til en normalfordeling på, men det har med tiden vist seg at denne transformasjonsteknikken har visse svakheter når det kommer til halen på fordelingene, også kjent som er kjent som Neave effekten. Jeg kommer ikke til å gå noe nærmere inn på denne effekten, annet enn at den gir visse målefeil i halene på fordelingen. Med bakgrunn i disse svakhetene anbefaler Jäckel (2002) i sin bok at andre algoritmer tas i bruk i stedet.

Moro invertering

Siden den mer kjente Box-Muller inverteringen har problemer med LD-sekvenser, velger jeg å se på en alternativ algoritme som kalles Moro invertering, som også er transformasjonsmetoden Jäckel (2002) anbefaler. Utledningen under er hentet fra Moro (1995). Denne todelte algoritmen bruker Beasley og Springer algoritmen for den sentrale delen av fordelingen, og en egen algoritme for halene. Moro har selv modellert inverteringen for halene ved hjelp av forenklete Chebyshevserier. Måten denne hybridalgoritmen fungerer på er kort oppsummert under.

Den første delen er basert på Beasley and Springer:

$$(3.52) \quad |U| \leq 0,42, \quad U = x - 0,5$$

$$\Phi^{-1}(x) = U \frac{\sum_{n=0}^3 a_n U^{2n}}{\sum_{n=0}^4 b_n U^{2n}} \text{ hvor } a_n \text{ og } b_n \text{ blir hentet fra tabellen under:}$$

Tabell 5 Konstanter som er knyttet til den første delen av Moroinverteringen. Disse tallene er hentet fra Moro (1995)

n	a_n	b_n
0	2,50662823884	1
1	-18,61500062529	-8,4735109309
2	41,39119773534	23,08336743743
3	-25,44106049637	-21,06224101826
4		3,13082909833

Den andre delen av algoritmen gjelder halene i fordelingen, altså $|U| > 0,42$, som er modellert ved forenklete Chebyshev serier:

(3.53)

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^8 c_n T_n(z) - \frac{c_0}{2}, \text{ når } U > 0 \\ \frac{c_0}{2} - \sum_{n=0}^8 c_n T_n(z), \text{ når } U \leq 0 \end{cases} ; z = k_1 * [2 * \ln(-\ln(0,5 - |U|)) - k_2]$$

Konstantene k_1 og k_2 blir valgt slik at $z = -1$ når $\Phi(x) = 0,92$ og $z = 1$ når $\Phi(x) = 1 - 10^{-12}$.

Tabell 6 Konstanter som er knyttet til den andre delen av Moroinverteringen. Disse konstantene er også hentet fra Moro (1995).

n	c_n	k_n
0	7,7108870705487895	
1	2,7772013533685169	0,4179886424926431
2	0,3614964129261002	4,2454686881376569
3	0,0373418233434554	
4	0,0028297143036967	
5	0,0001625716917922	
6	0,0000080173304740	
7	0,0000003840919865	
8	9,9999999129707170	

Grunnen til at det blir lagt så stor vekt på denne problemstillingen i denne oppgaven er at haleverdiene har en stor innvirkning på verdsettelsen av finansielle opsjoner.

For kort å illustrere forskjellen mellom Microsoft Excels *NormSInv* funksjon mot Moroinverteringen når det gjelder hastighet vil jeg kort vise dette ved å generere en mengde tall, for så å ta tiden på disse to algoritmene. For å kun se på hastigheten vil det i begge algoritmene brukes den samme generatoren for å få uniforme tall. Jeg velger for enkelhets skyld å bruke den innebygde *Rnd()* funksjonen til Visual Basic for å generere det uniforme tallet mellom 0 og 1. Kildekoden for Moroinverteringen er hentet fra CD-en som tilhører boken "Advanced modelling in finance using Excel and VBA" av Mary Jackson og Mike Staunton (2001). Denne koden er i Vedlegget 3 til slutt i oppgaven.

Estimeringstid for å generere normalfordelte sekvenser:

Tabell 7 Måling av effektivitet knyttet til hastighet mellom NormSInv- og Moroinvertingen. Begge algoritmene er kodet i Visual Basic. Eneste forskjellen mellom koden i de to eksemplene er hvordan invertingen blir foretatt.

Antall simuleringer	NormSInv-funksjonen	Moroinverting
50.000	8 sekunder	1 sekund
100.000	16 sekunder	1 sekund
500.000	1 min og 16 sekunder	6 sekunder
1.000.000	2 min 34 sekunder	11 sekunder
5.000.000	10 min 11 sekunder	46 sekunder

Av tabellen ser vi veldig store forskjeller på disse to metodene for å konvertere fra en uniform- til en standard normalfordeling. I flere av eksemplene er Moroinvertingen mer enn ti ganger raskere enn den innebygde metoden. Hvis det skal gjøres mange simuleringer vil en algoritme som kutter simuleringstiden til en tiendedel være utrolig nyttig.

Datamaskinen som har blitt brukt i simuleringen er en Intel Core Quad Q9300 2,5 GHz med 4 Gb minne. Tidene vil nok kunne variere noe i forhold til hvor effektivt algoritmene er kodet, samt hva som kjøres i bakgrunnen. De eksakte tidene kan derfor variere noe om tilsvarende algoritme kjøres på en lik PC. Tidsforholdet mellom algoritmene skal likevel være det samme da testen for begge algoritmene ble gjort på samme grunnlag.

På bakgrunn av denne testen vil jeg videre i oppgaven benytte meg av Moroinvertingen som metode for å transformasjon av de uniforme tallene. Det vil kanskje ikke ha så mye å si i denne oppgaven, men i forbindelse med sensitivitetsanalysene vil det være gunstig å kunne minimere simuleringstiden.

3.6 Inndataestimering og sannsynlighetsteoretiske argumenter

Det neste jeg vil diskutere er hvordan de ulike inndatavariablene vil bli estimert. Jeg vil dele dette opp i to hoveddeler, hvor den første vil ta for seg de dataene som er knyttet til den risikonøytrale verdsettelsen av produktet. Den andre delen vil være de som er knyttet til den sannsynlighetsteoretiske delen.

Risikonøytral verdsetting

Fra diskusjonen rundt risikonøytral verdsettelse i kapittel 3.2 så vi at den bestod av tre ukjente variabler, hvor ingen er påvirket av risikopreferanser. Variablene var risikofri rente, dividende og volatilitet. Alle disse variablene må derfor estimeres for å kunne foreta en risikonøytral verdsettelse. De to første variablene, risikofri rente og dividende er relativt greie å observere i markedet, så det er ikke så mye teori rundt estimeringen av disse. Det jeg vil fokusere på i denne delen er derfor estimering av volatilitet. Det finnes mange forskjellige metoder rundt dette, men jeg vil ta for meg tre forskjellige metoder. To av metodene ser på historiske tall, mens den siste ser på forventet volatilitet fremover.

Volatilitet

Volatilitet er et mål på hvor mye instrumentet svinger, normalt blir det målt som varians eller som standardavvik. Den mest generelle formelen for varians er som følger:

$$(3.54) \quad \sigma^2 = E[(r_t - E(r_t))^2]$$

Volatilitet spiller en svært viktig rolle i veldig mange deler av finans. Eksempler på områder er porteføljeanalyse, optimering, sikring og opsjonsprising. I denne oppgaven er det til prisingen av opsjonen som dette blir viktig. Siden det ikke er mulig å observere varians direkte, vil det være en svært viktig å estimere denne faktoren på en god måte. Dette er også en av de variablene som spiller en svært sentral rolle for verdsettelsen av spareproduktet.

En av begrensningene til Black-Scholes opsjonspringsmodell er at den forutsetter at volatiliteten holder seg konstant over perioden opsjonen eksisterer. Det vil derfor være mulig å estimere variansen ut i fra tidligere avkastningstall ved hjelp av denne formel.

$$(3.55) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2$$

Når T er tilstrekkelig stor nok, for eksempel fem år med daglige avkastninger, vil dette estimatet tilsvare den absolutte volatiliteten ut i fra avkastning, som igjen kan blir sett på som et mål for den langsiktige variansen.

Hvorvidt dette er det beste estimatet på varians er vanskelig å si, siden volatiliteten vil variere over tid, og man vil få perioder med opphopninger av enten svært høy eller svært lav volatilitet. I gjennomsnitt vil den tidsvarierende variansen være lik den langsiktige, men estimatet på en spesiell dag vil enten være for høyt eller lavt. Dette får selvfølgelig størst påvirkning når det estimeres opsjoner med svært kort levetid etter observasjonene. Opsjoner med lengre levetid vil ha en volatilitet som konvergerer mot den langsiktige.

Selv om det vil ha størst innvirking på opsjoner med svært kort levetid, er det ikke bortkastet å kikke på variasjonen over tid selv for opsjoner med litt lenger levetid. Ved å gjøre en analyse av tidsserien får en svar på hvor man ligger i forhold til den langsiktige volatiliteten, og om det har vært en endring i volatilitet over tid. Selv om volatiliteten de siste to årene har vært høy grunnet uro i finansmarkedene, betyr ikke dette nødvendigvis at dette vil fortsette over opsjonens levetid. Dette er noe som bør tas hensyn til når man lager estimeringer av volatilitet fremover i tid, siden det er fremtiden som er viktig med tanke på verdien til opsjonen, ikke nødvendigvis perioden som akkurat har passert.

I analysen av det underliggende, vil jeg derfor ta for meg et par modeller for å se på hvordan volatiliteten har variert de siste fem årene, siden dette er den mest usikre variabelen når vi skal estimere verdien av opsjonselementet.

Den første modellen jeg skal ta for meg er en modell som bruker et rullende tidsvindu for å estimere volatiliteten. Der vil jeg velge ut ulike tidsperioder for se om det er store forskjeller mellom periodene. Den neste modellen vil være en modell som bruker et eksponentielt vektet rullende tidsvindu der de nyligste observasjonene blir vektet tyngst. Den siste måten jeg vil se på for å estimere volatilitet er ut i fra den impliserte volatiliteten som er brukt i børsnoterte opsjoner tilknyttet det underliggende aktiva.

Moving average modell

$$(3.56) \quad \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{t=1-M+1}^t (r_t - \bar{r})^2$$

Denne modellen har som mål å se på historiske tall, for så å bruke dette som en bilde på hva en kan forvente i fremtiden. Det er ikke nødvendigvis slik at historien gjentar seg, men dette er en relativt vanlig måte å analysere volatilitet på. I analysen kommer jeg til å se på gjennomsnittet over et kvartal, et halvt år og et år for å se hvorvidt volatiliteten er høy eller lav nå i forhold til den mer langsiktige volatiliteten som blir estimert over hele utvalget. Det er et par ting faktorer som bør tas hensyn til når vi skal velge hvor stort utvalg som skal være

med når volatiliteten estimeres. Økes utvalget vil presisjonen til estimatet økes, men på en annen side vil relevansen til estimatet bli svekket hvis det faktisk har vært endring i variansen. Dette vil for eksempel være tilfelle hvor en bedrift har hatt store restruktureringer den siste tiden. Bruk av gamle avkastningstall vil da lage et estimat på fremtidig volatilitet som ikke reflekterer den faktiske volatiliteten, siden selskapet har en helt annen risikoprofil etter restruktureringen.

Men det er viktig å nevne at denne modellen har en relativt stor svakhet, siden den gir alle observasjonene like stor vekt. Når relativt store eller små observasjoner forlater utvalget vil det medføre svært store variasjoner i den estimerte volatiliteten i slutten av tidsvinduet som blir satt. Det vil ikke være slik at volatiliteten faller akkurat den dagen observasjonen forlater utvalget. Dette fenomenet blir ofte referert til som "ghost effekten"

Ekspontensiell vektet gjennomsnitt

Dette er også en modell som ser bakover i tid som den foregående. Men denne har en egenskap som tar hensyn til den problematikken som ble nevnt rundt "ghost effekten", hvor alle observasjonene er vektet likt. I denne modellen velger vi å legge størst vekt til de nyeste observasjonene, for så å la de eldre observasjonene ha en avtagende vekt. Det er selvfølgelig mange muligheter å modellere dette på, men den mest brukte er en eksponentiell avtagende funksjon, også kjent som en EWMA estimator:

$$(3.57) \quad \hat{\sigma}_{t+1}^2 = (1 - \omega) \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i r_{t-i}^2$$

hvor ω er avtagningsfaktoren

Det er viktig å påpeke at med formuleringen over antas gjennomsnittlig avkastning å være lik null. Dette er relativt vanlig når svært korte perioder blir analysert, men det vil være en relativt smal sak å velge en estimering som tar hensyn til en annen avkastning enn null hvis vi skulle sett på litt lengre perioder for eksempel.

For å bruke denne modellen i Excel trengs det en liten omskrivning av uttrykket. Ved gjentakende substituering kan uttrykket bli skrevet om til følgende:

$$(3.58) \quad \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \omega \sigma_t^2 + (1 - \omega) r_t^2$$

Denne formelen viser at dagens varians er et resultat av gårsdagens gjennomsnittvariens og avkastning opphøyet i andre. På denne formen blir formelen mer intuitiv, samtidig som den er lettere å implementere. Siden det i denne oppgaven er standardavviket som er mest sentralt, siden jeg ser på opsjoner, vil jeg bruke formelen for standardavviket i stedet:

$$(3.59) \quad \hat{\sigma}_{t+1} = \sqrt{\omega\sigma_t^2 + (1 - \omega)r_t^2}$$

Det er viktig å merke seg at ved bruk av denne estimatoren må vi spesifisere hva σ_1^2 er, siden formelen for dagens varians tar utgangspunkt i gårsdagens. Siden det blir brukt eksponentiell vektning, blir σ_1^2 fort irrelevant når flere observasjoner blir med. For å fjerne denne feilkilden helt kan man for eksempel fjerne en del av de første observasjonene i utvalget.

Det neste en må gjøre før denne modellen kan tas i bruk er å finne en fornuftig avtagningsfaktor i intervallet 0 til 1, da dette er den eneste ukjente faktoren. Det er flere ulike måter å estimere denne faktoren. En vanlig måte å gjøre det på er å sette ω slik at det optimerer et eller annen økonomisk eller statistisk kriterium, for eksempel minimering av feilleddet til variansen. Studier på finansiell data viser at ω vanligvis ligger i intervallet 0,92 og 0,96. I artikkelen for estimering av VaR i Riskmetrics bruker de en verdi på 0,94, som var gjennomsnittsverdien som minimerte variansen for feilleddet et steg frem for flere ulike finansielle aktiva.

Implisitt volatilitet

Dette er en ganske annen tilnærming enn de foregående fremgangsmåtene. Modellene ovenfor benyttet seg av historisk volatilitet i estimeringen. Vi har ingen garanti for at historien gir et godt bilde på hva en forventer seg fremover. Ved å beregne implisitt volatilitet ut i fra noterte opsjoner er det mulig å finne estimater på hva markedet tror fremtidig volatilitet er. Ved noen forutsetninger som lognormale avkastninger, konstant risikofri rente og ingen dividende kan vi ut i fra Black - Scholes finne volatiliteten ut i fra markedets opsjonspris. Denne opsjonsformelen kan ikke løses analytisk for volatilitet, men kan ved hjelp av Excels Goal Seek funksjon løses siden alle de andre variablene er kjente.

Alle metodene ovenfor vil bli brukt i estimeringen av volatilitet i kapittel 4.2. slik at man får et best mulig estimat på denne variabelen.

Sannsynlighetsteoretiske og statistiske argumenter

Den andre delen knytter seg til estimeringen av sannsynlighetsteoretiske og statistiske argumenter. Dette innebærer blant annet beregninger av forventinger knyttet til avkastning, løpetid, tap, forventet forfallstidspunkt og utbetalingsfordeling. For å kunne gjøre slike beregninger må litt teori presenteres. Dette vil gjøres relativt kort, da det er selve analysen som er mest interessant.

Risikopremien i aksjemarkedet

I kapitlet om risikonøytral verdsetting så vi at loven om en pris sikret oss mot arbitrasjemuligheter. Verdsettelsen var uavhengig av investors risikopreferanser og markedets risikopremie. Når vi beveger oss over til beregning av sannsynlighetsfordelingen av avkastningen kan vi ikke lenger benytte oss av prisnippet om risikonøytralitet. Grunnen til dette er at avkastningsfordelingen vil være avhengig av hvilken forventet avkastning som knytter seg til underliggende, i denne oppgaven StatoilHydro ASA. De nye sannsynlighetene må ta hensyn til hva markedet priser inn i risikopremien. Det vil si at det ekvivalente martingalmålet Q ikke lenger holder, og vi må benytte oss av det faktiske sannsynlighetsmålet P . Det vil si at driftleddet i aksjeprisprosessen nå blir $(r + \lambda - \delta)$, hvor λ nå er definert som den historiske risikopremien til markedet. Av den nye prisprosessen ser vi at høyere forventet avkastning vil øke forventet avkastning. Nedenfor vil jeg kort forklare hvordan λ er estimert.

Risikopremien er målet på differansen mellom avkastningen til aksjemarkedet og avkastningen på risikofrie obligasjoner. I praksis vil den sikre plasseringen estimeres ut i fra statsobligasjoner. Dette er et mål det har vært mye diskusjon rundt, da den er en av komponentene i kapital verdimodellen, og vil derfor påvirke kravet som blir satt på avkastningen til egenkapitalen. Det har vært flere undersøkelser for å finne et estimat på denne verdien. En undersøkelse av Welch (2000) understreker veldig godt hvor usikkert dette estimatet er. Undersøkelsen som ble foretatt blant akademikere viste enorme forskjeller i hvilken markedspremie de foretrakk å bruke. Estimater på hvilken risikopremie som passet best for USA varierte i intervallet 1-15%. Med denne variasjonen vil også estimatene til avkastningskrav variere enormt. Andre personer som har diskutert problemstillingen rundt dette målet er Dimson et al. (2002). De mener de store variasjonene i estimatet eksisterer på grunn av at datamaterialet som finnes er for tynt, som igjen gir store estimeringsfeil. En som har prøvd å justere for dette ved å se fremover er Bernstein (1997). En del av konklusjonene i artikkelen til Bernstein (1997) er at risikoen i dag er lavere enn tidligere. Bakgrunnen for dette er blant annet økt mulighet for diversifisering. Andre faktorer som blir nevnt er lavere politisk risiko og økt internasjonalt samspill. Av de ulike artiklene ser vi at det ikke akkurat noe fasitsvar på hva som er riktig verdi på denne faktoren. I denne oppgaven velger jeg å bruke det samme estimatet som Koekebakker og Zakamouline (2006) bruker i deres diskusjon rundt forventet avkastning på aksjeobligasjoner i Europa. De opererer med en geometrisk risikopremie på 5,3%, hvor estimatet er et veid gjennomsnitt av ti vesteuropeiske land for perioden 1900-2001.

Statistiske mål i analysen

Variansen til produktet vil bli regnet ut ved følgende formel:

$$(3.60) \quad \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Skjevheten er beregnet ved hjelp av det tredje sentralmomentet:

$$(3.61) \quad g_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(3.62) \quad G_1 = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} g_1$$

Velger å ikke utdype dette mer da dette er vanlige statistiske mål for utvalg.

3.7 Teori knyttet til sensitivitetsanalyse av opsjoner

Den vanligste sensitivitetsanalysen av opsjoner er ved hjelp av de såkalte grekerne. Dette er ikke noe annet enn at verdien av opsjonen blir målt mot de ulike faktorene som påvirker prisen. Nedfor vil de mest brukte sensitivitetmålene kort bli presentert.

- Delta er målet på hvor mye opsjonsprisen endrer seg om underliggende stiger eller synker.
- Gamma er sensitiviteten til Delta når underliggende endres.
- Vega gir et mål på hvor sensitiv opsjonsprisen er i forhold til endringer i volatilitet.
- Theta måler endringen til opsjonen i forhold til tid.
- Rho er sensitiviteten til opsjonen i forhold til rente.
- Psi er et mål på hvor mye opsjonsprisen endrer seg når det er en endring i kontinuerlig dividende.

Siden produktet vi skal analysere i denne oppgaven er relativt sammensatt, vil det være relativt innfløkt å estimere disse en god måte. Det som heller vil bli gjort er å analysere produktet som helhet opp mot flere av de ulike variablene grekerne analyserer, for deretter grafisk se hvordan de ulike påvirker produktet. En implementering av disse i verdsettelsen vil være en mulig utvidelse av oppgaven.

4. Analyse av kupongsertifikatene

I denne delen av oppgaven vil det bli foretatt en analyse av to kupongsertifikater knyttet til StatoilHydro ASA. Denne analysen vil gjennomføres i lys av den teorien som er presentert i forrige del. All teorien som ble presentert er ikke nødvendig for selve simuleringen, men de ulike elementene vil bli brukt av Handelsbanken i deres sikring av produktet.

Et produkt som dette kan i hovedsak deles opp i to hoveddeler. Den ene delen vil være en obligasjon, og den andre delen et derivat. Forskjellen mellom dette produktet og garanterte spareprodukter kompleksiteten til derivatelementet. I de garanterte spareproduktene vil det være en nullkupongobligasjon som sikrer tilbakebetalingen, samt et derivat som gir tilgang til noe av oppsiden til underliggende. Kupongsertifikatet kan ikke sikres i sin helhet i starten siden løpetiden til produktet ikke er kjent. Det vil derfor være flere faktorer som må inn i derivatet.

For å sikre et produkt som dette vil Handelsbanken måtte sikre både delta og vega risikoen. For å sikre delta, kan de kjøpe underliggende. For å sikre endringer i volatilitet kan de handle opsjoner på underliggende. Den risikoen som er vanskeligst å sikre er kupongutbetalingen. Det mest naturlige vil eventuelt være å bruke "call spreader" for å replisere fremtidige kupongutbetalinger. Det siste som sikres er "Down & In Put" opsjonen knyttet til barrierenivået i år fem.

En verdsettelse av hvert enkelt element knyttet til dette strukturerte produktet vil være så og si umulig. Produktet må derfor betraktes og verdsettes i sin helhet. Simuleringen vil derfor foregå ved å generere tilfeldige aksjepriser som forfaller på ulike tidspunkter. De eventuelle kupongutbetalingene vil deretter diskonteres tilbake start. På denne måten vil det kunne estimeres en verdi av sertifikatet.

For å lage en slik analyse det bli programmert en struktur som repliserer den strukturen hvert av sertifikatene har. Selve programmeringen vil bli utført i VBA. I og med at strukturen knyttet til disse sertifikatene er relativt unike, har dette blitt utført på egenhånd. Men gode hjelpemidler for å replisere en slik struktur er å finne i Wilmott (1998), Jäckel (2002), Jackson og Staunton (2001) og McLeich (2005). I denne litteraturen kan deres eksempler og ideer tilpasses slik at en får en god struktur på programmeringen.

4.1 Presentasjon av sertifikatene

Kupongsertifikat StatoilHydro I

Kupongsertifikatet StatoilHydro I er konstruert av Handelsbanken, og har en maksimal løpetid på fem år. Som underliggende er sertifikatet koblet til StatoilHydro ASA(STL). Kupongsertifikatet gir en kupong på 17,3% årlig hvis StatoilHydro utvikler seg flatt eller stiger i verdi i forhold til startkursen på NOK 120,7 den 28. april 2009. Kursen på underliggende vil bli lest av den 28. april hvert år over denne fem års perioden. Det er denne datoen som bestemmer hvorvidt sertifikatet forfaller eller ei undervis over produktets levetid. Denne kursen er basert på en aksjekurs som ikke er justert for eventuelle utbytter i perioden, så verdien må dermed betraktes som en prisindeks for StatoilHydro ASA over perioden. Strukturen på produktet er som følger:

Struktur på kupongsertifikatet StatoilHydro I

Call barriere: $B=100\%$

Put barriere: $K=50\%$

Kupong: $C=17,3\%$

Tid mellom hver test: $T=1$ år

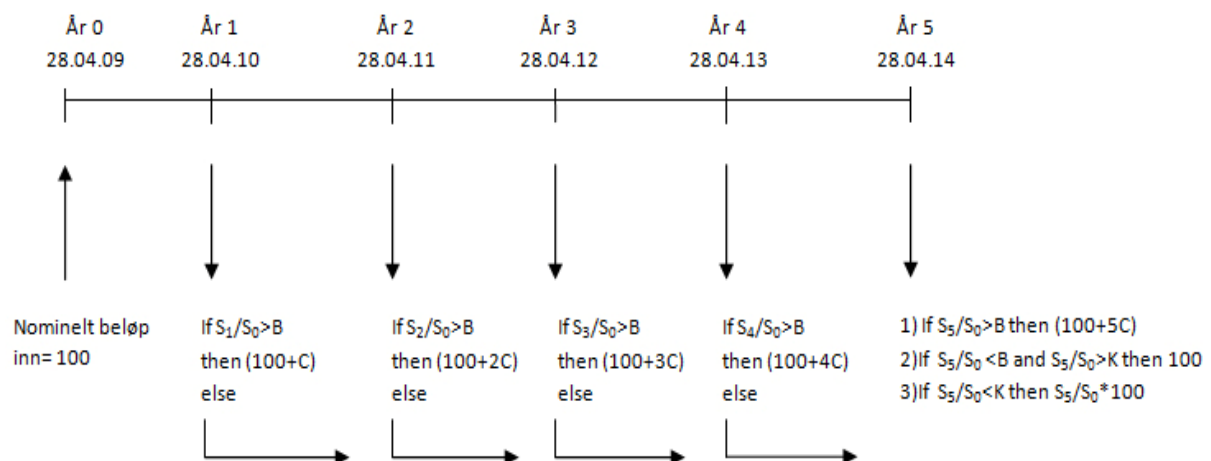
Start: $S_0=120,70\text{kr}$

Utbetalingsmuligheter i år 5

1) If $STL > 120,7$ then $(100+5C)$

2) If $STL \in [120,7, 60,35]$ then 100

3) If $STL < 60,35$ then $S_5/S_0 * 100$



Prisen per sertifikat er satt til 100 kr, hvor det er en minstetegning på 1000 sertifikater. Ved tegning vil det være en tegningsprovisjon på 2% av beløpet. Det vil si at minstekostnaden ved

tegning er 102000 kr. I tillegg til tegningsprovisjonen, er det en tilretteleggingsavgift som er estimert til 3,75%, som tilsvarer 0,74% per år hvis produktet varer helt forfall i år fem. Dette er en kostnad som er bakt inn i selve sertifikatet. I tillegg til tegningsmuligheten finnes det et annenhåndsmarked gjennom Handelsbanken med benevnelsen KCSTL4DSHB

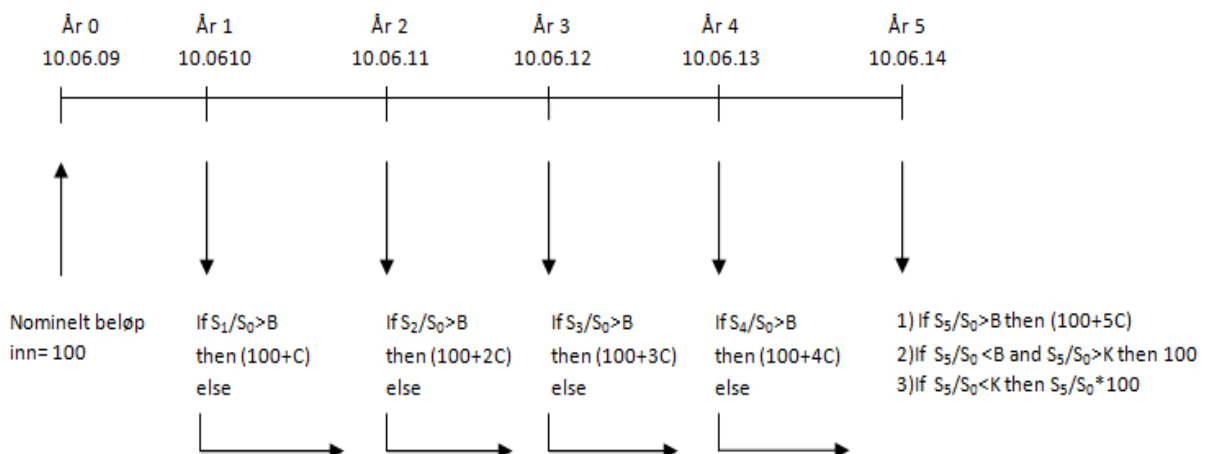
Kupongsertifikatet StatoilHydro II

Dette sertifikatet har samme hovedstruktur som StatoilHydro I, men med litt annen kupong og utstedelsestidspunkt. Dette sertifikatet ble utstedt den 10. juni 2009, med startkurs på NOK 137,00 og en kupong på 15,6%. Kursavlesningen vil foregå årlig den 10. juni, og sertifikatet forfaller senest 10. juni 2014. Kostnader knyttet til sertifikatet er de samme som ble skissert i sertifikatet ovenfor. Også dette sertifikatet handles i annenhåndsmarkedet, da under benevnelsen KCSTL4FSHB

Struktur på kupongsertifikatet StatoilHydro II

Call barriere: $B=100\%$
 Put barriere: $K=50\%$
 Kupong: $C=15,6\%$
 Tid mellom hver test: $T=1$ år
 Start: $S_0=130,00\text{kr}$

Utbetalingsmuligheter i år 5
 1) If $STL > 130,00$ then $(100+5C)$
 2) If $STL \in [130,0,68,50]$ then 100
 3) If $STL < 68,50$ then $S_5/S_0 * 100$



4.2 Estimering av inndata til modellen

Jeg velger i dette kapittelet å dele estimeringen av inndata i to hoveddeler. Den første vil være de variablene som inngår i den risikonøytrale verdsettelsen av produktet. Den andre delen omhandler de elementene som inngår i de sannsynlighetsteoretiske anslagene.

Inndata knyttet til risikonøytral verdsetting

Volatilitet

Volatilitet er som nevnt i teoridelen kanskje den parameteren som er vanskeligst å estimere siden den ikke er mulig å observere direkte i markedet. Med bakgrunn i dette er det mange ulike metoder som blir brukt for å estimere den på en mest mulig korrekt måte. For å kunne få et best mulig resultat velger jeg å bruke de metodene som ble nevnt i teorien for å finne ulike estimater på volatiliteten, for deretter å gi et samlet estimat på hva som kan være et fornuftig mål på fremtidig volatilitet.

Månedlige avkastninger

Det første metoden, og kanskje den mest brukte, er å se på de logaritmiske avkastningstallene for de forrige fem årene. Ved å se på de siste fem årene får en et relativt ok antall observasjoner, samtidig som observasjonene er relativt nye. Dette ble gjort ved at jeg lastet ned sluttkursen for StatoilHydro ASA den første handelsdagen hver måned fra Yahoo Finance. Analyseperioden strekker seg over femårsperioden før hvert av sertifikatene ble utstedt, det vil si 60 observasjoner for hvert av sertifikatene. Deretter ble den logaritmiske månedlige avkastningen kalkulert. Ved å kalkulere standardavviket for hele utvalget får vi den månedlige volatiliteten. For å konvertere den månedlige volatiliteten til årlig ble den multiplisert med kvadratroten av 12. For hvert av sertifikatene fikk jeg følgende årlige volatiliteter:

- Kupongsertifikatet StatoilHydro I får en årlig volatilitet på 28,37% når 60 måneder med logaritmiske avkastninger blir analysert.
- Kupongsertifikatet StatoilHydro II får en årlig volatilitet på 28,49% når 60 måneder med logaritmiske avkastninger blir analysert.

Daglige avkastninger

En annen metode er å bruke daglige avkastningstall isteden. Denne metoden gir litt andre resultater grunnet de store daglige svingningene det har vært i perioder under uroen i finansmarkedene. Ved å anta at et gjennomsnittlig handelsår tilsvarer 252 dager, vil den daglige volatiliteten gi et høyere estimat på årlig volatilitet enn hva de månedlige avkastningstallene gav. Fremgangsmåten her er nesten tilsvarende som den over. De daglige

sluttkursene for StatoilHydro ble også her lastet ned fra Yahoo Finance. Deretter ble de daglige logaritmiske avkastningene kalkulert. For å finne det årlige volatiliteten ble det daglige standardavviket for utvalget kalkulert, for så å bli multiplisert med kvadratroten av 252 (antall dager i et gjennomsnittlig handelsår). Årlig volatilitet med denne metoden gav følgende estimater:

- Kupongsertifikatet StatoilHydro I får en årlig volatilitet på 34,45% når daglige avkastningstall for perioden tilbake til mai 2001 blir analysert.
- Kupongsertifikatet StatoilHydro II får en årlig volatilitet på 34,62% når daglige avkastningstall for perioden tilbake til juni 2001 blir analysert.

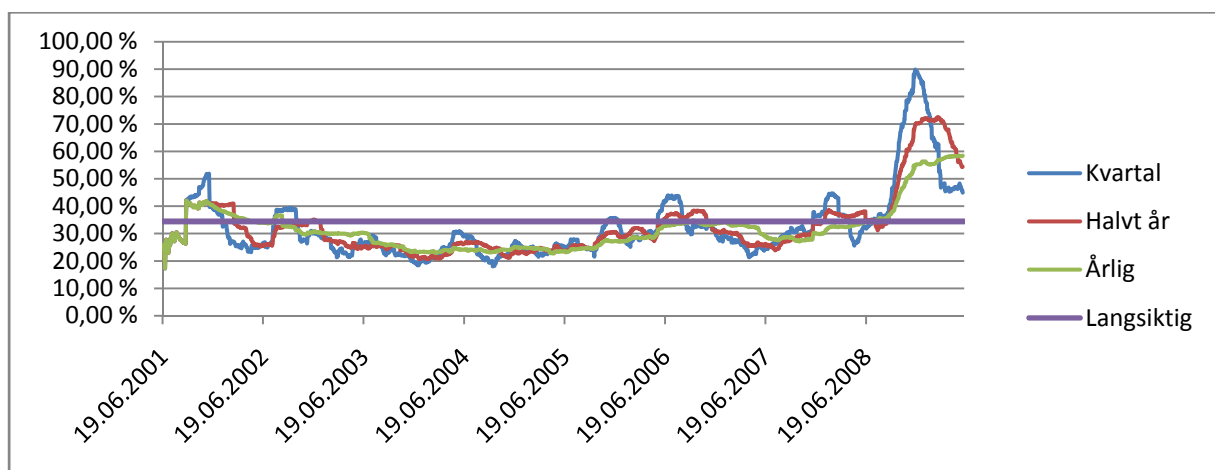
Her ser vi ganske tydelig at estimatene ved daglige avkastningstall er mye høyere, som også var forventet. At forskjellen mellom disse to produktene er liten kommer ikke som noen overraskelse, i og med at det bare er bare en og en halv måned mellom utstedelsestidspunktene.

Endringer i volatilitet over tid

Det som også kan være interessant er å se hvorvidt volatiliteten har endret seg på sikt. Jeg kommer kort til kikke på dette, selv om det kanskje ikke har for mye å si for produkter som har en relativt lang løpetid. Jeg mener allikevel det vil gi et bilde på hvordan volatiliteten har endret seg over tid i det datamaterialet vi undersøker.

Den første modellen er en modell hvor en tar i bruk et rullende tidsvindu for å estimere volatiliteten. Periodene i grafen er gjennomsnittet over et kvartal, et halvt år og et år. Dette vil gi et bilde på hvor vi er i forhold til den langsiktige volatiliteten.

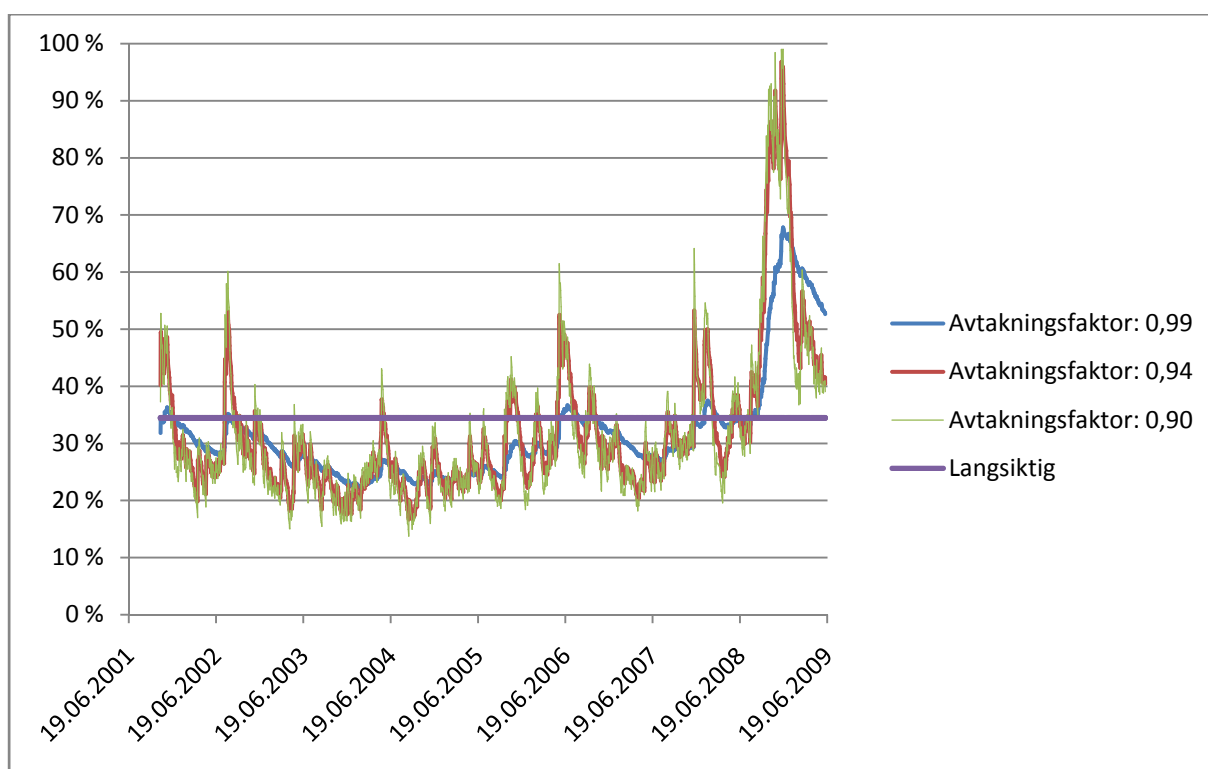
Figur 15 Endringer i volatilitet over tid illustrert ved hjelp av et rullende tidsvindu.



Av grafen ser vi at StatoilHydro ASA har vært inne i en svært volatil periode den siste tiden. Jeg mener at dette vil roe seg på sikt, men det er interessant for å illustrere endringen i risiko over tid i markedet.

En annen måte å illustrere endringen i volatilitet på er ved hjelp av et eksponentielt vektet gjennomsnitt, der de nyeste observasjonene har en større vekt enn de eldre. Diskusjonen rundt avtakningsfaktoren velger jeg å ikke ta opp på nytt her. For at tallene i denne modellen skal gi mening må en andel av observasjonene i starten fjernes. Jeg valgte i illustrasjonen under å fjerne de første 100 observasjonene.

Figur 16 Illustrasjon for endringer i volatilitet ved bruk av et eksponentielt vektet snitt.



Av også denne figuren ser vi at volatiliteten har skutt i været under finansuroen. Men ut i fra den lange tidshorisonen til produktet vil nok estimater rundt det langsiktige målet være det mest realistiske.

Implisitt volatilitet fra opsjoner

Den siste metoden jeg velger å se på i forhold til å estimere volatilitet, er gjennom noterte opsjoner. Men det er en del problemer vedrørende dette. For det første er det vanskelig å finne historiske priser på opsjoner. Et annet problem er at de opsjonene som eventuelt finnes har ulik løpetid i forhold til løpetiden til produktet. For å kontrollere estimatene ut i fra avkastningstallene har jeg derfor lastet ned dataene til de opsjonene som er notert i dag. Det er

selvfølgelig visse problemer med dette siden disse opsjonene ikke nødvendigvis gir et godt bilde på hvordan den forventede volatiliteten var når produktene ble utstedt.

For å se hva den forventede implisitte volatiliteten er, har jeg lastet ned infoen for 14 opsjoner med ulike kontraktspriser og forfallstidspunkter. Dataene for opsjonene ble lastet ned den 21. mai 2010. Den implisitte volatiliteten er ut i fra disse dataene estimert ved hjelp av Microsoft Excels Goal Seek funksjon.

Tabell 8 Estimering av implisitt volatilitet for noterte opsjoner med StatoilHydro ASA som underliggende. Prisene er hentet den 21. mai 2010.

Opsjons navn:	Implisitt volatilitet
STLW10E170HA	30,15 %
STLW10I170HA	31,87 %
STLW10L190HA	33,39 %
STLW10R140HA	38,85 %
STLW11B180HA	38,48 %
STLW11B119HAX	36,85 %
STLW11B129HAX	36,38 %
STLW10F150HA	28,66 %
STLW10F170HA	30,02 %
STLW10E145HA	28,82 %
STLW10F140HA	30,11 %
STLW10I150HA	32,48 %
STLW10Q125HA	32,17 %
STLW11B160HA	38,47 %
Gjennomsnittlig volatilitet:	33,34 %

Av tabellen ser vi at det er en relativt stor varians mellom de ulike opsjonene som er notert. Ut i fra tabellen ser vi at tallene som ble estimert ut i fra de logaritmiske avkastningene er i samme området som de implisitte volatilitetene til opsjonene. Dette gir en god indikasjon på hvilket område sensitivitetsanalysen bør strekke seg over. Det kan kanskje tenkes at de opsjonene som er notert med så korte løpetider er påvirket av den uroen som man opplever i markedet for tiden. Med dette i bakhodet kan det kanskje tenkes at verdiene langt oppe på 30-tallet vil være i overkant av hva en kan forvente at StatoilHydro ASA har som gjennomsnittlig volatilitet over produktets levetid.

På bakgrunn av dette velger jeg å bruke 30% volatilitet som basis i denne verdsettelsen, for deretter å vise hvordan en endring i denne variabelen vil påvirke verdien gjennom sensitivitetsanalysen.

Risikofri rente

Det neste spørsmålet blir selvfølgelig hva en skal bruke som rente. Produktet har en maksimal levetid på fem år, men den forventede levetiden er mye lavere. Levetiden vil være avhengig av hvilke inndata som blir brukt i modellen, så denne vil variere. For de ulike verdiene som blir brukt vil denne variere i intervallet to-tre år. Den nærmeste statsobligasjonen er tre år, og siden det ikke er noe fast gitt antall år knyttet til dette produktet, vil jeg bruke den statsobligasjonen som er nærmest forventet produktlevetid. Det kan her diskuteres hvorvidt en burde brukt en annen rente som muligens ligger litt nærmere en toårs rente ved hjelp av interpolering, men det vil uansett ikke være et eksakt mål siden tiden vil variere. Jeg velger derfor å bruke den risikofrie renten som er notert dagen før produktet blir utstedt. Dette er ikke den samme renten som er oppgitt i prospektet, men mest sannsynlig er prospektet laget en god stund før selve produktet ble utstedt. Jeg mener allikevel at en rente som starter ved produktets startpunkt gir et bedre estimat enn en rente som er plukket på et tilfeldig tidspunkt på forhånd. Rentene som blir brukt i denne oppgaven er hentet fra Norges Bank sine hjemmesider. De syntetiske rentene er beregnet ved å vekte to obligasjoner med ulike løpetider med hverandre. Kursene som Norges Bank presenterer er den sist omsatte kursen. Har det ikke vært noen omsetning av obligasjonen vil de velge kursen som ligger midt i mellom kjøp og salgskurs.

Renter på norske statsobligasjoner for Kupongsertifikatet StatoilHydro I

Tabell 9 Effektiv rente for 3, 5 og 10 års norske statsobligasjoner den 27. april.

Dato	3 års effektiv rente	5 års effektiv rente	10 års effektiv rente
27. april	2,39%	3,08%	3,86%

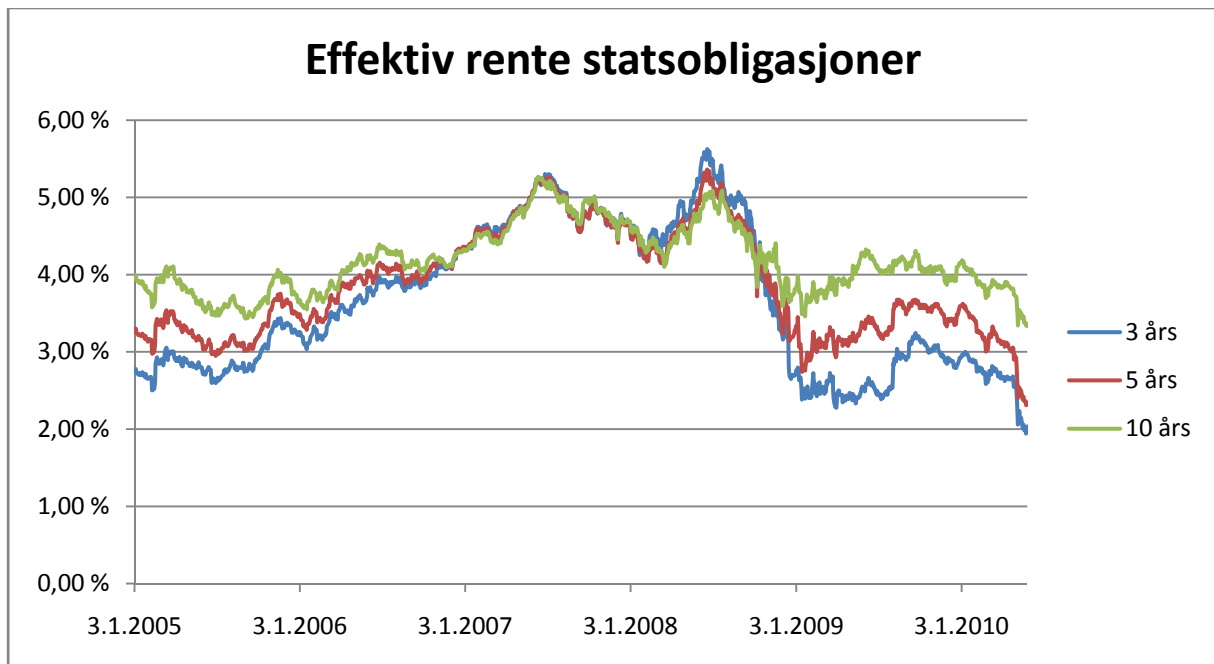
Renter på norske statsobligasjoner for Kupongsertifikatet StatoilHydro II

Tabell 10 Effektiv rente for 3, 5 og 10 års norske statsobligasjoner den 9. juni.

Dato	3 års effektiv rente	5 års effektiv rente	10 års effektiv rente
9. juni	2,58%	3,38%	4,27%

Videre i oppgaven kommer jeg til å bruke de rentene på de aktuelle dagene. Men det er interessant å merke seg at disse rentene er svært lave hvis vi ser på et litt større bilde. Hvis vi plotter tre, fem og ti års renter tilbake til 2005 får vi følgende bilde på hvordan rentene har beveget seg historisk.

Figur 17 Effektiv rente på norske 3, 5 og 10 års statsobligasjoner tilbake til 3. januar 2005.



Av figuren ser vi at den effektive renten på statsobligasjoner er svært lav i perioden som produktene blir utstedet. Det kan derfor tenkes at det er større sannsynlighet for at rentene vil stige på sikt enn å synke, i alle fall etter historiske mål. Dette er noe jeg kommer til å nevne i sensitivitetsanalysen senere i oppgaven.

Dividenderate

Det som trekker vekstraten i motsatt retning vil være dividenden som blir utbetalt over perioden. Grunnen til dette er at produktet er basert på en prisindeks hvor ikke dividende blir tatt hensyn til. Grunnet denne konstruksjonen må driftraten reduseres med den kontinuerlige dividenderaten. Dividenderaten er estimert ut i fra historiske data for perioden 2002-2010. Statoil Hydro har hatt for vane å betale ut utbytte en gang i året, vanligvis i mai. For å estimere den konstante utbytteraten har jeg tatt utbyttet som er betalt ut og dividert på sluttkursen dagen før. For perioden har dividenderaten variert fra 1,8%-5,3%. Ved å ta et gjennomsnitt av disse 9 årene har dividenderaten blitt estimert til 3,36%. I og med at dividenderaten varierer en god del, vil denne faktoren også være en del av sensitivitetsanalysen i neste del. I basisestimatet velger jeg å bruke gjennomsnittet som ble estimert til 3,36%.

Inndata knyttet til sannsynlighetsteoretiskeestimer og utsagn

Rente knyttet til Handelsbanken

Det neste som må tas hensyn til er hvilken rente som skal brukes til diskonteringen av produktet. I og med at det er knyttet en viss kredittrisiko til Handelsbanken som utsteder, velger jeg å ha et påslag på den risikofrie renten. Hvorvidt dette er den beste løsningen kan selvfølgelig diskuteres. Ofte vil man ikke blande inn denne risikoen i diskonteringsraten, men heller trekke ifra en eventuell nåverdi av konkurrisikoen til slutt. Hvilken av disse metodene som er det beste i dette tilfellet er vanskelig å si, men ut i fra den informasjonen som er tilgjengelig vil ikke en estimering av konkurrisikoen gi noe bedre estimat, enn for eksempel en risikjustert rente. Dette hadde vært et større problem hvis det hadde vært en kontantstrøm hvor det hadde vært muligheter for negative verdier. Siden det ikke er mulig å få negative verdier for aksjekurs, vil det ikke være noe problem knyttet til dette.

Når de risikofrie rentene er hentet ut i fra de syntetiske statsobligasjonsrentene fra Norges Bank sine sider, blir det neste spørsmålet hvor stort risikopåslag som er et godt estimat når det skal tas hensyn til at Handelsbanken står som motpart. Det betyr at hvis Handelsbanken skulle gå konkurs, vil kravene fra investorene stille seg på lik linje som andre kreditorer. Produktet omfattes ikke av Bankenes sikringsfonds innskuddsgaranti som ville dekket inntil 2 millioner kroner. For å estimere denne risikoen velger jeg først og fremst å kikke på hvilken kredittrating Handelsbanken har hos de ulike ratingbyråene. Handelsbanken har en kredittrating på AA- fra Standard & Poors, og en Aa1 fra Moody's.

En mulig kilde for å estimere dette risikopåslaget er fra Aswath Damodaran sine sider. Han opererer med en premie på mellom 0,75-1% på denne typen gradering av risiko. Dette påslaget virker som et relativt godt anslag i forhold til hva andre banker får lånt inn penger til. Swedbank har samme rating fra ratingbyråene som Handelsbanken, og de har blant annet en obligasjon i markedet med forfall i 2015 som har en effektiv rente på 4,5%. Dette er en obligasjon som har lengre løpetid enn hva forventet løpetid for dette produktet er. Men med en stigende rentebane, kan denne renten muligens være et noe høyt anslag. Det er slik at renten for fem års obligasjoner er 0,7-0,8% høyere enn hva renten for tre års obligasjoner er.

En annen type risiko ved dette produktet er likviditetsrisiko. Det er verdt å nevne at dette kan være et problem hvis det blir store bevegelser i markedet og investoren vil kvitte seg med produktet. Selv om Handelsbanken sier at det er et annenhåndsmarked, står det også eksplisitt at det til tider kan være vanskelig å komme seg inn og ut i dette markedet. For en investor er

det sannsynligvis akkurat på disse tidspunktene det vil være mest interessant å komme seg ut fordi markedet gjør noe uventet. Dette er ikke noe jeg kommer til å ta noe mer hensyn til enn at det vil være en del av den risikopremien som blir lagt på toppen av statsobligasjonene.

Jeg velger derfor å bruke den risikofrie renten på tre års obligasjoner for de to ulike tidspunktene, med en risikopremie på 1% på hver av de. Diskonteringsrentene som vil bli brukt som basis i produktene vil bli henholdsvis 3,39% og 3,58% for StatoilHydro I og II. I prospektene er disse rentene oppgitt til 3,77% og 3,82%.

Risikopremie

Til denne variabelen knytter det ikke seg noen egen estimering. Estimatet som blir brukt er det samme som ble presentert i artikkelen til Koekebakker og Zakamouline (2006). De estimerte risikopremien til 5,3%.

Oppsummeringstabell -inndata

Tabell 11 Oppsummeringstabell for ulike inndata både til den risikonøytrale verdsettelsen og de sannsynlighetsteoretiske estimatene.

Inndatavariabel	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
<i>Risikonøytral verdsetting</i>		
Volatilitet	30%	30%
Risikofri rente	2,39%	2,58%
Dividenderate	3,36%	3,36%
Startpris på STL	120,70	137,0
Kupong utbetaling	17,3%	15,6%
<i>Sannsynlighetsteoretiske estimater</i>		
Rente Handelsbanken	3,39%	3,58%
Risikopremie	5,3%	5,3%

4.3 Risikonøytral verdsetting - basisestimater

Før jeg går i gang med den risikonøytrale verdsettelsen er det verdt å merke seg er at det er knyttet en tegningsavgift til disse produktene. I begge kupongsertifikatene er denne oppgitt til å være 2% av tegningskursen. I og med at denne inntre på tegningstidspunktet trekkes derfor denne kostnaden rett av den nåverdien produktet gir. I tillegg til denne tegningsavgiften er det tilretteleggingsavgift. Denne avgiften skal dekke kostnader knyttet til administrasjon, dokumentasjon, markedsføring, VPS og diverse omkostninger knyttet til sikring av risiko opplyser Handelsbanken. Denne kostnaden opplyser de til å være rundt 3,75%, som tilsvarer 0,74% årlig. Jeg mener dette er en dårlig måte å fremstille denne avgiften på da det betyr at de mener forventet løpetid er fem år. Dette er ikke tilfellet, da forventet løpetid er i området to-tre år avhengig av hvilke inndata som blir brukt i verdsettelsen. Handelsbanken skriver at denne kan bli større årlig hvis produktet forfaller før, men jeg mener allikevel at å opplyse om en årlig kostnad som tilsvarer fem års løpetid blir noe misvisende.

Kupongsertifikatet StatoilHydro I - basisestimat

Tallene som blir presentert nedenfor er basert på de øverste tallene i oppsummeringstabellen. I alle estimatene vil det bli foretatt 1 million simuleringer. Tegningsavgiften er på 2% er trukket fra rett fra nåverdien siden det er en avgift som blir betalt når en tegner seg for kupongsertifikatene. For Kupongsertifikatet StatoilHydro I fikk jeg en risikonøytral verdi på 97,21 kr. Treffsikkerheten til estimatet blir svært god når det er antallet simuleringer er så stort. Med 95% sikkerhet vil estimatet ligge i intervallet [97,13 - 97,28] forutsatt at inndatavariablene er rimelige. Konfidensintervallene er beregnet ut i fra fremgangsmåten beskrevet i kapittel 3.3. Sensitivitet knyttet til inndata vil bli tatt for seg i kapittel 5.1.

Kupongsertifikatet StatoilHydro II - basisestimat

Den risikonøytrale verdsettelsen baserer på samme struktur som sertifikatet ovenfor, hvor det er foretatt like mange simuleringer. Forskjellene mellom sertifikatene ligger i utstedelsestidspunkt og kupongutbetaling. På grunn av dette er estimatet på risikofri rente justert. Tallene til estimeringen er også her hentet fra oppsummeringstabellen ovenfor. Risikonøytral verdi for StatoilHydro II estimeres til 95,44 kr. Estimatet vil med 95% sikkerhet ligge i intervallet [95,37-95,51].

Tabell 12 Oppsummeringstabell for risikonøytralverdsetting.

<i>Risikonøytral verdsetting - basisestimat</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Verdi	97,21 kr	95,44 kr
Konfidensintervall (95%)	[97,13-97,28]	[95,37-95,51]

4.4 Sannsynlighetsteoretiske utsagn

Nå det skal foretas sannsynlighetsteoretiske utsagn holder ikke lenger det risikonøytrale sannsynlighetsmålet Q . Avkastningsfordelingen til produktet vil være avhengig av hvilken forventet avkastning som er knyttet til underliggende, det vil si risikofri rente pluss en risikopremie som nevnt i kapittel 3.6.

Hvis vi antar at Statoil har samme risikopremie som gjennomsnittet av Vest Europa, vil forventet avkastning blir følgende for hvert av sertifikatene.

Tabell 13 Tabell som viser forventet avkastning for StatoilHydro ASA om en benytter seg av risikopremien for Vest Europa.

<i>Risikopremie knyttet til StatoilHydro ASA</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Risikofri rente	2,39%	2,58%
Risikopremie Vest Europa	5,3%	5,3%
Totalt	7,69%	7,88%

Før jeg går videre vil jeg først kort sammenligne disse estimatene med den historiske avkastningen til StatoilHydro ASA. Ved å se på månedlige data i femårsperioden før hvert av kupongsertifikatene ble utstedt, gir dette en årlig avkastning på 7,51% og 7,27% for henholdsvis Kupongsertifikatet Statoil I og II. De månedlige dataene ble lastet ned fra Yahoo Finance, hvor avkastningene er lognormale. Hvorvidt dette er riktig for fremtiden er umulig å si, men det kan gi et visst bilde på hvilken driftrate Statoil Hydro har hatt de siste fem årene.

Forventet avkastning ser ut for begge estimeringene å være i samme området. Jeg velger derfor å bruke estimatet som tar i bruk risikofri rente pluss risikopremien knyttet til Vest Europa som basisestimat videre analysen. Sensitivitetsanalyse knyttet til denne faktoren vil bli foretatt i kapittel 5.

Under følger en oppsummering av inndata som knytter seg til de sannsynlighetsteoretiske estimatene.

Tabell 14 Oppsummeringstabell for variablene som knytter seg til de sannsynlighetsteoretiske estimatene.

<i>Sannsynlighetsteoretiske estimater</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Volatilitet	30%	30%
Forventet avkastning til StatoilHydro	7,69%	7,88%
Dividenderate	3,36%	3,36%
Rente Handelsbanken	3,39%	3,58%
Startpris på STL	120,70	137,0
Kupong utbetaling	17,3%	15,6%

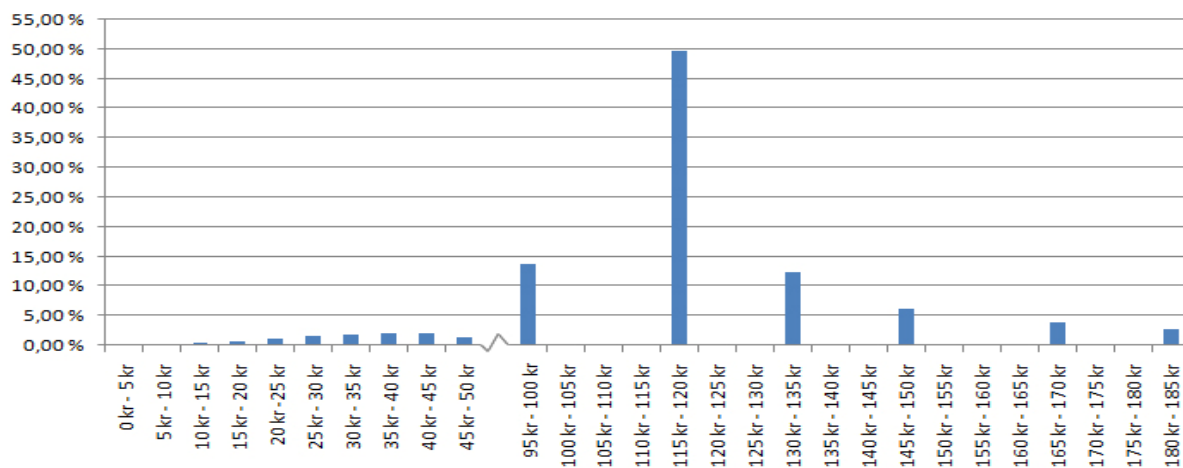
Utbetalingsfordeling og forventet avkastning

Fra presentasjonen av sertifikatene vet vi at produktet har en relativ spesiell karakter med tanke på utbetalingsprofil. For å kunne få et inntrykk av forventet avkastning, og risikoen knyttet til dette vil jeg først grafisk illustrere hvordan den forventede forfallsstrukturen for hvert sertifikatene ser ut.

Selv om aksjekursene følger en normalfordeling, vil ikke utbetalingsprofilen til produktet ha en normalfordeling av utbetalingene over perioden. Den første delen, altså de første fire årene har en diskret utbetalingsprofil hvor det er gitt på forhånd hvor stor utbetalingen er, og når den finner sted. Det siste året er litt mer spesielt i og med at det er tre ulike muligheter knyttet til det siste året. I to av utbetalingsmulighetene er det gitt på forhånd hvor mye du får ut. Men i det siste alternativet hvor aksjekursen faller under barrierenivået, får vi en litt annen utbetalingsprofil. I og med at denne profilen er litt spesiell, og kanskje ikke helt intuitiv på forhånd, velger jeg kort å presentere hvordan utbetalingsprofilen blir over løpetiden.

Under følger en fordeling av utbetalingene ved kjøp av et kupong sertifikat til kr 100 investert i StatoilHydro I. Her er også den nederste delen av profilen, altså det som havnet under barrierenivået på 50%, illustrert som en diskret søyle i frekvenstabellen.

Figur 18 Utbetalingsfunksjon for StatoilHydro I i nominelle verdier minus tegningsavgift.

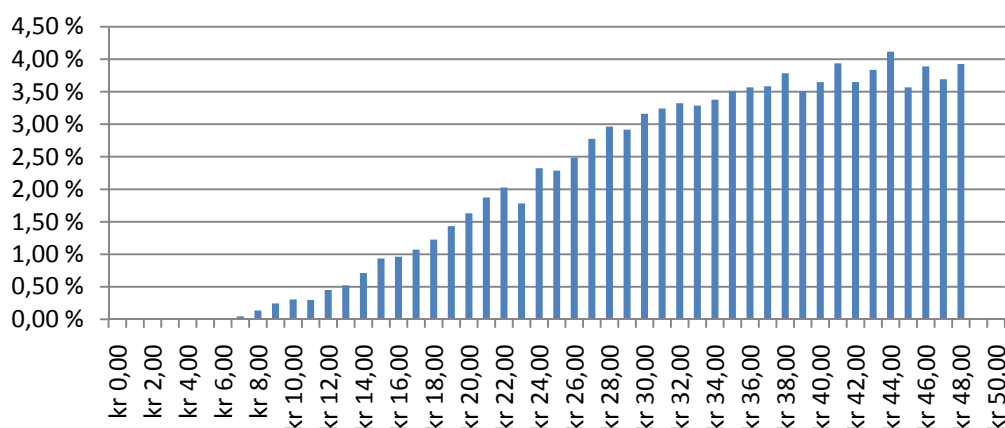


Av figuren ser vi tydelig at utbetalingsstrukturen er av en relativt spesiell karakter.

Sannsynlighetsbetraktninger som forutsetter normalfordeling vil ikke ha noe for seg i en drøftelse av sannsynlighetsmål knyttet til selve utbetalingsfunksjonen. Når det er det er store åpne områder i fordelingsfunksjonen blir også konfidensintervallene knyttet til forventet avkastning store, noe jeg vil komme tilbake til litt senere.

Først vil jeg vise hvordan fordelingen er under barrierenivået på 50%. Av figuren ovenfor kommer dette litt dårlig frem da det er en relativt liten del av hele utvalget. For å illustrere hvordan verdiene fordeler seg i intervallet under barrierenivået velger jeg å bruke en frekvenstabell med mindre intervaller. I denne illustrasjonen er det kun disse observasjonene som er med i utvalget, det vil si 11,10% av de totale utbetalingene. Prosentene i figuren er derfor basert på dette observasjonsutvalget. For de som havnet under barrierenivået i StatoilHydro I fordeler utbetalingene seg som følger:

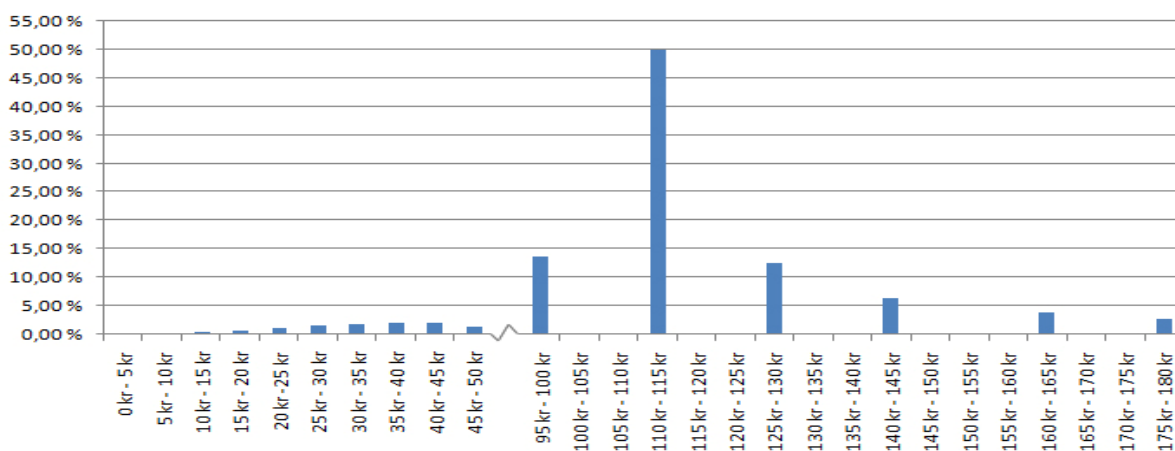
Figur 19 Utbetalingsfunksjon for StatoilHydro I i nominelle verdier minus tegningsavgift under barrierenivået på 50%



Hver av søylene i diagrammet tilsvarer et intervall på 1 kr. Av diagrammet ser vi at det er en avtakende funksjon, som også er forventet ut i fra hvordan prisbanene blir generert, der en prisbane ikke kan få negative verdier.

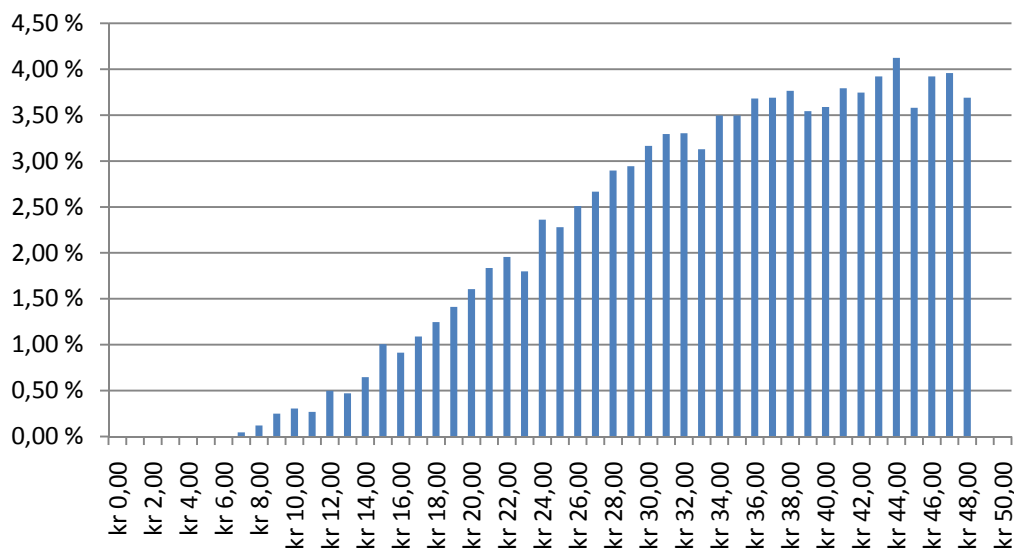
Under følger samme grafiske illustrasjon for StatoilHydro II:

Figur 20 Utbetalingsfunksjon for StatoilHydro II i nominelle verdier minus tegningsavgift.



Av figuren ser vi at utbetalingene er noe lavere enn hva de var for StatoilHydro I. Grunnen til dette er at StatoilHydro I har en høyre kupongutbetaling enn StatoilHydro II. Den kontinuerlige andelen under barrierenivået på 50% ser ut som følgende for StatoilHydro II. Dette tilsvarer 10,84% av det totale utvalget. Også her er prosentene på y-aksen basert på andelen som havnet under barrierenivået på 50%.

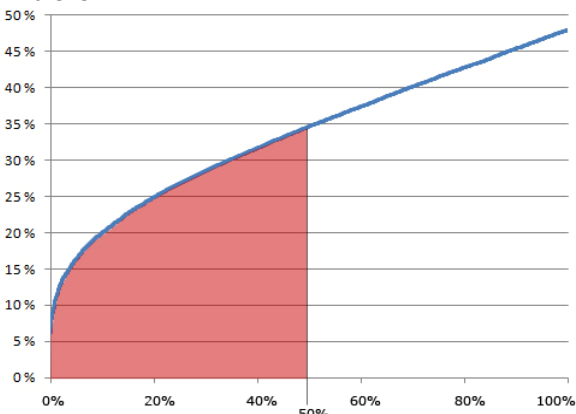
Figur 21 Utbetalingsfunksjon for StatoilHydro II i nominelle verdier minus tegningsavgift under barrierenivået på 50%



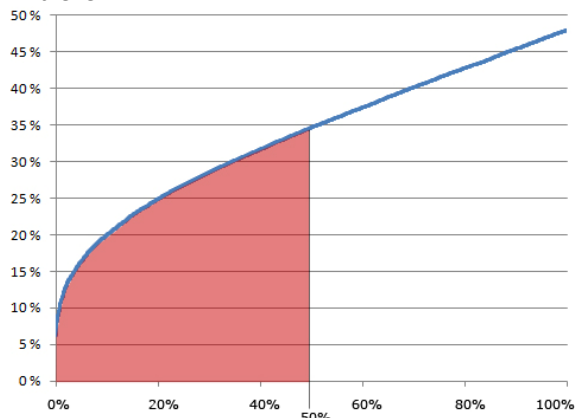
Når man nå har fått en viss følelse av hvordan utbetalingene fordeler seg, kan man se på hvilken gjennomsnittlig avkastning en kan forvente seg å få ved en investering i denne typen spareprodukt. I og med at dette produktet har en relativt spesiell karakter, må også dette simuleres. Gjennomsnittlig forventet årlig avkastning ble for StatoilHydro I 12,04%, mens den for StatoilHydro II ble 10,20%. Disse estimatene er også beregnet ut i fra en million prisbaner. Hvordan dette estimatet blir påvirket av ulike endringer i inndata vil jeg se på i neste kapittel. Før jeg går videre til forventet løpetid, vil jeg kort se på de som havnet den helt nederste delen av utbetalingsfunksjonen.

Fra illustrasjonene av sertifikatene under barrierenivået, figur 19 og 21, er det veldig små forskjeller på fordelingen. Dette er ikke uventet siden det er relativt små forskjeller på inndatavariablene. I og med at forskjellene er så små som de er velger jeg å rangere alle avkastningene i kvintiler, for deretter å se om det er noen forskjeller i utbetalingene.

Figur 22 Rangert fordeling av utbetalingene til StatoilHydro I. De 50% laveste utbetalingene er markert i rødt. Av figuren kan en se hvilken utbetaling som ligger i de ulike kvintilene.



Figur 23 Rangert fordeling av utbetalingene til StatoilHydro II. De 50% laveste utbetalingene er markert i rødt. Av figuren kan en se hvilken utbetaling som ligger i de ulike kvintilene.



Fra figurene er det vanskelig å se forskjeller mellom de ulike sertifikatene, men det er marginale forskjeller. For StatoilHydro I vil de nederste 50% av utbetalingene være i intervallet [34,64 kr-6,18 kr], mens for StatoilHydro II vil det være i intervallet [34,70 kr - 6,27 kr]. Det tilsvarer en gjennomsnittlig tilbakebetaling på henholdsvis 25,67% og 25,75% av investert beløp. Dette er marginale forskjeller, men det gir et inntrykk av risikoen knyttet til produktet. De som havner i dette intervallet vil tape ca 3/4 av pengene de har investert.

Forventet løpetid

Maksimal livstid for produktet er fem år, men i mange tilfeller vil produktet forfalle tidligere. I tabellen nedenfor ser vi forventningen til forfallstidspunkt for StatoilHydro I.

Tabell 15 Prosentandel som forfaller hvert enkelt år over løpetiden.

År	1	2	3	4	5
Forfallsandel	49,77 %	12,45 %	6,24 %	3,90 %	27,65 %

Dette gir en gjennomsnittlig løpetid på 2,47 år for StatoilHydro I

Tilsvarende fordeling for StatoilHydro II blir som følger:

Tabell 16 Prosentandel som forfaller hvert enkelt år over løpetiden.

År	1	2	3	4	5
Forfallsandel	50,03 %	12,52 %	6,26 %	3,90 %	27,30 %

Gjennomsnittlig løpetid for StatoilHydro I blir 2,46 år

De første fire årene er det bare to ting som kan skje, enten foretas det en utbetaling av kupongrenten som er satt og produktet ender, eller så går produktet til en ny test om et år.

Men i år fem er det litt annerledes. Etter fem år skal produktet uansett avsluttes, som også er grunnen til den relativt store andelen av forfall som skjer der. Andelen som forfaller i år fem fordeler seg enten ved å få kupongutbetaling, investeringen tilbake, eller restverdien av investering om prisen på underliggende har falt under barrierenivået på 50%.

Fordelingen i år fem er som følger for hvert av sertifikatene:

StatoilHydro I:

Tabell 17 I tabellen er det første prosenttallet fordelingen i år fem, mens tallene som er i parentes er prosentandelen av det totale utvalget.

Kupongutbetaling	Investering tilbake	Under barrierenivå (50%)
9,83% (2,72 %)	50,01% (13,83 %)	40,16% (11,10 %)

Det vil si at 11,10% av de som investerer i dette sertifikatet vil få tilbake under 50% av sin investering. Dette er ikke så langt i fra det som Handelsbanken selv har estimert i prospektet, der de opererer med en sannsynlighet på negativ avkastning på 10%. Andelen som får tilbake investeringen etter fem år er estimert til 13,83%. Dette tallet er i prospektet estimert til 14%, som også virker svært rimelig. De resterende, altså 75,07%, vil få kupongutbetaling i løpet av produktets løpetid.

StatoilHydro II:

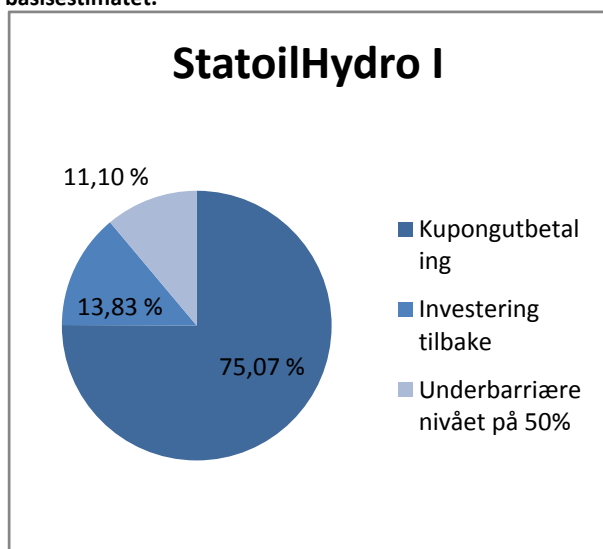
Tabell 18 I tabellen er det første prosenttallet fordelingen i år fem, mens tallene som er i parentes er prosentandelen av det totale utvalget.

Kupongutbetaling	Investering tilbake	Under barrierenivå (50%)
9,96% (2,72 %)	50,33% (13,74 %)	39,71% (10,84 %)

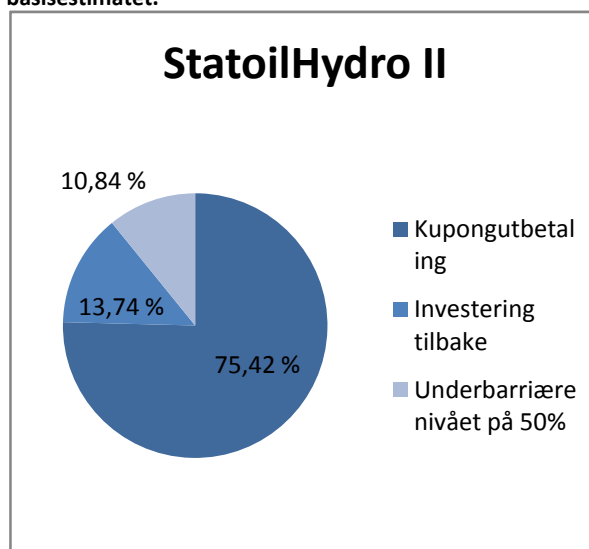
Med de variablene som jeg har valgt å bruke for basisestimatene får jeg at 10,84% av personene som investerer i dette produktet vil tape penger i nominelle termer. 13,74% vil få tilbake pengene de investerte fem år tidligere. I prospektet er disse to verdiene oppgitt til henholdsvis 6,6% og 14,2%. Min estimering har en god del høyere sannsynlighet for å havne blant denne gruppen enn hva Handelsbanken opererer med. Sannsynligheten for å få en positiv avkastning i min simulering er estimert til 75,42%, mens den er estimert til 79,2% i prospektet. Dette er selvfølgelig veldig avhengig av diverse forutsetninger, noe som kommer godt frem i sensitivitetsanalysen.

Fordelingene vil se ut som dette:

Figur 24 Fordeling mellom kupongutbetaling, investering tilbake og underbarrierenivå (50%) for StatoilHydro I for basisestimatet.



Figur 25 Fordeling mellom kupongutbetaling, investering tilbake og underbarrierenivå (50%) for StatoilHydro II for basisestimatet.



Av utbetalingsstrukturen er det vanskelig å lage smale konfidensintervall for kupongutbetalingene. Grunnen til dette er de diskrete kupongutbetalingene. Skulle man lagd et 95% konfidensintervall på forventet utbetaling til prospektet ville det for StatoilHydro I og II vært i intervallene [25,93 kr-184,5 kr] og [26,21 kr-176 kr]. Dette viser den enorme variasjonen knyttet til utbetalingen til produktet. De samme intervallene ville for et 70% konfidensintervall vært [98 kr - 132,6 kr] og [98 kr-129,20 kr]

Oppsummeringstabell basisestimat

Tabell 19 Oppsummeringstabell for de ulike sannsynlighetsteoretiske basisestimatene.

<i>Sannsynlighetsteoretiske estimater</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Gjennomsnittlig årlig avkastning	12,04%	10,20%
Forventet løpetid	2,47 år	2,46 år
Forventet avkastning i løpetiden	15,3%	13,6%
Sannsynlighet for negativ avkastning	11,10%	10,84%
Sannsynlighet for å få pengene tilbake	13,83%	13,74%
Sannsynlighet for kupongutbetaling	75,07%	75,42%
Utbetalingsintervall (95%)	[25,93 kr -184,50 kr]	[26,21 kr -176,00 kr]
Utbetalingsintervall (70%)	[98,00 kr - 132,60 kr]	[98,00 kr - 129,20 kr]
Høyeste mulig avkastning (fem år)	84,5%	76%
Laveste mulig avkastning (STL konkurs)	-100%	-100%

5. Sensitivitetsanalyser

I og med at det er veldig mange inndatavariabler det knytter seg en viss usikkerhet til velger jeg å foreta en relativt grundig sensitivitetsanalyse av disse produktene. For å kunne foreta en slik analyse må det også tas visse forutsetninger, som kanskje ikke holder i det virkelige liv, men for å kunne gi en god illustrasjon av verdiendring er det nødvendig. Forutsetningen går ut på at ved endring av en av inndatavariablene holdes alle de andre variablene konstant. Dette er for å vise hvor sensitivt produktverdien og risikoen er knyttet til endringene i de ulike variablene.

Det første jeg kommer til å gjøre er å ta utgangspunktet i basisestimatene som ble presentert ovenfor, for deretter å vise hvordan en endring i variablene påvirker hovedeksemplene. I utgangspunktet ville en kanskje presentert dette i grafer med flere dimensjoner, men det ble fort uoversiktlig med flere enn to dimensjoner. De eksakte verdiene for de ulike simuleringene finnes i ulike tabeller i vedlegget.

5.1 Endring i risikonøytral verdi

For Kupongsertifikatene knyttet til StatoilHydro ASA velger jeg å ha disse endringene i de ulike variablene knytte til den risikonøytrale verdsettelsen.

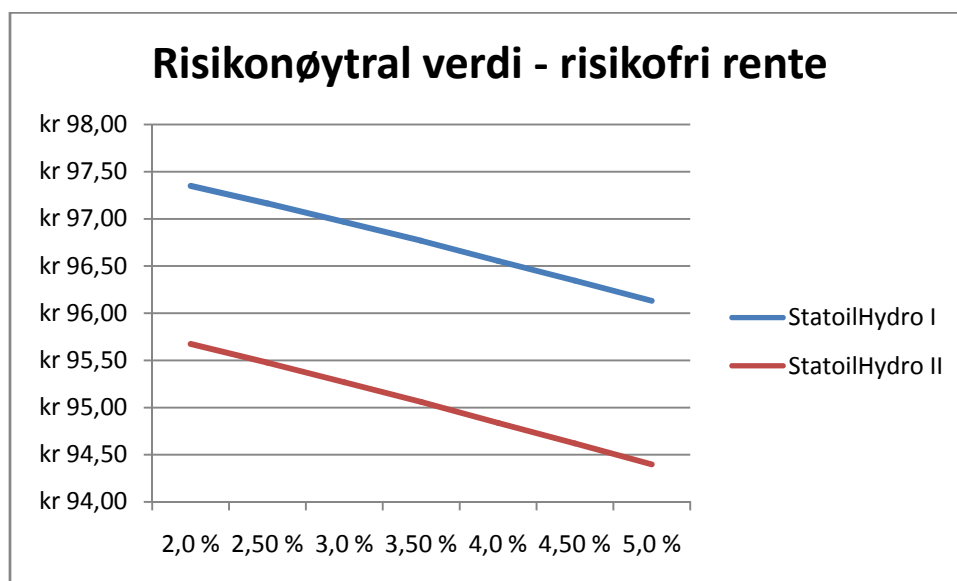
Tabell 20 Intervaller for sensitivitetsanalysene knyttet til den risikonøytrale verdsettelsen av kupongsertifikatene.

	StatoilHydro I	StatoilHydro II
Risikofri rente	[2%-5%]	[2%-5%]
Dividenderate	[1%-5%]	[1%-5%]
Volatilitet	[26%-38%]	[26%-38%]

Gjennom sensitivitetsanalysene vil jeg ta for meg flere av faktorene som endres som følge av inndatavariablene. Det være seg nåverdien på sertifikatene, forventet løpetid, utbetalingsfordeling og sannsynlighet for å tape penger.

Jeg velger her å plote begge sertifikatene i samme diagram for å unngå at det blir dobbelt opp med diagrammer i sensitivitetsanalysen. Den første variabelen jeg vil se på i forhold til endring i risikonøytralverdi er endringer i risikofri rente. Fra basisestimatene er vi i utgangspunktet på 97,21 kr og 95,44 kr for StatoilHydro I og II. Den verdien fremkom med en risikofri rente på 2,39% og 2,58%. Ved å endre disse i intervallet 2%-5% får vil følgende verdier for kupongsertifikatene:

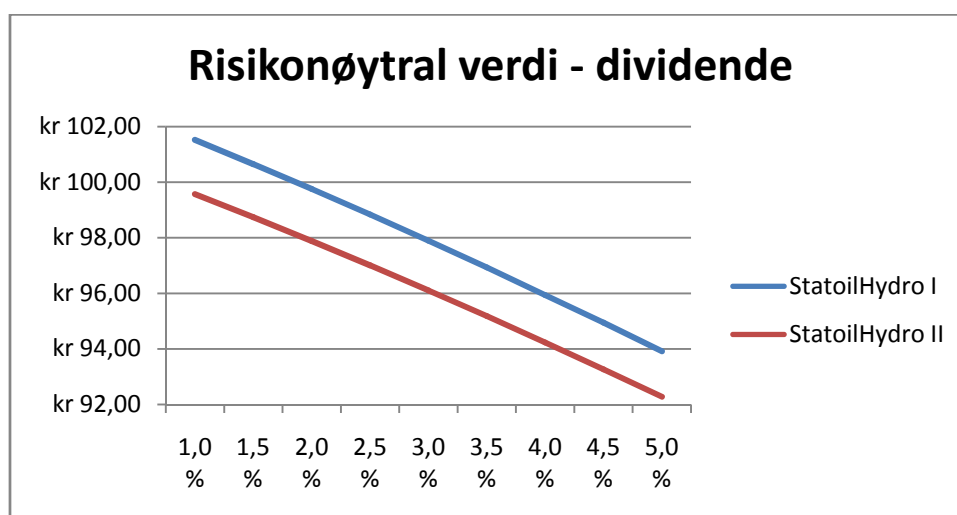
Figur 26 Risikonøytral verdi på kupongsertifikatene ved endringer i risikofri rente. Eksakte verdier er å finne i Tabell 28 i Vedlegg 1.



StatoilHydro I får ved denne endringen en risikonøytral verdi i området [97,34-96,13], mens StatoilHydro II ligger i intervallet [95,67-94,40]. Av resultatene ser vi at den risikofrie renten i den geometriske prosessen som genererer aksjepriser har en god del å si for verdsettelsen av produktet.

Den neste jeg vil se på er hvordan dividende påvirker verdien på produktet:

Figur 27 Risikonøytral verdi på kupongsertifikatene ved endringer i kontinuerlig dividende. Eksakte verdier er å finne i tabell 27 i Vedlegg 1.

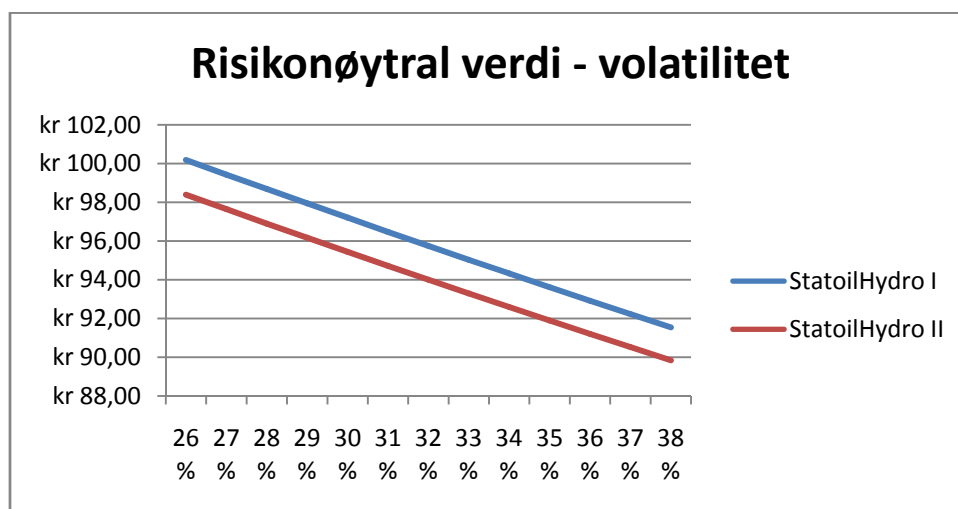


Her ser vi tydelig at verdien på kupongsertifikatene blir redusert som følge av en økt dividendeutbetaling. Grunnen til dette er at kupongsertifikatene baserer seg på en prisindeks hvor dividende reduserer verdien. Hadde investorer hatt selve aksjen i stedet for sertifikatet ville ikke en dividendeutbetaling hatt noen påvirkning på selve verdien av investeringen da

investoren ville fått et kontantinnskudd på kontoen ved utbytte. Kontantinnskuddet kunne investoren investert i flere aksjer som tilsvarte verdien på dividendeutbetalingen. Ved å endre det konstante utbyttet over perioden i intervallet 1%-5% vil StatoilHydro I nåverdi endres fra 101,52 kr til 93,91 kr. Tilsvarende endring i dividende på StatoilHydro II vedfører verdiendring i intervallet 99,58 kr til 92,28 kr.

Det neste jeg vil se på er hvordan endringer i volatilitet endrer verdien på produktene. I og med at dette er den variabelen det er vanskeligst å estimere inn i fremtiden, vil det være svært nyttig å se hvor mye eventuelle endringer vil påvirke verdien på produktene. Disse produktene har en litt annen struktur i forhold til volatilitet enn opsjoner. I vanlig opsjonsteori er det gunstig at volatiliteten øker siden dette vil gi større mulig oppside. Dette er ikke tilfellet med kupongsertifikater siden oppsiden er begrenset til den årlige kupongutbetalingen. Nedsiden under barrierenivået er fortsatt tilstede, slik at en eventuell økning i volatilitet vil gi en økt mulighet å havne ned under barrierenivået. Av figuren under ser vi hvordan endringer i volatilitet endrer verdien på kupongsertifikatene.

Figur 28 Risikonøytral verdi på kupongsertifikatene ved endringer i volatilitet. Eksakte verdier er å finne i Tabell 26 i Vedlegg 1.



Verdien for StatoilHydro I vil endre seg fra 100,19 kr til 91,54 kr for denne endringen i volatilitet. StatoilHydro II sin nåverdi vil flytte seg fra 98,39 kr til 89,83 kr ved at volatiliteten endres fra 26% til 38%. Det er verdt å merke seg at dette er ganske store endringer i volatilitet, men i avsnittet som omhandlet estimering av inndatavariabler så vi at det var et stort sprik mellom resultatene ved ulike estimeringsmetodene. Jeg valgte derfor å ha et relativt stort sensitivetsområde for å illustrere hvor vanskelig det er å estimere et korrekt verdi på et slikt spareprodukt.

Fra analysen av de ulike inndataene som påvirker den risikonøytrale verdsettelsen ser vi at det er vanskelig å gi en korrekt verdi på et slikt produkt. Veldig mye er avhengig av hvilke inndata som blir valgt. Det neste jeg vil se på er hvordan de sannsynlighetsteoretiske estimatene blir påvirket av endringer i ulike inndata.

5.2 Sannsynlighetsteoretiske utsagn

I denne delen av sensitivitetsanalysen vil jeg ta for meg hvordan de sannsynlighetsteoretiske estimatene blir påvirket av endringer i de ulike inndatavariablene. Tabeller med de eksakte verdiene som grafene er basert på er lagt ved i Vedlegg 2. Punktene som vil bli tatt for seg er forventet årlig avkastning, forventet løpetid og risiko for å tape penger. For de ulike inndatavariablene vil jeg ha følgende intervaller.

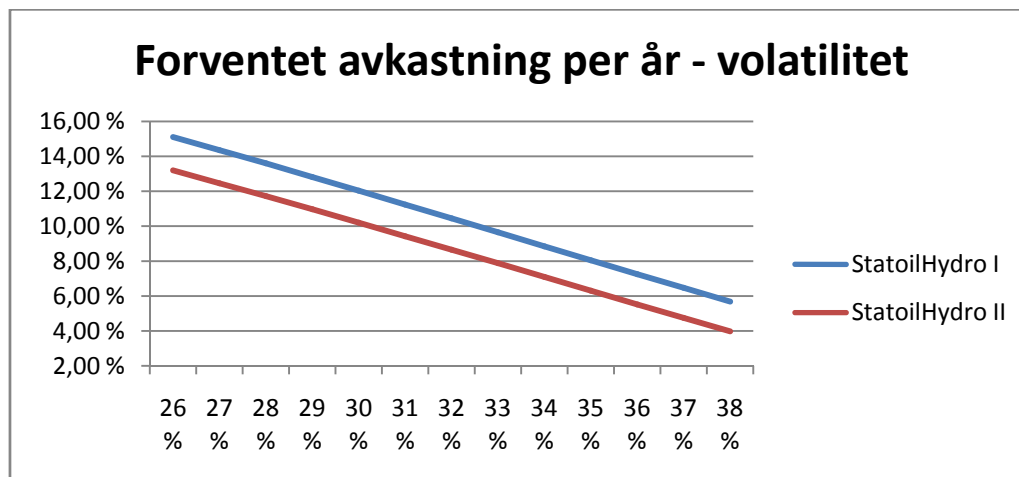
Tabell 21 Intervaller for sensitivitetsanalysene knyttet til de sannsynlighetsteoretiske estimatene av kupongsertifikatene.

<i>Sannsynlighetsteoretiske estimater</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Volatilitet	26%-38%	26%-38%
Forventet avkastning til StatoilHydro	4%-10%	4%-10%
Dividenderate	1%-4,5%	1%-4,5%
Rente Handelsbanken	3%-6%	3%-6%

5.2.1 Forventet avkastning

Ved en investering i spareprodukter er det ofte vanskelig å se hvilken avkastning en kan forvente seg. Grunnen til dette er de kompliserte strukturene som ofte ligger bak. Jeg mener derfor det er viktig å ha en analyse av hvordan dette påvirkes av endringer i inndatavariablene. Den første variabelen jeg vil ta for meg er volatilitet, som også er variabelen det er knyttet mest usikkerhet til.

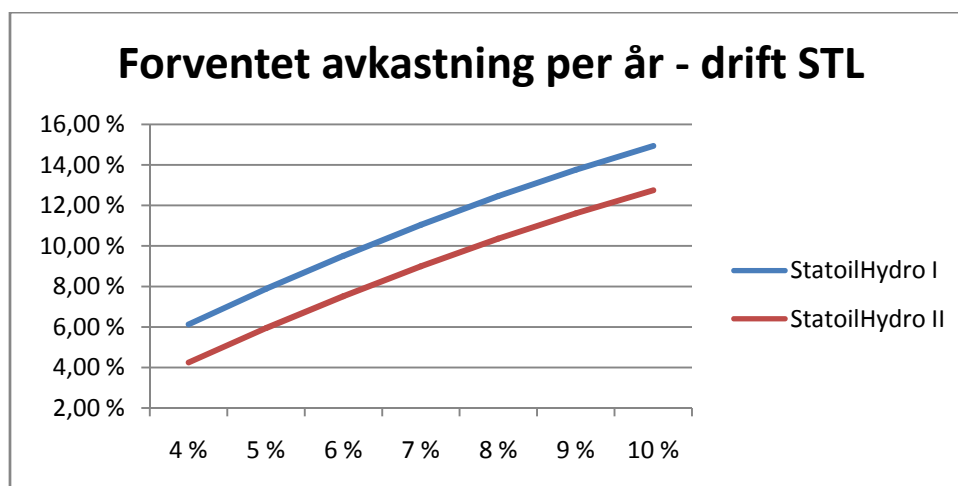
Figur 29 Endringer i forventet avkastning for kupongsertifikatene ved endringer i volatilitet.



Av figuren ser vi at volatiliteten vil ha mye å si for forventet avkastning. Den negative korrelasjonen mellom forventet avkastning og volatilitet er ganske interessant. I opsjonsteori vil volatilitet øke verdien, men i dette produktet er ikke dette tilfellet. Grunnen til dette er at oppsiden i kupongsertifikatet begrenset til kupongutbetalingen, mens nedsiden ikke har samme begrensning. Når volatiliteten øker vil flere havne under barrierenivået, som igjen medfører lavere forventet avkastning. Dette er også noe som kommer godt frem i analysen vedrørende sannsynlighet for å tape penger i neste kapittel.

Det neste jeg vil se på i tilknytning til forventet avkastning på kupongsertifikatene er hvilken forventet avkastning StatoilHydro ASA vil ha de neste fem årene. Begge sertifikatene har StatoilHydro ASA som underliggende, så forventet avkastning på kupongsertifikatene er sterkt påvirket av dette. Under følger en illustrasjon av hvordan forventet avkastning endres for ulike driftrater til StatoilHydro ASA.

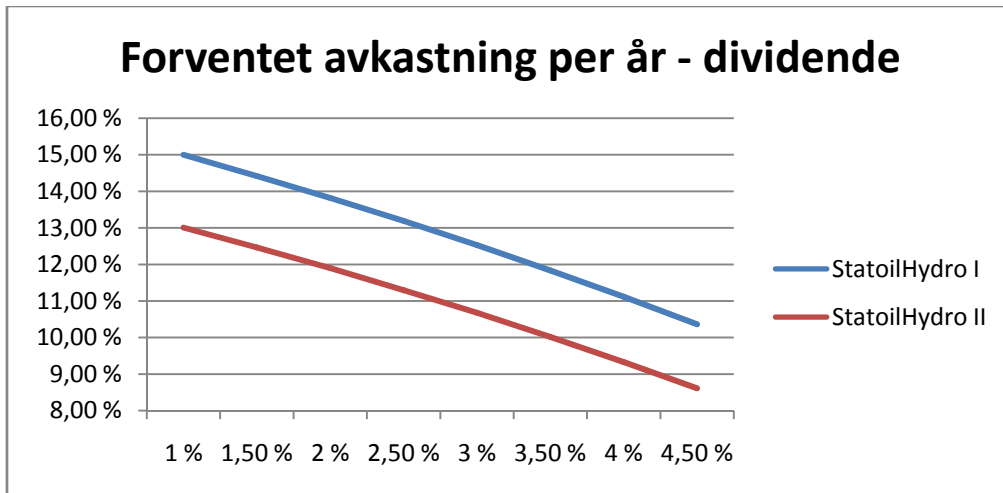
Figur 30 Endringer i forventet avkastning for kupongsertifikatene ved endringer i forventet avkastning til StatoilHydro ASA



Av figuren ser vi at den forventede avkastningen er relativt sterkt påvirket av denne faktoren. Dette er ikke uventet da en økt driftrate vil føre til at flere prisbaner vil få kupongutbetalinger over produktets løpetid, og færre vil holde produktet helt til forfall ved år fem.

Den neste faktoren jeg vil analysere er dividendeutbetaling. Denne faktoren påvirker også vekstleddet til funksjonen som genererer aksjepriser, men i negativ retning. Under følger en skisse av hvordan forventet avkastning på kupongsertifikatene blir som følge av endring i den konstante dividenderaten.

Figur 31 Endringer i forventet avkastning for kupongsertifikatene ved endringer i kontinuerlig dividende.

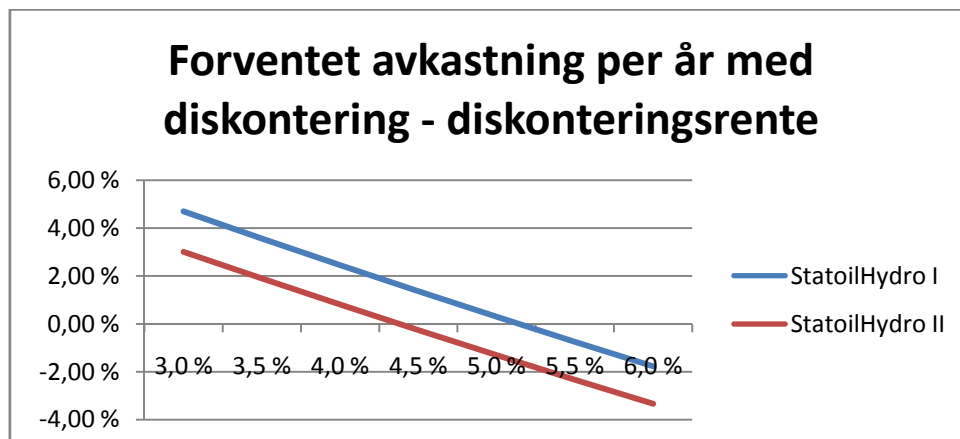


Korrelasjonen mellom forventet avkastning og dividende er ikke overraskende når produktene baserer seg på en prisindeks for StatoilHydro ASA. Normalt vil ikke utbytte påvirke avkastningen til en investor som nevnt tidligere i oppgaven, men produktet tar ikke hensyn til eventuelle utbytter. Når aksjeprisene ikke blir justert som følge av utbytte vil dette påvirke forventet avkastning i negativ retning. Av figuren ser vi tydelig at den forventende avkastningen er relativt sterkt påvirket av de fremtidige utbytterne.

Av de ulike illustrasjonene ser vi at forventet avkastning er vanskelig å predikere nøyaktig. Valg av inndatavariabler vil ha svært mye å si for avkastningen til produktene. Dette er også noe investorer må ha i bakhodet når en vurderer å investere i denne typen spareprodukter. Det er også verdt å nevne at det er en viss motpartrisiko knyttet til investeringene.

Alternativkostnaden til kapital knyttet til disse sertifikatene må være noe høyere enn risikofri rente. Hvis en skulle tatt hensyn til alternativkostnaden ville forventet avkastning sett ut som følger ved endringer i diskonteringsrenten.

Figur 32 Endringer i forventet meravkastning for kupongsertifikatene ved endringer i diskonteringsrente



Av figuren ser man at meravkastningen blir negativ når alternativkostnaden til kapitalen overstiger henholdsvis 5,1% og 4,3% for StatoilHydro I og II. Dette er en god del høyere enn hva basisestimatene tilsa, hvor det ble estimert til 3,39% og 3,58%.

Oppsummeringstabell

Tabell 22 Oppsummeringstabell med avkastningsintervaller for de ulike sensitivitetsanalysene.

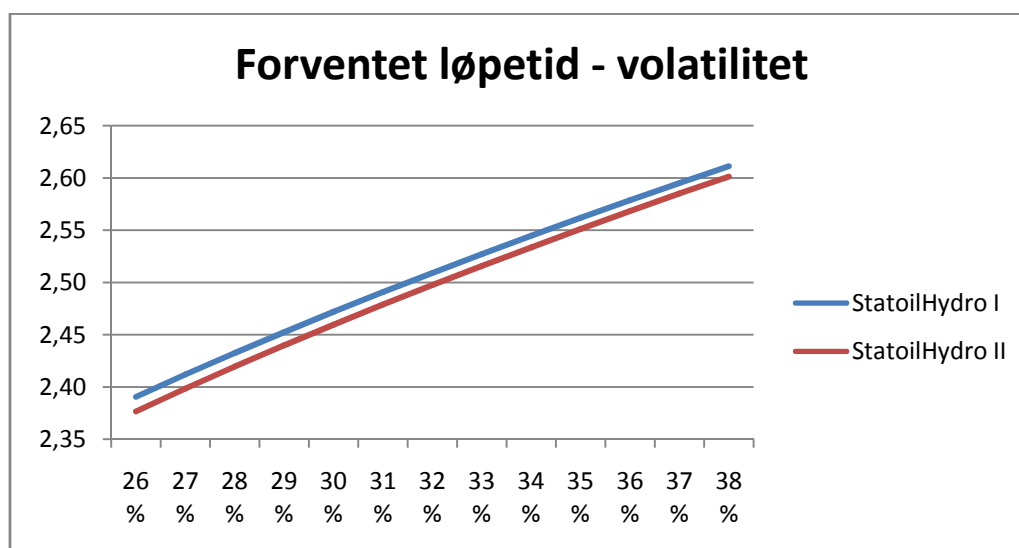
Avkastning	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Volatilitet	26%-38% - [15,11% - 5,68%]	26%-38% - [13,20% - 3,98%]
Rente i driftleddet	4%-10% - [6,13% - 14,94%]	4%-10% - [4,25% - 12,75%]
Dividenderate	1%-4,5% - [15,00% - 10,36%]	1%-4,5% - [13,01% - 8,61%]
Rente Handelsbanken	3%-6% - [4,70% - (-1,77%)]	3%-6% - [3,01% - (-3,34%)]

Den neste variabelen jeg vil se på er forventet løpetid til investeringen. Grunnen til at jeg mener forventet løpetid er viktig er at det vil påvirke den gjennomsnittlige årlige kostnaden på produktet. I og med at tegningskostnaden er satt til 2%, er det gunstig at denne blir fordelt over flest mulig år

5.2.2 Forventet løpetid

Det første jeg vil se på er hvordan endringer i volatilitet påvirker forventet løpetid til kupongsertifikatene. I figuren under ser vi hvordan løpetiden blir påvirket av endringer i volatilitet.

Figur 33 Endringer i forventet løpetid for kupongsertifikatene ved endringer i volatilitet.

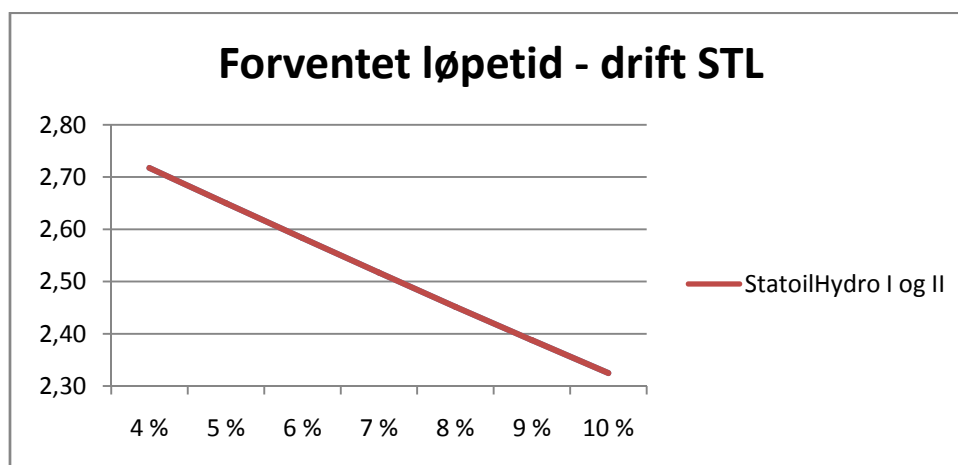


Når volatiliteten øker vil også forventet løpetid øke. For intervallet jeg valgte å analysere endrer løpetiden seg i intervallene [2,39 år - 2,61 år] og [2,38 år - 2,60 år] for henholdsvis StatoilHydro I og II. Det er verdt å merke seg at volatiliteten ikke bare påvirker den

forventede avkastningen til sertifikatene, men også forventet løpetid. For disse endringene varierer løpetiden med ca 0,2 år for begge sertifikatene. Denne endringen vil ikke ha for mye å si med tanke på valg av investering i dette produktet. Volatiliteten har mye mer å si for avkastningen.

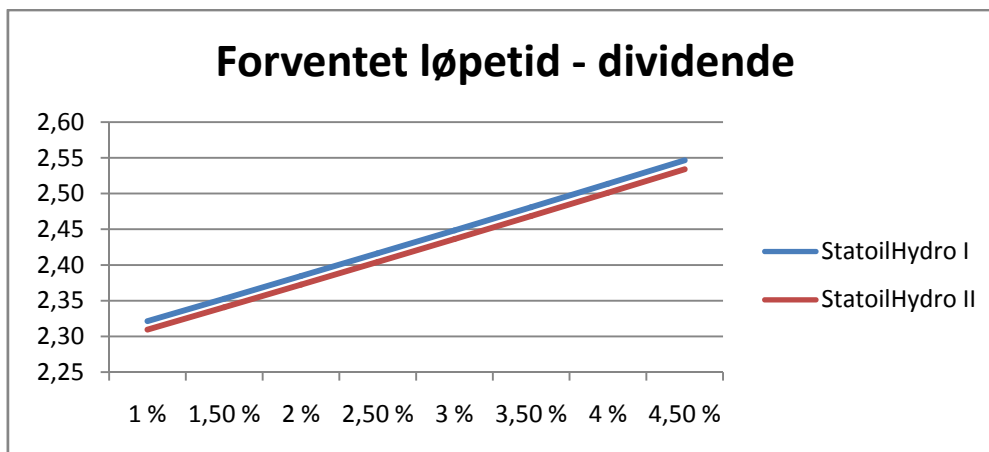
Det er ikke bare endringer i volatilitet som påvirker forventet løpetid. Under er en illustrasjon av hvordan forventet avkastning knyttet til underliggende påvirker løpetiden.

Figur 34 Endringer i forventet løpetid for kupongsertifikatene ved endringer i forventet avkastning til StatoilHydro ASA



Av figuren ser vi at denne faktoren har mer å si for løpetiden enn hva volatilitet hadde. Dette er ikke helt uventet da den positive driften vil gjøre at flere prisbaner vil få kupongutbetaling underveis. Kupongutbetalingen vil gjøre at sertifikatet forfaller, som igjen gjør at den gjennomsnittlige løpetiden blir redusert. Ved endring i forventet avkastning i intervallet 4%-10% endres forventet løpetid i intervallet [2,72 år - 2,33 år]. Det siste jeg vil se på i forhold til forventet løpetid er endringer i utbytte utbetalinger.

Figur 35 Endringer i forventet løpetid for kupongsertifikatene ved endringer i kontinuerlig dividende.



Av figuren ser vi at utbytteutbetaling vil øke forventet løpetid. Dette er ikke uventet da økt dividende påvirker prisgenereringsprosessen i negativ retning. Dette gjør at færre prisbaner havner over startkursen i løpet av perioden. Nå det er færre som forfaller underveis, vil også forventet løpetid øke. For endring i dividende i intervallet [1%-4,5%] vil forventet løpetid endes i intervallene [2,32 år - 2,55 år] og [2,31 år - 2,53 år]

Oppsummeringstabell

Tabell 23 Oppsummeringstabell med løpetidsintervaller for de ulike sensitivitetsanalysene.

<i>Løpetid</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Volatilitet	26%-38% - [2,39 år - 2,61 år]	26%-38% - [2,38 år - 2,60 år]
Rente i driftleddet	4%-10% - [2,72 år - 2,33 år]	4%-10% - [2,72 år - 2,33 år]
Dividenderate	1%-4,5% - [2,32 år - 2,55 år]	1%-4,5% - [2,31 år - 2,53 år]

5.2.3 Risiko knyttet til mulig tap - nominelle verdier

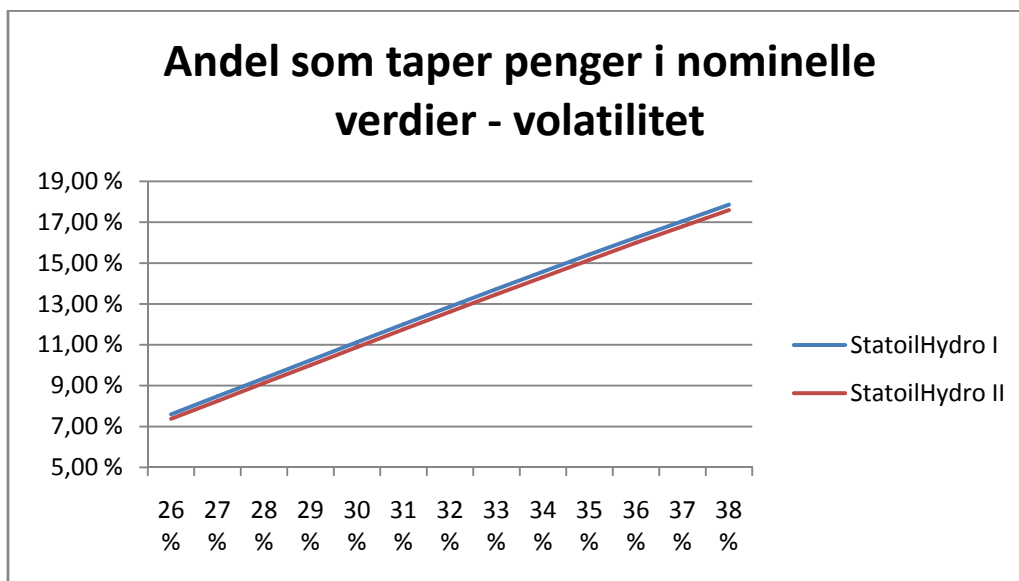
I prospektet operer de med en sannsynlighet for negativ avkastning på 10% for StatoilHydro I og 6,6% for StatoilHydro II. Ut i fra de estimeringene jeg har foretatt virker disse verdiene å være i laveste laget, men alt er selvfølgelig avhengig av hvilke forutsetninger som blir satt.

Det første som en bør merke seg er at disse verdiene er nominelle verdier, der det ikke er foretatt noen diskontering av pengene over tid. Prosentene som er presentert i prospektet vil være de som ikke har forfalt undervis, samt at kursen på underliggende har falt mer enn 50%.

I mine basisscenarioer er dette estimert til 11,10% for StatoilHydro I og 10,84% for StatoilHydro II. Begge disse er noe høyere enn hva de har presentert, men dette vil være avhengig av hvilke inndata som er brukt. Jeg vil derfor nedenfor presentere en sensitivitetsanalyse for dette utfallet ved ulike endringer i inndata.

Det første jeg vil se på er hvordan volatilitet til underliggende påvirker mulighetene for tap.

Figur 36 Andel som taper penger i nominelle verdier ved endring i volatilitet.

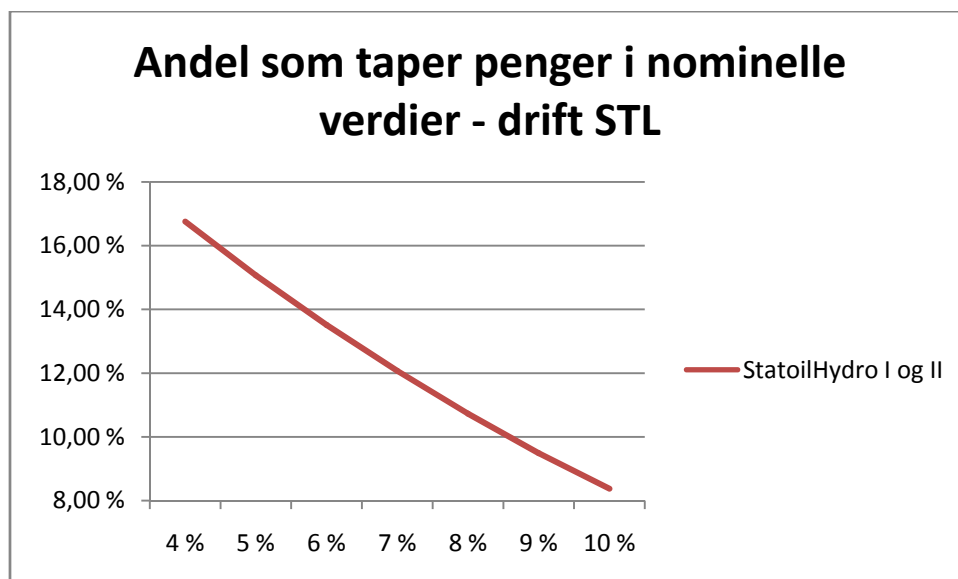


Av diagrammet ser vi tydelig at tapsmulighetene er sterkt påvirket av hvordan volatiliteten endres. I og med at denne endringen er så stor som den er skal det ikke mye til for at estimatet på 6,6% for Kupongsertifikatet StatoilHydro II også innenfor mulighetsområdet, men det fordrer at fremtidig volatilitet er en god del lavere enn hva den har vært de forrige fem årene.

Den neste faktoren jeg vil se på er hvordan vekstleddet påvirker mulighetene for tap. Det sier seg selv at en høyere drift gjør at mulighetene for tap blir redusert. I denne sensitivitetsanalysen velger jeg å bare plote én linje i og med at kurven har samme fasong for begge produktene. Alle verdiene er estimert ut i fra basisestimatet. Det vil si at alle inndataene

holdes konstante utenom driftleddet som her blir endret fra 4% til 10%. I basisestimatene er dette driftleddet satt til 7,69% for StatoilHydro I og 7,88% for StatoilHydro II.

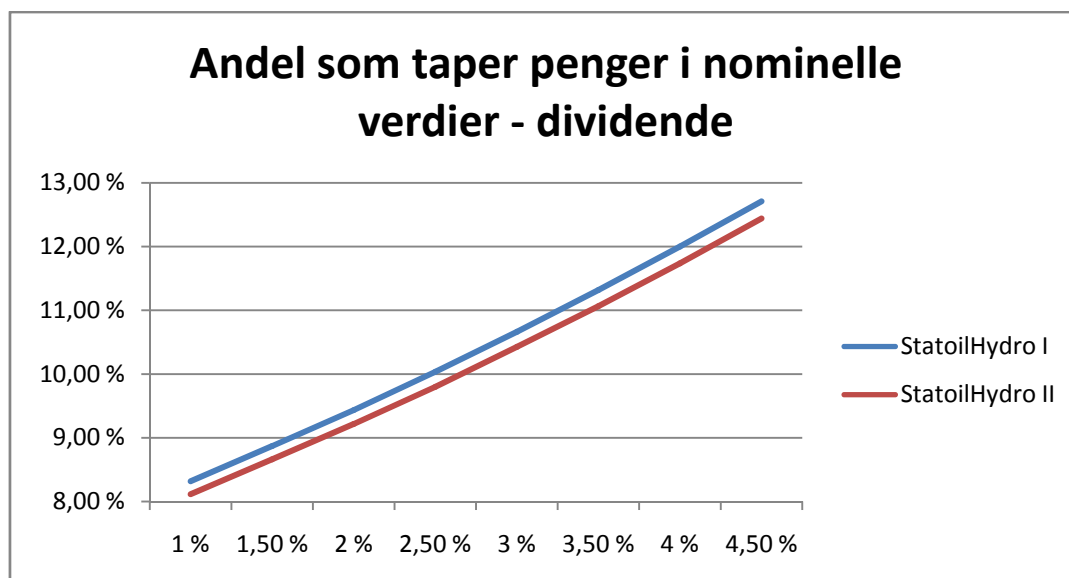
Figur 37 Andel som taper penger i nominelle verdier ved endring i forventet avkastning til StatoilHydro ASA



Også her ser vi at det er relativt store forskjeller med tanke på hvilke muligheter det er for å få et nominelt tap.

Den siste faktoren jeg vil se på er endringer i dividende. Denne sensitivitetsanalysen vil ha mange likheter med den forrige, siden også denne bare påvirker driften til den geometriske prosessen aksjeprisene er generert ut i fra. Men det er allikevel en faktor som er viktig for et sertifikat som baserer seg på en prisindeks som ikke tar hensyn til dividendeutbetalinger.

Figur 38 Andel som taper penger i nominelle verdier ved endring i kontinuerlig dividende.

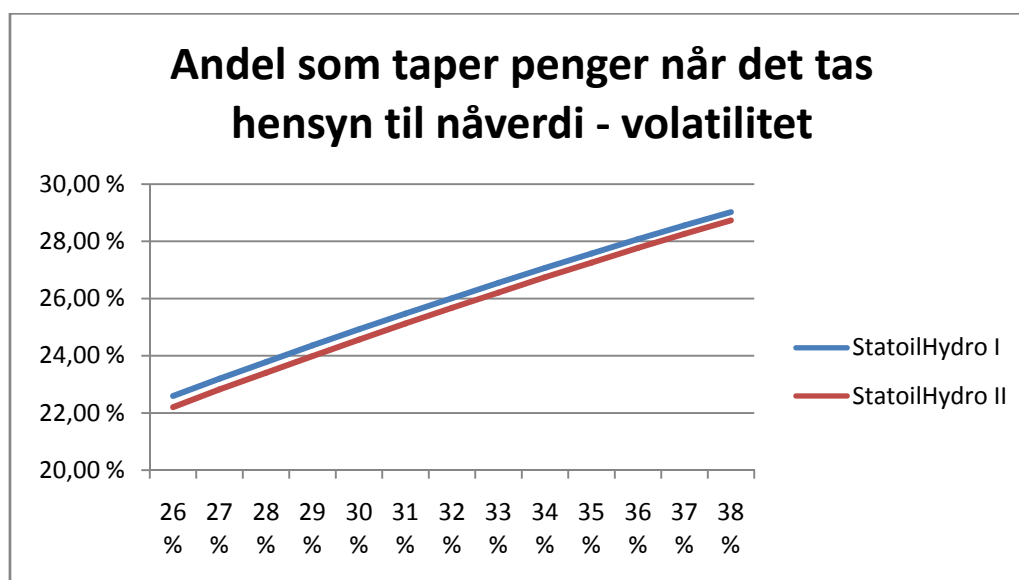


Alle disse sensitivitetsanalysene viser at mulighetene for tap varierer en god del i forhold til hvilke verdier som blir brukt. Ut i fra de forutsetninger som jeg har gjort i forhold til estimering av inndata ser jeg vanskelig at et forventet tap i området 6,6% er reelt. For å få til dette må det gjøres endringer i flere av variablene i den retningen som minimerer denne risikoen. Det kan godt være at dette er tilfellet, men da må den geometriske funksjonen ha en større drift, sammen med at volatiliteten synker.

5.2.4 Risiko knyttet til mulig tap - reelle verdier

Det jeg kanskje synes er mer interessant med hensyn på estimering av mulige tap er å se på hvordan disse andelene blir om det tas hensyn til et avkastningskrav på investeringen. Det vil si at alle de som får tilbake den nominelle verdien av investeringen i år fem pluss de som tapte penger i analysen ovenfor vil tape penger.

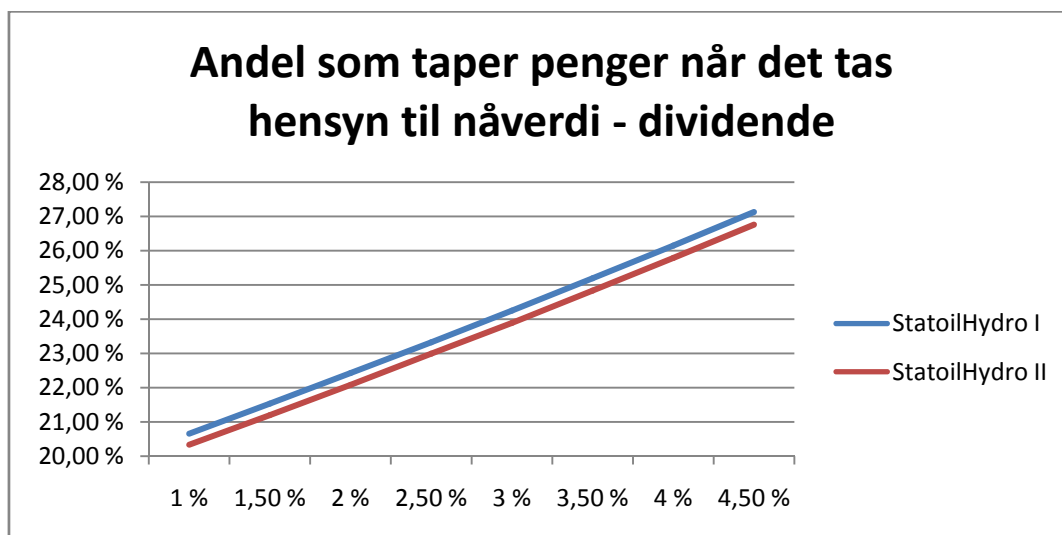
Figur 39 Andel som taper penger når det tas hensyn til nåverdier ved endring i volatilitet.



Når diskontering av verdier over tid blir tatt med i analysen blir det et ganske annerledes bilde på mulighetene for å tape penger. Jeg mener dette er noe som må tas med i en evaluering av en slik investering. Hvis ikke pengene blir investert vil de isteden for eksempel forrente seg på en bankkonto. Ved å inkludere dette øker andelen av de som taper penger til hele 24,93% for StatoilHydro I og 24,58% for StatoilHydro II i basisestimatene. Dette er en ganske annen andel enn om diskontering utelates. Av figuren ser vi også at volatiliteten skal synke mye for at det skal være mindre enn en av fem som "taper" penger.

Den neste faktoren jeg vil se på er dividendeutbetalingen over perioden. Denne faktoren vil være med på å endre driftraten i negativ retning. I figuren under følger andelene som taper penger på denne investeringen om nåverdi tas med i beregningen.

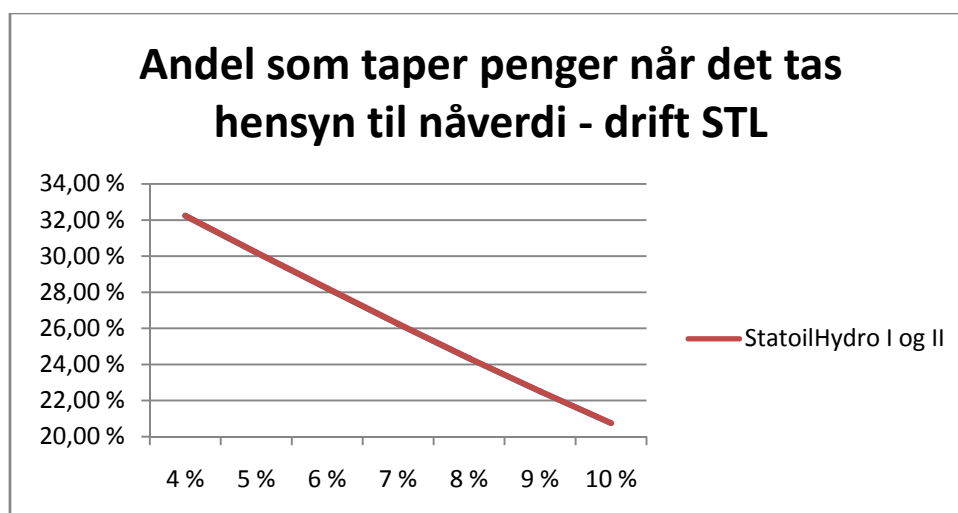
Figur 40 Andel som taper penger når det tas hensyn til nåverdier ved endring i kontinuerlig dividende.



Av figuren ser vi at dividende påvirker mulighetene for tap sterkt. Selv uten dividende er det er god andel av investorene som kommer til å tape penger. Jeg kan ikke se noen grunn til at StatoilHydro ASA kommer til å gjøre store endringer i utbytte politikken fremover. Det er sjelden vi ser selskaper som er notert i USA kutter den normale utbytteraten da dette er et tegn på at selskapet har mindre tro på fremtiden. Jeg mener derfor at en dividenderate basert på historiske tall gir et bilde på hva en kan forvente i fremtiden også.

Den siste variabelen jeg vil se på i forhold til hvor mange som vil tape penger på en investering i kupongsertifikater er den forventede driftraten over perioden. Dette er motpolen til dividende som ble diskutert over. I figuren under ser vi hvor stor andel av de som investerer som taper penger i løpet av perioden.

Figur 41 Andel som taper penger når det tas hensyn til nåverdier ved endring i forventet avkastning til StatoilHydro ASA



Også i denne figuren ser vi at det skal mye til for at andelen som taper penger faller under 20%. Dette er noe jeg synes er viktig å påpeke når det skal investeres i strukturerte produkter hvor det er vanskelig å estimere verdi og risiko for en vanlig investor.

Oppsummeringstabeller

Tabell 24 Oppsummeringstabell for andelsintervaller som taper penger på kupongsertifikatene ved nominelle verdier

<i>Andel som taper penger - nominelt</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Volatilitet	26%-38% - [7,60% - 17,85%]	26%-38% - [7,38% - 17,59%]
Rente i driftleddet	4%-10% - [16,75% - 8,37%]	4%-10% - [16,75% - 8,37%]
Dividenderate	1%-4,5% - [8,32% - 12,71%]	1%-4,5% - [8,11% - 12,44%]

Tabell 25 Oppsummeringstabell for andelsintervaller som taper penger på kupongsertifikatene ved reelle verdier.

<i>Andel som taper penger - reelt</i>	Kupongsertifikatet StatoilHydro I	Kupongsertifikatet StatoilHydro II
Volatilitet	26%-38% - [22,59% - 29,02%]	26%-38% - [22,20% - 28,73%]
Rente i driftleddet	4%-10% - [32,24% - 20,75%]	4%-10% - [32,24% - 20,75%]
Dividenderate	1%-4,5% - [20,65% - 27,13%]	1%-4,5% - [20,33% - 26,76%]

Av tabellene ser vi tydelig at estimatene vil være sterkt påvirket av hvilke inndata som blir valgt. Det vil derfor være vanskelig å si hvorvidt opplysningene angående risikoen for tap er for lav i prospektene. Ut i fra disse intervallene er at estimatet Handelsbanken presenterer i det nedre delen av intervallene, dette gjelder særlig for StatoilHydro II.

Tas alternativ kostnad på kapital i betraktningen, vil minimum en av fem tape penger på denne investeringen. Dette faktumet mener jeg bør komme frem i prospektene.

6. Avslutning

6.1 Hva kan investorer forvente seg ved investering i kupongsertifikater?

Av analysen ser vi det er vanskelig å si noe konkret hvorvidt dette er en god eller dårlig investering, i og med at verdien på produktet er svært avhengig av hvilke størrelser som blir valgt på de ulike inndatavariablene. Et produkt som er strukturert som dette tror jeg er mest rettet mot vanlige husholdinger, og ikke profesjonelle investorer. Grunnen til dette er at profesjonelle investorer vil ha mulighet til å sette sammen et slikt produkt selv. Det andre momentet knytter seg til hvordan nyttefunksjonen til en småsparer ser ut. Den avtagende nyttefunksjonen der tap vektlegges mer enn gevinster passer godt til et produkt som dette. Når ulike adferdsmomenter tas med i ligningen vil verdien av å fjerne en del av nedsiden bli relativt høyt verdsatt, som igjen vil gjøre et produkt som dette attraktivt.

Det neste som er viktig å påpeke er at dette ikke er i den klassen av produkter som har en svært høy låneandel. Kritikken rundt dette momentet har vært mye fokusert på i media, så dette kan være et tegn på at tilbyderne har innsett at de også må tilby produkter uten denne høye låneandelen. Det er viktig å merke seg at dette ikke er et garantert spareprodukt der innskuddet er garantert tilbake. I produktene som er analysert er det kun en del av nedsiden som er tatt bort. Hvorvidt dette er et tegn på at tilbyderne har endret seg er vanskelig å si, men det er uansett bra med et mangfold av investeringsmuligheter.

Jeg syns prospektene gir god oversikt over hvilke kostnader som knytter seg til produktene. I og med at det ikke er noen kostnader knyttet til lån, blir også produktet mye mer gjennomiktig for eventuelle investorer. Det jeg kanskje savner noe av i prospektene er informasjon vedrørende risikoen for å tape penger om det tas hensyn til en alternativkostnad til investeringen.

6.2 Oppsummering - et verdifullt bidrag i spareproduktjungelen?

De sannsynlighetsteoretiske estimatene ser ut til å være i nærheten av de som Handelsbanken selv har presentert i prospektene. Det eneste punktet som kanskje kan se ut å være estimert i laveste laget er sannsynligheten for å tape penger i StatoilHydro II. Men det er vanskelig å kunne trekke noen sterke konklusjoner rundt dette da det er analysert få produkter i denne oppgaven. Dette sammen med at estimatene vil være sterkt påvirket av hvilke inndatavariabler som blir valgt.

Ofte er det slik at investorer som ønsker seg strukturerte produkter kan skreddersy disse på egenhånd til lavere gebyrer. Når det gjelder kupongsertifikater vil dette være svært

komplisert. Dette strukturerte produktet er mer sammensatt enn vanlige garanterte spareprodukter, som ofte består kun av en obligasjon og en warrant. Konstruksjon av kupongsertifikater på egenhånd tror jeg vil være svært vanskelig for småsparere. Produktet vil derfor kunne bidra som en alternativ investeringsform om strukturen faller i smak, siden konstruksjon av profesjonelle tilbydere er eneste mulighet for en slik utbetalingsstruktur.

Avslutningsvis er det verdt å nevne at sertifikatet StatoilHydro I har forfalt per dags dato, da STL stod i 143 kr den første observasjonsdatoen. I denne verdsettelsen har det ikke blitt tatt hensyn til info som har dukket opp etter produktet ble utstedt.

6.3 Svakheter ved oppgaven, samt videre utvidelser og undersøkelser

I denne oppgaven er det kun analysert to kupongsertifikater knyttet til Statoil Hydro ASA. På bakgrunn av dette er det derfor vanskelig å kunne si noe konkret hvorvidt det er gunstig å investere i denne typen produkter. Det skal riktignok nevnes at det per dags dato ikke finnes for mange ulike alternativer. Så vidt jeg har sett har det ikke tidligere blitt foretatt en lignende undersøkelse av kupongsertifikater. Så en utvidet analyse med flere produkter ville gitt et større grunnlag for å kunne gi en eventuell konklusjon.

Den største svakheten ved denne oppgaven vil knytte seg til analysen av produktene, som vil være svært avhengig av inputvariablene som blir estimert. Andre forutsetninger og estimer av volatilitet, risikofri rente og dividende vil gi andre resultater enn hva som er presentert her. Den mest usikre variabelen for denne typen oppgave vil være volatilitet. Denne faktoren har vært sterkt påvirket av den nylige uroen i finansmarkedene. Dette medfører at det er vanskelig å gi et "korrekt" estimat på fremtidig volatilitet. Oppgaven her baserer volatiliteten på historiske data og noterte opsjoner. Det mest ideelle hadde vært å fått tak i markedsdata som knyttet seg til underliggende med riktig løpetid osv. Det er derfor svært vanskelig å si om estimatene som fremkommer i denne oppgaven er korrekte. En sensitivitetsanalyse ved å bruke grekerne kunne vært en idé til en utvidet analyse.

Beregning av sannsynlighetsteoretiske utsagn vil også være komplisert i en oppgave som dette. For det første knytter det seg en del usikkerhet til hva markedspremien vil være fremover. Markedspremien baseres i denne oppgaven på historiske data. Dette sammen med at utbetalingsprofilen er av en relativt spesiell karakter, hvor en stor del er diskret fordelt. Dette medfører at sannsynlighetsintervallet blir svært stort, som igjen fører til stor usikkerhet knyttet til sannsynlighet for en gitt avkastning. Dette er også noe som er relativt tydelig i prospektet, hvor intervallene tilsvarer pluss/minus en årlig kupongutbetaling. En naturlig

utvidelse av analysen når utvalget av denne typen produkter blir større, vil for eksempel være en empirisk test av historisk avkastning i forhold til alternative investeringer.

En annen mulig utvidelse vil være å ta i bruk mer av teorien rundt differensiallikninger. I denne oppgaven er teorien rundt dette kun kort presentert for å illustrere hvordan funksjonen for å generere prisbaner er bygd opp.

Det neste knytter seg til forutsetningen om normalfordeling av avkastninger. Dette er en antagelse som gjør mye av estimeringen svært mye enklere å gjennomføre. Men det er kjent at svært mange finansielle instrumenter har en asymmetrisk fordeling av de lognormale avkastningene. Det vil si at virkelig kurtosis er en del høyere enn hva en standard normalfordeling har. Når det i rammeverket forutsettes normalfordeling, kan det dukke opp svakheter ved tallene som blir presentert. Hvorvidt dette er et problem er vanskelig å si, men det er i alle fall verdt å nevne. En annen mulig prosess for å estimere aksjepris kunne vært en Lévy prosess hvor en konstruerer en egen fordeling. Dette er ikke noe som vil bli brukt i denne oppgaven, men kan være en mulig utvidelse.

En annen utvidelse i genereringen av prisbaner kunne vært å lagt til eventuelle hopp i aksjeprissimuleringen. Dette er ikke gjort i denne oppgaven da det ville hatt lite si siden det er så få tester i løpet av produktets levetid. Hoppene ville derfor bare utlignet hverandre. I denne oppgaven er heller ikke variansreducerende teknikker implementert i simuleringen, så dette vil også være en mulig utvidelse.

7. Referanser:

Bøker

Back, K (2005): A course in Derivative Securities: Introduction to Theory and Computation. Springer-Verlag, Heidelberg.

Björk, T (1998): Arbitrage Theory in Continuous time, Oxford Press.

Bodie, Z et al. (2008): Investments, 7. edition. McGraw-Hill, New York.

Dimson, E. et al (2002): Triumph of the Optimists: 101 Years of Global Investment Return, Princeton University Press. Princeton.

Hens, T og Bachmann, K (2008): Behavioural finance for private banking, Wiley and Sons, Chichester-West Sussex.

Hull, J (2006): Options, futures and other derivatives. 6th ed. Prentice Hall.

Jackson, M og Staunton, M (2001): Advanced modelling in finance using Excel and VBA, Wiley and Sons, Chichester-West Sussex.

Jäckel, P (2002): Monte Carlo methods in Finance. Wiley Finance, Chichester – West Sussex.

Kuipers, L og Niederrietter, H (2005): Uniform distribution of sequences, Dover Publications.

LaValle, S.M (2006): Planning algorithms, Cambridge University Press.

McDonald, R (2006): Derivatives Markets 2th edition, Pearson Education, Inc, Boston.

McLeish, D (2005): Monte Carlo simulation & Finance, Wiley & Sons, New Jersey.

Ripley, B.D (1987): Stochastic Simulation, John Wiley & Sons, Inc.

Wilmott, P (1998): Derivatives, The Theory and Practice of Financial Engineering, Wiley and Sons, Chichester-West Sussex.

Øksendal, B (2003): Stochastic Differential Equations, 6 utgave, Springer Verlag.

Forskningsartikler

Antonov, I.A. og Saleev, V.M, (1979): An economic method of computing LPr -sequences, U.S.S.R Comput. Maths. Math. Phys. 19, s. 252–256.

- Bernstein, P. L. (1997): What Rate of Return Can You Expect? Or, What Can the Long-run Tell Us about the Short-run? *Financial Analysts Journal* 20-28.
- Black, F. og Scholes, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, s. 637-659.
- Boyle, P. (1977): Options, a Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics* 4, s. 323-338.
- Faure, H (1982): Discrepance de suites associees a un systeme de numeration . *Acta Arithmetica*, 41, s. 337-351.
- Galanti, S og Jung A.(1997): Low-Discrepancy Sequences: Monte Carlo Simulation of Option Prices. *Journal of Derivatives*, s. 63-83.
- Itô, K. (1951): On Stochastic Differential Equations, *Memoirs of the American Mathematical Society* 4, s. 1-51.
- Joy et al. (1999): Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance. *Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management*, Number 24, s. 269-280.
- Koekebakker, S og Zakamouline, V (2006): Forventet avkastning på aksjeindeksobligasjoner. Arbeidspapir ved Handelshøyskolen i Agder.
- Kredittilsynet (2008): Undersøkelse av sammensatte produkter.
- Krykova, I. (2003): Evaluating of Path-Dependent Securities with Low Discrepancy Methods. Worcester Polytechnic institute, Worcester, MA.
- Merton, R (1973): Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics & Management*.
- Moro, B (1995): The Full Monte, *Risk* 8(2):57-58. February
- Niederreiter, H (1992): Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, CBMS-NFS, Utgave 63. Philadelphia.
- Sobol I.M (1967): On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematics Physics*, 7, s. 86-112.

Tezuka, S (1998): Financial Applications of Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods. Random and Quasi-Random Point Sets, P. Hellekalek & G. Larcher, Eds., Springer-Verlag New York, s. 303-332.

Welch, I. (2000): Views of financial economists of the equity premium and other issues. Journal of Business 73, s. 501-537.

Siviløkonom-, masterutredninger

Bøe, G. M. (2007): Analyse av strukturerte spareproduktet, Et Kinderegg for banknæringen? Masterutredning/SNF-rapport nr 19/07. Norges Handelshøyskole.

Loven, T og Garås, J. E. L. (2008): Warrants og garanterte spareprodukter, -Eksotiske opsjoner for småsparere eller eksotiske gebyrer for selgerne? Masterutredning, Norges Handelshøyskole.

Solvær, S et al. (2005): Strukturerte spareprodukter: Verdsettelse og markedsføring. Siviløkonomutredning 13980, Norges Handelshøyskole.

Internett

Damodaran, A, Ratings, Interest Coverage Ratios and Default Spread, < http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/ratings.htm > (19. mai 2010).

Norges Bank, Statsobligasjoner, < http://www.norges-bank.no/templates/article___55496.aspx > (15. mai 2010)

RiskMetrics - Technical Document av J.P Morgan/Reuters, Forth Edition 1996, < http://pascal.iseg.utl.pt/~aafonso/eif/rm/TD4ePt_2.pdf > (20. april 2010)

The Faure Quasirandom Sequence < http://people.sc.fsu.edu/~burkardt/m_src/faure/faure.html > (10. april 2010)

Quasi-Monte Carlo Simulation < http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi_mc.html > (8. mars 2010)

8. Vedlegg

8.1 Vedlegg 1

Tabellene nedenfor er de eksakte verdiene for grafene presentert i den risikonøytrale verdsettelsen.

Tabell 26 Risikonøytrale verdier for ulik volatilitet. Grafisk fremstilling er å finne i Figur 28.

Volatilitet	StatoilHydro I	StatoilHydro II
26 %	100,1904	98,3922
27 %	99,4305	97,6458
28 %	98,6877	96,8998
29 %	97,9444	96,1700
30 %	97,2092	95,4417
31 %	96,4694	94,7156
32 %	95,7488	94,0043
33 %	95,0287	93,2901
34 %	94,3230	92,5917
35 %	93,6155	91,8975
36 %	92,9158	91,2010
37 %	92,2241	90,5210
38 %	91,5366	89,8356

Tabell 27 Risikonøytrale verdier for ulik kontinuerlig dividende. Grafisk fremstilling er å finne i Figur 27.

Dividende	StatoilHydro I	StatoilHydro II
1,0 %	101,5255	99,5754
1,5 %	100,6483	98,7440
2,0 %	99,7599	97,8864
2,5 %	98,8438	97,0110
3,0 %	97,8954	96,1043
3,5 %	96,9309	95,1806
4,0 %	95,9347	94,2288
4,5 %	94,9453	93,2627
5,0 %	93,9115	92,2778

Tabell 28 Risikonøytrale verdier for ulik risikofri rente. Grafisk fremstilling er å finne i Figur 26.

Risikofri rente	StatoilHydro I	StatoilHydro II
2,0 %	97,3498	95,6732
2,50 %	97,1631	95,4749
3,0 %	96,9660	95,2672
3,50 %	96,7675	95,0587
4,0 %	96,5543	94,8363
4,50 %	96,3449	94,6188
5,0 %	96,1308	94,3972

8.2 Vedlegg 2

Tabeller knyttet til sensitivitetsanalyser av sannsynlighetsteoretiske estimater.

StatoilHydro I

Tabell 29 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på volatilitet.

Volatilitet	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
26 %	15,11 %	6,71 %	2,390	51,46 %	12,79 %	6,38 %	3,98 %	2,79 %	14,99 %	7,60 %	77,41 %	22,59 %
27 %	14,36 %	6,00 %	2,412	51,01 %	12,70 %	6,34 %	3,97 %	2,77 %	14,72 %	8,48 %	76,80 %	23,20 %
28 %	13,60 %	5,28 %	2,432	50,58 %	12,62 %	6,31 %	3,95 %	2,76 %	14,42 %	9,36 %	76,22 %	23,78 %
29 %	12,82 %	4,55 %	2,452	50,17 %	12,54 %	6,27 %	3,92 %	2,74 %	14,11 %	10,25 %	75,64 %	24,36 %
30 %	12,04 %	3,81 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %
31 %	11,24 %	3,07 %	2,491	49,39 %	12,37 %	6,19 %	3,87 %	2,70 %	13,46 %	12,01 %	74,53 %	25,47 %
32 %	10,45 %	2,34 %	2,509	49,01 %	12,29 %	6,15 %	3,85 %	2,68 %	13,14 %	12,87 %	73,99 %	26,01 %
33 %	9,65 %	1,59 %	2,527	48,65 %	12,21 %	6,11 %	3,83 %	2,65 %	12,82 %	13,73 %	73,45 %	26,55 %
34 %	8,85 %	0,85 %	2,545	48,30 %	12,14 %	6,07 %	3,79 %	2,64 %	12,49 %	14,58 %	72,93 %	27,07 %
35 %	8,05 %	0,11 %	2,562	47,95 %	12,06 %	6,03 %	3,76 %	2,62 %	12,15 %	15,42 %	72,43 %	27,57 %
36 %	7,25 %	-0,63 %	2,579	47,62 %	11,98 %	5,99 %	3,73 %	2,61 %	11,83 %	16,24 %	71,92 %	28,08 %
37 %	6,47 %	-1,35 %	2,595	47,29 %	11,91 %	5,95 %	3,71 %	2,59 %	11,51 %	17,05 %	71,44 %	28,56 %
38 %	5,68 %	-2,08 %	2,611	46,97 %	11,83 %	5,91 %	3,69 %	2,58 %	11,17 %	17,85 %	70,98 %	29,02 %

Tabell 30 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på forventet avkastning til StatoilHydro ASA.

Drift STL	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
4 %	6,13 %	-2,09 %	2,717	44,88 %	11,32 %	5,64 %	3,51 %	2,42 %	15,48 %	16,75 %	67,76 %	32,24 %
5 %	7,88 %	-0,36 %	2,650	46,20 %	11,65 %	5,81 %	3,62 %	2,52 %	15,13 %	15,07 %	69,80 %	30,20 %
6 %	9,51 %	1,27 %	2,583	47,53 %	11,96 %	5,97 %	3,73 %	2,60 %	14,70 %	13,51 %	71,79 %	28,21 %
7 %	11,04 %	2,80 %	2,517	48,86 %	12,26 %	6,13 %	3,84 %	2,67 %	14,18 %	12,07 %	73,76 %	26,24 %
8 %	12,46 %	4,25 %	2,452	50,19 %	12,54 %	6,27 %	3,92 %	2,74 %	13,61 %	10,73 %	75,66 %	24,34 %
9 %	13,76 %	5,58 %	2,388	51,52 %	12,80 %	6,39 %	3,99 %	2,79 %	13,03 %	9,49 %	77,49 %	22,52 %
10 %	14,94 %	6,81 %	2,325	52,84 %	13,05 %	6,50 %	4,04 %	2,83 %	12,37 %	8,37 %	79,25 %	20,75 %

Tabell 31 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på kontinuerlig dividende.

Dividende	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
1 %	15,00 %	6,87 %	2,321	52,91 %	13,06 %	6,50 %	4,05 %	2,83 %	12,34 %	8,32 %	79,35 %	20,65 %
1,50 %	14,42 %	6,26 %	2,353	52,25 %	12,94 %	6,45 %	4,02 %	2,82 %	12,66 %	8,87 %	78,47 %	21,53 %
2 %	13,82 %	5,64 %	2,385	51,58 %	12,81 %	6,39 %	3,99 %	2,79 %	12,99 %	9,43 %	77,57 %	22,43 %
2,50 %	13,19 %	4,99 %	2,416	50,92 %	12,69 %	6,33 %	3,96 %	2,77 %	13,29 %	10,03 %	76,68 %	23,32 %
3 %	12,53 %	4,32 %	2,449	50,25 %	12,55 %	6,28 %	3,93 %	2,74 %	13,59 %	10,66 %	75,75 %	24,25 %
3,50 %	11,84 %	3,61 %	2,481	49,59 %	12,42 %	6,21 %	3,89 %	2,71 %	13,88 %	11,32 %	74,81 %	25,19 %
4 %	11,12 %	2,88 %	2,514	48,92 %	12,27 %	6,14 %	3,85 %	2,67 %	14,15 %	12,00 %	73,85 %	26,15 %
4,50 %	10,36 %	2,12 %	2,547	48,26 %	12,13 %	6,07 %	3,79 %	2,64 %	14,42 %	12,71 %	72,87 %	27,13 %

Tabell 32 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på rente til Handelsbanken.

RenteHB	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
3,0 %	12,04 %	4,70 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %
3,5 %	12,04 %	3,56 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %
4,0 %	12,04 %	2,45 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %
4,5 %	12,04 %	1,36 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %
5,0 %	12,04 %	0,30 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %
5,5 %	12,04 %	-0,75 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %
6,0 %	12,04 %	-1,77 %	2,472	49,77 %	12,45 %	6,22 %	3,90 %	2,72 %	13,80 %	11,13 %	75,08 %	24,93 %

StatoilHydro II

Tabell 33 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på volatilitet.

Volatilitet	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
26 %	13,20 %	4,54 %	2,377	51,75 %	12,84 %	6,41 %	4,00 %	2,80 %	14,82 %	7,38 %	77,80 %	22,20 %
27 %	12,46 %	3,84 %	2,398	51,29 %	12,76 %	6,37 %	3,98 %	2,78 %	14,57 %	8,25 %	77,18 %	22,82 %
28 %	11,73 %	3,15 %	2,419	50,85 %	12,67 %	6,33 %	3,96 %	2,77 %	14,28 %	9,13 %	76,59 %	23,41 %
29 %	10,98 %	2,44 %	2,440	50,43 %	12,59 %	6,29 %	3,94 %	2,76 %	13,98 %	10,00 %	76,01 %	23,99 %
30 %	10,20 %	1,72 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %
31 %	9,43 %	1,00 %	2,479	49,63 %	12,42 %	6,21 %	3,89 %	2,71 %	13,37 %	11,76 %	74,87 %	25,13 %
32 %	8,65 %	0,28 %	2,497	49,25 %	12,34 %	6,18 %	3,87 %	2,69 %	13,05 %	12,62 %	74,33 %	25,67 %
33 %	7,88 %	-0,44 %	2,516	48,88 %	12,26 %	6,14 %	3,85 %	2,67 %	12,74 %	13,47 %	73,79 %	26,21 %
34 %	7,09 %	-1,17 %	2,534	48,52 %	12,18 %	6,09 %	3,81 %	2,65 %	12,43 %	14,31 %	73,26 %	26,74 %
35 %	6,31 %	-1,89 %	2,551	48,17 %	12,10 %	6,06 %	3,78 %	2,64 %	12,10 %	15,16 %	72,75 %	27,25 %
36 %	5,52 %	-2,62 %	2,568	47,83 %	12,03 %	6,01 %	3,75 %	2,61 %	11,78 %	15,99 %	72,23 %	27,77 %
37 %	4,75 %	-3,33 %	2,585	47,49 %	11,95 %	5,97 %	3,73 %	2,60 %	11,47 %	16,79 %	71,74 %	28,26 %
38 %	3,98 %	-4,04 %	2,601	47,17 %	11,87 %	5,94 %	3,70 %	2,59 %	11,15 %	17,59 %	71,27 %	28,73 %

Tabell 34 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på forventet avkastning til StatoilHydro ASA.

Drift STL	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
4 %	4,25 %	-4,25 %	2,717	44,88 %	11,32 %	5,64 %	3,51 %	2,42 %	15,48 %	16,75 %	67,76 %	32,24 %
5 %	5,94 %	-2,57 %	2,650	46,20 %	11,65 %	5,81 %	3,62 %	2,52 %	15,13 %	15,07 %	69,80 %	30,20 %
6 %	7,52 %	-1,00 %	2,583	47,53 %	11,96 %	5,97 %	3,73 %	2,60 %	14,70 %	13,51 %	71,79 %	28,21 %
7 %	8,99 %	0,49 %	2,517	48,86 %	12,26 %	6,13 %	3,84 %	2,67 %	14,18 %	12,07 %	73,76 %	26,24 %
8 %	10,36 %	1,88 %	2,452	50,19 %	12,54 %	6,27 %	3,92 %	2,74 %	13,61 %	10,73 %	75,66 %	24,34 %
9 %	11,61 %	3,17 %	2,388	51,52 %	12,80 %	6,39 %	3,99 %	2,79 %	13,03 %	9,49 %	77,49 %	22,52 %
10 %	12,75 %	4,36 %	2,325	52,84 %	13,05 %	6,50 %	4,04 %	2,83 %	12,37 %	8,37 %	79,25 %	20,75 %

Tabell 35 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på kontinuerlig dividende.

Dividende	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
1 %	13,01 %	4,64 %	2,310	53,16 %	13,10 %	6,52 %	4,05 %	2,83 %	12,22 %	8,11 %	79,67 %	20,33 %
1,50 %	12,46 %	4,06 %	2,341	52,50 %	12,98 %	6,47 %	4,03 %	2,83 %	12,54 %	8,66 %	78,80 %	21,20 %
2 %	11,90 %	3,47 %	2,372	51,83 %	12,86 %	6,41 %	4,00 %	2,81 %	12,86 %	9,21 %	77,92 %	22,08 %
2,50 %	11,30 %	2,84 %	2,404	51,17 %	12,73 %	6,36 %	3,97 %	2,78 %	13,19 %	9,80 %	77,01 %	22,99 %
3 %	10,68 %	2,20 %	2,436	50,51 %	12,60 %	6,30 %	3,94 %	2,76 %	13,46 %	10,43 %	76,11 %	23,89 %
3,50 %	10,02 %	1,53 %	2,469	49,84 %	12,47 %	6,23 %	3,90 %	2,73 %	13,77 %	11,07 %	75,17 %	24,83 %
4 %	9,33 %	0,83 %	2,501	49,18 %	12,32 %	6,17 %	3,86 %	2,68 %	14,05 %	11,74 %	74,22 %	25,78 %
4,50 %	8,61 %	0,10 %	2,534	48,51 %	12,18 %	6,09 %	3,81 %	2,65 %	14,32 %	12,44 %	73,24 %	26,76 %

Tabell 36 Sannsynlighetsteoretiske estimater med hensyn på rente til Handelsbanken.

RenteHB	Avk	NPV	Tid	1C	2C	3C	4C	5C	Tilbake	under 1	m/kup	u/kup
3,0 %	10,20 %	3,01 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %
3,5 %	10,20 %	1,90 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %
4,0 %	10,20 %	0,81 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %
4,5 %	10,20 %	-0,26 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %
5,0 %	10,20 %	-1,31 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %
5,5 %	10,20 %	-2,33 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %
6,0 %	10,20 %	-3,34 %	2,460	50,03 %	12,51 %	6,25 %	3,91 %	2,73 %	13,68 %	10,88 %	75,43 %	24,57 %

8.3 Vedlegg 3

Dette er koden som ble brukt til Moroinverteringen.

```
Function Moro_NormSInv(u As Double) As Double
```

```
'Inverterer tallet fra (0, 1) til et normalfordelt tall ved hjelp av Morokonvertering
```

```
'Option Base 1 for at funksjonen skal fungere
```

```
Dim c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9
```

```
Dim X As Double
```

```
Dim r As Double
```

```
Dim a As Variant
```

```
Dim B As Variant
```

```
    a = Array(2.50662823884, -18.61500062529, 41.39119773534, -25.44106049637)
```

```
    B = Array(-8.4735109309, 23.08336743743, -21.06224101826, 3.13082909833)
```

```
    c1 = 0.337475482272615
```

```
    c2 = 0.976169019091719
```

```
    c3 = 0.160797971491821
```

```
    c4 = 2.76438810333863E-02
```

```
    c5 = 3.8405729373609E-03
```

```
    c6 = 3.951896511919E-04
```

```
    c7 = 3.21767881768E-05
```

```
    c8 = 2.888167364E-07
```

```
    c9 = 3.960315187E-07
```

```
    X = u - 0.5
```

```
    If Abs(X) < 0.42 Then
```

```
        r = X ^ 2
```

```
        r = X * (((a(4) * r + a(3)) * r + a(2)) * r + a(1)) / (((B(4) * r + B(3)) * r + B(2)) * r + B(1)) * r + 1)
```

```
    Else
```

```
        If X > 0 Then r = Log(-Log(1 - u))
```

```
        If X <= 0 Then r = Log(-Log(u))
```

```
        r = c1 + r * (c2 + r * (c3 + r * (c4 + r * (c5 + r * (c6 + r * (c7 + r * (c8 + r * c9))))))
```

```
        If X <= 0 Then r = -r
```

```
    End If
```

```
    Moro_NormSInv = r
```

```
End Function
```

Koden er hentet fra CD-en som fulgte med boken "Advanced modelling in finance using Excel and VBA" av Jackson og Staunton (2001)

8.4 Vedlegg 4

Visual Basic koden som ble brukt som base i genereringen av tilfeldige tall ved hjelp av Haltonsekvensen.

```
Function HaltonBaseb(b As Long, N As Long) As Double
```

```
'Haltonsekvens for generering av et tilfeldig tall mellom 0 og 1
```

```
Dim h As Double, ib As Double
```

```
Dim i As Long, n1 As Long, n2 As Long
```

```
n1 = N
```

```
h = 0
```

```
ib = 1 / b
```

```
Do While n1 > 0
```

```
    n2 = Int(n1 / b)
```

```
    i = n1 - n2 * b
```

```
    h = h + ib * i
```

```
    ib = ib / 2
```

```
    n1 = n2
```

```
Loop
```

```
HaltonBaseb = h
```

```
End Function
```

Kildekoden for denne er hentet fra Bøe, G. M. (2007). Originalkoden er fra http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi_mc.html, og er programmert av Marco A. G. Dias.