

# EN TEORETISK OG EMPIRISK FREMSTILLING AV DEN TREDIMENSJONALE PORTEFØLJEFRONTEN

AVVEININGEN MELLOM FORVENTNING, VARIANS OG SKJEVHET

**Daniel Øgård Kinn**

**Veileder: Professor Fred Schroyen**

Masteroppgave for profilen Økonomisk Analyse (ECO)

Institutt for samfunnsøkonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Denne utredningen er gjennomført som et ledd i siviløkonomutdanningen ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at høyskolen inntår for de metoder som er anvendt, de resultater som er fremkommet eller de konklusjoner som er trukket i arbeidet.

# Sammendrag

Formålet med denne utredningen var å bidra til økt kunnskap om hvordan det kan konstrueres en tredimensjonal portefølje front basert på tre momenter: forventning, varians og skjevhet.

Med utgangspunkt i kjent porteføljeteori ble det utviklet en teoretisk sammenheng mellom de tre momentene kalt substitusjonsligningen. Deretter ble empiri benyttet til å konstruere et datasett av optimale porteføljer som ble anvendt til å estimere den tredimensjonale portefølje fronten. Avslutningsvis ble den estimerte sammenhengen brukt til å belyse substitusjonsmulighetene mellom de tre momentene.

Hovedfunnet i utredningen var at den tredimensjonale portefølje fronten kunne benyttes til å finne optimal portefølje for en investor med preferanser for forventning, varians og skjevhet. Det ble konkludert med at økt avkastning eller økt skjevhet førte til at markedet krevde økt varians, hvor variansøkningen i gjennomsnitt var størst i førstnevnte tilfelle. Videre ble det funnet at avkastning og skjevhet fungerte som substitutter for en gitt varians, men at substitusjonsmulighetene var begrensede.

# Forord

Denne oppgaven er skrevet som en del av en mastergrad ved Norges Handelshøyskole (NHH). Oppgaven utgjør 30 studiepoeng og tilsvarer et semesters fulltidsstudier.

Gjennom kurs som *ECO421 Finansieringsteori* og *ECO401 Optimization and Microeconomic Theory* tatt ved NHH har jeg opparbeidet meg interesse for det finansielle temaet "porteføljeteori", samt metodefaget "optimering". Førstnevnte kurs er såvidt inne på viktigheten av å hensynta skjevhet i beslutningsscenarioer. Dette har gjort at jeg fattet interesse for hvordan optimere porteføljemodeller med tre momenter; forventning, varians og skjevhet. NHH tilbyr ingen fag som diskuterer denne problemstillingen direkte, så all teori benyttet i oppgaven er basert på litteratur jeg selv har funnet og lest.

Å skrive masterutredning har vært en både spennende, krevende og interessant prosess, og jeg vil først og fremst rette en stor takk til min veileder professor Fred Schroyen som gjennom sine gode tilbakemeldinger og innspill har satt meg på rett spor når jeg følte jeg stod fast. I arbeidet har jeg stått ovenfor en bratt læringskurve siden deler av stoffet har vært nytt og ukjent, samtidig som jeg har valgt å ta i bruk verktøy som tekstbehandlingsprogrammet  $\text{\LaTeX}$  og den matematiske programvaren Maple, programmer jeg fra før ikke var kjent med. I tillegg har jeg anvendt Microsoft Excel, Visual Basic og Intercooled Stata i analysene i denne utredningen.

Bergen, 30.05.10

---

Daniel Øgård Kinn

# Innhold

<b>1</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Investorens overordnede problem</b>	<b>10</b>
2.1	Nyttefunksjoner og preferanser . . . . .	10
2.2	Direkte maksimering . . . . .	12
2.3	Stokastisk dominans . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Moderne porteføljeteori: forventning og varians</b>	<b>17</b>
3.1	Definisjoner . . . . .	17
3.2	Porteføljefronten med 2 aktiva . . . . .	18
3.3	Porteføljefronten med $n$ aktiva . . . . .	19
3.4	Markowitz-modellen . . . . .	21
3.4.1	Geometrisk løsning . . . . .	22
3.4.2	Analytisk løsning . . . . .	25
3.5	Direkte maksimering og Markowitz-modellen . . . . .	27
3.5.1	Normalfordelte variable og kvadratiske nyttefunksjoner . . . . .	28
3.5.2	Elliptiske fordelinger . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Forventning, varians og skjevhet</b>	<b>32</b>
4.1	Skjeve fordelinger . . . . .	32
4.2	Forventet nytte med høyere momenter . . . . .	34
4.3	MVS modellen . . . . .	37
4.3.1	Problemer . . . . .	38
4.3.2	Utledning av substitusjonsligningen . . . . .	42
4.3.3	Geometrien til den effisiente MVS porteføljefronten . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Empiri</b>	<b>50</b>
5.1	Implementering av en empirisk MVS modell . . . . .	50
5.2	Fremgangsmåte . . . . .	52
5.3	Resultater . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Estimering av porteføljeplanet</b>	<b>62</b>
6.1	En translog MVS-funksjon . . . . .	62
6.2	Substitusjonsmuligheter og konveksitet . . . . .	63
6.3	Resultater . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Oppsummering og konklusjon</b>	<b>70</b>
<b>8</b>	<b>Referanser</b>	<b>71</b>
<b>9</b>	<b>Appendiks</b>	<b>77</b>

## Figurer

1	Mulighetsområdet med 2 aktiva . . . . .	19
2	Egenskaper ved mulighetsområdet . . . . .	20
3	Markowitz-modellen og dens geometri . . . . .	23
4	Grafisk løsning av Markowitz-modellen . . . . .	24
5	Sammenhengen mellom geometri og formler . . . . .	27
6	Venstre- og høyreskjeve fordelinger . . . . .	33
7	Skjevhetsfunksjonens fleksible form . . . . .	40
8	Todimensjonale MVS-analyser . . . . .	46
9	Tredimensjonal MVS-analyse . . . . .	47
10	Ikke-konvekset i MVS modellen . . . . .	49
11	Håndtering av ikke-konvekse flater . . . . .	51
12	Optimeringsprosedyren . . . . .	55
13	Todimensjonale MVS-diagrammer . . . . .	59
14	Porteføljeplanetets form . . . . .	61
15	Estimert translogaritmisk MVS-funksjon . . . . .	67

## Tabeller

1	Lotterier . . . . .	12
2	Utvalgte aksjer . . . . .	53
3	Aksjedata . . . . .	56
4	Det ideelle punktet . . . . .	57
5	Optimeringsprosedyren . . . . .	57
6	Regresjon . . . . .	69
7	Inferens om gjennomsnitt . . . . .	69
8	Substitusjonsmuligheter og konvekset . . . . .	69

# 1 Introduksjon

I 1952 publiserte Harry Markowitz den prisbelønnede artikkelen *Portfolio Selection* som i dag er sett på som selve grunnlaget for moderne porteføljeteori.<sup>1</sup> Markowitz var den første som gjennomførte porteføljeanalyser ved å bruke varians som mål på risiko. Dette arbeidet var med på å utløse en rekke viktige finansielle fremskritt som for eksempel kapitalverdimodellen (CAPM) utviklet av Sharpe (1964) og Lintner (1965), samt mål på porteføljeeffektivitet av Sharpe (1966), Treynor (1965) og Jensen (1968). Denne utviklingen til tross, Markowitz sin forventning- og variansbaserte tilnærming er av mange sett på som det mest generelle rammeverket utviklet til dags dato.

Det er derfor ikke uten grunn at forventning-variens (MV) analyse i dag er den mest brukte metoden for allokering av aktiva. Det er flere grunner til dens popularitet. For det første er metoden enkel og intuitiv da den optimale sammenhengen mellom porteføljers avkastning (forventningsverdi) og risiko (variens) enkelt kan illustreres med en todimensjonal sammenheng kalt porteføljefronten.<sup>2</sup> For det andre er porteføljefronten enkel å finne fordi en kombinasjon av to frontporteføljer også vil ligge på fronten.

MV rammeverket har imidlertid noen klare teoretiske begrensninger, først fremlagt av Markowitz (1952) og Tobin (1958). Fokus på forventning og variens impliserer at man fra et nytteperspektiv kun tar hensyn til de to første momentene til den stokastiske variabelens sannsynlighetsfordeling. Rammeverket vil derfor kun være konsistent med maksimering av forventet nytte dersom enten (i) aktivaenes avkastingsprofiler er normalfordelt eller (ii) investorene har kvadratiske nyttefunksjoner. I tillegg er rammeverket utviklet med en èn-periode horisont, noe som impliserer at tidsdimensjonen er utelatt.

Fra et empirisk ståsted er antakelsen om normalfordeling lenge blitt sett på som problematisk. Forskning av for eksempel Mills (1995) og Kim og White (2004) viser at aktivas avkastningsprofiler ikke er normalfordelt, men at det er klare indikasjoner på skjeve fordelinger og høy kurtose.<sup>3</sup> Sjeldne og ekstreme hendelser som finanskriser eller sterke oppgangstider kan bidra til at aksjer får disse skjeve fordelingene. I lys av de siste års hendelser skal man derfor være varsom med å konstruere porteføljer basert på forventning og variens alene. Kompleksiteten i finansmarkedene er også med på å svekke MV rammeverkets troverdighet, da Jondeau og Rockinger (2003) argumenterer for at

---

<sup>1</sup>Markowitz fikk Nobelsprisen i Økonomi i 1990 for sitt arbeid med moderne porteføljeteori.

<sup>2</sup>Porteføljefronten i et MV-diagram ble definert av Markowitz (1952) som alle porteføljer med minimal variens for en gitt forventningsverdi. Dette diskuteres i detalj i seksjon 3.

<sup>3</sup>Skjevhet (engelsk: "skewness") er et mål på asymmetrien til en tilfeldig variabels sannsynlighetsfordeling, mens kurtose (engelsk: "kurtosis") måler tykkelsen på fordelings haler.

hedge-fond sjeldent følger normalfordelingen grunnet komplekse allokeringsstrategier. I tillegg nevner Gotoh og Konno (2000) at både kjøps- og salgsopsjoner har skjeve fordelinger.

Bruk av MV rammeverket kan imidlertid rettferdiggjøres ved å benytte en kvadratisk nyttefunksjon, men også denne antakelsen har blitt kritisert av teoretikere gjennom en årrekke. Pratt (1964) og Arrow (1965) viste at slike funksjoner har økende absolutt risikoaversjon (ARA), noe som impliserer at en investor ønsker mindre risiko når formuen øker. Dette er tradisjonelt sett på som en kontra-intuitiv og noe absurd antakelse. I tillegg har slike kvadratiske konkave funksjoner alltid et toppunkt, noe som betyr at nytten vil synke ved et visst nivå på investorens formue. Dermed vil funksjonen kun være relevant i intervallet null til toppunktet.

Selv om MV rammeverket har måttet tåle mye kritikk, er det også gjort empiriske undersøkelser som støtter bruk av bare forventning og varians. Levy og Markowitz (1979) og Kroll et al (1984) diskuterer hvordan porteføljer som maksimerer forventet nytte forholder seg til nytten av porteføljer beregnet med MV rammeverket. Resultatene tyder på at antakelsene om normalfordeling og kvadratisk nyttefunksjon ikke må være oppfylt for å få gode MV-approksimasjoner til forventet nytte. Konno og Suzuki (1995) argumenterer imidlertid for at disse påstandene sannsynligvis ikke er korrekte hvis antall aksjer øker til over hundre. Chamberlain (1983) har vist at til tross for ikke-normalitet vil MV rammeverket eksakt approksimere forventet nytte for alle nyttefunksjoner dersom aksjene følger en såkalt elliptisk fordeling (for eksempel t-fordelingen eller Levy-fordelingen). Det er derfor ikke utenkelig at slike fordelingstyper kan ha bidratt til å bedre konsistensen mellom nyttemaksimering og MV rammeverket i analysene til Levy og Kroll.

Grunnet liten støtte for antakelsen om normalfordeling og grunnet begrensningene ved kvadratiske nyttefunksjoner er det forsket mye på hvordan MV rammeverket kan utvides til å åpne for skjeve fordelinger. Helt siden Scott og Horvath (1980) har det vært allment akseptert at investorer foretrekker positiv skjevhet fordi det impliserer lav sannsynlighet for store negative verdier på avkastningen. Både Chunchachinda et al (1997) og Prakash et al (2003) finner store endringer fra optimale MV porteføljer til optimale porteføljer som hensyntar skjevhet. Det synes derfor klart at inkludering av skjevhet i porteføljemodeller ikke bare er en mulighet, men også svært nødvendig for å oppnå gode resultater med empiriske data.

En rekke forskere har tatt dette til etterretning og prøvd å konstruere porteføljemodeller med tre momenter: forventning, varians og skjevhet (MVS). Modellene viser seg imidlertid å være vanskelige å løse grunnet uønskede egenskaper ved skjevhetsfunksjonen. Konno og Suzuki (1995) maksimerer skjevhet for gitte verdier på forventning og varians, men må bruke lineære approksimasjoner grunnet ikke-konkav målfunksjon og ikke-konvekse

sidebetingelser. Konno et al (1998) utvikler en "Branch-and-Bound" optimeringsalgoritme som sørger for globale optimumspunkter på bekostning av at varians byttes ut med absolutte avvik. Jondeau og Rockinger (2003) beskriver en enkel løsning på MVS problemet, men deres analyser er basert på en eksplisitt antakelse om negativ eksponentiell nyttefunksjon. Bricc et al (2007) beskriver en metode som er meget robust fordi den garanterer globale optimumsløsninger ved at det defineres en såkalt "shortage function" som undersøker mulighetene for simultan økning i forventning og skjevhet samt reduksjon i varians. Bricc og Kerstens (2005) utvider denne metoden til å omhandle et vilkårlig antall momenter. Forfatterenes fokus på sammenligning av ulike porteføljer og analyse av tre effektivitetskomponenter er imidlertid nokså forskjellig fra fokuset i denne utredningen. Både Liu et al (2003) og Yu et al (2008) prøver å unngå lokale optimumsløsninger ved å benytte ulike optimeringsmetoder og prosedyrer. Majoriteten av disse artiklene tar for seg optimeringstekniske problemer, men ingen gir en geometrisk fremstilling av hvordan en *tredimensjonal MVS porteføljefront* vil kunne se ut. Med dette uttrykket mener jeg en samling optimale porteføljer som utgjør et plan i et rom med tre dimensjoner; forventning, varians og skjevhet. Jeg vil referere til dette som *MVS planet* eller *MVS fronten* i denne utredningen.

Det er først de seneste årene at komplette MVS modeller *og* geometriske betraktninger av MVS planet er blitt satt på agendaen. Athayde og Flôres (2004) var de første som utforsket analytiske løsninger til MVS modeller, men deres analyser baserer seg på optimering av ett moment på bekostning av de to andre. Videre er de analytiske løsningene kompliserte og lite intuitive, samtidig som det er umulig å finne eksplisitte uttrykk for porteføljevektene. Artikkelen er allikevel en pioner når det kommer til geometrisk innsikt i MVS planets form. Harvey et al (2003) introduserte usikkerhet i sin MVS modell og brukte empiri til å estimere formen på MVS fronten. I de nyeste bidragene finner Mencía og Sentana (2009) eksplisitte analytiske løsninger for porteføljevektene, men antar en bestemt fordelingstype kalt "location-scale mixture of normals". Deres empiriske resultater er overbevisende fordi de gir et MVS plan konsistent med de teoretiske betraktningene til Athayde og Flôres. Maringer og Parpas (2009) viser MVS fronten ved å maksimere forventning og minimere varians for en gitt skjevhet ved å benytte to stokastiske algoritmer. Algoritmene er imidlertid vanskelig å generalisere til større problemer. Klienti og Rustem (2009) benytter en robust optimeringsmetode som behandler alle tre momentene simultant. Forfatterene konkluderer med at simultan optimering kun produserer en effisient linje, i motsetning til et plan, i det tredimensjonale rommet.

Til tross for det siste årets utvikling, virker det ikke som noen generell modell eller prosedyre for fremstilling av MVS fronten har blitt allmennt akseptert. Jeg vil i denne utredningen utlede en teoretisk sammenheng mellom forventning, varians og skjevhet



som jeg kaller *substitusjonsligningen*. Deretter definerer jeg en empirisk MVS modell som benyttes til å finne MVS planet i et diagram, før jeg til slutt anvender en fleksibel funksjonsform til estimering av sammenhengen mellom de tre momentene. Denne benyttes så til å se på substitusjonsmuligheter mellom forventning, varians og skjevhet langs MVS fronten.

Utredningen er lagt opp som følger: seksjon 2 tar for seg investors overordnede mål - maksimering av forventet nytte. Deretter gir seksjon 3 en detaljert beskrivelse av moderne porteføljeteori, dens antakelser og den tradisjonelle MV porteføljefronten. I seksjon 4 introduseres skjevhet og en teoretisk modell utvikles for å forklare MVS fronten, som i seksjon 5 støttes opp av empiri. Estimering av den fleksible funksjonsformen og den kvantitative avveiningen mellom forventning, varians og skjevhet gjøres i seksjon 6 før utredningen oppsummeres i seksjon 7.

## 2 Investorens overordnede problem

En *agents* preferanser har blitt fremstilt ved hjelp av nyttefunksjoner helt siden det banebrytende arbeidet av von Neumann og Morgenstern (1947). I tradisjonell nytte teori ser man på ulike *lotterier* og prøver å konstruere nyttefunksjoner ut fra hvilke lotterier agenten foretrekker. Dermed kan nyttefunksjonen brukes som et kvantitativt substitutt til preferanser, noe som er svært fordelaktig i analytiske modeller.

I porteføljeteori kan agenten beskrives som en investor, mens lotteriene kan forklares som porteføljer med ulike egenskaper hva gjelder for eksempel avkastning og risiko. Hvilken portefølje som foretrekkes av investoren er subjektivt drevet av preferanser som kan beskrives med nyttefunksjonen.

Porteføljefronten består av en samling optimale porteføljer<sup>4</sup> som er uavhengige av subjektive preferanser. Nyttefunksjonen er et viktig verktøy i *valget* mellom porteføljene på porteføljefronten. I denne utredningen er det selve porteføljefronten som er hovedfokuset, men jeg vil bruke litt plass på å beskrive nyttefunksjonen, direkte maksimering og stokastisk dominans, begreper relatert til investorens overordnede problem; *maksimering av forventet nytte*. Det er blant annet med bakgrunn i disse begrepene at porteføljeteorien har oppstått.

### 2.1 Nyttefunksjoner og preferanser

Anta at det eksisterer  $J$  lotterier  $(y_1, \dots, y_J)$  hvor  $y_j$  representerer en gevinst assosiert med lotteri  $j$ . Sannsynlighetene for å oppnå de ulike lotteriene er gitt ved  $(q_1, \dots, q_J)$ . I tråd med arbeidet til von Neumann og Morgenstern vil jeg i denne utredningen anta at investorens preferanser over disse lotteriene (porteføljene) tilfredstiller følgende fem aksiomer for rasjonell adferd:

**Aksiom 1 (Kompletthet)** *For to vilkårlige lotterier  $y_1$  og  $y_2$  må investoren enten foretrekke ett av lotteriene fremfor det andre, eller være indifferent mellom de, dvs enten  $y_1 \succsim y_2$  eller  $y_2 \succsim y_1$ .*

**Aksiom 2 (Transitivitet)** *Hvis det er slik at  $y_1 \succsim y_2$  og  $y_2 \succsim y_3$  må det også være slik at  $y_1 \succsim y_3$ .*

---

<sup>4</sup>En optimal portefølje avhenger av hva man karakteriserer som optimalt. Tradisjonelle mål er minimal risiko eller maksimal avkastning.

**Aksiom 3 (Kontinuitet)** Hvis  $y_1 \succsim y_2 \succsim y_3$  så eksisterer det en sannsynlighet  $q$ ,  $0 \leq q \leq 1$  sånn at  $y_2 \sim qy_1 + (1 - q)y_3$ .

**Aksiom 4 (Uavhengighet)** Hvis  $y_1 \sim y_2$  så vil  $qy_1 + (1 - q)y_3 \sim qy_2 + (1 - q)y_3$ .

**Aksiom 5 (Dominans)** Anta to lotterier beskrevet som kombinasjoner av andre lotterier:  $L_1 = q_1y_1 + (1 - q_1)y_2$  og  $L_2 = q_2y_1 + (1 - q_2)y_2$ . Hvis  $y_1 \succ y_2$ , så er  $L_1 \succ L_2$  dersom  $q_1 > q_2$ .

Dersom disse aksiomene er oppfylt beviser Ingersoll (1987) at investorens porteføljevalg maksimerer forventet nytte, gitt ved:

$$E[u(y_1, \dots, y_J)] = \sum_{j=1}^J q_j u(y_j)$$

hvor  $u(\cdot)$  er en gitt von Neumann-Morgenstern nyttefunksjon.<sup>5</sup> Forventet nytte,  $E[u(\cdot)]$ , betraktes som en ordinal nyttefunksjon som beskriver rangering av alternativer. Den forteller hvorvidt portefølje  $y_1$  foretrekkes fremfor  $y_2$  eller ikke, men kan i motsetning til  $u(\cdot)$  ikke brukes til å kvantifisere hvor mye den ene foretrekkes fremfor den andre. Anta videre at det eksisterer et sett,  $\mathcal{U}$ , bestående av forskjellige typer von Neumann-Morgenstern nyttefunksjoner, hvor enhver nyttefunksjon  $u \in \mathcal{U}$  har følgende viktige egenskaper:<sup>6</sup>

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad u' > 0 \quad u'' < 0 \quad u''' > 0$$

hvor  $u' > 0$  beskriver positiv marginalnytte,  $u'' < 0$  betegner risikoaversjon og  $u''' > 0$  er et mål på ”prudence”, et konsept definert av Kimball (1990) som en investors tendens til å forberede seg på kommende usikkerhet. Dette må ikke forveksles med risikoaversjon, som beskriver usikkerhet som noe negativt investoren prøver å unngå dersom det er mulig. Antakelsen om aversjon mot risiko og positiv tredjederivert har fått bred støtte blant forskere,<sup>7</sup> men en rekke akademiske artikler spesifiserer ofte disse antakelsene uten å konkret beskrive eller referere til hva de faktisk betyr.

Eeckhoudt og Schlesinger (2006) beskriver disse antakelsene ved å definere seks forskjellige lotterier som er gjengitt i tabell 1. Antakelsen om positiv marginalnytte ( $u' > 0$ ) kan

<sup>5</sup>Slike von Neumann-Morgenstern nyttefunksjoner kalles også for målbare eller kardinale nyttefunksjoner, til tross for at ingen av disse betegnelsene er strengt korrekte fra et matematisk perspektiv.

<sup>6</sup>Kraus og Litzenberger (1976) nevner tre kjente typer nyttefunksjoner som alle oppfyller disse egenskapene: logaritmisk, potens og negativ eksponentiell nyttefunksjon.

<sup>7</sup>Se for eksempel Kane (1982), Scott og Horvath (1980) eller Kraus og Litzenberger (1976).

TABELL 1: LOTTERIER

Utfall	$q$	$A_1$	$B_1$	$A_2$	$B_2$	$A_3$	$B_3$
Utfall 1	1/2	$-r$	0	$w - r - s$	$w - r$	$w + \tilde{\epsilon} - r$	$w + \tilde{\epsilon}$
Utfall 2	1/2	$-r$	0	$w$	$w - s$	$w$	$w - r$

forklares ved å definere to lotterier  $A_1$  og  $B_1$ , hvor  $r$  er et monetært tap  $r > 0$ . Investorer med preferanser  $B_1 \succsim A_1$  vil besitte nyttefunksjoner med positiv marginalnytte og visa versa. Resultatet er intuitivt fordi en person med positiv marginalnytte vil foretrekke mer fremfor mindre og dermed lotteri  $B_1$  fremfor lotteri  $A_1$ .

En risikoavers investor ( $u'' < 0$ ) kan noe upresist defineres som en person som foretrekker et sikkert beløp fremfor et høyere usikkert beløp. Eeckhoudt og Schlesinger beskriver risikoaversjon ved å anta at en person har initialformue  $w$  og lik sannsynlighet for to ulike tap,  $r$  og  $s$ ,  $s > 0$ . Ved å konstruere to ulike lotterier  $A_2$  og  $B_2$  viser forfatterene at en risikoavers investor vil ha preferanser  $B_2 \succsim A_2$ . Intuisjonen er at dersom en investor har aversjon mot risiko vil personen ønske å spre tapene ut mellom tilstander i motsetning til å få et stort tap i én tilstand.

De samme forfatterene forklarer "prudence" ( $u''' > 0$ ) ved å anta et tap  $r$  og en usikker størrelse<sup>8</sup>  $\tilde{\epsilon}$ , med forventning  $E(\tilde{\epsilon}) = 0$ . Til tross for at  $\tilde{\epsilon}$  kan ta positive verdier er den en kilde til usikkerhet og dermed betraktet som et "tap" for investoren. En investor med positiv tredjederivert har preferanser  $B_3 \succsim A_3$  og ønsker derfor å få ett sikkert tap, hvor eneste usikkerhet er hvilket tap som realiseres ( $r$  eller  $\tilde{\epsilon}$ ), fremfor å få begge disse størrelsene i samme tilstand. Resonnementene beskrevet over går også motsatt vei, hvilket betyr at dersom vi klarer å avdekke slike preferanser hos en investor, kan vi konkludere med at vedkommende har en nyttefunksjon som tilfredstiller kravene i settet  $\mathcal{U}$ .

## 2.2 Direkte maksimering

Anta at investoren står ovenfor  $n$  risikable aktiva med stokastisk avkastning  $\tilde{R}_i$  og simultan kumulativ fordelingsfunksjon:

$$F(R_1 \dots R_n) = \int_{-\infty}^{R_1} \dots \int_{-\infty}^{R_n} f(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$$

<sup>8</sup>Jeg vil bruke *tilde* som notasjon for stokastiske størrelser gjennom hele denne utredningen.

Hvert aktivum har forventet avkastning  $\mu_i = E[\tilde{R}_i]$  og andelen investert i aktivum  $i$  betegnes med  $\alpha_i$  slik at  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . I enkelte analyser i denne utredningen vil short-salg være tillatt slik at  $\alpha_i$  kan ta verdier mindre enn 0, mens i andre tilfeller ekskluderes disse ved å benytte restriksjonen  $\alpha_i \geq 0$ . Jeg vil se bort fra risikofrie aktivum i denne utredningen, noe som blir rettferdiggjort av Simaan (1993). Han argumenterer for at investorer som står ovenfor et risikofritt aktivum vil investere en økende andel i dette aktivumet når risikoaversjonen øker. Dette gjør at effekten av å inkludere høyere momenter<sup>9</sup> blir mindre grunnet stor risikofri plassering. Sagt på en annen måte vil høy grad av risikoaversjon gjøre at investoren legger høy vekt på forventningsverdi, noe som tilsier at høyere momenter blir mindre viktige. I denne utredningen vil porteføljestørrelser betegnes med subscript  $p$  slik at stokastisk porteføljeavkastning er gitt ved:

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{R}_i$$

Forventet avkastning på porteføljen er da:

$$\mu_p = E[\tilde{R}_p] = \sum_{i=1}^n \alpha_i E[\tilde{R}_i] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$$

Jeg forutsetter at investoren kun kan plassere pengene sine i de  $n$  aktiva beskrevet over. Dermed vil den stokastiske sluttformuen  $\tilde{Y}$  kun være avhengig av initialformue  $w$  og den stokastiske porteføljeavkastningen:

$$\tilde{Y} = w(1 + \tilde{R}_p) = w(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{R}_i) \quad (2.1)$$

Med utgangspunkt i ligning (2.1) og seksjon 2.1 kan vi definere investorens overordnede problem. Målet er å velge andeler i hvert aktivum  $\alpha_i$ , som maksimerer forventet nytte av den stokastiske sluttformuen  $\tilde{Y}$ :

$$\begin{aligned} \max_{\{\alpha_i\}} E[u(\tilde{Y})] &= E[u(w(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{R}_i))] \\ \text{gitt at} & \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Lagrangefunksjonen til dette problemet er gitt ved:

---

<sup>9</sup>Varians betegnes som det 2. momentet, skjevhet som det 3. momentet og kurtose som det 4. momentet.

$$\mathcal{L} = E[u(w(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{R}_i))] - \lambda \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i - 1 \right)$$

Dette gir følgende  $n$  førsteordensbetingelser:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i} = E \left[ \frac{\partial u(\tilde{Y})}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_i} \right] - \lambda = 0 \Rightarrow E[wu'(\tilde{Y})\tilde{R}_i] = \lambda$$

Andreordensbetingelsen som gir et lokalt maksimumspunkt kan uttrykkes ved hjelp av produktregelen:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha_i^2} = E \left[ \frac{\partial^2 u(\tilde{Y})}{\partial \tilde{Y}^2} \left( \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \frac{\partial u(\tilde{Y})}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial \alpha_i^2} \right] < 0$$

Det siste leddet vil være 0, siden porteføljevektene inngår lineært i uttrykket for stokastisk sluttformue. Dermed kan andreordensbetingelsen forenkles til:

$$E[w^2 u''(\tilde{Y}) \tilde{R}_i^2] < 0$$

Siden initiell formue og stokastisk avkastning begge er kvadrert, vil risikoaversjon  $u'' < 0$  være en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at løsningen faktisk maksimerer forventet nytte. Dermed vil alle nyttefunksjoner tilhørende settet  $\mathcal{U}$  oppfylle andreordensbetingelsen og garantere et maksimumspunkt.

Problem (2.2) er ofte karakterisert ved betegnelsen *direkte maksimering*, se for eksempel Kroll et al (1984). Investoren fokuserer på å maksimere forventet nytte uten at det tas hensyn til noen porteføljefront. Denne fremgangsmåten er virkelighetsnær fordi den, dersom aksiomene for rasjonell adferd er oppfylt, vil gjenspeile den løsningen som faktisk er optimal for investoren gitt de preferansene denne personen måtte ha. Her ligger imidlertid også problemet med direkte maksimering. Dersom denne metoden skal benyttes, må investors preferanser spesifiseres i form av en nyttefunksjon. En slik antakelse fører med seg tap av generalitet og vanskeligheter knyttet til hvordan nyttefunksjonen bør se ut. Dette problemet kan fra et teoretisk perspektiv unngås ved å benytte en metode kjent som *stokastisk dominans*.

## 2.3 Stokastisk dominans

Stokastisk dominans går ut på å finne relasjoner mellom ulike fordelinger. Konseptet blir ofte brukt i sammenheng med porteføljeteori fordi metoden kan rangere ulike porteføljer ved å se på sammenhengen mellom deres fordelingsfunksjoner. Stokastisk dominans har

den egenskapen å alltid være konsistent med direkte maksimering, selv uten spesifisering av nyttefunksjon, se Lesser (1990).

Anta to stokastiske porteføljer  $\tilde{y}_1$  og  $\tilde{y}_2$  med sannsynlighetsfordelinger  $f(y_1)$  og  $h(y_2)$ . Deres kumulative fordelingsfunksjoner er gitt ved  $F(y_1)$  og  $H(y_2)$  med antakelsen  $F(-\infty) = 0$  og  $F(\infty) = 1$  og samme for  $H$ . Det kan da vises ved hjelp av delvis integrasjon (bevis 1 i appendiks) at forskjellen i forventet nytte mellom fordeling  $F$  og  $H$ , for et vilkårlig argument  $x$ , er gitt ved:

$$E_F[u(\tilde{x})] - E_H[u(\tilde{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)[H^1(x) - F^1(x)]dx$$

hvor  $H^1$  og  $F^1$  er de kumulative fordelingsfunksjonene. Fordeling  $F$  gir høyere forventet nytte enn  $H$  dersom dette uttrykket er positivt for alle verdier på  $x$ . Man sier at  $F$  første ordens stokastisk dominerer  $H$  dersom  $H^1(x) \geq F^1(x)$  for alle  $x$ . Alle beslutningstakere med nyttefunksjon  $u' > 0$  maksimerer da forventet nytte ved å velge fordeling  $F$  fremfor  $H$  hvis  $F$  første ordens stokastisk dominerer  $H$ .

Samme fremgangsmåte kan benyttes for andre og tredje ordens stokastisk dominans hvor  $F^2$  og  $H^2$  betegner de andre kumulative og  $F^3$  og  $H^3$  betegner de tredje kumulative, se bevis 1 i appendikset.  $F$  andre ordens stokastisk dominerer  $H$  dersom  $H^2(x) \geq F^2(x)$  for alle  $x$ , og tredje ordens stokastisk dominerer  $H$  hvis  $H^3(x) \geq F^3(x)$  og  $H^2(\infty) \geq F^2(\infty)$  for alle  $x$ .

Implikasjonen av disse resultatene er at beslutningstakere med preferanser som tilfredstiller  $u' > 0$  og  $u'' < 0$  foretrekker  $F$  fremfor  $H$  bare hvis  $F$  andre ordens stokastisk dominerer  $H$ . Dersom nyttefunksjonen i tillegg tilfredstiller  $u''' > 0$  vil enhver beslutningstaker maksimere forventet nytte ved å velge  $F$  fremfor  $H$  bare hvis  $F$  tredje ordens stokastisk dominerer  $H$ .

Stokastisk dominans er derfor en teoretisk attraktiv metode fordi den kan finne optimale porteføljer for alle beslutningstakere med nyttefunksjoner i settet  $\mathcal{U}$  ved å se på tredje ordens stokastisk dominans. Dette prinsippet gir således en korrekt løsning til (2.2) uten at nyttefunksjonen spesifiseres. Whitmore og Findlay (1978) presenterer en rekke empiriske undersøkelser gjort med stokastisk dominans og porteføljeteori. Resultatene viser at til tross for metodens teoretiske attraktivitet, er den svært lite praktisk når mange porteføljer sammenlignes. Metoden vil i enkelte tilfeller være vanskelig å anvende fordi den krever multiple kriterier og store mengder kalkulasjoner, hvilket gjør den tidkrevende og lite oversiktlig.

Siden anvendelse av direkte maksimering krever spesifikasjon av nyttefunksjon samtidig som stokastisk dominans har praktiske begrensninger, har det vært forsket mye på alternative tilnæringsmetoder. Det er blant annet på bakgrunn av dette at den tradisjonelle porteføljeteorien utviklet av Markowitz (1952) har fått bred aksept.

Anta følgende scenario: En aksjemegler ønsker å finne klientenes optimale investeringsstrategier. For å gjøre dette må megleren ha klart for seg klientenes preferanser. Klientene kan være mange, og preferansene forskjellige, noe som gjør jobben med direkte maksimering og stokastisk dominans svært vanskelig og tidkrevende for megleren. Antar vi at det finnes en porteføljefront bestående av porteføljer som alle maksimerer problem (2.2) for forskjellige preferanser, er løsningen enkel. Megleren kunne funnet denne porteføljefronten, presentert den til sine klienter og bedt klientene bestemme portefølje basert på subjektive holdninger. Under slike forutsetninger er porteføljefronten et svært fordelaktig substitutt til både direkte maksimering og stokastisk dominans.

Som diskutert innledningsvis er problemet at porteføljene på en MV porteføljefront kun samsvarer med direkte maksimering under visse antakelser. Disse antakelsene er urealistiske, noe som er hovedmotivasjonen for å utvide MV fronten til en MVS front. Den moderne porteføljeteorien, porteføljefronten og de nevnte antakelsene beskrives i seksjon 3 før skjevhet introduseres i seksjon 4.



### 3 Moderne porteføljeteori: forventning og varians

#### 3.1 Definisjoner

I moderne porteføljeteori med  $n$  aktiva og  $n > 2$  er det svært hensiktsmessig å gjøre bruk av matrisenotasjon grunnet store og komplekse uttrykk. Stokastisk avkastning, forventet avkastning og porteføljevекter kan skrives som tre  $n \times 1$  vektorer:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \\ \vdots \\ \tilde{R}_n \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dermed kan kovariansmatrisen defineres som  $\Sigma = E[(\tilde{R} - \mu)(\tilde{R} - \mu)^t]$ , hvor  $t$  betegner transponeringsoperatoren og kovariansen mellom aktiva  $i$  og aktiva  $j$  er gitt ved:

$$\text{Cov}[\tilde{R}_i, \tilde{R}_j] = \sigma_{ij} = E[(\tilde{R}_i - \mu_i)(\tilde{R}_j - \mu_j)]$$

slik at hvert aktivums varians ligger på diagonalen  $\sigma_{ii} = E[(\tilde{R}_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2$ . Videre er kovariansmatrisen symmetrisk, dvs at  $\Sigma = \Sigma^t$  fordi  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \forall (i, j), i \neq j$  og positiv semidefinit fordi en vilkårlig vektor  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  gir en kvadratisk form som er ikke-negativ:  $\alpha^t \Sigma \alpha \geq 0$ . Egenverdiene til kovariansmatrisen er alle større enn 0, dersom ingen aktiva er perfekt negativt eller positivt korrelert, altså at ingen aktiva kan uttrykkes som lineære kombinasjoner av andre aktiva. Under forutsetning om lineær uavhengighet er determinanten til kovariansmatrisen (som er gitt ved produktet av egenverdiene) positiv. Dermed eksisterer den inverse kovariansmatrisen,  $\Sigma^{-1}$ , en viktig brikke i senere analyser. Kovariansmatrisen kan formuleres som:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

med dimensjon  $n \times n$ . Denne matrisen kalles også for varians-kovariansmatrisen, grunnet egenskapen til diagonalen. På grunn av symmetriegenskapene er kun  $(n+1)n/2$  elementer unike, slik at ikke alle  $n \times n$  elementene trenger kalkuleres. Porteføljens forventede avkastning og varians er da gitt fra følgende formler:

$$\mu_p = E[R_p(\alpha)] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i = \alpha^t \mu$$

$$\sigma_p^2 = \text{Var}[R_p(\alpha)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} = \alpha^t \Sigma \alpha$$

## 3.2 Porteføljefronten med 2 aktiva

Tradisjonell porteføljeteori er ofte forklart i tilfellet med  $n = 2$  da dette gir et godt første innblikk i mekanismene som bestemmer porteføljesammensetningen. Anta at investoren ønsker å danne en portefølje kun bestående av to aktiva  $a_1$  og  $a_2$ , med forventningsverdi  $\mu_1$  og  $\mu_2$ , varians  $\sigma_1^2$  og  $\sigma_2^2$  samt porteføljevекter  $\alpha_1$  og  $(1 - \alpha_1)$ . Porteføljens forventning og varians er da gitt ved:

$$\mu_p = \alpha_1 \mu_1 + (1 - \alpha_1) \mu_2$$

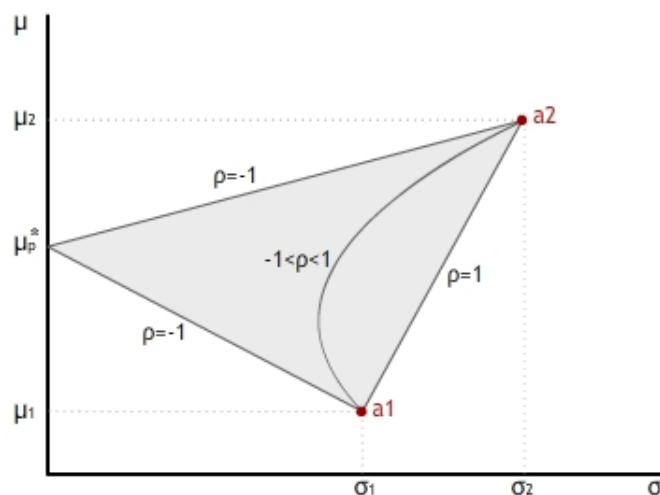
$$\sigma_p^2 = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha_1)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1(1 - \alpha_1) \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

hvor  $\rho$  betegner korrelasjonskoeffisienten mellom de to aktivaene. Porteføljens maksimale og minimale standardavvik,  $\bar{\sigma}_p$  og  $\underline{\sigma}_p$  kan finnes ved å sette korrelasjonskoeffisienten til henholdsvis  $\rho = 1$  og  $\rho = -1$ :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_p &= \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha_1)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1(1 - \alpha_1) \sigma_1 \sigma_2} \\ &= \sqrt{[\alpha_1 \sigma_1 + (1 - \alpha_1) \sigma_2]^2} \\ &= \alpha_1 \sigma_1 + (1 - \alpha_1) \sigma_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_p &= \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha_1)^2 \sigma_2^2 - 2\alpha_1(1 - \alpha_1) \sigma_1 \sigma_2} \\ &= \sqrt{[\alpha_1 \sigma_1 - (1 - \alpha_1) \sigma_2]^2} \\ &= |\alpha_1 \sigma_1 - (1 - \alpha_1) \sigma_2| \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vi ser fra ligning (3.1) at den øvre grensen er lineær i  $\alpha_1$ , akkurat som uttrykket for porteføljens forventningsverdi. Ved å variere  $\alpha_1$  mellom 0 og 1 vil det derfor oppstå en rett linje mellom aktivum 1 og aktivum 2, så lenge  $\rho = 1$ . Den nedre grensen kan analyseres ved å sløyfe absoluttverditegnene i ligning (3.2), som gir standardavvik lik 0 for  $\alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ . Substituerer vi dette resultatet inn i ligningen for porteføljeforventning finner vi avkastningsverdien som korresponderer til  $\sigma_p = 0$ :  $\mu_p^* = \frac{\sigma_2 \mu_1 + \sigma_1 \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ .

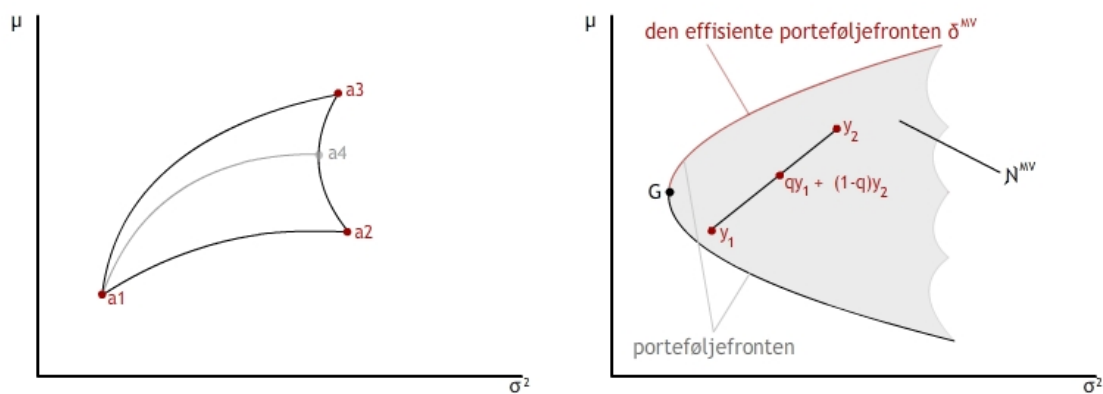


Figur 1: Mulighetsområdet med 2 aktiva

Figur 1 viser en skisse av mulighetsområdet i et forventning-standardavvik diagram når  $n = 2$ . Uten absoluttegn vil ligning (3.2) være positiv for høye verdier på  $\alpha_1$  og negativ for lave verdier. Fortegnet snur ved punkt  $\mu_p^*$ . Porteføljes mulighetsområde er da gitt av det skraverte feltet, med grenser definert av henholdsvis maksimum og minimum korrelasjonskoeffisient. Denne løsningen er teoretisk attraktiv fordi den gir et første innblikk i porteføljefrontens mulighetsområde. I praksis vil korrelasjonskoeffisienten ha verdi  $-1 < \rho < 1$ , noe som tilsvarer en krum linje innenfor det grå området i figuren. Det er på bakgrunn av dette resultatet at *diversifisering* har blitt et viktig begrep i porteføljeteori. Ved å investere i aksjer som har ulik risikoprofil og dermed lave korrelasjonskoeffisienter, vil det være mulig å oppnå et standardavvik for porteføljen som er lavere enn en lineær vektet kombinasjon av aksjenes standardavvik.

### 3.3 Porteføljefronten med $n$ aktiva

Mulighetsområdet kan beskrives mer nøyaktig ved en generalisering til  $n$  risikable aktiva. Hvert aktivum kan plottes i et MV diagram, med varians langs den horisontale aksene. En portefølje kan dannes ved å kombinere 2 aktiva, 3 aktiva, osv helt til  $n$  aktiva. Alle kombinasjoner finnes ved å la porteføljevektene  $\alpha_i$  løpe over alle mulige aktivasammensetninger, under forutsetning  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Dersom vi ikke tillater short-salg kan vi formulere følgende mulighetsområde for vektene:



(a) Mulighetsområdet illustrert ved 3 aktiva (b) Mulighetsområdet er konvekst mot venstre

Figur 2: Egenskaper ved mulighetsområdet

$$\mathfrak{S} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

Dersom vi ikke pålegger noen restriksjon mot short-salg, vil settet av vektorer kunne skrives som:

$$\mathfrak{R} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Dette settet inneholder flere kombinasjoner av vektorer enn  $\mathfrak{S}$ , da ikke-negativitetsbetingelsen er eliminert. De to settene vil ha de samme egenskapene, men  $\mathfrak{S}$  vil være et subsett av  $\mathfrak{R}$ . Vi kan definere en forventning-varians representasjon av mulighetsområdet  $\mathfrak{S}$  gitt ved:

$$\mathfrak{N}^{MV} = \left\{ (M, V) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \exists \alpha \in \mathfrak{S} : (M, V) = (E[R_p(\alpha)], Var[R_p(\alpha)]) \right\}$$

Mulighetsområdet  $\mathfrak{N}^{MV}$  har to viktige egenskaper vist av Luenberger (1998). Området vil være en kontinuerlig flate i MV diagrammet, så lenge  $n \geq 3$ . I tillegg vil området være konvekst mot venstre. Disse egenskapene er illustrert i figur 2.

Figur 2(a) viser tre aktiva a1, a2 og a3. Ut fra resonomentene med to aktiva vil linjene som knytter disse aktivaene sammen være krumme så lenge  $-1 < \rho < 1$ , en forutsetning som er triviell i praksis. Ved å kombinere a2 og a3 vil man kunne produsere et kunstig aktivum, a4, som igjen kan kombineres med a1 slik at det oppstår en krummet linje mellom a1 og a4. Ved å varieres a4 på linjen mellom a2 og a3 kan vi da få frem en kontinuerlig flate begrenset av de mørke linjene. Med flere enn 3 aktiva vil settet da se ut som i figur 2(b). Her er det plottet to vilkårlige porteføljer,  $y_1$  og  $y_2$  hvor følgende sammenheng gjelder:

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathfrak{N}^{MV}, \forall q \in [0, 1] : qy_1 + (1 - q)y_2 \in \mathfrak{N}^{MV}$$

Ligningen sier at en lineær kombinasjon av to porteføljer,  $y_1$  og  $y_2$  som begge tilhører mulighetsområdet  $\mathfrak{N}^{MV}$  vil produsere en portefølje som også ligger innenfor området  $\mathfrak{N}^{MV}$ . Dette er den formelle definisjonen på konvekset, se for eksempel Cowell (2006). Resultatet gjelder imidlertid ikke for porteføljer langt ute til høyre i figuren, noe som får Luenberger (1998) til å beskrive  $n$  aktiva i et MV diagram som et konvekst sett *mot venstre*.

Alle porteføljer som gir minimal varians for en gitt forventningsverdi ligger på randen til det skraverte området i figur 2(b). Denne randen kalles for *minimumvarians-settet* eller mindre presist; *porteføljefronten*. Punktet  $G$  representerer porteføljen med minst varians av alle porteføljer på porteføljefronten, og refereres til som *den globale variansminimerende porteføljen* (GMVP). Den *effisiente porteføljefronten* er alle punkter som gir maksimal forventning for en gitt minimal varians, altså øvre halvdel av minimumvarians-settet. En formell definisjon på den effisiente fronten i et MV diagram er da:

$$\delta^{MV}(\mathfrak{S}) = \left\{ (M, V) \in \mathfrak{N}^{MV}, \nexists (M_1, V_1) \in \mathfrak{N}^{MV}; (M_1, -V_1) > (M, -V) \right\}$$

hvor  $(M_1, V_1)$  representerer et vilkårlig punkt. Settet  $\delta^{MV}$  inneholder altså kombinasjoner av forventning og varians som ligger på den effisiente porteføljefronten.

### 3.4 Markowitz-modellen

Markowitz (1959) formulerte et matematisk problem med formål å finne porteføljefronten vist i figur 2(b). Modellen baserer seg på antakelsen om at en investor kun bryr seg om å maksimere avkastning og minimere risiko, dvs handle i henhold til det såkalte *forventning-variens kriteriet*. Siden modellen fokuserer på forventning og varians, vil ikke tilstedeværelsen av høyere momenter påvirke løsningen. I tillegg forutsetter modellen at vi klarer å kalkulere fornuftige verdier på forventninger, varianser og kovarianser. Målet er å minimere varians for gitt verdi på forventet avkastning  $\bar{\mu}_p$  og vektsum lik én:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \text{Var}[R_p(\alpha)] &= \alpha^t \Sigma \alpha \\ \text{gitt at} & \\ \alpha^t \mu &= \bar{\mu}_p \\ \alpha^t e &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

hvor  $e$  er en  $n \times 1$  vektor med ett-tall. Modellen tillater short-salg, slik at ytterpunktene på fronten ikke er begrenset av aktivaene med maksimal og minimal forventningsverdi. Løsningen på problemet betegnes med  $\alpha^*$ .

### 3.4.1 Geometrisk løsning

Ved å anta  $n = 3$  vil man kunne fremstille løsningen til (3.3) i en todimensjonal figur. Dette er viktig fordi det gir innsikt i hvorfor Markowitz-modellen faktisk garanterer et globalt minimumspunkt på varians. Med tre aktiva kan vektsumbetingelsen skrives som:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

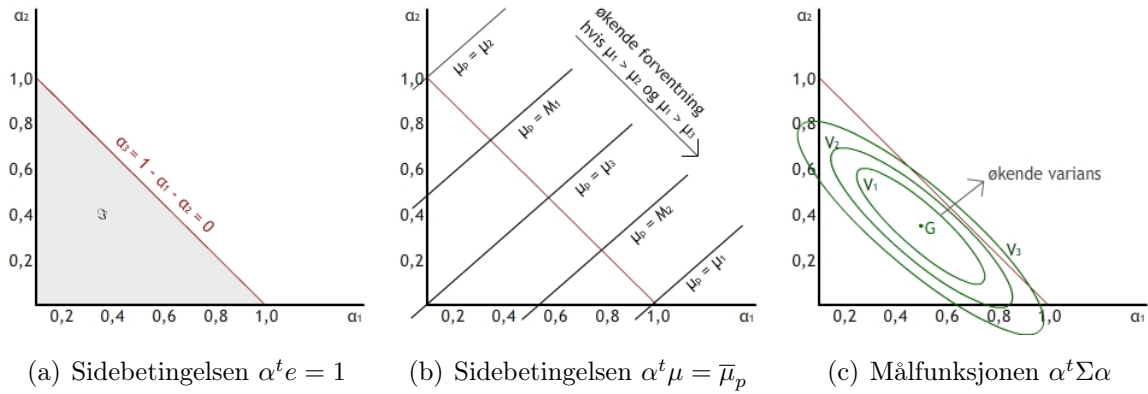
Linjen i figur 3(a) har ligning  $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ . Alle kombinasjoner av porteføljer begrenset av aksene og denne linjen har  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  og  $\alpha_3 \geq 0$ , mens kombinasjoner på linjen vil være porteføljer kun bestående av de to første aktivaene. Det skraverte området tilsvarer settet  $\mathfrak{F}$  når  $n = 3$ . Beveger vi oss til høyre for linjen eller inn i en av de tre andre kvadrantene, kan man oppnå porteføljesammensetninger med short-salg, noe som gir løsninger  $\alpha \in \mathfrak{R}$ . Siden Markowitz-modellen tillater short-salg, vil ikke linjen ha noen spesiell betydning for videre geometriske betraktninger. Den første sidebetingelsen kan skrives ved å gjøre bruk av vektsumbetingelsen:

$$\begin{aligned}\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\mu_3 &= \bar{\mu}_p \\ \alpha_1(\mu_1 - \mu_3) + \alpha_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 &= \bar{\mu}_p\end{aligned}$$

I det todimensjonale rommet betyr dette iso-forventningslinjer som vist i figur 3(b). Linjen med navn  $M_1$  viser alle kombinasjoner av porteføljevokter som gir forventet avkastning  $\mu_p = M_1$ . Hjørnepunktene  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  og  $(0, 0, 1)$  som har lokasjon på henholdsvis  $\alpha_1$ -aksen,  $\alpha_2$ -aksen og origo har porteføljeavkastninger på  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  og  $\mu_3$ , som vist i figuren. Linjene lenger til høyre i figuren representeter høyere porteføljeavkastning så lenge  $\mu_1 > \mu_2$  og  $\mu_1 > \mu_3$ . Dersom  $\mu_2 > \mu_1$  og  $\mu_2 > \mu_3$  vil linjer lenger til venstre representere høyere avkastning. I det siste tilfellet, dvs for  $\mu_3 > \mu_1$  og  $\mu_3 > \mu_2$  vil høyest avkastning finnes sentrert i figuren, dvs ved den midterste linjen som skjærer origo. Det første tilfellet vil bli lagt til grunn for videre analyser. Målfunksjonen kan analyseres på tilsvarende måte. Med tre aktiva kan variansen uttrykkes som:

$$\sigma_p^2 = \alpha_1^2\sigma_{11} + \alpha_2^2\sigma_{22} + \alpha_3^2\sigma_{33} + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12} + 2\alpha_1\alpha_3\sigma_{13} + 2\alpha_2\alpha_3\sigma_{23}$$

Ved å substituere inn  $1 - \alpha_1 - \alpha_2$  for  $\alpha_3$  og ordne uttrykket får vi:

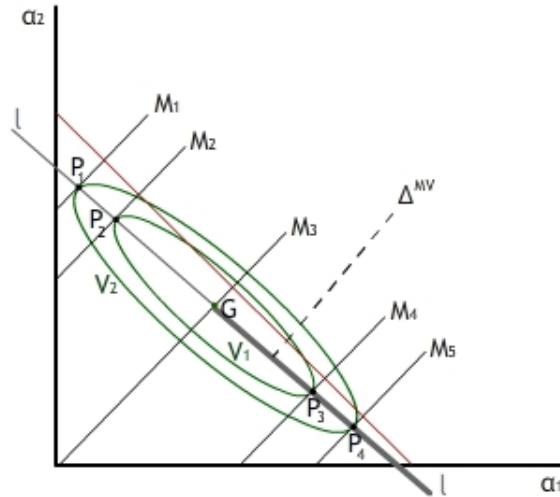


Figur 3: Markowitz-modellen og dens geometri

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \alpha_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + \alpha_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2\alpha_1\alpha_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) \\ &+ 2\alpha_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2\alpha_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \end{aligned}$$

Denne ligningen representerer iso-varianskurvene som har form som ellipser i det todimensjonale rommet, se figur 3(c). Iso-varians ellipsen  $V_1$  representerer alle kombinasjoner av porteføljevæktene som gir varians  $\sigma_p^2 = V_1$ . Som poengtert av Markowitz (1959) har alle disse ellipsene samme midtpunkt, samme beliggenhet og samme forhold mellom lengste diameter og korteste diameter. Siden større ellipser representerer høyere varians, betyr det at den minimale variansen som er oppnåelig er gitt ved punkt  $G$ . Dette punktet tilsvarer den globale variansminimerende porteføljen, GMVP, definert tidligere. Hvorvidt punktet ligger innenfor området  $\mathfrak{S}$  eller ikke, avhenger av hvilke aktiva man ser på. I praksis kan  $G$  være en del av settet  $\mathfrak{S}$  og dermed også settet  $\mathfrak{R}$ , men i enkelte tilfeller ligger punktet kun i  $\mathfrak{R}$ .

Anta nå at vi setter  $\bar{\mu}_p$  lik  $M_1$  og løser Markowitz-modellen slik den ble definert i (3.3). Deretter plotter vi den optimale løsningen i et diagram og tegner inn tilhørende iso-forventningslinje og iso-varians ellipse. Vi gjentar denne prosedyren for  $\bar{\mu}_p = M_2, M_3, M_4$  og  $M_5$ . En skisse av denne fremgangsmåten er gjengitt i figur 4. For  $\bar{\mu}_p = M_1$  tangerer iso-forventningslinjen ellipsen  $V_2$  i punkt  $P_1$ . Dette er den minimalt oppnåelige variansen dersom forventningen settes til  $M_1$ . Ved å øke forventningsverdien til  $M_2$  kan vi faktisk oppnå enda lavere varians,  $V_1$ , siden tilhørende forventningslinje og ellipse tangerer i punkt  $P_2$ , som ligger nærmere sentrum enn  $P_1$ . Dette fortsetter for alle forventningsverdier helt opp til  $M_3$ . Ved denne verdien oppnår vi lavest mulige varians gitt ved punkt  $G$ . Poenget er at hvis vi nå øker forventningsverdi til for eksempel  $M_4$  etterfulgt av  $M_5$ , vil variansen igjen øke til  $V_1$  og deretter til  $V_2$ . Trekker vi en linje gjennom alle løsningspunktene,  $P_1$  til  $P_4$ , får vi linjen definert av Markowitz (1959) som *den kritiske linjen*, med notasjon  $l$ . Hvis et punkt ligger på denne linjen, betyr det at punktet har minimal varians for en gitt forventningsverdi.



Figur 4: Grafisk løsning av Markowitz-modellen

Motsatt, hvis et punkt minimerer varians for en gitt forventningsverdi, må punktet ligge på denne linjen. Linjen  $l$  representerer altså porteføljefronten, uttrykt ved porteføljevækt istedenfor forventning og varians. Den gir også en illustrasjon av konseptene poengtert i seksjon 3.2 og 3.3. Diversifiseringsgevinster som følge av lave korrelasjonskoeffesienter gjør at variansen reduseres når forventningsverdien økes. Men; forventningsverdier høyere enn  $M_3$  gir økende varians fordi aktiva med høy forventningsverdi (dermed også høy varians) nå tillegges høy vekt. Punktene på strålen  $l$  fra  $G$  gjennom  $P_3$  tilsvarer porteføljevækt som gir kombinasjoner av forventning og varians i den øvre halvdel av porteføljefronten, altså den effisiente fronten. Punktene på denne strålen tilsvarer derfor settet:

$$\Delta^{MV}(\mathfrak{S}) = \left\{ \alpha \in \mathfrak{S}; (E[R_p(\alpha)], Var[R_p(\alpha)]) \in \delta^{MV}(\mathfrak{S}) \right\}$$

Merk at dersom vi ikke tillater short-salg, vil settet av effisiente porteføljer være gitt ved linjen  $l$  fra  $G$  til krysningsspunktet med den horisontale aksene og deretter fra dette krysningsspunktet til punktet  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0, 0)$ .

Den geometriske fremstillingen av Markowitz-modellen illustrerer et viktig poeng. Siden sidebetingelsene er lineære og målfunksjonen konveks, vil løsningen alltid tilfredstille betingelsen for et globalt minimum. Altså vil vi kunne garantere at for en gitt forventet avkastning vil den tilhørende variansen være minst mulig.



### 3.4.2 Analytisk løsning

Markowitz-modellen kan også løses analytisk, noe som gir viktige resultater anvendt i konstruksjonen av en modell med skjevhet i seksjon 4. Den indirekte minimumvariansrelasjonen  $\sigma_m^2(\alpha^*(\bar{\mu}_p)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  som tilhører problem (3.3) er implisitt gitt ved:

$$\sigma_m^2(\alpha^*(\bar{\mu}_p)) = \min_{\alpha} \left\{ \text{Var}[R_p(\alpha)]; \alpha^t \mu = \bar{\mu}_p, \alpha^t e = 1 \right\}$$

Ved å variere  $\bar{\mu}_p$  gir denne ligningen en analytisk fremstilling av porteføljefronten definert i seksjon 3.3. Relasjonen kan løses eksplisitt ved å formulere Lagrangefunksjonen med to sidebetingelser:

$$\mathcal{L} = \alpha^t \Sigma \alpha - \lambda_1 (\alpha^t \mu - \bar{\mu}_p) - \lambda_2 (\alpha^t e - 1)$$

Førsteordensbetingelsene er da som følger:

$$2\Sigma\alpha = \lambda_1\mu + \lambda_2 e \quad (3.4a)$$

$$\alpha^t \mu = \bar{\mu}_p \quad (3.4b)$$

$$\alpha^t e = 1 \quad (3.4c)$$

Porteføljevektene kan finnes implisitt ved å benytte den inverse kovariansmatrisen på ligning (3.4a):

$$2\alpha = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} e \quad (3.5)$$

For å finne vektene eksplisitt, må Lagrange-multiplikatorene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  spesifiseres. Dette kan gjøres ved å premultiplisere ligning (3.5) med henholdsvis  $\mu^t$  og  $e^t$  og bruke (3.4b) og (3.4c):

$$\begin{aligned} 2\bar{\mu}_p &= \lambda_1 \mu^t \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \mu^t \Sigma^{-1} e \\ 2 &= \lambda_1 e^t \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 e^t \Sigma^{-1} e \end{aligned}$$

Merton (1972) definerte fire konstanter for å få en ryddig og enkel løsning på problemet:  $a = \mu^t \Sigma^{-1} \mu$ ,  $b = \mu^t \Sigma^{-1} e = e^t \Sigma^{-1} \mu$  og  $c = e^t \Sigma^{-1} e$ . De to ligningene har da to ukjente, hvis løsning er gitt ved:

$$\lambda_1 = \frac{2(c\bar{\mu}_p - b)}{d} \quad \lambda_2 = \frac{2(a - b\bar{\mu}_p)}{d} \quad (3.6)$$

hvor  $d = ac - b^2$  og hvor fortegnene per definisjon er  $a > 0$ ,  $c > 0$  og  $d > 0$ .<sup>10</sup> Det eksplisitte uttrykket for porteføljevektene som løser minimeringsproblemet finnes ved å substituere (3.6) inn i (3.5):

$$\alpha^* = \frac{1}{d}(a\Sigma^{-1}e - b\Sigma^{-1}\mu) + \frac{1}{d}(c\Sigma^{-1}\mu - b\Sigma^{-1}e)\bar{\mu}_p \quad (3.7)$$

Merk at dette er den analytiske løsningen til den kritiske linjen,  $l$ , definert i figur 4. Med dette resultatet kan den indirekte minimumvarians-relasjonen fremstilles eksplisitt ved å premultiplisere ligning (3.4a) med  $\alpha^{*t}$ , og substituere inn ligningene definert i (3.6):

$$2\alpha^{*t}\Sigma\alpha^* = \left(\frac{2(c\bar{\mu}_p - b)}{d}\right)\alpha^{*t}\mu + \left(\frac{2(a - b\bar{\mu}_p)}{d}\right)\alpha^{*t}e$$

som gir følgende eksplisitte uttrykk for minimumvarians-relasjonen:

$$\sigma_m^2(\bar{\mu}_p) = \frac{1}{d}\left(a - 2b\bar{\mu}_p + c\bar{\mu}_p^2\right) \quad (3.8)$$

Ved å variere verdier på  $\bar{\mu}_p$  kan vi ved hjelp av ligning (3.8) finne den korresponderende minimale variansen. Plotter vi disse størrelsene i et MV diagram vil vi få frem hele porteføljefronten slik som vist i figur 2(b). Fronten vil være formet som en parabel i MV diagrammet, men som en hyperbel dersom vi benytter standardavvik istedenfor varians.

I figur 2(b), 3(c) og 4 er punktet  $G$  fremstilt som den globale variansminimerende porteføljen (GMVP). Forventningsverdien til GMVP,  $\mu_0$ , finnes ved å derivere ligning (3.8):

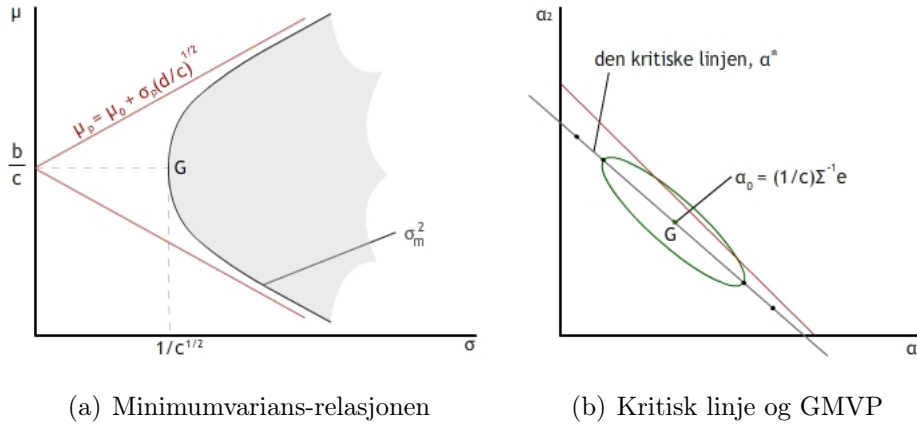
$$\frac{d\sigma_m^2}{d\mu_0} = \frac{2c\mu_0 - 2b}{d} = 0 \Rightarrow \mu_0 = \frac{b}{c} \quad (3.9)$$

Som har tilhørende minimumsverdi på varians,  $\sigma_m^2(\mu_0) = \sigma_0^2 = 1/c$ . Porteføljevektene  $\alpha_0$  som korresponderer til denne porteføljen er gitt fra ligning (3.7):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{d}(a\Sigma^{-1}e - b\Sigma^{-1}\mu) + \frac{1}{d}(c\Sigma^{-1}\mu - b\Sigma^{-1}e)\frac{b}{c} \\ \alpha_0 &= \frac{1}{c}\Sigma^{-1}e \end{aligned} \quad (3.10)$$

---

<sup>10</sup>På grunn av Cauchy-Schwarz ulikheten er  $d > 0$  under antakelsen om at  $\Sigma^{-1}$  eksisterer og at ikke alle aktivaene har lik forventningsverdi. Både  $c$  og  $a$  er positive da de utgjør kvadratiske former med en positiv definit matrise  $\Sigma^{-1}$ . Konstanten  $b$  kan være positiv eller negativ, avhengig av den globale variansminimerende porteføljen som defineres i ligning (3.9). Dersom denne har positiv forventet avkastning vil også  $b > 0$ , noe som er en rimelig antakelse.



Figur 5: Sammenhengen mellom geometri og formler

Helningen på asymptotene til porteføljefronten kan finnes fra  $d\mu_p/d\sigma_m$  når  $\mu_p$  går mot  $\pm\infty$ .

$$\frac{d\mu_p}{d\sigma_m} = \frac{d\mu_p}{d\sigma_m^2} \frac{d\sigma_m^2}{d\sigma_m} = \frac{d}{2c\mu_p - 2b} 2\sigma_m = \frac{\sqrt{d}}{c\mu_p - b} \sqrt{a - 2b\mu_p + c\mu_p^2}$$

$$\lim_{\mu_p \rightarrow \pm\infty} \frac{d\mu_p}{d\sigma_m} = \pm \sqrt{\frac{d}{c}}$$

hvor andre og tredje likhetstegn finnes ved å gjøre bruk av henholdsvis (3.9) og (3.8). Asymptotene har da ligning gitt ved

$$\mu_p = \mu_0 \pm \sqrt{\frac{d}{c}} \sigma_p \tag{3.11}$$

Disse resultatene er presentert grafisk i figur 5(a) og (b). Med forventning og varians på aksene gir (3.8) sammenhengen mellom minimal varians og forventningsverdi; altså porteføljefronten. Denne fronten har asymptoter beskrevet av (3.11). Den globale variansminimerende porteføljen,  $G$ , har forventningsverdi beskrevet i (3.9). Med  $n = 2$  og de to aktivaene langs aksene er den kritiske linjen gitt ved (3.7), hvor punktet  $G$  er gitt fra (3.10).

### 3.5 Direkte maksimering og Markowitz-modellen

Tobin (1958) og det påfølgende arbeidet av Markowitz (1959) var det første som pekte på at Markowitz-modellen og dens forventning-variens kriterie kun vil være konsistent med direkte maksimering, altså problem (2.2), samt von Neumann-Morgenstern aksiomene for rasjonelle valg når (i) aktivaene har normalfordelt avkastning eller (ii) investorens

preferanser kan representeres ved en kvadratisk nyttefunksjon. I tillegg påviste Chamberlain (1983) at såkallte elliptiske fordelinger også gjør MV kriteriet konsistent med direkte maksimering av forventet nytte. Disse sammenhengene kan forklares ved å spesifisere forventet nytte som en funksjon av de to første momentene,  $V(m_1, m_2)$ , hvor sluttformuens to første *absolutte momenter* er gitt ved  $m_1 = E[\tilde{Y}]$  og  $m_2 = E[\tilde{Y}^2]$ . Forventet nytte kan da beskrives som:

$$E[u(\tilde{Y})] = V(m_1, m_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(Y)f(Y; m_1, m_2)dY \quad (3.12)$$

hvor  $f(Y; m_1, m_2)$  er sannsynlighetsfordelingen til sluttformuen avhengig av de to første momentene.

### 3.5.1 Normalfordelte variable og kvadratiske nyttefunksjoner

Antakelsen om kvadratisk nytte kan forklares ved å spesifisere formen på nyttefunksjonen  $u(\cdot)$ , men la sannsynlighetsfordelingen være uspesifisert  $f(Y)$ . Hvis nyttefunksjonen er lineær,  $u(Y) = Y$ , vil maksimering av forventet nytte være konsistent med maksimering av forventet avkastning, fordi ligning (3.12) da kun vil være avhengig av det første absoluttmomentet. Hanoch og Levy (1970) argumenterte for at den eneste matematiske formen på en nyttefunksjon som gjør at forventet nytte kun avhenger av forventningen og variansen til en vilkårlig sannsynlighetsfordeling er gitt ved:

$$u(Y) = Y + c_2Y^2$$

hvor konstanten antas å være negativ,  $c_2 < 0$ . Denne funksjonen kalles for den kvadratiske nyttefunksjonen fordi den består av sluttformuen og kvadratet av sluttformuen. Et viktig poeng er at funksjonen ikke eksplisitt består av forventning og varians, men av et andregradspolynom med sluttformue som variabel. En vanlig antakelse i finansiell økonomi er å la investorens nytte være funksjon av nettopp porteføljens forventede avkastning og varians, noe som altså er feil dersom det spesifiseres direkte i  $u(\cdot)$ , men korrekt dersom vi snakker om forventet nytte. Dette bevises ved å bruke den kvadratiske nyttefunksjonen i ligning (3.12):

$$\begin{aligned} E[u(\tilde{Y})] &= V(m_1, m_2) = \int_{-\infty}^{\infty} Y + c_2Y^2 f(Y)dY \\ &= m_1 + c_2m_2 = E[\tilde{Y}] + c_2E[\tilde{Y}^2] \\ &= E[\tilde{Y}] + c_2(E[\tilde{Y}])^2 + c_2Var[\tilde{Y}] = \mu_Y + c_2(\mu_Y^2 + \sigma_Y^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Fra dette uttrykket ser vi at en investor med kvadratisk nyttefunksjon maksimerer sin forventede nytte ved å velge porteføljer som maksimerer forventet sluttformue og minimiserer sluttformuens varians uten å ta hensyn til høyere momenter.<sup>11</sup> Ingersoll (1987) argumenterer for at så lenge nyttefunksjonen har positiv marginalnytte, dvs  $Y < -1/2c_2$ , vil indifferenskurvene representert ved ligning (3.13) være konvekse, slik at det eksisterer ett tangeringspunkt med porteføljefronten. Kvadratisk nytte er da en tilstrekkelig betingelse for at Markowitz-modellen skal være konsistent med maksimering av forventet nytte. I lys av diskusjonen i seksjon 2 betyr dette at porteføljefronten fungerer som et perfekt substitutt til direkte maksimering og stokastisk dominans.

Det å anta kvadratisk nyttefunksjon er imidlertid ikke uproblematisk, noe som er blitt poengtert ved å bruke risikoaversjonsmålene til Pratt (1964) og Arrow (1965). For det første har alle kvadratiske konkave funksjoner et toppunkt, slik at nytten synker ved et visst nivå på sluttformuen. For det andre representerer den kvadratiske nyttefunksjonen økende absolutt risikoaversjon (ARA):

$$r_A = -\frac{u''(Y)}{u'(Y)} = -\frac{2c_2}{1 + 2c_2Y}$$

Vi ser at denne funksjonen er økende i  $Y$ , noe som impliserer at høyere sluttformue øker investorens aversjon mot risiko. Implikasjonen av dette er at "rike" beslutningstakere vil være mindre tilbøyelige til å ta risiko enn beslutningstakere med lav initialformue. Det er bred enighet blandt praktikere om at slike preferanser er kontra-intuitive og svært sjeldne i praksis.

En noe mer vanlig rettferdiggjøring av MV kriteriet er antakelsen om normalfordeling. Antar vi at alle aktivaenes avkastningsprofiler er normalt distribuert med forventning  $\mu_i$  og standardavvik  $\sigma_i$ , følger det at en vektet kombinasjon  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{R}_i$  også vil være normalfordelt med forventning  $\mu_p$  og standardavvik  $\sigma_p$ . Dermed vil også stokastisk sluttformue, som kun er avhengig av én stokastisk størrelse,  $\tilde{R}_p$ , være normalfordelt med forventning  $\mu_Y$  og varians  $\sigma_Y^2$ . Siden normalfordelingen er karakterisert ved forventning og varians alene, vil alle porteføljer konstruert fra normalfordelte variable også kun være funksjoner av forventning og varians.

Tobin (1958), Hanoch og Levy (1969) og Ingersoll (1987) viste at optimale porteføljevalg under antakelse om normalfordeling gir minimumvarians porteføljer. La nå  $u(Y)$  være uspesifisert, men la sannsynlighetsfordelingen være gitt ved de to første momentene:

---

<sup>11</sup>Maksimering av forventet sluttformue og minimering av varians er ekvivalent med å maksimere porteføljeavkastning og minimere porteføljevarians fordi  $\mu_Y = E[\tilde{Y}] = w(1 + \mu_p)$  og  $\sigma_Y^2 = Var[\tilde{Y}] = w^2\mu_p^2$ .

$$f(Y; \mu_Y, \sigma_Y^2) = \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(Y - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right) = \frac{1}{\sigma_Y} \phi\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

hvor  $\phi(Y)$  er tetthetsfunksjonen til standard normalfordelingen, gitt ved:

$$\phi(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}Y^2\right)$$

Ved forventning 0 og standardavvik 1 er disse to tetthetsfunksjonene sammenfallende;  $\phi(Y) = f(Y; 0, 1)$ . Ved å bruke (3.12) er forventet nytte nå gitt ved:

$$E[u(\tilde{Y})] = V(\mu_Y, \sigma_Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(Y) f(Y; \mu_Y, \sigma_Y^2) dY$$

Anta videre en standard normalfordelt variabel  $z$  med forventning 0 og standardavvik 1 slik at  $z = (Y - \mu_Y)/\sigma_Y$ . Forventet nytte kan da omskrives til:

$$E[u(\tilde{Y})] = V(\mu_Y, \sigma_Y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mu_Y + \sigma_Y z) \phi(z) dz \quad (3.14)$$

Fra ligning (3.14) ser vi at forventet nytte kun avhenger av forventning og varians dersom normalfordelingsantakelsen holder. MV kriteriet kan da bevises ved å derivere ligning (3.14) med hensyn på de respektive variablene:

$$\frac{\partial V}{\partial \mu_Y} = \int_{-\infty}^{\infty} u'(\mu_Y + \sigma_Y z) \phi(z) dz > 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2} = \frac{1}{2\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} u''(\mu_Y + \sigma_Y z) \sigma_Y \phi(z) dz < 0 \quad (3.16)$$

hvor sistnevnte ligning er utledet i bevis 2 i appendikset. Ligning (3.15) er positiv hvis  $u' > 0$  og ligning (3.16) er negativ dersom  $u'' < 0$ . Følgelig er Markowitz-modellen konsistent med maksimering av forventet nytte dersom aksjenes avkastningsprofiler følger normalfordelingen og nyttefunksjonen tilhører settet  $\mathcal{U}$ .

### 3.5.2 Elliptiske fordelinger

Som nevnt i introduksjonen påviste Chamberlain (1983) at hverken kvadratisk nytte eller normalfordeling er nødvendig for konsistens med forventet nytte. Markowitz-modellen vil holde eksakt hvis aktivaenes avkastningsprofiler følger såkallte *elliptiske fordelinger*, som for eksempel normalfordelingen<sup>12</sup>, t-fordelingen, Levy-fordelingen, Laplace-fordelingen

<sup>12</sup>Merk at normalfordelingen også er en elliptisk fordeling. Resultatene for elliptiske fordelinger kan dermed betraktes som mer generelle enn resultatene for normalfordelingen.

eller Cauchy-fordelingen. Navnet på denne gruppen fordelinger kommer fra kjennetegnet om at fordelingene har isosannsynlighetskurver formet som ellipser i diagrammer med to aksjers avkastning langs aksene, se for eksempel Owen og Rabinovitch (1983). Ingersoll (1987) viste Chamberlains påstand ved å utlede at alle porteføljer kan karakteriseres med forventning og spredning alene, og at økt spredning gir lavere nytte.<sup>13</sup>

Resultatene i denne seksjonen beviser påstandene nevnt i introduksjonen til denne utredningen. Aktiva med elliptiske fordelinger (spesielt normalfordelingen) eller bruk av kvadratisk nyttefunksjon vil bety at porteføljer valgt ved hjelp av Markowitz-modellen maksimerer forventet nytte. Empiri viser imidlertid at aktiva sjeldent har normalfordelte eller andre elliptiske fordelinger, samtidig som kvadratiske nyttefunksjoner baserer seg på problematiske antakelser. Levy (1969) argumenterer for at høyere momenter bør inkluderes i porteføljeproblemet *til tross* for normalfordeling, fordi høyere momenter kan være funksjoner av de to første momentene og dermed relevante for beregning av forventet nytte. Denne påstanden svekker normalfordelingsantakelsen ytterligere og støtter bruk av høyere momenter i porteføljeproblemer.

Et sentralt og viktig spørsmål er derfor hvordan den diskuterte teorien kan utvides til å omhandle høyere momenter. I denne konteksten reises en rekke spørsmål: hvor mange momenter bør tas med i utvidelsen? Kan Markowitz-modellen utvides til å omhandle høyere momenter som skjevhet og kurtose, eller må det utvikles en helt ny modell? Vil den nye modellen kunne garantere konsistens med direkte maksimering i seksjon 2.2? Dette er noen av spørsmålene jeg ønsker å besvare i den neste delen av denne utredningen.

---

<sup>13</sup>Spredning er det samme som varians i normalfordelingen, men kan være forskjellig fra varians i andre fordelinger. Spredning er imidlertid proporsjonal med varians og disse er derfor sammenfallende for Ingersoll sitt formål.

## 4 Forventning, varians og skjevhet

MVS modeller har lenge vært diskutert i litteraturen, men det virker ikke som noen generell fremgangsmåte for konstruksjon av MVS fronten er blitt allment akseptert. I denne delen av utredningen vil jeg prøve å utvikle en MVS modell som hverken krever normalfordeling eller spesifisering av nyttefunksjon for å være konsistent med maksimering av forventet nytte. Jeg vil deretter definere en ny ligning, substitusjonsligningen, som kan benyttes til å trekke konklusjoner om formen på den effisiente MVS fronten. Seksjon 4.1 og 4.2 presenterer nyttige begreper og verktøy nødvendige for å formulere MVS modellen og substitusjonsligningen som er presentert i seksjon 4.3.

### 4.1 Skjeve fordelinger

Skjevhet er et mål på grad av asymmetri i en tilfeldig variabels sannsynlighetsfordeling. Er en variabel normalfordelt, betyr det at den er symmetrisk sentrert rundt en forventningsverdi med et gitt standardavvik. Alternativt kan man se på normalfordelingen som en fordeling med asymmetri lik null. Avviker vi fra denne forutsetningen får vi da en venstre- eller høyreskjev fordeling slik som vist i figur 6. Venstreskjeve avkastningsfordelinger kan karakteriseres med at store deler av utfallene ligger til høyre i figuren. En fordeling er høyreskjev når utfallene er sentrert til venstre i figuren og det eksisterer lav sannsynlighet for utfall med høye verdier. Høyreskjeve fordelinger har dermed positiv skjevhet - det finnes sannsynligheter for utfall av ekstrem positiv art, samtidig som det er lav sannsynlighet for ekstreme negative utslag. Slike fordelinger er dermed attraktive ut fra et porteføljeperspektiv. Matematisk er skjevhet relatert til det tredje sentralmomentet<sup>14</sup> av den stokastiske avkastningen  $\tilde{R}_i$  for aktiva  $i$ :

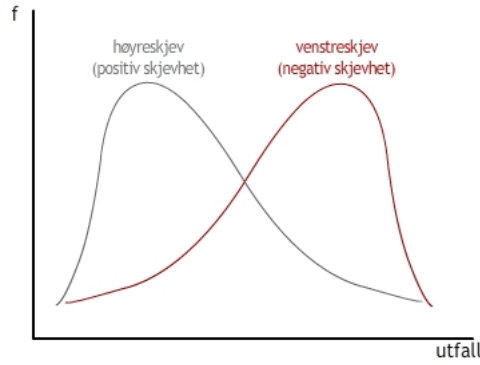
$$Skew[\tilde{R}_i] = E[(\tilde{R}_i - \mu_i)^3]$$

På samme måte som for varians, vil skjevhet kalkulert som en vektet kombinasjon av  $Skew[\tilde{R}_i]$  for hvert enkelt aktiva ikke være tilstrekkelig i en porteføljekontekst fordi det ikke tas hensyn til *koskjevhet*. Akkurat som kovarians spiller en viktig rolle for risikospredning og diversifisering, spiller koskjevhet en viktig rolle for porteføljens totale asymmetri. Koskjevhet kan defineres som symmetrien i en variabels sannsynlighetsfordeling sett i forhold til symmetrien i en annen variabels sannsynlighetsfordeling. Alt annet konstant, vil positiv koskjevhet mellom to variabler uttrykke at den første variabelen er mer høyreskjev

---

<sup>14</sup>Merk at skjevhet er relatert til en fordelings tredje sentralmoment. Sydsæter et al (2006) definerer det  $k$ -te sentralmomentet omkring forventningen som  $E[(x - \mu)^k]$ , hvor  $k = 1, 2, 3$  gir henholdsvis 0, varians og skjevhet. Det er viktig å skille dette fra det absolutte momentet definert tidligere som  $m_k = E[\tilde{Y}^k]$ .





Figur 6: Venstre- og høyreskjeve fordelinger

enn den andre variabelen. Matematisk er koskjevheten mellom de tre aktivaene  $i$ ,  $j$  og  $k$  gitt ved:

$$\text{Coskew}[\tilde{R}_i, \tilde{R}_j, \tilde{R}_k] = s_{ijk} = E[(\tilde{R}_i - \mu_i)(\tilde{R}_j - \mu_j)(\tilde{R}_k - \mu_k)]$$

som er en generalisering av skjevhetsformelen. Formlene er sammenfallende for  $i = j = k$ , fordi  $s_{iii} = \text{Skew}[\tilde{R}_i]$ . Athayde og Flôres (2004) håndterer koskjevhet ved å se på  $n$  forskjellige  $n \times n$  matriser:

$$\Upsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} s_{11k} & s_{12k} & \cdots & s_{1nk} \\ s_{21k} & s_{22k} & \cdots & s_{2nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1k} & s_{n2k} & \cdots & s_{nnk} \end{pmatrix}$$

hvor  $k = 1, 2 \dots n$  og hvert enkelt element kan finnes fra koskjevhetsformelen. For  $k = 1$  vil det tredje sentralmomentet være gitt fra  $s_{111} = \text{Skew}[\tilde{R}_1]$ , mens det for  $k = 2$  er gitt ved  $s_{222} = \text{Skew}[\tilde{R}_2]$  osv... Fra et analytisk perspektiv vil disse matrisene være vanskelig å arbeide med fordi de sammensatt utgjør en tensor.<sup>15</sup> Athayde og Flôres argumenterer for at dette problemet kan omgås ved å konstruere en  $n \times n^2$  matrise, dannet ved å sette de  $n$  matrisene horisontalt etter hverandre. Skjevhet-koskjevhetsmatrisen  $\Upsilon$  er da gitt som:

<sup>15</sup>Tensoren har i dette tilfellet dimensjon  $n \times n \times n$ .

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \Upsilon_{ij1} & \Upsilon_{ij2} & \cdots & \Upsilon_{ijn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} s_{111} & s_{121} & \cdots & s_{1n1} & s_{112} & s_{122} & \cdots & s_{1n2} & \cdots & s_{11n} & s_{12n} & \cdots & s_{1nn} \\ s_{211} & s_{221} & \cdots & s_{2n1} & s_{212} & s_{222} & \cdots & s_{2n2} & \cdots & s_{21n} & s_{22n} & \cdots & s_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n11} & s_{n21} & \cdots & s_{nn1} & s_{n12} & s_{n22} & \cdots & s_{nn2} & \cdots & s_{n1n} & s_{n2n} & \cdots & s_{nnn} \end{pmatrix}$$

Ved høye verdier på  $n$  vil denne matrisen inneholde et stort antall elementer. Imidlertid er bare  $(n+2)(n+1)n/6$  elementer unike, noe som drastisk reduserer antall nødvendige beregninger. Med utgangspunkt i denne skjevhet-koskjevhetmatrisen kan porteføljens totale skjevhet beregnes ved hjelp av følgende uttrykk.

$$s_p^3 = Skew[R_p(\alpha)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_j \alpha_k s_{ijk}$$

$$= \alpha^t \begin{pmatrix} \Upsilon_{ij1} & \Upsilon_{ij2} & \cdots & \Upsilon_{ijn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \times \alpha \\ \alpha_2 \times \alpha \\ \vdots \\ \alpha_n \times \alpha \end{pmatrix} = \alpha^t \Upsilon (\alpha \otimes \alpha)$$

hvor  $\otimes$  er Kronecker-produktet.

## 4.2 Forventet nytte med høyere momenter

I seksjon 3.5 benyttet jeg to momenter for å bevise sammenhengen mellom Markowitz-modellen og forventet nytte. Borch (1969) forklarer det utvidede nyttebegrepet ved å anta at dersom det eksisterer en uspesifisert nyttefunksjon  $u(Y)$  vil forventet nytte med  $K$  momenter være gitt ved:

$$E[u(\tilde{Y})] = V(m_1, \dots, m_K) = \int_{-\infty}^{\infty} u(Y) f(Y; m_1, \dots, m_K) dY$$

Dette resultatet holder kun dersom  $u(Y)$  er et polynom av grad  $K$ :

$$u(Y) = Y + c_2 Y^2 + \cdots + c_K Y^K$$

og  $V(m_1, \dots, m_K)$  er lineær:

$$V(m_1, \dots, m_K) = m_1 + c_2 m_2 + \cdots + c_K m_K$$

hvor  $c_2, \dots, c_K$  er konstanter og absoluttmoment  $k$  er gitt ved  $m_k = E[\tilde{Y}^k]$ . Müller og Machina (1987) støtter dette resultatet og beviser det faktum at en nyttemaksimerer med von Neumann-Morgenstern nyttefunksjon  $u$  vil rangere sannsynlighetsfordelinger basert på deres  $K$  første absolutte momenter, bare hvis  $u$  er et polynom av maksimalt grad  $K$ . Levy (1969) og Hanoch og Levy (1970) introduserer skjevhet i nyttebegrepet ved å utvide den kvadratiske nyttefunksjonen til et tredjegradspolynom:

$$u(Y) = Y + c_2 Y^2 + c_3 Y^3$$

som tilsvarer  $K = 3$ . Med Borchs forklaring er forventet nytte da avhengig av de tre første absolutte momentene:

$$\begin{aligned} E[u(\tilde{Y})] &= \int_{-\infty}^{\infty} Y + c_2 Y^2 + c_3 Y^3 f(Y) dY \\ &= E[\tilde{Y}] + c_2 E[\tilde{Y}^2] + c_3 E[\tilde{Y}^3] \end{aligned}$$

hvor følgende sammenhenger gjelder:

$$\begin{aligned} E[\tilde{Y}^2] &= (E[\tilde{Y}])^2 + Var[\tilde{Y}] \\ E[\tilde{Y}^3] &= E[(\tilde{Y} - E[\tilde{Y}])^3] - 2(E[\tilde{Y}])^2 + 3E[\tilde{Y}^2]E[\tilde{Y}] \end{aligned}$$

Med disse reglene kan forventet nytte da skrives som:

$$E[u(\tilde{Y})] = \mu_Y + c_2 \mu_Y^2 + c_3 \mu_Y^3 + \sigma_Y^2 (3c_3 \mu_Y + c_2) + c_3 Skew[\tilde{Y}] \quad (4.1)$$

Dersom  $c_2 < 0$  og  $c_3 > 0$  viser uttrykket at forventet nytte øker med forventning og det tredje sentralmomentet, mens effekten av varians er uklar. Denne nyttefunksjonen har noen fordeler som gjør den attraktiv sammenlignet med kvadratiske funksjoner. For det første avhenger forventet nytte ikke bare av forventning og varians, men også av skjevheten til porteføljens fordeling. Dette er helt nødvendig dersom vi ønsker å unngå fra forutsetningen om normalfordeling. For det andre gir to parametere mer fleksibilitet og dermed en bedre approksimasjon til en generell nyttefunksjon. For det tredje finnes det intervaller hvor kubikkfunksjonen gir avtakende absolutt risikoaversjon, en ønsket egenskap som var fraværende ved bruk av kvadratisk nytte.

Man skal imidlertid være forsiktig med å bruke denne typen funksjoner fordi den krever nokså omfattende parameterspesifikasjoner. For at kubikkfunksjonen skal være en del av klassen med nyttefunksjoner  $\mathcal{U}$  må det legges en rekke restriksjoner på konstantene  $c_2$  og  $c_3$ . I tillegg til å anta  $c_2 < 0$  og  $c_3 > 0$ , viser Levy (1969) at positiv marginalnytte krever  $c_2^2 < 3c_3$ . Videre vil risikoaversjonsaspektet (konkav  $u$ ) bare være oppfylt dersom formuen begrenses av  $Y < -c_2/3c_3$ , mens  $u''' > 0$  krever  $c_3 > 0$ .

Til tross for at kubikkfunksjonen hensyntar skjevhet, bør ulempene knyttet til parameterene tillegges stor vekt. Spesifikasjon av nyttefunksjon er svært tidkrevende dersom man står ovenfor investorer med ulike preferanser. Selv med investorer som alle har preferanser uttrykt ved en kubikk funksjon, vil parameterene  $c_2$  og  $c_3$  sannsynligvis variere med personene og dermed gjøre arbeidet mer krevende.

Et alternativ til kubikk nyttefunksjon er approksimeringer av forventet nytte ved hjelp av Taylor-rekker. Bruken av slike rekker har fått bred støtte blant teoretikere fordi spesifikasjon av nyttefunksjon ikke er nødvendig. Forventningsverdien til en uendelig Taylor-rekke av  $u(Y)$  rundt  $\mu_Y$  er gitt ved formelen:

$$E[u(\tilde{Y})] = \sum_{k=0}^{K=\infty} \frac{1}{k!} u^{(k)}(\mu_Y) E[(\tilde{Y} - \mu_Y)^k]$$

hvor  $K = 2$  tilsvarer forventet nytte under MV kriteriet. Fra et analytisk perspektiv er denne rekken vanskelig å jobbe med fordi den inneholder uendelig mange momenter. Konvensjonen har derfor vært å "kutte" rekken ved en gitt verdi på  $K$ . Både Jondeau og Rockinger (2003) og Briec et al (2007) approksimerer forventet nytte ved hjelp av en tredjeordens Taylor-rekkeutvikling<sup>16</sup> av nyttefunksjonen  $u(Y)$  rundt forventningsverdien  $\mu_Y$ :

$$u(\tilde{Y}) \approx u(\mu_Y) + u'(\mu_Y)(\tilde{Y} - \mu_Y) + \frac{1}{2!} u''(\mu_Y)(\tilde{Y} - \mu_Y)^2 + \frac{1}{3!} u'''(\mu_Y)(\tilde{Y} - \mu_Y)^3$$

Ved å ta forventningen på begge sider får vi:

$$E[u(\tilde{Y})] \approx u(\mu_Y) + u'(\mu_Y)E[(\tilde{Y} - \mu_Y)] + \frac{1}{2!} u''(\mu_Y)E[(\tilde{Y} - \mu_Y)^2] + \frac{1}{3!} u'''(\mu_Y)E[(\tilde{Y} - \mu_Y)^3]$$

Denne ligningen inneholder de tre første sentralmomentene og kan derfor skrives som:

$$E[u(\tilde{Y})] \approx u(\mu_Y) + \frac{1}{2} u''(\mu_Y) Var[\tilde{Y}] + \frac{1}{6} u'''(\mu_Y) Skew[\tilde{Y}] \quad (4.2)$$

Dersom nyttefunksjonen  $u \in \mathcal{U}$  vil forventet nytte være økende i porteføljens forventning og skjevhet, men avtakende i porteføljevarians. Dette stemmer godt med resonomentene rundt forventning-varians kriteriet i seksjon 3 og intuisjonen bak skjevhet. Metoden krever altså ikke eksplisitt spesifikasjon av nyttefunksjon, men det stilles krav til de derivertes fortegn. Rammeverket besitter imidlertid noen svakheter som gjør det mindre attraktivt

---

<sup>16</sup>En generell tredjeordens Taylor-rekkeutvikling av en vilkårlig funksjon  $f(x)$  rundt  $x = a$  finnes i for eksempel Sydsæter et al (2006):  $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x - a)^3$

som mål på forventet nytte. Ved å sette  $K = 3$  vil forventet nytte kun approksimeres av de tre første sentralmomentene, fordi alle momenter  $K > 3$  ignoreres. Som poengtert tidligere vil høyere momenter alltid kunne være funksjoner av lavere momenter, noe som taler for en høy verdi på  $K$ . På en annen side viser Mencia og Sentana (2009) at en porteføljes fordeling kan karakteriseres med forventning, varians og skjevhet alene, dersom aksjenes avkastning følger en fleksibel multivariat asymmetrisk fordeling kalt "location scale mixture of normals". Dette er en bred klasse fordelinger anvendbar på portefølje problemer, noe som styrker antakelsen om tre momenter. Kraus og Litzenberger (1976) argumenterer for bruk av tre momenter da deres empiriske undersøkelser viser at høyere momenter ikke er signifikante.

I resten av denne utredningen vil jeg derfor benytte  $K = 3$ . Enkelte forskere gjør analyser med  $K = 4$ , men med andre hensikter enn å beskrive MVS planet.<sup>17</sup> Faktisk vil en nyttefunksjon med fire sentralmomenter gjøre det umulig å gi en intuitiv illustrasjon av dette planet, fordi det vil kreve fire dimensjoner. Bruk av tre momenter kan rettferdiggjøres da formålet med utredningen er å beskrive formen til en tredimensjonal portefølje front, samt å påvise en sammenheng mellom forventning, varians og skjevhet. Under denne forutsetningen er forventet nytte eksakt gitt ved ligning (4.2). Metoden jeg kommer til å anvende kan imidlertid rent optimeringsmessig generaliseres til et vilkårlig antall momenter.

### 4.3 MVS modellen

Ligning (4.2) er uttrykt ved sluttformue, men gir et teoretisk fundament for at forventet nytte er økende i porteføljes forventede avkastning og skjevhet, men avtakende i varians. Målet er å utvikle en porteføljemodell som håndterer skjevhet og samtidig er konsistent med maksimering av forventet nytte. En mulig formulering av optimeringsproblemet er da som følger:

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} E[u(Y(\alpha))] \\ \text{gitt at} \\ \alpha^t e = 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

hvor  $E[u(Y(\alpha))]$  er gitt fra ligning (4.2). Som påpekt av Konno og Suzuki (1995), vil denne fremgangsmåten være vanskelig å gjennomføre fordi den krever eksplisitt spesifisering av nyttefunksjonen. Med utgangspunkt i (4.2) og under antakelsen  $u \in \mathcal{U}$  virker det

---

<sup>17</sup>Jondeau og Rockinger (2003) sammenligner optimale porteføljevækt ved  $K = 3$  og  $K = 4$  ved å anta nyttefunksjon med konstant relativ risikoaversjon.

naturlig at optimale porteføljer må maksimere både forventning og skjevhet, samtidig som variansen minimeres:

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha} E[R_p(\alpha)] &= \alpha^t \mu \\
\min_{\alpha} Var[R_p(\alpha)] &= \alpha^t \Sigma \alpha \\
\max_{\alpha} Skew[R_p(\alpha)] &= \alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) \\
&\text{gitt at} \\
&\alpha^t e = 1
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dette danner grunnlaget for en MVS modell og et *MVS kriterie*: Investorer ønsker maksimal avkastning, maksimal positiv asymmetri og minimal risiko. Dette betyr at den effisiente delen av den tredimensjonale MVS porteføljefronten består av porteføljer som for gitt maksimal forventning og skjevhet gir minimal varians. Fordi flere størrelser optimeres simultant er problem (4.4) innenfor matematikken kalt "Multi-Objective Optimization", jfr. Yu et al (2008).

### 4.3.1 Problemer

Etter min oppfatning er det tre problemer knyttet til modellen definert i (4.4). For det første vil simultan optimering gjøre en utvidelse av Markowitz modellen problematisk grunnet dens manglende evne til å optimere flere momenter samtidig. For det andre er porteføljeskjevhet gitt ved et tredjegradspolynom, hvis form er fleksibel og avhengig av verdiene på skjevhet og koskjevhet. For det tredje vil det kunne oppstå situasjoner hvor investorer faktisk ønsker porteføljer med høyere varians, lavere skjevhet eller mindre avkastning, noe som er den rake motsetningen av MVS kriteriet. Disse problemene diskuteres under.

Dersom vi implementerer skjevhet i Markowitz-modellen, blir målet å minimere varians for gitte verdier på forventning og skjevhet. Alternativt kan forventning maksimeres for gitte verdier på varians og skjevhet, eller skjevhet maksimeres for gitte verdier på forventning og varians. Alle metoder skulle i prinsippet gitt samme løsninger og dermed samme form på MVS fronten. Dersom vi benytter oss av den første varianten kan den minimale variansen finnes ved:

$$\sigma_m^2(\alpha) = \min_{\alpha} \left\{ \alpha^t \Sigma \alpha; \alpha^t e = \bar{\mu}_p, \alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) \geq \bar{s}_p^3, \alpha^t e = 1 \right\} \tag{4.5}$$

som minimerer varians for gitte, vilkårlige verdier på forventning og skjevhet,  $\bar{\mu}_p$  og  $\bar{s}_p^3$ . Antar vi at løsningen til dette problemet er gitt ved  $\alpha^*$ , vil tilhørende variansminimerende

verdi være gitt ved  $\sigma_m^2(\alpha^*)$ . Løsningen sørger for at variansen blir minimert, men er skjevheten maksimert?

For å svare på dette kan det defineres et separat maksimeringsproblem, hvor målet er å maksimere skjevhet for samme gitte verdi på forventning, men for varians mindre enn eller lik en vilkårlig verdi  $\bar{\sigma}_p^2$ . Den maksimale skjevheten er da gitt ved:

$$s_m^3(\alpha) = \max_{\alpha} \left\{ \alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha); \alpha^t e = \bar{\mu}_p, \alpha^t \Sigma \alpha \leq \bar{\sigma}_p^2, \alpha^t e = 1 \right\} \quad (4.6)$$

med løsning  $\alpha^{**}$  og tilhørende maksimal verdi på skjevhet  $s_m^3(\alpha^{**})$ . Minimeringsproblem (4.5) og maksimeringsproblem (4.6) sørger for at variansen blir minimert og skjevheten maksimert for en gitt forventningsverdi  $\bar{\mu}_p$ . Dette er imidlertid to separate optimeringsproblemer hvor de optimale porteføljevektene sannsynligvis vil være forskjellige. Svaret på om (4.5) faktisk maksimere skjevhet er derfor nei, så lenge  $\alpha^* \neq \alpha^{**}$ . Dermed kan vi ikke garantere at (4.5) både minimerer varians og maksimere skjevhet.

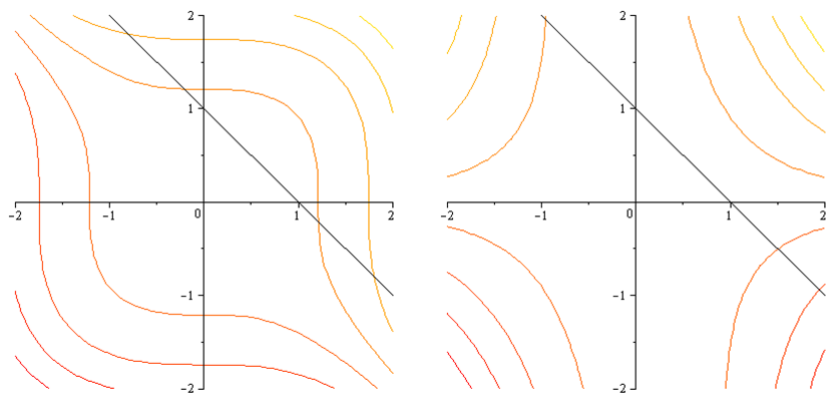
**Proposisjon 1** *Dersom  $\alpha^* = \alpha^{**}$  vil løsningen til (4.5) gi et punkt  $(\bar{\mu}_p, \sigma_m^2(\alpha^*), s_m^3(\alpha^*))$  som ligger på MVS fronten.*

Dette virker som en vanskelig innfallsvinkel. Vi må løse to separate problemer og løsningene må være sammenfallende for at vi kan garantere optimum. Dette synes enda vanskeligere når man tar i betraktning at verdiene  $\bar{\sigma}_p^2$  og  $\bar{s}_p^3$  settes vilkårlig. Markowitz-modellen med skjevhet fokuserer altså på optimering av én størrelse på bekostning av de andre størrelsene. Problem (4.5) er derfor ikke konsistent med (4.4) og kan følgelig ikke benyttes som MVS modell.

Det andre problemet er relatert til porteføljeskjevhetsfunksjonen. Markowitz-modellen ble løst ved hjelp av iso-forventningslinjer og iso-variansellipser, noe som gjorde det optimeringstekniske til en enkel oppgave. Dersom slike optimeringsproblemer skal garantere globale maksimumspunkter må målfunksjonen være kvasikonkav og sidebetingelsene utgjøre et konvekst sett. Introduksjon av skjevhet byr imidlertid på problemer fordi denne funksjonen ikke har noen fast bestemt form. Anta at vi ønsker å maksimere skjevhet gitt vektsumbetingelsen:

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \text{Skew}[R_p(\alpha)] &= \alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) \\ \text{gitt at} & \\ \alpha^t e &= 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

I praksis kan denne målfunksjonen ha mange forskjellige former, avhengig av verdiene på skjevhet og koskjevhet. En todimensjonal ( $n = 2$ ) analyse er gjengitt i figur 7 hvor



(a) Scenario 1:  $s_{iii} > 0$  og  $s_{ijk} = 0$  (b) Scenario 2:  $s_{iii} = 0$  og  $s_{ijk} > 0$

Figur 7: Skjevhetensfunksjonens fleksible form

de tilhørende formlene finnes i bevis 3 i appendikset. Disse to scenariene illustrerer skjevhetensfunksjonens fleksibilitet og uberegnelighet representert ved iso-skjevhetkurver i et  $(\alpha_1, \alpha_2)$  diagram. Lysere kurver indikerer høye verdier på skjevhet, mens mørke kurver viser lave skjevhetsverdier. Scenario 1 har en skjevhet-koskjevhet matrise  $\Upsilon$  med positive skjevhetsverdier og alle koskjevhetsverdier lik null. Denne funksjonsformen gir to tangeringspunkter mellom sidebetingelse og målfunksjon, noe som betyr at problemet har *to* optimale løsninger. Scenario 2 viser skjevhetensfunksjonen når koskjevhetsverdiene er positive, mens skjevhetsverdiene er lik null. Dette kan karakteriseres som et ønskelig scenario fordi det gir en kvasikonkav skjevhetensfunksjon som har *ett* tangeringspunkt med sidebetingelsen. I mer realistiske tilfeller med flere aktiva vil  $\Upsilon$  inneholde både positive og negative verdier på både skjevhet og koskjevhet, noe som vil gi en mellomting mellom disse scenariene. I slike tilfeller vil det derfor kunne eksistere mange *lokale* maksimumspunkter som gjør det vanskelig for standard optimeringsverktøy å finne de *globale* maksimumspunktene. I forlengelsen av dette vil det også være problematisk å finne de ikke-konvekse delene av MVS planet, noe som diskuteres i detalj senere.

I tillegg til å påvirke skjevhetensfunksjonens form, vil skjevhet-koskjevhetmatrisen også være problematisk sett fra et rent analytisk perspektiv. Formen på  $\Upsilon$  gjør det umulig å beregne eksplisitte uttrykk for porteføljevektene.<sup>18</sup> For å vise dette kan man formulere Lagrangefunksjonen til problem (4.7):

$$\mathcal{L} = \alpha^t \Upsilon (\alpha \otimes \alpha) - \gamma (\alpha^t e - 1)$$

hvor  $\gamma$  er Lagrange-multiplikatoren. Førsteordensbetingelsen er:

<sup>18</sup>Mencia og Sentana (2009) klarer å finne eksplisitte uttrykk, men de jobber med en bestemt fordelingstype.



$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 3\Upsilon(\alpha \otimes \alpha) - \gamma e = 0$$

Problemet er at  $\Upsilon$  har en ikke-kvadratisk form,  $n \times n^2$ , og følgelig ikke er invertibel. Hadde den inverse matrisen eksistert, kunne vi premultiplisert førsteordensbetingelsen med  $\Upsilon^{-1}$ , noe som hadde gitt en annengradsligning som kunne vært løst for  $\alpha$ . Da ikke-kvadratiske former ikke har noen invers, må det benyttes andre fremgangsmåter. En alternativ metode er å konstruere en kvadratisk matrise  $\Psi$ :

$$\Psi(\alpha) = \Upsilon(\alpha \otimes I)$$

hvor  $I$  er identitetsmatrisen med dimensjon  $n \times n$ . Matrisen  $\Psi(\alpha)$  har da også dimensjon  $n \times n$  og  $\Psi(\alpha)^{-1}$  eksisterer dersom  $\det(\Psi(\alpha)) \neq 0$ . Premultipliserer vi førsteordensbetingelsen med  $\Psi(\alpha)^{-1}$  får vi:<sup>19</sup>

$$\alpha = \frac{1}{3}\gamma\Psi(\alpha)^{-1}e$$

som løser for vektene på venstre side av likhetstegnet, men hvor vektene også inngår i den inverse matrisen på høyre side. Dette uttrykket er umulig å løse eksplisitt for  $\alpha$  og illustrerer problemet. Med utgangspunkt i denne utredningens formål er dette, isolert sett, ikke noe stort problem. Det er imidlertid vanskelig å finne noen intuitiv sammenheng mellom momentene når ligningen ikke kan løses eksplisitt. Dette problemet gjelder altså ikke bare når vi ønsker å maksimere skjevhet gitt en bibetingelse, men også når skjevhet inkluderes i modeller med forventning og varians. Implikasjonen av dette er at (4.4) vil ha en analytisk løsning som ikke eksplisitt gir porteføljevektene.

Det siste problemet relatert til oppbyggingen av en MVS modell henger sammen med overgangen fra forventet nytte til preferanser for momenter. I seksjon 4.2 påpekte jeg at investorer med nyttefunksjon som tilfredstiller egenskapene  $u' > 0$ ,  $u'' < 0$  og  $u''' > 0$  vil ha preferanser for høyere avkastning, lavere risiko og høyere positiv skjevhet. Brockett og Kahane (1992) beviser at dette ikke nødvendigvis stemmer, noe som i såfall impliserer et logisk brudd mellom (4.3) og (4.4). De viser at en investor med nyttefunksjon  $u \in \mathcal{U}$  og vilkårlige preferanser for momenter, alltid står ovenfor en rekke kombinasjoner av tilfeldige variable som gjør at det omvendte forholdet mellom deriverte og momenter maksimerer forventet nytte. For eksempel vil en investor med nyttefunksjon  $u'' < 0$  kunne foretrekke *høyere* varians fremfor lavere varians, selv for porteføljer med lik forventet avkastning og skjevhet. På samme måte vil en investor med tredjederivert  $u''' > 0$ , som står ovenfor to porteføljer med lik forventet avkastning og varians, i enkelte tilfeller maksimere forventet

---

<sup>19</sup>Bevis 4 i appendikset viser sammenhengen  $\Psi(\alpha)^{-1}\Upsilon(\alpha \otimes \alpha) = \alpha$  med  $n = 2$ .

nytte ved å velge den porteføljen med *lavest* skjevhet. Forfatterne peker også på enkelte situasjoner hvor beslutningstaker faktisk maksimerer nytte ved å velge porteføljer som *simultant* har lavere forventet avkastning og skjevhet samt høyere varians.

De fleste utviklere av MVS modeller ignorerer dette arbeidet<sup>20</sup> og presenterer porteføljemodeller med samme utgangspunkt som (4.4). Denne ”misforståelsen” kan til dels skyldes intuisjonen bak de tre første momentene, men den kan også skyldes inkonsistensen mellom MVS kriteriet og reglene for stokastisk dominans.

Som poengtert i seksjon 2 vil en portefølje  $y_1$  gi maksimal forventet nytte for en investor med  $u \in \mathcal{U}$  hvis  $E[u(y_1)] \geq E[u(y_2)]$  hvor  $y_2$  er en vilkårlig annen portefølje. Dette forekommer *bare* dersom  $y_1$  tredje ordens stokastisk dominerer  $y_2$ . Gotoh og Konno (2000) viser at tredje ordens stokastisk dominans kun er opprettholdt dersom forventning og nedre semiskjevhet benyttes som størrelser i modellen.<sup>21</sup>

Det faktum at Brockett og Kahane finner inkonsistens i ”hoppet” fra forventet nytte i (4.3) til moment-preferanser i (4.4), er således ikke overraskende fordi denne modellen benytter forventning, varians og skjevhet. Implikasjonene av nyttefunksjonens deriverte er derfor mer subtile enn hva enkelte artikler foreslår.

### 4.3.2 Utledning av substitusjonsligningen

Bade Liu et al (2003) og Yu et al (2008) hevder at en generell metode som kan benyttes for å løse simultanproblemet er å konsolidere de ulike målene i (4.4) til en funksjon  $U: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} U(R_p(\alpha)) &= \tau_1 E[R_p(\alpha)] - \tau_2 Var[R_p(\alpha)] + \tau_3 Skew[R_p(\alpha)] \\ \text{gitt at} & \\ \alpha^t e &= 1 \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

hvor  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  er *preferanseparametere* assosiert med de tre momentene, en erstatning til nyttefunksjonens deriverte i ligning (4.2). For eksempel vil høye verdier på  $\tau_1$ , relativt

---

<sup>20</sup>Yu et al (2008), Bricc et al (2007), Liu et al (2003) og Konno og Suzuki (1995) utvikler alle MVS modeller som har en entydig direkte sammenheng mellom nyttefunksjonens deriverte og de tre første momentene.

<sup>21</sup>Nedre semiskjevhet kan defineres som  $Skew_{-}[\tilde{Y}] = \int_{-\infty}^Y (Y - \mu_Y)^3 f(Y) dY$ . Ogryczak og Ruszczyński (1999) beviser MV kriteriets konsistens med andre ordens stokastisk dominans ved å bruke alternative mål på risiko.

sett, gi porteføljer med høy avkastning, mens relativt høye verdier på  $\tau_2$  gir porteføljer med lav varians.

Svært få artikler utforsker analytiske løsninger til MVS problemer. Athayde og Flôres (2004) viser noen sammenhenger ved å optimere ett moment på bekostning av de to andre. Mencia og Sentana (2009) finner en analytisk løsning, men baserer seg på en spesiell fordelingstype. Jeg ønsker å finne en implisitt analytisk løsning til problem (4.8) som gir et innblikk i sammenhengen mellom de tre momentene og sammenhengen med Markowitz-modellen. Uten tap av generalitet kan vi minimere halve variansen og en tredjedel av skjevheten, da dette vil gi enklere uttrykk å jobbe med. Problem (4.8) kan da skrives som:

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} U(R_p(\alpha)) &= \tau_1 \alpha^t \mu - \tau_2 \frac{1}{2} \alpha^t \Sigma \alpha + \tau_3 \frac{1}{3} \alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) \\ \text{gitt at} & \\ \alpha^t e &= 1 \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

med tilhørende Lagrangefunksjon:

$$\mathcal{L} = \tau_1 \alpha^t \mu - \frac{1}{2} \tau_2 \alpha^t \Sigma \alpha + \frac{1}{3} \tau_3 \alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) - \gamma (\alpha^t e - 1)$$

hvor  $\gamma$  betegner Lagrange-multiplikatoren. Problemet løses med  $\alpha \geq 0$  fordi short-salg vil kunne gi urealistiske vektorer. Følgelig vil det være vanskelig å kartlegge en fullstendig analytisk løsning fordi det krever spesifisering av Kuhn-Tucker sidebetingelsene. For mitt formål er dette unødvendig, så jeg vil derfor fokusere på en indre løsning med  $\alpha > 0$ . Under denne forutsetningen er førsteordensbetingelsene gitt ved:<sup>22</sup>

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \tau_1 \mu - \tau_2 \Sigma \alpha + \tau_3 \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) - \gamma e = 0 \tag{4.10a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = \alpha^t e - 1 = 0 \tag{4.10b}$$

Premultipliserer vi ligning (4.10a) med  $e^t \Sigma^{-1}$  får vi da følgende:

$$\tau_1 e^t \Sigma^{-1} \mu - \tau_2 + \tau_3 e^t \Sigma^{-1} \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) = \gamma e^t \Sigma^{-1} e$$

hvor hvert ledd i ligningen har dimensjon  $1 \times 1$  og  $b = e^t \Sigma^{-1} \mu$  og  $c = e^t \Sigma^{-1} e$  er kjente konstanter fra Markowitz-modellen, med  $c > 0$  og  $b > 0$  dersom den variansminimerende

---

<sup>22</sup>De deriverte er  $\partial \sigma_p^2 / \partial \alpha = 2 \Sigma \alpha$  og  $\partial s_p^3 / \partial \alpha = 3 \Upsilon(\alpha \otimes \alpha)$ .

forventningsverdien  $\mu_0 > 0$ . Ved å ta disse størrelsene i betraktning og løse for lagrangemultiplikatoren  $\gamma$  får vi:

$$\gamma = \tau_1 \frac{b}{c} - \tau_2 \frac{1}{c} + \tau_3 \frac{1}{c} e^t \Sigma^{-1} \Upsilon(\alpha \otimes \alpha)$$

Fra Markowitz-modellen i seksjon 3.4.2 vet vi at den globale variansminimerende porteføljen  $\alpha_0 = \frac{1}{c} \Sigma^{-1} e$  har tilhørende forventning  $\mu_0 = b/c$  og varians  $\sigma_0^2 = 1/c$ . Siden  $\alpha_0^t = \frac{1}{c} (\Sigma^{-1} e)^t = \frac{1}{c} e^t \Sigma^{-1}$  kan uttrykket for lagrangemultiplikatoren forenkles ytterligere:

$$\gamma = \tau_1 \mu_0 - \tau_2 \sigma_0^2 + \tau_3 \alpha_0^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) \quad (4.11)$$

Premultipliserer vi (4.10a) med  $\alpha^t$ , bruker (4.10b) og substituerer inn ligning (4.11) får vi denne sammenhengen:

$$\tau_1 \left[ \mu_p - \mu_0 \right] + \tau_2 \left[ \sigma_0^2 - \sigma_p^2 \right] + \tau_3 \left[ s_p^3 - \alpha_0^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) \right] = 0 \quad (4.12)$$

Jeg vil referere til denne ligningen som *substitusjonsligningen* da den viser avveiningen mellom forventning, varians og skjevhet ved å bruke kjente størrelser fra Markowitz-modellen i optimum. Dette gir mulighet til å formulere tre effekter; forventning-, varians- og skjevhetseffekten:

$$\begin{aligned} ME(\alpha) &= \tau_1 [\mu_p - \mu_0] = \tau_1 [\alpha^t \mu - \mu_0] \\ VE(\alpha) &= \tau_2 [\sigma_0^2 - \sigma_p^2] = \tau_2 [\sigma_0^2 - \alpha^t \Sigma \alpha] \\ SE(\alpha) &= \tau_3 [s_p^3 - \alpha_0^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha)] = (\alpha - \alpha_0)^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha) \end{aligned}$$

Disse effektene gjør oss i stand til å formulere følgende proposisjon:

**Proposisjon 2** *Alle optimale løsninger  $\alpha^* > 0$  vil tilfredstille substitusjonsligningen og dermed  $ME(\alpha^*) + VE(\alpha^*) + SE(\alpha^*) = 0$ .*

hvor notasjonen  $\alpha > 0$  betyr at porteføljen er godt diversifisert fordi samtlige vekter er positive. I situasjoner hvor vekten på varians er relativt høy vil optimal portefølje, grunnet diversifisering, potensielt ha  $\alpha > 0$ . Dette gjør substitusjonsligningen anvendbar i slike tilfeller. Dersom vi legger full vekt på avkastning,  $\tau_2 = \tau_3 = 0$ , vil optimal løsning være gitt ved full vekt på aktivumet med høyest forventningsverdi. Substitusjonsligningen kan derfor ikke benyttes i dette tilfellet, sålenge  $n > 1$ . I situasjoner hvor det legges full vekt på skjevhet vil ligningen kunne benyttes dersom  $\Upsilon$  inneholder relativt store

koskjevhetensverdier, fordi godt diversifiserte porteføljer ( $\alpha > 0$ ) da oppnår høyere skjevhet enn mindre diversifiserte porteføljer ( $\alpha \geq 0$ ).

**Proposisjon 3** Med  $\tau_1 = \tau_3 = 0$  vil minimum varians være gitt ved  $\sigma_p^2 = \sigma_0^2 = 1/c$  dersom optimal løsning  $\alpha^* > 0$ . Med  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  vil maksimal skjevhet være gitt ved  $s_p^3 = \alpha_0^t \Upsilon(\alpha^* \otimes \alpha^*)$  dersom optimal løsning  $\alpha^* > 0$ .<sup>23</sup>

La oss så analysere denne ligningen i forventning-variens tilfellet. Dersom vi sløyfer skjevhet ved å sette  $\tau_3 = 0$  vil substitusjonsligningen forenkles til:

$$ME(\alpha) + VE(\alpha) = 0$$

Ved å variere  $\tau_1$  og  $\tau_2$  vil denne ligningens løsning ligge på den effisiente MV fronten. Langs denne fronten vet vi fra tidligere at  $\mu_p \geq \mu_0$  og  $\sigma_p^2 \geq \sigma_0^2$ , noe som betyr at det eksisterer to like store effekter med motsatt fortegn i optimum; forventningseffekten  $ME(\alpha) \geq 0$  og varianseffekten  $VE(\alpha) \leq 0$ . Et punkt med høyere forventning og varians enn den globale variansminimerende porteføljen er derfor ensbetydende med  $ME(\alpha) > 0$  og  $VE(\alpha) < 0$ , hvilket gjør substitusjonsligningen konsistent med Markowitz-modellen.

Dersom skjevhet har betydning ( $\tau_3 > 0$ ) spiller skjevhetseffekten inn på optimal portefølje. Dette åpner for at den positive  $ME(\alpha)$  og den negative  $VE(\alpha)$  kan ha forskjellig absoluttverdi langs den effisiente MVS fronten:

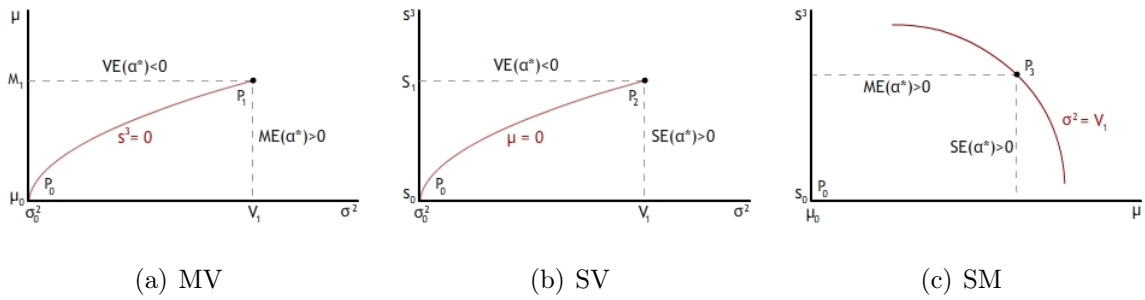
$$\begin{aligned} |ME(\alpha)| \geq |VE(\alpha)| &\Rightarrow SE(\alpha) \leq 0 \\ |ME(\alpha)| \leq |VE(\alpha)| &\Rightarrow SE(\alpha) \geq 0 \end{aligned}$$

Substitusjonsligningen viser altså en *avveining* mellom forventning, varians og skjevhet i optimum. Ligningen kan derfor benyttes til å trekke konklusjoner rundt den geometriske formen til MVS fronten.

### 4.3.3 Geometrien til den effisiente MVS porteføljefronten

I moderne porteføljeteori kunne enkle resonanser med to aktiva generere mulighetsområdet og porteføljefronten i et MV diagram. Når skjevhet inkluderes er dette ikke like åpenbart. Briec et al (2007) hevder at det ikke eksisterer noen generell

<sup>23</sup>I praksis er ofte koskjevhetensverdiene små. Dette gjør det optimalt å velge  $\alpha_i = 1$  for aktivumet med høyest skjevhet når  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ .



Figur 8: Todimensjonale MVS-analyser

prosedyre for fremstilling av MVS fronten i et diagram. Jeg vil prøve å vise denne fronten grafisk ved å benytte meg av substitusjonsligningen.

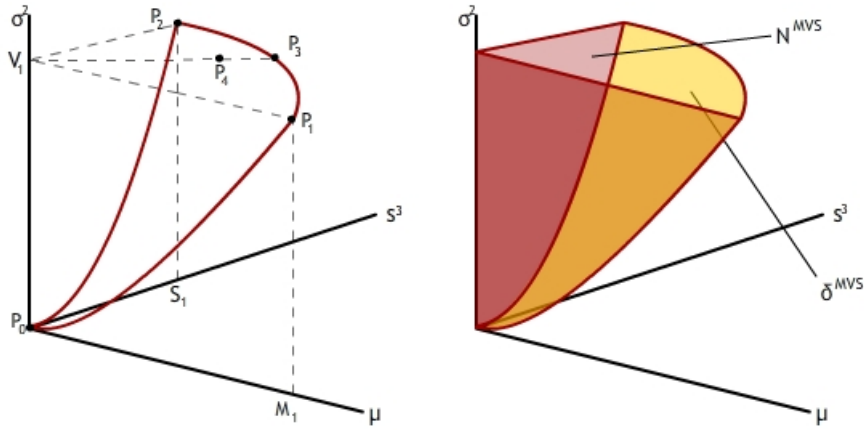
Et problem er skjevhetseffekten og det varierende referansepunktet  $\alpha_0^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha)$ , som avhenger av porteføljevektene. Anta at den globale variansminimerende porteføljen har null varians, forventning og skjevhet. Anta også at referansepunktet  $s_0^3 = \alpha_0^t \Upsilon(\alpha_0 \otimes \alpha_0) = 0$  er konstant, noe som betyr at økende skjevhetseffekt er ekvivalent med økende skjevhet. Punktet  $P_0$  i figur 8 gir da den globale variansminimerende porteføljen fra Markowitz hvor vi per definisjon har  $ME(\alpha_0) = VE(\alpha_0) = SE(\alpha_0) = 0$ .

Betrakt så et punkt  $P_1$  i figur 8(a) med høy forventet avkastning og varians for gitt skjevhet lik null.<sup>24</sup> Dette punktet tilfredstiller substitusjonsligningen fordi  $ME(\alpha) > 0$ ,  $VE(\alpha) < 0$  og  $SE(\alpha) = 0$ . I figur 8(b) kan vi definere et punkt  $P_2$  med høy skjevhet og varians for gitt forventning lik null. Effektene er da  $ME(\alpha) = 0$ ,  $VE(\alpha) < 0$  og  $SE(\alpha) > 0$ , som også potensielt tilfredstiller substitusjonsligningen. I figur 8(c) representerer punktet  $P_3$  forventning og skjevhet for en gitt varians,  $V_1$ . Dette punktet tilfredstiller også substitusjonsligningen så lenge de positive effektene  $ME(\alpha)$  og  $SE(\alpha)$  oppveies av den negative  $VE(\alpha)$ . Det eksisterer derfor en avveining mellom forventning og skjevhet for en gitt varians. Dette kan rettferdiggjøres fordi høye verdier på  $\mu_p$  og dermed høye verdier på  $ME(\alpha)$  må kompenseres med lav  $SE(\alpha)$  og dermed lav skjevhet for at effektene ikke skal overstige varianseffekten i optimum. Det motsatte gjelder for høye verdier på skjevhet.

Sammenhengene i figur 8 er illustrert ikke-lineært. Figur 8(a) følger direkte fra Markowitz-modellen mens (b) og (c) er tegnet krumme basert på egne simuleringer med et fiktivt datasett.

Sammenstiller vi de tre diagrammene får vi den tredimensjonale effisiente MVS porteføljefronten i figur 9(a). Betrakt punktet  $P_4$  som potensielt tilfredstiller substitusjonsligningen med positiv avkastning- og skjevhetseffekt samt negativ

<sup>24</sup>Effektene i figuren er ment som illustrasjoner. Avstandene representerer ikke de virkelige avstandene da det ikke tas hensyn til  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ .



(a) Isokvanter i tre dimensjoner      (b) Det teoretiske mulighetsområdet

Figur 9: Tredimensjonal MVS-analyse

varianseffekt. Punktet vil likevel ikke tilfredstille substitusjonsligningen i optimum, fordi det er mulig å oppnå høyere avkastnings- og skjevhetseffekt for den samme varianseffekten, gitt ved punkt  $P_3$ . Dersom vi tegner inn SM grafer for alle verdier på varians, MV grafer for alle verdier på skjevhet og SV grafer for alle verdier på forventning vil figuren se ut som i figur 9(b). Formen blir da som en kvart kjegle med sentrum i den variansminimerende porteføljen, som er satt til null i dette eksempelet.

Den geometriske fremstillingen av porteføljefronten kan suppleres med en matematisk fremstilling. Det tredimensjonale MVS mulighetsområdet  $\aleph^{MVS}$  vil være gitt ved:

$$\aleph^{MVS} = \left\{ (M, V, S) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; \exists \alpha \in \mathfrak{S} : \right. \\ \left. (M, V, S) = (E[R_p(\alpha)], Var[R_p(\alpha)], Skew[R_p(\alpha)]) \right\}$$

som gir alle punkter på innsiden av kjegleformen i figur 9(b) hvis  $(M, V, S) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . MVS fronten består av alle porteføljer som ligger på randen til settet  $\aleph^{MVS}$ , som gjør oss i stand til å definere den effisiente MVS fronten matematisk:

$$\delta^{MVS}(\mathfrak{S}) = \left\{ (M, V, S) \in \aleph^{MVS}, \nexists (M_1, V_1, S_1) \in \aleph^{MVS}; (M_1, -V_1, S_1) > (M, -V, S) \right\}$$

hvor  $(M_1, V_1, S_1)$  er et vilkårlig punkt. MVS fronten  $\delta^{MVS}(\mathfrak{S})$  består derfor av alle porteføljer som gir maksimal forventet avkastning og skjevhet for en gitt minimal varians, dvs det gule området i figur 9(b). Som vi så fra den geometriske løsningen vil alle

løsninger  $\alpha > 0$  som tilfredstiller substitusjonsligningen ligge på  $\delta^{MVS}(\mathfrak{S})$ . Settet  $\Delta^{MVS}(\mathfrak{S})$  representerer alle porteføljevекter som tilfredstiller substitusjonsligningen og dermed ligger på MVS fronten:

$$\Delta^{MVS}(\mathfrak{S}) = \left\{ \alpha \in \mathfrak{S}; \alpha > 0, ((E[R_p(\alpha)], Var[R_p(\alpha)], Skew[R_p(\alpha)]) \in \delta^{MVS}(\mathfrak{S}) \right\}$$

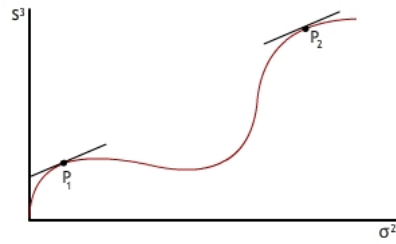
Det er viktig å understreke svakhetene ved problem (4.8) og substitusjonsligningen. Resonomentene som resulterte i MVS planet er foretatt med antakelse om et fast referansepunkt i skjevhetseffekten. Denne antakelsen er tvilsom, noe som i praksis betyr at porteføljefronten kan få mange forskjellige former. Figur 9(b) representerer det ideelle tilfellet hvor vi har en maksimal forventningsverdi og skjevhetsverdi for en gitt varians. Athayde og Flôres (2004) nevner andre ikke-konvekse former som kan betraktes som spesialtilfeller av kjeglen, hvilket gjør 9(b) til den mest generelle fremstillingen. En annen mangel er porteføljesammensetninger som gir negativ skjevhet. Det er imidlertid enighet om at negativ porteføljeskjevhet vil gi opphav til samme figur, men med skjevhet  $s_p^3 \in (-\infty, 0)$  på skjevhetsaksen.

Siden skjevhetsfunksjonen inngår i (4.8) vil løsningen potensielt være et lokalt maksimumspunkt og det eksisterer ingen mulighet til å avdekke eventuelle ikke-konvekse områder. Dette er illustrert i figur 10, hvor det er antatt en ikke-konveks sammenheng mellom skjevhet og varians. Anta at vi har et tangeringspunkt i punkt  $P_1$  som gir en optimal løsning. Ved å endre preferansene  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  marginalt, vil også tangentens helning endres marginalt. Optimal løsning "hopper" da til punkt  $P_2$  slik at det ikke-konvekse partiet ignoreres. Modellen finner altså *ikke* hele MVS fronten, men kun den effisiente, konvekse delen.

Videre er analysen gjort ved å fastlegge ett moment i hver av de todimensjonale grafiske analysene. Dersom vi implementerer problem (4.8) i praksis vil ikke denne fastleggingen være mulig, noe som i følge Klienati og Rustem (2009) kun produserer en effisient linje, i motsetning til et plan, i det tredimensjonale rommet. Fra et teoretisk synspunkt virker denne påstanden noe tvilsom.

Det er også usikkert hvorvidt porteføljene beregnet med substitusjonsligningen vil være konsistente med (4.2). Hoppet fra nyttefunksjonens deriverte til preferanseparameterene  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  er ekvivalent med diskusjonen i seksjon 4.3.1 og dermed en svakhet ved modellen. Fra et teoretisk perspektiv vil således punkter på det gule området ikke kunne garantere konsistens med direkte maksimering og stokastisk dominans. Inkonsistensen er imidlertid unntaket fra regelen skal vi tro artiklene til Kane (1982), Scott og Horvath (1980) og Kraus og Litzenberger (1976).





Figur 10: Ikke-konveksitet i MVS modellen

Denne seksjonen har beskrevet skjevhet og forventet nytte med høyere momenter, samt gitt et innblikk i hvilke problemer som oppstår når skjevhet inkluderes i porteføljemodeller. Deretter ble substitusjonsligningen benyttet til å finne en kjegleform på MVS planet, men det ble poengtert at ligningen er dårlig egnet for empiriske studier.

## 5 Empiri

I lys av problemene med (4.8) og substitusjonsligningen vil jeg presentere en ny MVS modell<sup>25</sup> anvendbar på empiri grunnet dens håndtering av ikke-konvekse flater og lokale optimumspunkter.

### 5.1 Implementering av en empirisk MVS modell

Den empiriske MVS modellen tar utgangspunkt i det ”ideelle” punktet med maksimal forventning og skjevhet samt minimal varians. Dette punktet kan betraktes som konstant og finnes ved å løse tre separate problemer:

$$\mu_{max} = \max_{\alpha} \left\{ \alpha^t \mu; \alpha^t e = 1 \right\} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{min}^2 = \min_{\alpha} \left\{ \alpha^t \Sigma \alpha; \alpha^t e = 1 \right\} \quad (5.2)$$

$$s_{max}^3 = \max_{\alpha} \left\{ \alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha); \alpha^t e = 1 \right\} \quad (5.3)$$

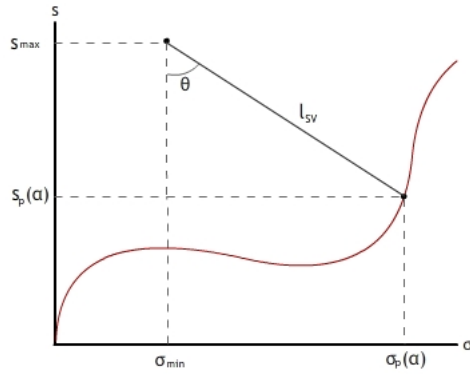
I resten av denne utredningen vil jeg benytte forventning, standardavvik og standardisert skjevhet slik at momentene kan sammenlignes i tallverdi.<sup>26</sup> For å identifisere ikke-konvekse partier vil jeg jobbe med tre separerte todimensjonale modeller. Jeg vil referere til forventning-standardavvik som MV modellen, standardskjevhet-forventning som SM modellen og standardskjevhet-standardavvik som SV modellen. Forventning, standardavvik og standardskjevhet er definert som:

$$\begin{aligned} \mu_p(\alpha) &= \alpha^t \mu \\ \sigma_p(\alpha) &= \sqrt{\alpha^t \Sigma \alpha} \\ s_p(\alpha) &= \sqrt[3]{\alpha^t \Upsilon(\alpha \otimes \alpha)} \end{aligned}$$

SV diagrammet er tegnet i figur 11 hvor punktet  $(\sigma_{min}, s_{max})$  representerer det ideelle punktet. Formålet er å minimere avstanden fra dette punktet til porteføljefronten gitt at løsningen må ligge på en linje med vinkel  $\theta$  med skjevhetsaksen. Avstanden fra det ideelle punktet til porteføljefronten er gitt ved kvadratrotten av linjens to kateter kvadrert:

<sup>25</sup>En stor takk til professor Fred Schroyen som har bistått i formuleringen av denne modellen.

<sup>26</sup>Fordi forventning ofte har størrelsesorden  $10^{-1}$  til  $10^{-2}$  mens varians og kovarians har størrelsesorden  $10^{-3}$  til  $10^{-4}$ . Skjevhet og koskjevhet har ofte størrelsesorden  $10^{-4}$  til  $10^{-6}$ .



Figur 11: Håndtering av ikke-konvekse flater

$$\sqrt{[\sigma_p(\alpha) - \sigma_{min}]^2 + [s_{max} - s_p(\alpha)]^2}$$

ved bruk av regneregler for tangens kan vi uttrykke vinkelen som:

$$\tan \theta = \frac{\sigma_p(\alpha) - \sigma_{min}}{s_{max} - s_p(\alpha)}$$

Dette gjør oss i stand til å formulere SV modellen:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad l_{SV} &= [\sigma_p(\alpha) - \sigma_{min}]^2 + [s_{max} - s_p(\alpha)]^2 \\ \text{gitt at} & \\ \mu_p(\alpha) &= \bar{\mu}_p \\ \sigma_p(\alpha) - \sigma_{min} &= \tan \theta [s_{max} - s_p(\alpha)] \\ \alpha^t e &= 1 \end{aligned} \tag{5.4}$$

hvor kvadratroten av målfunksjonen er utelatt uten tap av generalitet. Vi ønsker altså å minimere avstanden fra det ideelle punktet til porteføljefronten gitt en bestemt verdi på avkastning  $\bar{\mu}_p$  og at punktet ligger på en linje med vinkel  $\theta$  med S-aksen, hvor  $\theta$  har samme kvalitative tolkning som  $\tau_3$  i den teoretiske modellen. Høye verdier på  $\theta$  er ekvivalent med preferanser for skjevhet. Ved å variere verdiene på vinkelen  $\theta$  vil vi da kunne få frem alle optimale kombinasjoner av skjevhet og varians for en gitt forventningsverdi  $\bar{\mu}_p$ , uavhengig av om fronten er konveks eller ikke. Dette gir opphav til iso-forventningslinjer i SV diagrammet med forventning  $\bar{\mu}_p$ . Med helt analog fremgangsmåte kan vi finne iso-standardskjevhetsskurver i MV diagrammet ved å løse MV modellen:

$$\begin{aligned}
\min_{\alpha} \quad \ell_{MV} &= [\sigma_p(\alpha) - \sigma_{min}]^2 + [\mu_{max} - \mu_p(\alpha)]^2 \\
&\text{gitt at} \\
s_p(\alpha) &= \bar{s}_p \\
\sigma_p(\alpha) - \sigma_{min} &= \tan \theta [\mu_{max} - \mu_p(\alpha)] \\
\alpha^t e &= 1
\end{aligned} \tag{5.5}$$

hvor utelatelse av skjevhetsbetingelsen gir en variant av den tradisjonelle Markowitz-modellen. Videre kan vi finne iso-standardavvikkurver i SM diagrammet ved å benytte SM modellen:

$$\begin{aligned}
\min_{\alpha} \quad \ell_{SM} &= [\mu_{max} - \mu_p(\alpha)]^2 + [s_{max} - s_p(\alpha)]^2 \\
&\text{gitt at} \\
\sigma_p(\alpha) &= \bar{\sigma}_p \\
\mu_{max} - \mu_p(\alpha) &= \tan \theta [s_{max} - s_p(\alpha)] \\
\alpha^t e &= 1
\end{aligned} \tag{5.6}$$

hvor høye verdier på  $\theta$  kan tolkes som høy vekt på henholdvis forventning og skjevhet i de to modellene. Ved å løse (5.4), (5.5) og (5.6) ved å variere vinkelen  $\theta$  for gitte verdier  $\bar{\mu}_p$ ,  $\bar{\sigma}_p$  og  $\bar{s}_p$  vil vi kunne identifisere hele den effisiente MVS fronten. Fremgangsmåten og resultatene fremkommet ved bruk av disse modellene presenteres i de to neste seksjonene.

## 5.2 Fremgangsmåte

Jeg konstruerte et datasett med observasjoner av månedlige aksjepriser for  $n = 10$  aksjer fra S&P500<sup>27</sup> i perioden januar 1988 til februar 2010 (266 måneder). Dataene er hentet fra *finance.yahoo.com*. Seleksjonen av aksjer er basert på to vilkår, lav kovarians og ulik skjevhet. For å oppfylle det første vilkåret ble det valgt aksjer med lav samvariasjon, slik at porteføljevariansen potensielt kunne bli minst mulig. Jeg valgte aksjer fra ulike bransjer eksponert for ulike drivere og økonomiske sjokk, et arbeid som resulterte i et utvalg på omtrent 30 aksjer.

Det andre vilkåret ble undersøkt ved å beregne skjevheten for alle aksjene og bedømme hvorvidt dataene viste positiv eller negativ skjevhet. Det ble valgt noen høyreskjeve og noen venstreskjeve aksjer.

---

<sup>27</sup>S&P500 er en aksjeindeks bestående av 500 firmaer med høy markedsverdi, hvis aksjer handles aktivt på de amerikanske børsene NYSE og NASDAQ.

TABELL 2: UTVALGTE AKSJER

Aksje	Ticker	GICS
McDonalds	MCD	Consumer Discretionary
Tiffany & Co.	TIF	Consumer Discretionary
ExxonMobil	XOM	Energy
Boeing Company	BA	Industrials
FedEx Corporation	FDX	Industrials
AT&T	T	Telecommunication
Pfizer	PFE	Health Care
Microsoft	MSFT	Information Technology
J.P. Morgan Chase	JPM	Financials
Bank of America	BAC	Financials

Utvalget ble redusert til  $n = 10$  ved å undersøke hvilke aksjer som hadde lavest korrelasjonskoeffisienter, samtidig som bransjekravet og skjevhetkravet ble opprettholdt. Dette arbeidet resulterte i seleksjon av ti aksjer gjengitt i tabell 2.

S&P500 klassifiserer sine aksjer i henhold til "the Global Industry Classification Standard (GICS)", som består av 10 ulike sektorer.<sup>28</sup> Jeg samlet 266 månedlige aksjepriser for hver av disse ti aksjene, hvor aksjeprisen for aksje  $i$  på tid  $t$  er gitt ved  $P_{i,t}$  med  $t$  gitt månedsvis, slik at  $t = 1, 2 \dots T + 1$  med  $T = 265$ . Månedlig avkastning for aksje  $i$  i tidsperiode  $t$  er gitt ved:

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1$$

Forventet verdi for aktiva  $i$  ble kalkulert ved hjelp av følgende formel:

$$\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

og elementene i varians-kovariansmatrisen og skjevhet-koskjevhetmatrisen ble beregnet ved å benytte følgende uttrykk:

$$Cov[\tilde{R}_i, \tilde{R}_j] = \sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \mu_i)(R_{j,t} - \mu_j)$$

<sup>28</sup>Energy, Materials, Industrials, Consumer Discretionary, Consumer Staples, Health Care, Financials, Information Technology, Telecommunication Services og Utilities.

$$\text{Coskew}[\tilde{R}_i, \tilde{R}_j, \tilde{R}_k] = s_{ijk} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \mu_i)(R_{j,t} - \mu_j)(R_{k,t} - \mu_k)$$

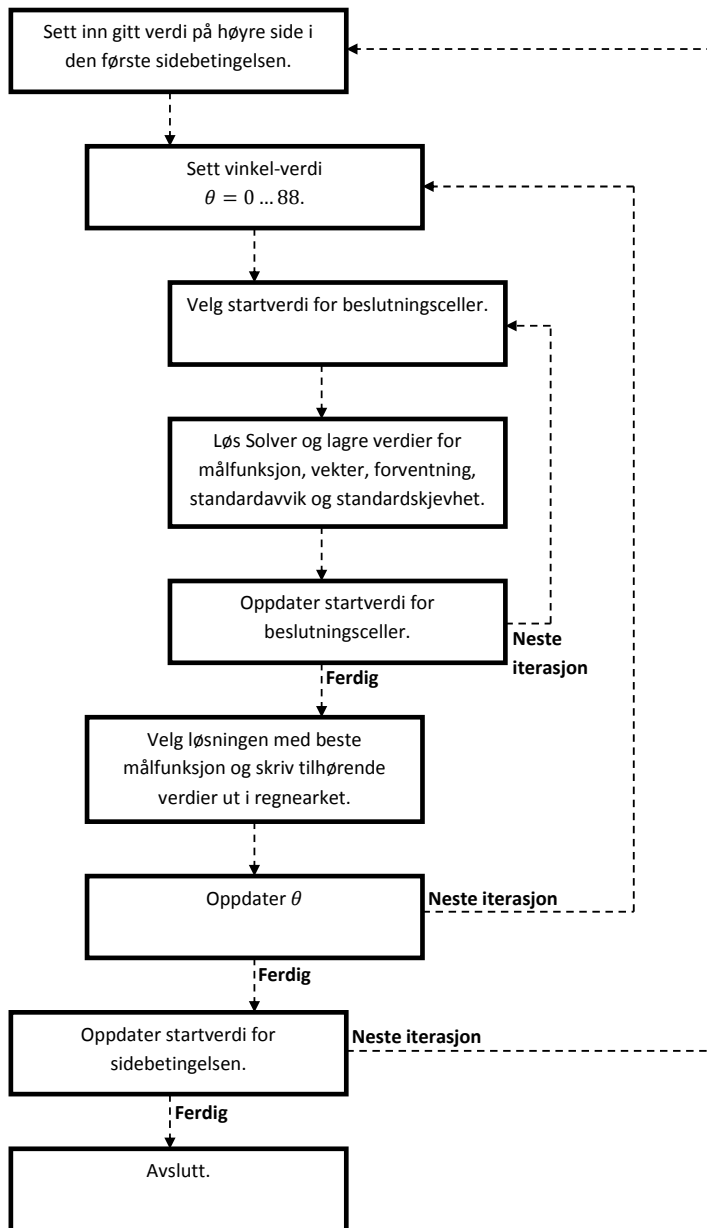
Merk at med  $n = 10$  aksjer vil varians-kovariansmatrisen bestå av  $10 \times 10 = 100$  elementer, hvorav  $(11 \times 10)/2 = 55$  er unike. Skjevhet-koskjevhetmatrisen har dimensjon  $10 \times 10^2 = 1000$  elementer, men hvor kun  $(12 \times 11 \times 10)/6 = 220$  elementer er unike. De fire formlene presentert over gir dermed all informasjon nødvendig for å konstruere forventningsvektoren  $\mu$ , varians-kovariansmatrisen  $\Sigma$  og skjevhet-koskjevhetmatrisen  $\Upsilon$ . Med disse dataene kan optimeringsproblemene (5.4), (5.5) og (5.6) løses for ulike vinkler  $\theta$ , for ulike gitte verdier  $\bar{\mu}_p$ ,  $\bar{\sigma}_p$  og  $\bar{s}_p$ .

De tre modellene ble implementert i Microsoft Excel og løst ved hjelp av Excel Solver. Jeg genererte en kode i Visual Basic som optimerte hver modell for ulike gitte forventningsverdier  $\bar{\mu}_p$  i SV modellen, standardavvik  $\bar{\sigma}_p$  i SM modellen og standardskjevhetsverdier  $\bar{s}_p$  i MV modellen. For hver av disse verdiene ble vinkelen  $\theta$  variert for å generere isokvanter.

Siden problemet er ikke-lineært vil Excel Solver ofte finne løsninger som er lokale optima. Dette ble unngått ved å benytte 11 ulike startverdier på beslutningscellene for *hver* verdi på vinkelen  $\theta$ .<sup>29</sup> De 11 løsningene ble sammenlignet og løsningen som faktisk maksimerte målfunksjonen ble skrevet ut i regnearket med tilhørende verdi på vinkel, porteføljevækt, forventning, standardavvik og standardskjevhet. Prosedyren er gjengitt kvalitativt i figur 12.

---

<sup>29</sup>Den første startverdien ble satt til 1/10 i alle aksjer. Deretter ble det testet 10 startverdier med  $\alpha_i = 1$  for  $i = 1 \dots 10$  hvor  $i$  betegner startverdi og aksje. Generering av en isokvant gjøres derfor ved at Excel Solver løses 11 ganger for hver  $\theta$ .



Figur 12: Optimeringsprosedyren

### 5.3 Resultater

De 10 aksjenes forventning, varians og skjevhet ble beregnet ved hjelp av formlene presentert over. Tabell 3 viser en oversikt over aksjenes forventede månedlige avkastning  $\mu_i$ , tilhørende standardavvik  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{ii}}$  og standardskjevhet  $s_i = \sqrt[3]{s_{iii}}$ . Kovarians og koskjevhetsverdiene er ikke presentert av plasshensyn. Microsoft har høyest forventet avkastning, ExxonMobil lavest risiko og Bank of America høyest positiv asymmetri av aksjene i datasettet.

TABELL 3: AKSJEDATA

Ticker	Foventning (%)	Stdev (%)	Stskjev (%)
MCD	1.25	6.58	-4.33
TIF	1.92	11.54	5.79
XOM	1.07	4.60	3.55
BA	1.19	8.12	-6.75
FDX	1.21	8.92	6.96
T	.95	6.99	3.37
PFE	1.25	7.10	3.70
MSFT	2.21	10.03	6.94
JPM	1.52	10.16	-5.19
BAC	1.39	11.39	8.06

Det ideelle punktet ble generert ved å optimere (5.1), (5.2) og (5.3). De optimale porteføljevektene og målfunksjonens verdi er gjengitt i tabell 4, hvor posten standardisert er gitt ved henholdsvis  $\mu_{max}$ ,  $\sigma_{min} = \sqrt{\sigma_{min}^2}$  og  $s_{max} = \sqrt[3]{s_{max}^3}$  for de tre problemene.

Optimeringsprosedyren ble anvendt på MV, SV og SM modellene beskrevet i (5.4), (5.5) og (5.6). Informasjon knyttet til prosedyren er gjengitt i tabell 5, hvor kolonnen "MVS" viser de konsoliderte tallene for de tre modellene. De fire gitte verdiene ble satt til  $\bar{s}_p = .03, .04, .05, .06$ ,  $\bar{\mu}_p = .01, .015, .018, .02$  og  $\bar{\sigma}_p = .05, .06, .07, .08$  i henholdsvis MV, SV og SM modellen. Vinkelen  $\theta$  ble variert 45 ganger fra  $0^\circ \dots 88^\circ$  med steg på  $2^\circ$ .<sup>30</sup> Antall datapunkter tilsvarer da teoretisk 180 i hver modell, men optimeringsprosedyren genererte et noe mindre antall. Dette skyldes at Solver ikke klarer finne løsninger for alle verdier på  $\theta$ . Det kan virke som om dette har en sammenheng med kompleksiteten i sidebetingelsen til den aktuelle modellen. Det er flest uløselige tilfeller i SM og MV

<sup>30</sup>Merk at  $\theta \neq 90^\circ$  da tangens ikke er definert for denne verdien.



TABELL 4: DET IDEELLE PUNKTET

Portefølje	Problem (5.1)	Problem (5.2)	Problem (5.3)
MCD	0	.085	0
TIF	0	.003	0
XOM	0	.531	0
BA	0	.033	0
FDX	0	.098	0
T	0	.078	0
PFE	0	.123	0
MSFT	1	.027	0
JPM	0	.022	0
BAC	0	0	1
Målfunksjon	.022117	.001507	.000524
Standardisert	.0221	.0388	.0806

TABELL 5: OPTIMERINGSPROSEDYREN

Modell	MV	SV	SM	MVS
Gitte verdier	4	4	4	12
Antall vinkler $\theta$	45	45	45	135
Mulige datapunkter	180	180	180	540
Genererte datapunkter	132	159	99	390
Tilfeller uten løsning	48	21	81	150

modellene, mens det er færrest i SV modellen hvor det lineære uttrykket for forventning inngår som sidebetingelse.

Figur 13(a) viser de fire iso-standarskjevheskurvene i MV diagrammet generert ved hjelp av (5.5). Vi ser at investorer som ønsker høy positiv asymmetri må akseptere en dårligere avveining mellom avkastning og risiko.<sup>31</sup> Motsatt vil en investor som ønsker en bedre avveining mellom avkastning og risiko måtte tåle lavere asymmetri. Formen på kurven ligner fronten generert med Markowitz-modellen, men hver iso-kurve har en ikke-konveks del rundt  $\mu_p = .012$ . Dette virker ikke å være konsistent med moderne porteføljeteori hvor for eksempel Luenberger (1998) viser MV fronten som et konvekst

<sup>31</sup>Jeg refererer til standardavvik som risiko og standardskjevhet som asymmetri, til tross for at begge disse størrelsene kan betraktes som risikable størrelser.

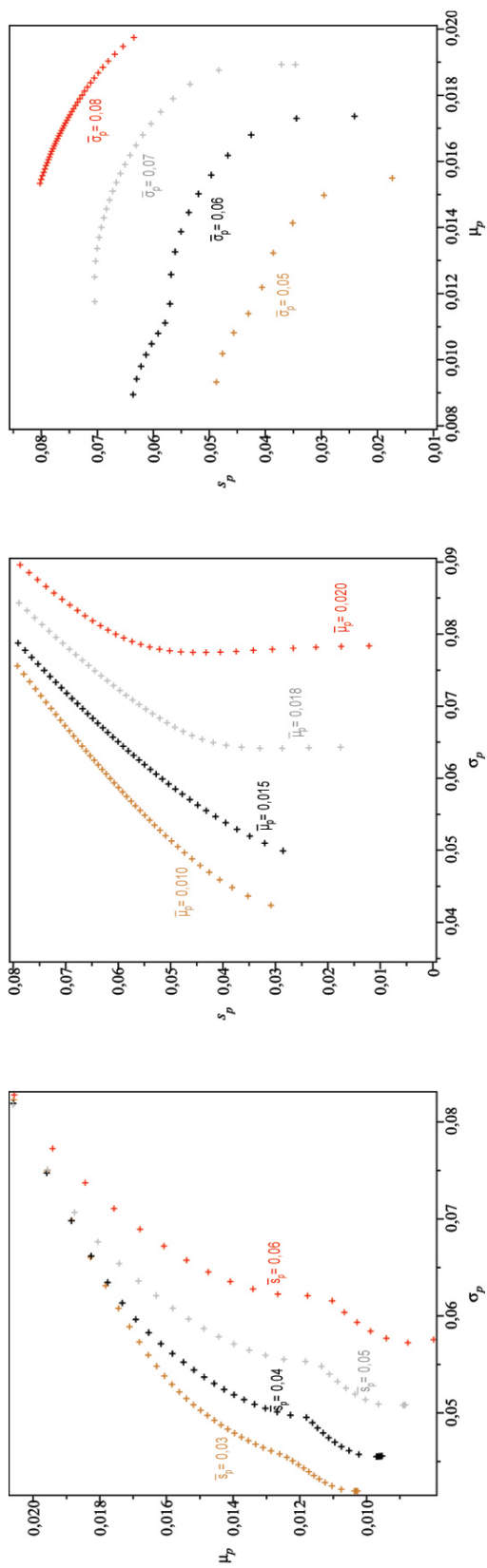
sett mot venstre. Som nevnt i den teoretiske delen skyldes ”hakket” tredjegradspolynomet i sidebetingelsen til problemet. Dersom vi utelater denne betingelsen er vi tilbake til den tradisjonelle Markowitz-modellen, hvis løsning gir en konveks portefølje-front liggende over iso-standardskjevhetsskurvene slik som vist i figur 13(d). Fra denne figuren observerer vi at høyere verdi på standardskjevhet gir iso-kurver som ligger lenger fra Markowitz-fronten samtidig som ikke-konveksiteten blir klarere.<sup>32</sup> Langs Markowitz-fronten gir mitt datasett negativ standardskjevhet for punkter nærme den globale variansminimerende porteføljen, mens punkter lengere fra GMVP gir positiv standardskjevhet. Dette er intuitivt siden Markowitz-fronten konvergerer med de positive iso-standardskjevhetsskurvene for høye verdier på  $\mu_p$ .

Figur 13(b) viser iso-forventningslinjene i SV diagrammet generert ved hjelp av (5.4). Vi observerer en positiv sammenheng mellom standardavvik og standardskjevhet, noe som er konsistent med analysen av substitusjonsligningen. Avveiningen mellom disse størrelsene er slik at beslutningstakere som ønsker høyere asymmetri for en gitt avkastning må betale med høyere risiko. Mer lukrative avveininger mellom risiko og asymmetri kan altså oppnås ved å godta lavere avkastning. Ikke-konveksiteter oppstår for lave verdier på standardskjevhet slik som vist i figur 13(e), hvor iso-forventningskurven med  $\bar{\mu}_p = .02$  er plottet med  $s_p \in \mathbb{R}$  og finere verdier på aksene. Kurven krummer mot høyre for  $s_p$  rundt 0 og deretter mot venstre for negativ  $s_p$ . Formen på denne iso-forventningskurven er konsistent med kurvene presentert av Mencia og Sentana (2009).

Figur 13(c) viser avveiningen mellom forventning og standardskjevhet generert ved hjelp av (5.6). For gitt risiko må en beslutningstaker som ønsker høyere avkastning godta lavere asymmetri og motsatt. Likledes vil en investor som ønsker en bedre SM-avveining måtte betale med høyere risiko. Også disse kurvene har ikke-konvekse partier som kommer klart frem for iso-linjene med lavest standardavvik.

---

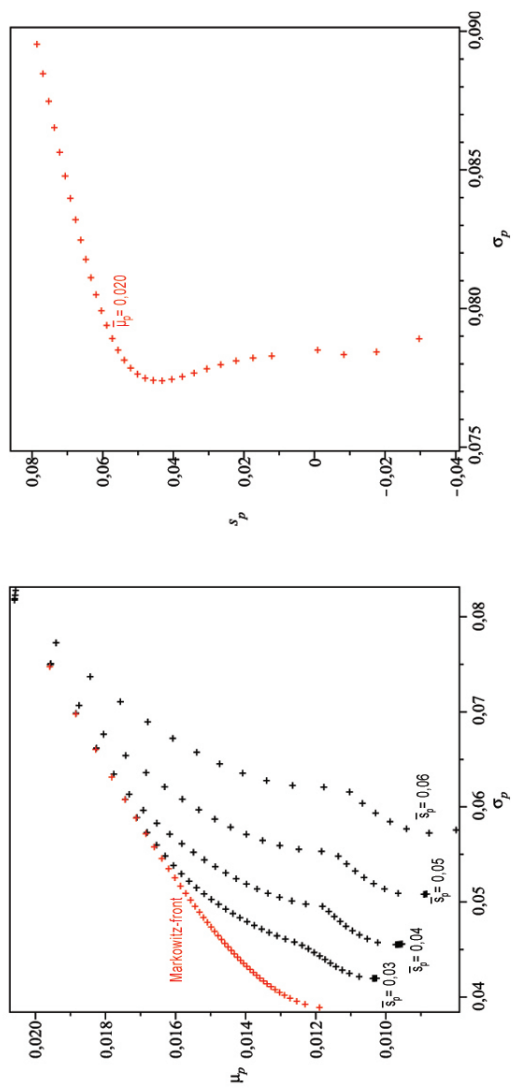
<sup>32</sup>Hverken Mencia og Sentana (2009) eller Maringer og Parpas (2009) finner denne ikke-konveksiteten.



(a) Isokvanter generert med MV modellen

(b) Isokvanter generert med SV modellen

(c) Isokvanter generert med SM modellen



(d) Markowitz-fronten og iso-standardskjevhet

(e) Iso-forventning  $\bar{\mu} = .020$  med  $s_p \in \mathbb{R}$

Figur 13: Todimensjonale MVS-diagrammer

Figur 14 viser det konsoliderte tilfellet hvor isokvantene fra figur 13(a)-(c) er plottet i samme diagram. Diagrammet viser 373 punkter<sup>33</sup> i et tredimensjonalt rom med forventning, standardavvik og standardskjevhet på aksene. Resultatene viser en kjegleformet struktur, konsistent med teorien i seksjon 4. Strukturen samsvarer med det teoretiske arbeidet til Athayde og Flôres (2004) og det empiriske arbeidet til Mencia og Sentana (2009) og Maringer og Parpas (2009). Videre er det få optimale punkter med standardskjevhet nær null, noe som støtter arbeidet til Harvey et al (2003). Modellene presentert i denne seksjonen klarer altså å definere MVS planet, mens simultanoptimeringen foretatt av Klientati og Rustem (2009) kun identifiserte en effisient linje i det tredimensjonale rommet.

Modellene (5.4), (5.5) og (5.6) kan enkelt anvendes til å definere isokvanter og komplette MVS plan for datasett med vilkårlige antall aktiva. Metoden er relativt enkel å benytte, samtidig som problemene i 4.3.1 er løst på en tilfredstillende, men ikke perfekt måte.

Modellene har en svakhet knyttet til simultanitet sammenlignet med den teoretiske fremgangsmåten i (4.8). Generering av isokvanter går på bekostning av simultan optimering fordi ett moment holdes konstant i optimeringen. Mangel på simultanitet er ikke noe stort praktisk problem; det er tenkelig at investorer ofte er interessert i en avveining mellom for eksempel risiko og asymmetri for en spesifisert avkastning.<sup>34</sup>

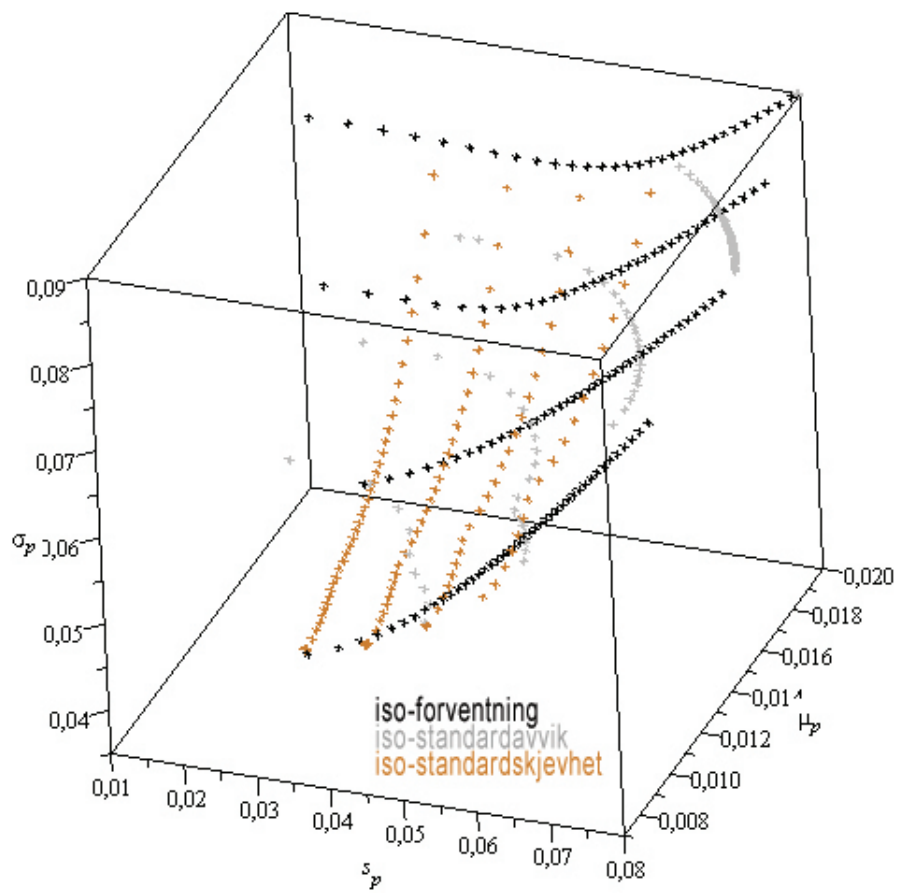
Problemet knyttet til skjevhetsfunksjonen er unngått fordi modellene klarer å finne ikke-konvekse flater, i tillegg til at den kodede optimeringsprosedyren garanterer globale optimum. Det er imidlertid noen svakheter knyttet til bruken av Solver som optimeringsverktøy, da denne programvaren ikke alltid finner noen optimal løsning. Programmering av ulike startverdier for beslutningscellene virker å være en unødvendig oppgave, noe som kan unngås ved å anvende et mer sofistikert optimeringsverktøy.

Det siste problemet i seksjon 4.3.1 var relatert til overgangen fra nyttefunksjonen til preferanser for momenter. Det er ingen klar link mellom vinkelen  $\theta$  og nyttefunksjonens deriverte, noe som gjør det vanskelig å trekke en parallell mellom forventet nytte gitt ved Taylor-rekken i (4.2) og MV, SV og SM modellene. Dette gjør at også disse modellene, i likhet med substitusjonsligningen, vil kunne produsere løsninger inkonsistent med maksimering av forventet nytte. Som tidligere er dette unntaket fra regelen hvis vi skal tro majoriteten av forskningen på dette området.

---

<sup>33</sup>Tabell 5 viser at det konsoliderte antallet optimale porteføljer er 390. MVS figuren viser 373 punkter fordi 17 observasjoner er slettet grunnet optimal skjevhet  $s_p \in \mathbb{R}_-$ . Siden det er snakk om så få observasjoner er det vanskelig å trekke noen slutning om formen på fronten i  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ , og jeg velger derfor å utelate de negative punktene. Noen av disse er imidlertid diskutert i figur 13(e).

<sup>34</sup>Både Mencia og Sentana (2009) og Maringer og Parpas (2009) benytter slike antakelser i sitt arbeid.



Figur 14: Porteføljeplanets form

## 6 Estimering av porteføljeplanet

De optimale punktene plottet i figur 14 gir en klar indikasjon på MVS planets form. Siden MVS-problemet ikke har noen eksplisitt analytisk løsning, vil det være interessant å estimere sammenhengen mellom forventning, standardavvik og standardskjevhet basert på disse punktene. Dette vil kunne gi en tilnærmet analytisk sammenheng mellom de standardiserte momentene som i sin tur kan benyttes til å finne elastisiteter og substitusjonsmuligheter. Den estimerte sammenhengen vil derfor ha likhetstrekk med den teoretiske substitusjonslikningen definert tidligere.

### 6.1 En translog MVS-funksjon

I mikro- og makroøkonomisk teori blir produksjonsteknologi ofte karakterisert ved hjelp av *produksjonsfunksjoner*, hvor en vanlig antakelse er å gjøre bruk av en Cobb-Douglas funksjonsform.<sup>35</sup> Christensen et al (1973) generaliserer denne funksjonen ved å anta en vektor med  $N$  innsatsfaktorer,  $X$ , som benyttes til å produsere en vektor med  $R$  produksjonsfaktorer,  $Y$ . Sammenhengen mellom faktorene er gitt ved funksjonen  $T(Y, X) = 1$ , som på logaritmisk form gir:

$$\begin{aligned} \ln T(Y, X) = & \beta_0 + \sum_{i=1}^R \beta_i \ln Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \beta_{ij} \ln Y_i \ln Y_j \\ & + \sum_{i=1}^N \gamma_i \ln X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \ln X_i \ln X_j + \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^N \delta_{ij} \ln Y_i \ln X_j \end{aligned} \quad (6.1)$$

hvor  $Y_1 \dots Y_R$  er produksjonsfaktorer,  $X_1 \dots X_N$  innsatsfaktorer og  $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \gamma_i, \gamma_{ij}$  og  $\delta_{ij}$  er tilhørende koeffisienter. Forfatterene kaller denne funksjonen for en ”transcendental logarithmic production function”, også kjent som en *translog produksjonsfunksjon*. Funksjonens fleksible form gjør den i stand til å approksimere mange typer økonomiske funksjoner, noe som har gjort den til et nyttig verktøy i samfunnsøkonomiske problemstillinger som estimering av produksjonsfunksjoner, kostnadsfunksjoner og profittfunksjoner.<sup>36</sup>

Anta at de optimale punktene i figur 14 representerer markedet og det ”sanne” MVS planet. En translog funksjon vil kunne fungere svært godt som en tilnærming til det sanne planet

---

<sup>35</sup>Den generelle Cobb-Douglas produksjonsfunksjonen kan skrives som  $Y = A \prod_{i=1}^N X_i^{\beta_i}$  hvor  $A$  er teknologi,  $X_i$  betegner innsatsfaktor  $i$  av i alt  $N$  som benyttes til å produsere  $Y$ . En vanlig antakelse er  $N = 2$ , med kapital og arbeidskraft som innsatsfaktorer.

<sup>36</sup>For eksempel benytter Griffin (1977) en translog kostnadsfunksjon på strømpriser.

ved å betrakte standardavvik,  $\sigma_p = V$ , som en "innsatsfaktor" benyttet i "produksjonen" av forventning,  $\mu_p = M$ , og standardskjevhet,  $s_p = S$ . Med  $R = 2$  og  $N = 1$  i ligning (6.1) får vi da:

$$\begin{aligned} \ln T &= \beta_0 + \beta_M \ln M + \beta_S \ln S + \frac{1}{2}\beta_{MM}(\ln M)^2 + \frac{1}{2}\beta_{SS}(\ln S)^2 + \beta_{MS} \ln M \ln S \\ &+ \gamma_V \ln V + \frac{1}{2}\gamma_{VV}(\ln V)^2 + \delta_{MV} \ln M \ln V + \delta_{SV} \ln S \ln V \end{aligned} \quad (6.2)$$

hvor symmetriegenskapen  $\beta_{MS} = \beta_{SM}$  er hensyntatt. Funksjonen er vanskelig å estimere fordi det er umulig å separere innsatsfaktoren,  $V$ , fra produksjonsfaktorene  $M$  og  $S$ . I tråd med Parmeter et al (2009) kan vi anta separabilitet ved å gjøre normaliseringene  $\gamma_V = -1$ ,  $\gamma_{VV} = 0$  og  $\delta_{MV} = \delta_{SV} = 0$ . Med  $T(M, S, V) = 1$  gir dette en separert *translog MVS-funksjon*  $\ln V = \ln T(M, S)$ :

$$\ln V = \beta_0 + \beta_M \ln M + \beta_S \ln S + \frac{1}{2}\beta_{MM}(\ln M)^2 + \frac{1}{2}\beta_{SS}(\ln S)^2 + \beta_{MS} \ln M \ln S \quad (6.3)$$

Det er flere grunner til at denne funksjonen er interessant. Som nevnt tidligere argumenterer Athayde og Flôres (2004) for at MVS fronten kan ha mange forskjellige former, noe som taler til fordel for estimering med en fleksibel funksjon. For det andre er den eksplisitte løsningen til MVS problemer ikke-eksisterende uten spesielle antakelser, men ved å estimere (6.3) kan det finnes en kvantitativ sammenheng uttrykt ved hjelp av koeffisientvektoren  $\beta$ . Denne sammenhengen kan i sin tur brukes til å trekke slutninger om substitusjonsmulighetene mellom de tre momentene.

## 6.2 Substitusjonsmuligheter og konveksitet

Får å diskutere substitusjonsmulighetene mellom forventning, standardavvik og standardskjevhet kan vi se på de førstederiverte til MVS-funksjonen i (6.3):

$$\begin{aligned} T_M(M, S) &= \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{T}{M} \left[ \beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S \right] = \frac{T}{M} \eta_{MV} \\ T_S(M, S) &= \frac{\partial T}{\partial S} = \frac{T}{S} \left[ \beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M \right] = \frac{T}{S} \eta_{SV} \\ T_S^M(M, S) &= \frac{\partial M}{\partial S} = -\frac{M}{S} \left[ \frac{\beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M}{\beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S} \right] = \frac{M}{S} \left[ -\frac{\eta_{SV}}{\eta_{MV}} \right] = \frac{M}{S} \eta_{SM} \end{aligned}$$

hvor  $\eta_{ij}$  per definisjon er elastisiteten av  $j$  med hensyn på  $i$ . Uttrykkene er vist i bevis 5 i appendikset. Siden den translogaritmiske MVS-funksjonen er en annengradsligning

i logaritmen, vil elastisitetene ikke være konstante, men avhengig av hvilket punkt vi befinner oss i. Eksempelvis vil en økning i forventningsverdi på ett prosentpoeng i punktet  $(M_i, S_i)$  føre til at standardavviket øker med  $T_M(M_i, S_i)$  prosentpoeng. En økning i standardskjevhet på ett prosentpoeng i det samme punktet vil gi økt standardavvik på  $T_S(M_i, S_i)$  prosentpoeng, eller økt forventningsverdi på  $T_S^M(M_i, S_i)$  prosentpoeng. Størrelsene uttrykker derfor følsomheten i endringer mellom de to aktuelle momentene.

Substitusjonselastisiteten er et mål på prosentvis endring i faktorforholdet mellom to innsatsfaktorer dividert med prosentvis endring i marginal teknisk substitusjonsrate. Siden min analyse kun har én innsatsfaktor vil ikke dette substitusjonsmålet gi noen mening. Det er imidlertid uproblematisk å se på produksjonsfaktorer istedenfor innsatsfaktorer, og i slike tilfeller blir dette substitusjonsmålet ofte referert til som transformasjonselastisiteten. Transformasjonselastisiteten mellom  $M$  og  $S$  for et gitt standardavvik  $V = T(M, S)$  er gitt ved.<sup>37</sup>

$$\omega_{SM} = -\frac{d \ln(M/S)}{d \ln(T_S/T_M)}$$

Ved å benytte de førstederiverte finner vi følgende uttrykk:

$$\omega_{SM}(M, S) = -\frac{\eta_{MV} + \eta_{SV}}{2\beta_{MS} + \eta_{SM}\beta_{MM} + \eta_{MS}\beta_{SS} + \eta_{MV} + \eta_{SV}}$$

Dette resultatet er utledet i bevis 6 i appendikset. Dersom sammenhengen mellom  $M$  og  $S$  er lineær, vil den marginale tekniske substitusjonsrate mellom disse momentene være konstant. På endringsform er denne raten da lik null, samtidig som endringen i  $M/S$ -forholdet er negativ. Dette betyr at transformasjonselastisiteten blir uendelig stor,  $\omega_{MS} = \infty$ , som er ekvivalent med perfekte substitusjonsmuligheter mellom forventning og standardskjevhet. Dersom porteføljerisikoen er konstant, betyr dette at vi kan "bytte" standardskjevhet mot avkastning i like stor skala. Høye transformasjonselastisiteter mellom momentene er derfor ønskelig, fordi det gir gode bytteforhold og dermed fleksible porteføljemuligheter.

Antar vi i stedet at sammenhengen mellom  $M$  og  $S$  er gitt ved en Leontief-funksjon vil endringen i marginal teknisk substitusjonsrate mellom to punkter være uendelig stor, samtidig som endringen i  $M/S$  forholdet fortsatt er negativ. Dette betyr at  $\omega_{MS} = 0$ ,<sup>38</sup>

<sup>37</sup>Det opereres vanligvis ikke med minustegn i denne formelen. Grunnen til at jeg benytter dette er at sammenhengen mellom  $M$  og  $S$  er buet motsatt vei enn hva som er vanlig for tradisjonelle forhold mellom innsatsfaktorer.

<sup>38</sup>Med Leontief-funksjonen  $T(M, S) = \max\{aM, bS\}$ ,  $a, b > 0$  vil vi ha  $\omega_{SM} = -\frac{d \ln(M/S)}{\infty} = 0$ .



slik at det kun eksisterer ett optimalt forhold mellom forventning og standardskjevhet som gir ønsket standardavvik. Lave transformasjonselastisiteter er derfor ekvivalent med dårlige byttemuligheter mellom  $M$  og  $S$ .

Vi kan altså evaluere transformasjonselastisiteten i vilkårlige punkter  $(M_i, V_i, S_i)$  på MVS fronten. Substitusjonsmulighetene er da gitt ved  $\omega_{MS}(M_i, S_i)$ , som gir et mål på krumningen til isokvanten  $\bar{\sigma}_p = V_i$  i dette punktet. Dersom vi observerer transformasjonselastisiteter nær null betyr det svært krumme isokvanter med dårlige substitusjonsmuligheter, mens høye verdier er ekvivalent med rettere isokvanter og bedre bytteforhold i det gitte punktet.

Til slutt vil jeg også se på konveksitetsegenskapene til MVS-funksjonen. De empiriske modellene definert i seksjon 5 ga klare indikasjoner på at porteføljefronten har ikke-konvekse områder. Et interessant spørsmål er derfor hvorvidt (6.3) vil fange opp disse områdene. Konveksiteten i et vilkårlig punkt kan avgjøres ved å se på Hesse-matrisen til MVS-funksjonen:

$$H(M, S) = \begin{pmatrix} T_{MM} & T_{MS} \\ T_{MS} & T_{SS} \end{pmatrix}$$

som har tilhørende egenverdier:

$$\begin{aligned} \iota_1(M, S) &= \frac{1}{2} \left[ T_{MM} + T_{SS} + \sqrt{T_{MM}^2 + T_{SS}^2 + 4T_{MS}^2 - 2T_{MM}T_{SS}} \right] \\ \iota_2(M, S) &= \frac{1}{2} \left[ T_{MM} + T_{SS} - \sqrt{T_{MM}^2 + T_{SS}^2 + 4T_{MS}^2 - 2T_{MM}T_{SS}} \right] \end{aligned}$$

hvor de andrederiverte av MVS-funksjonen  $V = T(M, S)$  er gitt ved:

$$\begin{aligned} T_{MM} &= \frac{\partial^2 T}{\partial M^2} = \frac{T}{M^2} (\beta_{MM} - \eta_{MV} + \eta_{MV}^2) \\ T_{SS} &= \frac{\partial^2 T}{\partial S^2} = \frac{T}{S^2} (\beta_{SS} - \eta_{SV} + \eta_{SV}^2) \\ T_{MS} &= \frac{\partial^2 T}{\partial M \partial S} = \frac{T}{MS} (\beta_{MS} + \eta_{MV} \eta_{SV}) \end{aligned}$$

Utleddning av de andrederiverte og egenverdiene er vist i bevis 7 i appendikset. Dersom egenverdiene evaluert i et vilkårlig punkt  $(M_i, S_i)$  tilfredstiller  $\iota_1(M_i, S_i) \geq 0$  og  $\iota_2(M_i, S_i) \geq 0$  kan vi konkludere med at Hesse-matrisen  $H(M_i, S_i)$  er positiv semidefinit og MVS-funksjonen konveks i det aktuelle punktet. Dersom vi observerer andre fortegn hos egenverdiene befinner vi oss i et ikke-konvekst område. Følgelig kan uttrykkene for egenverdiene evalueres i hvert enkelt datapunkt for å avgjøre konveksitetsegenskapen.

### 6.3 Resultater

Datasettet ble randomisert for å unngå autokorrelasjon<sup>39</sup> og ligning (6.3) ble estimert ved hjelp av "Ordinary Least Squares" (OLS):

$$\ln V_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_M \ln M_i + \hat{\beta}_S \ln S_i + \frac{1}{2} \hat{\beta}_{MM} (\ln M_i)^2 + \frac{1}{2} \hat{\beta}_{SS} (\ln S_i)^2 + \hat{\beta}_{MS} \ln M_i \ln S_i + \hat{\varepsilon}_i \quad (6.4)$$

hvor summen over kvadrate feilledd,  $\sum_{i=1}^{373} \hat{\varepsilon}_i^2$ , ble minimert. De estimerte koeffesientene  $\hat{\beta}$  er alle signifikante på 1% nivå og gjengitt i tabell 6 med tilhørende standardfeil i parantes.<sup>40</sup> Den estimerte ligningen har en forklaringskraft på .9861 som forteller at den valgte funksjonsformen passer godt til å forklare variasjonen i  $V$ .

Resultatene fra estimeringen er gjengitt grafisk i figur 15, hvor (a) viser at den effisiente MVS fronten er konsistent med den teoretiske fremstillingen. I figur 15(b) er det samme planet plottet sammen med de optimale punktene fra figur 14. Punktene ligger spredt over og under planet, noe som indikerer både positive og negative residualer. Fra figuren ser det ikke ut til at de ikke-konvekse områdene fanges opp av den estimerte ligningen.

Tabell 8 viser et utdrag av de optimale punktene  $(M_i, V_i, S_i)$  med tilhørende verdier  $\hat{T}_M(M_i, S_i)$ ,  $\hat{T}_S(M_i, S_i)$  og  $\hat{T}_S^M(M_i, S_i)$ , transformasjonselastisiteten  $\hat{\omega}_{MS}(M_i, S_i)$  og egenverdiene  $\hat{t}_1(M_i, S_i)$  og  $\hat{t}_2(M_i, S_i)$ . Tabellen gjengir seks punkter fra hver av isokvantene,  $\bar{\mu}_p = .01$ ,  $\bar{\sigma}_p = .07$  og  $\bar{s}_p = .03$ , som tidligere ble illustrert grafisk i figur 13.

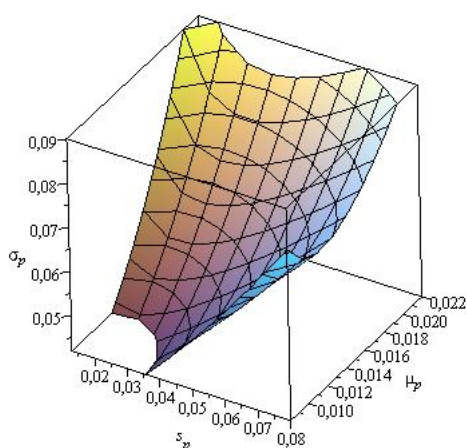
Betrakt porteføljen med månedlig avkastning 1.19% og risiko 4.42% på isokvanten  $\bar{s}_p = 3\%$ , gjengitt i tabell 8. Anta at denne porteføljen holdes av en investor som ønsker å øke avkastningen med ett prosentpoeng. Dersom investoren ikke ønsker å endre skjevheten, vil denne økningen måtte kompenseres med økt risiko på  $\hat{T}_M = 2.17$  prosentpoeng.<sup>41</sup> Fra tabellen observerer vi at  $\hat{T}_M$  er økende dersom vi beveger oss oppover isokvanten  $\bar{s}_p$ , noe som betyr at markedets følsomhet for risiko er økende i avkastning, alt annet likt.

For isokvanten med  $\bar{\mu}_p = 1\%$  ser vi en lignende tendens. For en gitt forventet avkastning vil en økning i asymmetri på ett prosentpoeng måtte kompenseres med økt risiko på  $\hat{T}_S$  prosentpoeng, hvor denne risikoøkningen avhenger av hvor vi befinner oss på isokvanten. For porteføljen  $(M, V, S) = (1\%, 6.31\%, 6.54\%)$  vil økt standardskjevhet på ett

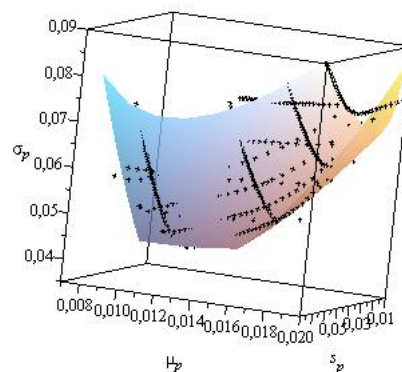
<sup>39</sup>Isokvantene fra optimeringsprosedyren dannet et datasett med mange like etterfølgende observasjoner av hvert moment. Ved å randomisere rekkefølgen og generere en kunstig tidsvariabel fikk jeg en Durbin-Watson statistikk på 1.91, som er et sterkt tegn på at autokorrelasjon er unngått.

<sup>40</sup>Informasjon fra regresjonen:  $n=373$ ,  $F(5,367) = 5190.95$ ,  $R\text{-sq} = .9861$ ,  $R\text{-sq (adj)} = .9859$ ,  $\text{Root MSE} = .024$ .

<sup>41</sup>I dette tilfellet vil ny portefølje da være  $(M, V, S) = (2.19\%, 6.59\%, 3.00\%)$ .



(a) Estimert plan



(b) Estimert plan og optimale punkter

Figur 15: Estimert translogaritmisk MVS-funksjon

prosentpoeng føre til økt standardavvik på  $\hat{T}_S = .76$  prosentpoeng, alt annet likt. Dersom en investor beveger seg oppover isokvanten, viser dataene at  $\hat{T}_S$  er økende, noe som betyr at markedets følsomhet for risiko øker. Vi observerer imidlertid at risikofølsomheten med hensyn på avkastning,  $\hat{T}_M$ , langs  $\bar{s}_p$  i gjennomsnitt er større enn risikofølsomheten med hensyn på skjevhet,  $\hat{T}_S$ , langs  $\bar{\mu}_p$ .<sup>42</sup> Dataene viser altså at markedet verdsetter avkastning høyere enn skjevhet fordi økt avkastning krever høyere risikokompensasjon enn økt skjevhet.

Betrakt til slutt den siste isokvanten  $\bar{\sigma}_p = 7\%$  i tabell 8. Investorer som holder porteføljer med høy skjevhet, for eksempel  $(M, V, S) = (1.25\%, 7\%, 7.06\%)$ , vil oppleve redusert avkastning på  $\hat{T}_S^M = .70$  prosentpoeng dersom skjevheten økes med ett prosentpoeng, alt annet likt. Likledes vil en portefølje med høy avkastning  $(M, V, S) = (1.89\%, 7\%, 3.47\%)$  føre til at avkastningen kun reduseres med .05 prosentpoeng når skjevheten økes med ett prosentpoeng. Konklusjonen er at for gitt risiko vil endringer i ubalanserte porteføljer, dvs porteføljer med lav (høy) asymmetri, betales av markedet med en liten (stor) endring i avkastning. Ved gitt risiko er markedet altså svært følsomt for endringer i avkastning dersom porteføljen har høy skjevhet, men lite følsom for slike endringer dersom skjevheten er lav. Dette er i tråd med figur 13(c), hvor sammenhengen mellom avkastning og standardskjevhet er buet vekk fra origo.

Transformasjonsmulighetene mellom avkastning og asymmetri er gitt i kolonnen  $\hat{\omega}_{SM}$  i tabell 8. Vi observerer dårlige bytteforhold ( $\hat{\omega}_{SM}$  nær 0) for de fleste punktene i datasettet.<sup>43</sup> Langs iso-standardavvik  $\bar{\sigma}_p = 7\%$  observerer vi dårlige transformasjonsmuligheter for

<sup>42</sup>Tabell 7 viser at denne forskjellen er signifikant på 1% når vi tar hensyn til alle observasjoner.

<sup>43</sup>Tabell 7 viser at gjennomsnittlig transformasjonselastisitet kun er .371.

porteføljer med lav skjevhet eller lav avkastning, mens mer balanserte porteføljer har bedre transformasjonsmuligheter. Dette er konsistent med dataplottet i figur 13(c), som viser at linjen krummer ved ekstreme verdier på momentene.

Som nevnt viser MVS-planet i figur 15(a) ingen klare tegn til ikke-konvekse områder, til tross for at disse kom tydelig frem i de todimensjonale analysene gjort tidligere. Dette bekreftes ved å se på egenverdiene som begge er positive for 372 av 373 observasjoner i datasettet. Et utdrag av disse er gitt i tabell 8.

En mulighet for å avdekke eventuelle ikke-konvekse partier er å utvide (6.3) til en tredje- eller fjerdegradsligning. Dette vil kunne gi en bedre tilpasning til den sanne MVS-funksjonen. Kostnaden ved denne fremgangsmåten er imidlertid at flere parametere må estimeres og tas hensyn til i substitusjonsberegningene.

En annen mulighet er å unngå fra antakelsen om separabilitet mellom innsatsfaktor og produksjonsfaktorer. Dersom vi unnlater å gjøre separabilitetsantakelsen må ligning (6.2) legges til grunn for estimeringen. Basert på mitt datasett gir denne fremgangsmåten et konvekst plan med et hull. Det er mulig at hullet skyldes at ligningen produserer komplekse løsninger. For eksempel vil den estimerte sammenhengen løst med hensyn på  $V$  kunne gi komplekse løsninger  $V \in \mathbb{C}$  som ikke fanges opp i figuren, siden  $(M, V, S) \in \mathbb{R}$ . En løsning som tar hensyn til komplekse partier overlates derfor til videre forskning på området.

Funnene i denne seksjonen viser at en translogaritmisk funksjon kan benyttes som en svært god tilnærming til "markedet" og det sanne MVS planet. Med utgangspunkt i den estimerte sammenhengen ble ulike komparative statistiske analyser gjennomført. Disse viste at markedet har økt følsomhet for risiko dersom investorer ønsker høyere avkastning, noe som er et kjent resultat. Mer interessant er det kanskje at også økt asymmetri fører til at markedets følsomhet for risiko øker, samtidig som risikofølsomheten er signifikant større for økt avkastning enn for økt skjevhet. Avslutningsvis ble det også poengtert at markedet tilbyr dårlige substitusjonsmuligheter mellom avkastning og asymmetri for en gitt risiko. En svakhet ved analysen var at den estimerte sammenhengen ikke finner de ikke-konvekse områdene til det sanne porteføljeplanet.

TABELL 6: REGRESJON

Koeffisient	Verdi
$\hat{\beta}_0$	9.0253 (0.5430)
$\hat{\beta}_M$	5.0351 (0.2235)
$\hat{\beta}_S$	-0.4667 (0.1018)
$\hat{\beta}_{MM}$	1.4551 (0.0490)
$\hat{\beta}_{SS}$	0.5082 (0.0182)
$\hat{\beta}_{MS}$	-0.5728 (0.0169)

TABELL 7: INFERENS OM GJENNOMSNIITT

Størrelse	Obs	Gj.snitt	St.dev
$\hat{T}_M$	373	2.236*	1.584
$\hat{T}_S$	373	.492*	.294
$\hat{\omega}_{SM}$	373	.371**	.277

\* Forskjellen i gjennomsnitt mellom  $\hat{T}_M$  og  $\hat{T}_S$  er signifikant på 1% nivå. Ved å benytte en ensidig test for forskjell i gjennomsnitt med ulik varians får vi en t-verdi på 20.65, som forkaster nullhypotesen når grenseverdien er 1.645.

\*\*  $\hat{\omega}_{SM}$  er en funksjon av  $M$ ,  $S$  og de estimerte koeffisientene  $\hat{\beta}$ . Selv om  $\hat{\omega}_{SM}$  er konstant vil den kunne ha varians grunnet  $\hat{\beta}$ . Dette gjør det vanskelig å gjøre inferens om dette tallet uten å benytte "Delta-metoden", se Klein (1953).

TABELL 8: SUBSTITUSJONSMULIGHETER OG KONVEKSITET

$M_i$	$V_i$	$S_i$	$\hat{T}_M$	$\hat{T}_S$	$\hat{T}_S^M$	$\hat{\omega}_{SM}$	$\hat{l}_1$	$\hat{l}_2$
.0108	.0421	<b>.0300</b>	1.72	.47	-.28	.375	434.6	6.7
.0119	.0442	<b>.0300</b>	2.17	.42	-.19	.439	378.1	8.1
.0156	.0521	<b>.0300</b>	3.42	.24	-.07	.281	327.3	15.1
.0166	.0559	<b>.0300</b>	3.72	.19	-.05	.211	329.8	17.1
.0178	.0631	<b>.0300</b>	4.13	.12	-.03	.118	338.2	20.2
.0196	.0749	<b>.0300</b>	4.71	.01	-.00	.007	356.6	24.8
<b>.0100</b>	.0423	.0310	1.31	.53	-.40	.276	506.8	4.6
<b>.0100</b>	.0504	.0487	.33	.67	-2.02	.047	718.8	1.6
<b>.0100</b>	.0567	.0577	-.18	.72	3.96	-.021	858.0	1.2
<b>.0100</b>	.0631	.0654	-.66	.76	1.15	-.064	995.6	1.0
<b>.0100</b>	.0680	.0711	-1.03	.79	.77	-.089	1104.6	.9
<b>.0100</b>	.0755	.0793	-1.59	.83	.52	-.119	1275.5	.8
.0125	<b>.0700</b>	.0706	.94	.66	-.70	.141	568.5	1.9
.0145	<b>.0700</b>	.0685	1.97	.60	-.30	.392	397.0	2.6
.0162	<b>.0700</b>	.0643	2.64	.55	-.21	.596	328.5	3.4
.0175	<b>.0700</b>	.0588	3.14	.50	-.16	.697	299.3	4.4
.0187	<b>.0700</b>	.0484	3.72	.40	-.11	.590	292.4	7.4
.0189	<b>.0700</b>	.0347	4.22	.19	-.05	.210	322.9	16.1

## 7 Oppsummering og konklusjon

I den teoretiske delen ble det utviklet en substitusjonsligning som viste sammenhengen mellom de tre momentene ved hjelp av kjente størrelser fra den tradisjonelle Markowitz-modellen. Jeg viste at denne ligningen kunne benyttes som et verktøy i arbeidet med å finne formen på den tredimensjonale fronten. Det ble videre poengtert at substitusjonsligningen tilfredstilte simultanproblemet, men at den ikke kunne benyttes til å finne eventuelle ikke-konvekse deler av fronten.

I den empiriske delen ble det utviklet tre enkle modeller som, ved å gi avkall på simultanitet, unngikk problemene knyttet til skjevhetsfunksjonen og ikke-konvekse områder. Modellene ble anvendt på ti aksjer fra S&P500 og viste en tredimensjonal struktur formet som en kvart kjegle, konsistent med både substitusjonsligningen og tidligere forskning. Modellene er svært robuste og det eksisterer en sterk, dog ikke direkte sammenheng til maksimering av forventet nytte.

Datasettet konstruert med de empiriske modellene ble så lagt til grunn for estimering av en translog MVS-funksjon som ga en kvantitativ sammenheng mellom forventning (avkastning), standardavvik (risiko) og standardskjevhet (asymmetri). Jeg viste at denne ligningen kunne benyttes til å se på markedets substitusjonsmuligheter mellom de tre momentene. En svakhet ved den estimerte ligningen var dens manglende evne til å fange opp ikke-konveksitet. Videre var separabilitetsantakelsen mellom momentene en forenkling som ideelt burde vært unngått, og derfor gjenstand for videre forskning.

Resultatene i denne oppgaven viser at dersom det eksisterer kunnskap om en investors preferanser for avkastning, risiko og asymmetri kan den tredimensjonale fronten benyttes til å finne en optimal portefølje for denne investoren. Dersom investoren senere ønsker å endre porteføljesammensetningen, vil høyere avkastning eller høyere asymmetri føre til at markedet også krever økt risiko. Det ble vist at denne risikoøkningen er størst i førstnevnte tilfelle. Avslutningsvis ble det også poengtert at mulighetene for å substituere mellom avkastning og asymmetri generelt er svært dårlige, men at det er en bedring for balanserte porteføljer.

## 8 Referanser

### Artikler

1. ARROW, K.J. (1965): "Aspects of the Theory of Risk-Bearing", 1. utg, Helsinki, Yrjö Jahanssonin Säätiö.
2. ATHAYDE, G. OG R. FLÔRES (2004): "Finding a Maximum Skewness Portfolio - A General Solution to Three-Moments Portfolio Choice", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(3), 1335-1352.
3. BORCH, K. (1969): "A Note on Uncertainty and Indifference Curves", *The Review of Economic Studies*, 36, No. 1, 1-4.
4. BRIEC, W. OG K. KERSTENS (2005): "Markowitz Portfolio Selection in Multidimensional Moment Space", Department of Economics, University of Perpignan (mimeo).
5. BRIEC, W., K. KERSTENS OG O. JOKUNG. (2007): "Mean-Variance-Skewness Portfolio Performance Gauging: A General Shortage Function and Dual Approach", *Management Science*, 53, 135-149.
6. BROCKETT, P.L. OG Y. KAHANE (1992): "Risk, Return, Skewness and Preference", *Management Science*, 38, 851-866.
7. CHAMBERLAIN, G. (1983): "A Characterization of the Distributions That Imply Mean-Variance Utility Functions", *Journal of Economic Theory*, 29(1), 185-201.
8. CHRISTENSEN, L.R., D.W. JORGENSON OG L.J. LAU (1973): "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", *The Review of Economics and Statistics*, 55, No. 1, 28-45.
9. CHUNHACHINDA, P., K. DANDAPANI, S. HAMID OG A.J. PRAKASH (1997): "Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets", *Journal of Banking and Finance*, 21(2), 143-167.
10. EECKHOUDT, L. OG SCHLESINGER, H. (2006): "Putting Risk in its Proper Place", *The American Economic Review*, 96, 280-289.
11. GOTOH, J. OG H. KONNO (2000): "Third Degree Stochastic Dominance and Mean-Risk Analysis", *Management Science*, 46, No. 2, 289-301.

12. GRIFFIN, J.M. (1977): "Long-Run Production Modeling with Pseudo-Data: Electric Power Generation", *The Bell Journal of Economics*, 8, No. 1, 112-127.
13. HANOCH, G. OG H. LEVY (1969): "The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk", *The Review of Economic Studies*, 36, No. 3, 335-346.
14. HANOCH, G. OG H. LEVY (1970): "Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility", *The Journal of Business*, 43, No. 2, 181-189.
15. HARVEY, C.R., J.C. LIECHTY, M.W. LIECHTY OG P. MÜLLER (2003): "Portfolio Selection With Higher Moments", Drexel University (mimeo).
16. JENSEN, M. (1968): "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964", *The Journal of Finance*, 23, No. 2, 389-416.
17. JONDEAU, E. OG M. ROCKINGER (2003): "How Higher Moments Affect the Allocation of Assets", *Finance Letters*, 1 (2), 1-5.
18. KANE, A. (1982): "Skewness Preference and Portfolio Choice", *The Journal of Financial Quantitative Analysis*, 17, No. 1, 15-25.
19. KIM, T-H. OG H. WHITE (2004): "On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis", *Finance Research Letters*, 1, 56-73.
20. KIMBALL, M.S. (1990): "Precautionary Saving in the Small and in the Large", *Econometrica*, 58, No. 1, 53-73.
21. KLIENATI, P.M. OG B. RUSTEM (2009): "Portfolio Decisions with Higher Order Moments", Imperial College, University of London.
22. KONNO, H. OG K. SUZUKI (1995): "A Mean-Variance-Skewness Portfolio Optimization Model", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 38, 173-187.
23. KONNO, H., T. SUZUKI OG D. KOBAYASHI (1998): "A Branch and Bound Algorithm for Solving Mean-Risk-Skewness Portfolio Models", *Optimization Methods and Software*, 10:2, 297-317.
24. KRAUS, A. OG R.H. LITZENBERGER (1976): "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", *The Journal of Finance*, 31, No. 4, 1085-1100.
25. KROLL, Y., H. LEVY OG H.M. MARKOWITZ (1984): "Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization", *The Journal of Finance*, 39, No. 1, 47-61.



26. LESSER, J.A. (1990): "Application of Stochastic Dominance Tests to Utility Resource Planning Under Uncertainty", *Energy*, 15(11), 949-961.
27. LEVY, H. (1969): "A Utility Function Depending on the First Three Moments", *The Journal of Finance*, 24, No. 4, 715-719.
28. LEVY, H. OG H.M. MARKOWITZ (1979): "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", *The American Economic Review*, 69, No. 3, 308-317.
29. LIU, S., S.Y. WANG OG W. QIU (2003): "Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Transaction Costs", *International Journal of Systems Science*, 34: 4, 255-262.
30. LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
31. MARINGER, D. OG P. PARPAS (2009): "Global Optimization of Higher Order Moments in Portfolio Selection", *Journal of Global Optimization*, 43(2-3), 219-230.
32. MARKOWITZ, H.M. (1952): "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, 7, No. 1, 77-91.
33. MENCIA, J. OG E. SENTANA (2009): "Multivariate Location-Scale Mixtures of Normals and Mean-Variance-Skewness Portfolio Allocation", *Journal of Econometrics*, 153, 105-121.
34. MERTON, R.C. (1972): "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, No. 4, 1851-1872.
35. MILLS, T.C. (1995): "Modelling Skewness and Kurtosis in the London Stock Exchange FT-SE Index Return Distributions", *The Statistician*, 44, 323-332.
36. MÜLLER, S.M. OG M.J. MACHINA (1987): "Moment Preferences and Polynomial Utility", *Economics Letters*, 23, 349-353.
37. OGRYCAK, W. OG A. RUSZCZYNSKI (1999): "From Stochastic Dominance to Mean-Risk Models: Semideviations as Risk Measures", *European Journal of Operational Research*, 116, 33-50.
38. OWEN, J. OG R. RABINOVITCH (1983): "On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice", *The Journal of Finance*, 38, No. 3, 745-752.

39. PARMETER, C.F., K. SUN, D.J. HENDERSON OG S.C. KUMBHAKAR (2009): "Regression and Inference Under Smoothness Restrictions", Department of Economics, Binghamton University (mimeo).
40. PRAKASH, A., C. CHANG OG T. PACTWA (2003): "Selecting a Portfolio with Skewness: Recent Evidence from US, European and Latin Equity Markets", *Journal of Banking and Finance*, 27(7), 1375-1390.
41. PRATT, J.W. (1964): "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, 32, No. 1/2, 122-136.
42. SCOTT, R.C. OG P.A. HORVATH (1980): "On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance", *The Journal of Finance*, 35, No. 4, 915-919.
43. SHARPE, W. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk", *The Journal of Finance*, 19, No. 3, 425-442.
44. SHARPE, W. (1966): "Mutual Fund Performance", *Journal of Business*, 39, 119-138.
45. SIMAAN, Y. (1993): "Portfolio Selection and Asset Pricing-Three-Parameter Framework", *Management Science*, 39, 568-577.
46. TOBIN, J. (1958): "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies*, 26, 65-86.
47. TREYNOR, J.L. (1965): "How to Rate Management of Investment Funds", *Harvard Business Review*, 43, 63-75.
48. YU, L., S. WANG OG K.K. LAI (2008): "Neural Network-based Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection", *Computers and Operational Research*, 35, 34-46.

Artikler benyttet i arbeidet som ikke direkte er referert til i teksten.

1. ATHAYDE, G. OG R. FLÔRES (2003): "Incorporating Skewness and Kurtosis in Portfolio Optimization: A Multidimensional Efficient Set", *Advances in Portfolio Construction and Implementation*, av S. Satchell og A. Scowcroft, Oxford: Butterworth-Heinemann, 243-257.
2. BARON, D.P. (1977): "On the Utility Theoretic Foundations of Mean-Variance Analysis", *The Journal of Finance*, 32, No. 5, 1683-1697.
3. BORCH, K. (1963): "A Note on Utility and Attitudes to Risk", *Management Science*, 9, No. 4, 697-700.
4. BRIEC, W., K. KERSTENS OG J.B. LESOURD (2004): "Single Period Markowitz Portfolio Selection, Performance Gauging and Duality: A Variation on the Luenberger Shortage Function", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 120, 1-27.
5. CHRISTENSEN, L.R., D.W. JORGENSON OG L.J. LAU (1975): "Transcendental Logarithmic Utility Functions", *The American Economic Review*, 65, No. 3, 367-383.
6. JONDEAU, E. OG M. ROCKINGER (2006): "Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments", *European Financial Management*, 12, 29-55.
7. KIMBALL, M.S. (1993): "Standard Risk Aversion", *Econometrica*, 61, No. 3, 589-611.
8. MARKOWITZ, H.M. (1999): "The Early History of Portfolio Theory: 1600-1900", *Financial Analysts Journal*, 55, No. 4, 5-16.
9. MEYER, J. (1979): "Mean-Variance Efficient Sets and Expected Utility", *The Journal of Finance*, 34, No. 5, 1221-1229.
10. MEYER, J. (1987): "Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization", *The American Economic Review*, 77, No. 3, 421-439.
11. SAMUELSON, P.A. (1970): "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments", *The Review of Economic Studies*, 37, No. 4, 537-542.
12. STEINBACH, M.C. (2001): "Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis", *SIAM Review*, 43, No. 1, 31-85.

## Bøker

1. COWELL, F. (2006): "Microeconomics: Principles and Analysis", 1. utg, New York, Oxford University Press Inc.
2. INGERSOLL, J.E. (1987): "Theory of Financial Decision Making", 1. utg, New Jersey, Rowman & Littlefield.
3. KLEIN, L.R. (1953): "A Textbook of Econometrics", 1. utg, Evanston: Row Peterson, s. 258.
4. LUENBERGER, D.G. (1998): "Investment Science", 1. utg, New York, Oxford University Press Inc.
5. MARKOWITZ, H.M. (1959): "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", 1. utg, New York, John Wiley & Sons.
6. VON NEUMANN, J. OG O. MORGENSTERN (1947): "Theory of Games and Economic Behavior", 1. utg, Princeton, Princeton University Press.
7. SYDSÆTER, K., A. STRØM OG P. BERCK (2006): "Matematisk formelsamling for økonomer", 4. utg, Oslo, Gyldendal Akademisk.
8. WHITMORE, G.A. OG M.C. FINDLAY (1978): "Stochastic Dominance: An Approach to Decision-Making Under Risk", 1. utg, Massachusetts, D.C. Heath & Company, Lexington.

## Annet

1. EKERN, S. (2009): Forelesningsnotater i ECO421 Finansieringsteori, Norges Handelshøyskole. Ikke publisert.
2. SCHROYEN, F. (2008): Forelesningsnotater i ECO401 Optimization and Microeconomic Theory, Norges Handelshøyskole. Ikke publisert.

## 9 Appendiks

### Bevis 1 *Stokastisk dominans*

Forventet nytte for portefølje  $\tilde{y}_1$  og portefølje  $\tilde{y}_2$  er gitt ved:

$$E_F[u(\tilde{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx \quad (9.1)$$

$$E_H[u(\tilde{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)h(x)dx \quad (9.2)$$

Ved bruk av delvis integrasjon med egenskapene  $F' = f$ ,  $H' = h$  og  $F(\infty) = H(\infty) = 1$  kan (9.1) og (9.2) skrives som:

$$E_F[u(\tilde{x})] = u(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)F^1(x)dx$$

$$E_H[u(\tilde{x})] = u(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)H^1(x)dx$$

hvor  $F^1$  betegner den første kumulative  $F^1(x) = \int_{-\infty}^x f(a)da$  og samme for  $H$ . Forskjellen i forventet nytte er gitt som differansen mellom ligningene over:

$$E_F[u(\tilde{x})] - E_H[u(\tilde{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)[H^1(x) - F^1(x)]dx$$

Dette beviser 1SD. Forventet nytte er større for  $F$  enn for  $H$  dersom  $F$  første ordens stokastisk dominerer  $H$  (dvs  $H^1(x) \geq F^1(x)$  for alle  $x$ ) samtidig som  $u' > 0$ . For å bevise 2SD kan vi foreta delvis integrasjon to ganger på ligning (9.1) og (9.2):

$$E_F[u(\tilde{x})] = u(\infty) - \left[ u'(\infty)F^2(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} u''(x)F^2(x)dx \right]$$

$$E_H[u(\tilde{x})] = u(\infty) - \left[ u'(\infty)H^2(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} u''(x)H^2(x)dx \right]$$

hvor  $F^2(x)$  betegner den andre kumulative gitt ved  $F^2(x) = \int_{-\infty}^x F^1(a)da$  og samme for  $H$ . Forskjellen i forventet nytte er gitt som differansen mellom disse ligningene:

$$E_F[u(\tilde{x})] - E_H[u(\tilde{x})] = u'(\infty)[H^2(\infty) - F^2(\infty)] - \int_{-\infty}^{\infty} u''(x)[H^2(x) - F^2(x)]dx$$

som beviser 2SD. Forventet nytte er større for  $F$  enn for  $H$  dersom  $F$  andre ordens stokastisk dominerer  $H$  (dvs  $H^2(x) \geq F^2(x)$  for alle  $x$ ) samtidig som  $u' > 0$  og  $u'' < 0$ . På samme måte kan 3SD bevises ved å foreta delvis integrasjon tre ganger på ligning (9.1) og (9.2):

$$\begin{aligned} E_F[u(\tilde{x})] &= u(\infty) - u'(\infty)F^2(\infty) + \left[ u''(\infty)F^3(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} u'''(x)F^3(x)dx \right] \\ E_H[u(\tilde{x})] &= u(\infty) - u'(\infty)H^2(\infty) + \left[ u''(\infty)H^3(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} u'''(x)H^3(x)dx \right] \end{aligned}$$

hvor  $F^3(x)$  betegner den tredje kumulative gitt ved  $F^3(x) = \int_{-\infty}^x F^2(a)da$  og samme for  $H$ . Forskjellen i forventet nytte er gitt ved:

$$u'(\infty)[H^2(\infty) - F^2(\infty)] - u''(\infty)[H^3(\infty) - F^3(\infty)] + \int_{-\infty}^{\infty} u'''(x)[H^3(x) - F^3(x)]dx$$

som beviser 3SD. Forventet nytte er større for  $F$  enn for  $H$  dersom  $F$  tredje ordens stokastisk dominerer  $H$  (dvs  $H^3(x) \geq F^3(x)$  for alle  $x$  og  $H^2(\infty) \geq F^2(\infty)$ ) samtidig som  $u' > 0$ ,  $u'' < 0$  og  $u''' > 0$ .

## Bevis 2 Nyttedefunksjonen med normalfordelte variable

Ligning (3.16) kan bevises på følgende måte. Deriver ligning (3.14) med hensyn på varians:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2} = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \sigma_Y^2} \frac{\partial V}{\partial \sigma_Y} = \frac{1}{2\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} u'(\mu_Y + \sigma_Y z) z \phi(z) dz$$

Siden  $z\phi(z)dz$  er den deriverte av  $\int_{-\infty}^z x\phi(x)dx$ , kan vi bruke delvis integrasjon:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2} = \frac{1}{2\sigma_Y} \left[ u'(\mu_Y + \sigma_Y z) \int_{-\infty}^z x\phi(x)dx \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u''(\mu_Y + \sigma_Y z) \sigma_Y \int_{-\infty}^z x\phi(x)dx dz \right]$$

Uttrykket foran minustegnet kan evalueres på følgende måte:

$$u'(\mu_Y + \sigma_Y \times \infty) \int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)dx - u'(\mu_Y + \sigma_Y \times (-\infty)) \int_{-\infty}^{-\infty} x\phi(x)dx = 0$$

Dette uttrykket er 0 grunnet egenskapen ved standard normalfordelingen  $\int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)dx = 0$  og siden  $\int_{-\infty}^{-\infty} x\phi(x)dx = 0$ . Dermed sitter vi igjen med:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2} = -\frac{1}{2\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} u''(\mu_Y + \sigma_Y z) \sigma_Y \int_{-\infty}^z x\phi(x)dx dz$$

For standard normalfordelingen gjelder relasjonen  $\int_{-\infty}^z x\phi(x)dx = -\phi(z)$  slik at dette uttrykket kan skrives som:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2} = \frac{1}{2\sigma_Y} \int_{-\infty}^{\infty} u''(\mu_Y + \sigma_Y z) \sigma_Y \phi(z) dz$$

### Bevis 3 Skjevhetsfunksjonen

Anta to aktiva med vektor og koskjevhetetsmatrise gitt ved

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} s_{111} & s_{112} & s_{112} & s_{122} \\ s_{112} & s_{122} & s_{122} & s_{222} \end{pmatrix}$$

hvor symmetriegenskapen til koskjevhetetsmatrisen er hensyntatt, dvs  $s_{ijk} = s_{ikj} = s_{kij} = s_{kji} = s_{jik} = s_{jki}$ . Porteføljeskjevhet er da gitt fra ligningen

$$\begin{aligned} s_p^3 &= \alpha^t \Upsilon (\alpha \otimes \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{111} & s_{112} & s_{112} & s_{122} \\ s_{112} & s_{122} & s_{122} & s_{222} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \times \alpha_1 \\ \alpha_1 \times \alpha_2 \\ \alpha_2 \times \alpha_1 \\ \alpha_2 \times \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1^2 (s_{111} \alpha_1 + s_{112} \alpha_2) + 2\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 s_{112} + \alpha_2 s_{122}) + \alpha_2^2 (\alpha_1 s_{122} + \alpha_2 s_{222}) \end{aligned}$$

Figur 7(a) fremkommer ved å sette skjevheten  $s_{111} = s_{222} > 0$  og koskjevheten  $s_{112} = s_{122} = 0$ . Funksjonen er da

$$s_p^3 = s_{111} \alpha_1^3 + s_{222} \alpha_2^3$$

Figur 7(b) fremkommer ved å sette skjevheten  $s_{111} = s_{222} = 0$  og koskjevheten  $s_{112} = s_{122} > 0$ . Funksjonen er da

$$s_p^3 = \alpha_1^2 \alpha_2 s_{112} + 2\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 s_{112} + \alpha_2 s_{122}) + \alpha_2^2 \alpha_1 s_{122}$$



**Bevis 4** Den inverse matrisen til skjevhetsfunksjonen

Sammenhengen kan illustreres med 2 aktiva. Resultatet kan generaliseres til  $n$  elementer. Beregner først  $2 \times 1$  matrisen gitt ved:

$$\Upsilon(\alpha \otimes \alpha) = \begin{pmatrix} s_{111} & s_{112} & s_{112} & s_{122} \\ s_{112} & s_{122} & s_{122} & s_{222} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \times \alpha_1 \\ \alpha_1 \times \alpha_2 \\ \alpha_2 \times \alpha_1 \\ \alpha_2 \times \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 s_{111} + 2\alpha_1 \alpha_2 s_{112} + \alpha_2^2 s_{122} \\ \alpha_1^2 s_{112} + 2\alpha_1 \alpha_2 s_{122} + \alpha_2^2 s_{222} \end{pmatrix}$$

Matrisen  $\Psi(\alpha)$  med dimensjon  $2 \times 2$  er gitt ved:

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} s_{111} & s_{112} & s_{112} & s_{122} \\ s_{112} & s_{122} & s_{122} & s_{222} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 s_{111} + \alpha_2 s_{112} & \alpha_1 s_{112} + \alpha_2 s_{122} \\ \alpha_1 s_{112} + \alpha_2 s_{122} & \alpha_1 s_{122} + \alpha_2 s_{222} \end{pmatrix}$$

Den inverse matrisen er gitt ved:

$$\Psi(\alpha)^{-1} = \frac{1}{\det(\Psi(\alpha))} \begin{pmatrix} \alpha_1 s_{122} + \alpha_2 s_{222} & -\alpha_1 s_{112} - \alpha_2 s_{122} \\ -\alpha_1 s_{112} - \alpha_2 s_{122} & \alpha_1 s_{111} + \alpha_2 s_{112} \end{pmatrix}$$

hvor

$$\det(\Psi(\alpha)) = \alpha_1^2 s_{111} s_{122} + \alpha_1 s_{111} \alpha_2 s_{222} - \alpha_2 s_{112} \alpha_1 s_{122} + \alpha_2^2 s_{112} s_{222} - \alpha_1^2 s_{112}^2 - \alpha_2^2 s_{122}^2$$

Produktet  $\Psi(\alpha)^{-1} \Upsilon(\alpha \otimes \alpha)$  har da dimensjon  $2 \times 1$  og er gitt ved:

$$\frac{1}{\det(\Psi(\alpha))} \begin{pmatrix} \alpha_1 s_{122} + \alpha_2 s_{222} & -\alpha_1 s_{112} - \alpha_2 s_{122} \\ -\alpha_1 s_{112} - \alpha_2 s_{122} & \alpha_1 s_{111} + \alpha_2 s_{112} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 s_{111} + 2\alpha_1 \alpha_2 s_{112} + s_{122} \alpha_2^2 \\ \alpha_1^2 s_{112} + 2\alpha_1 \alpha_2 s_{122} + \alpha_2^2 s_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

**Bevis 5** *Substitusjonsmuligheter og elastisiteter*

MVS-funksjonen  $\ln V = \ln T(M, S)$  i (6.3) kan omformuleres ved å benytte den naturlige logaritmen på begge sider. Vi får da  $V = T(M, S)$ , som kan skrives som:

$$T(M, S) = \exp \left[ \beta_0 + \beta_M \ln M + \beta_S \ln S + \frac{1}{2} \beta_{MM} (\ln M)^2 + \frac{1}{2} \beta_{SS} (\ln S)^2 + \beta_{MS} \ln M \ln S \right]$$

De deriverte av funksjonen er gitt ved:

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{T}{M} \left[ \beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S \right] = \frac{T}{M} \eta_{MV} \\ T_S &= \frac{\partial T}{\partial S} = \frac{T}{S} \left[ \beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M \right] = \frac{T}{S} \eta_{SV} \\ T_S^M &= \frac{\partial M}{\partial S} = -\frac{M}{S} \left[ \frac{\beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M}{\beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S} \right] = \frac{M}{S} \left[ -\frac{\eta_{SV}}{\eta_{MV}} \right] = \frac{M}{S} \eta_{SM} \end{aligned}$$

hvor uttrykkene i parantes per definisjon betegner elastisitetene,  $\eta_{MV}$ ,  $\eta_{SV}$  og  $\eta_{SM}$ . Den siste sammenhengen er funnet ved å totaldifferensiere ligning (6.3):

$$0 = \frac{\partial V}{\partial M} dM + \frac{\partial V}{\partial S} dS$$

$$\frac{dM}{dS} = -\frac{\partial T / \partial S}{\partial T / \partial M} = \frac{M}{S} \left[ -\frac{\beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M}{\beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S} \right]$$

## Bevis 6 Transformasjonselastisitet

Transformasjonselastisiteten mellom de to "produksjonsfaktorene"  $M$  og  $S$  er gitt ved ligningen:

$$\omega_{SM} = -\frac{d \ln\left(\frac{M}{S}\right)}{d \ln\left(\frac{T_S}{T_M}\right)} = -\frac{\left(\frac{d\left(\frac{M}{S}\right)}{dM}\right)|_{dV=0} / \left(\frac{M}{S}\right)}{\left(\frac{d\left(\frac{T_S}{T_M}\right)}{dM}\right)|_{dV=0} / \left(\frac{T_S}{T_M}\right)} \quad (9.3)$$

hvor  $T_S$  og  $T_M$  er de førstederiverte utledet i bevis 5. Forholdet mellom disse er:

$$\frac{T_S}{T_M} = \frac{M(\beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M)}{S(\beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S)} = \frac{M}{S} \frac{\eta_{SV}}{\eta_{MV}}$$

For å kunne løse (9.3) må vi definere disse sammenhengene:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{M}{S}\right)}{dM}\Big|_{dV=0} &= \frac{\partial\left(\frac{M}{S}\right)}{\partial M} + \frac{\partial\left(\frac{M}{S}\right)}{\partial S} \frac{dS}{dM} \\ \frac{d\left(\frac{T_S}{T_M}\right)}{dM}\Big|_{dV=0} &= \frac{\partial\left(\frac{T_S}{T_M}\right)}{\partial M} + \frac{\partial\left(\frac{T_S}{T_M}\right)}{\partial S} \frac{dS}{dM} \end{aligned}$$

Ved å benytte  $\frac{dS}{dM} = -\frac{T_M}{T_S}$  kan vi beregne:

$$\frac{d\left(\frac{M}{S}\right)}{dM}\Big|_{dV=0} = \frac{1}{S} - \frac{M}{S^2} \left(-\frac{T_M}{T_S}\right) = \frac{1}{S} + \frac{M}{S^2} \frac{S}{M} \frac{\eta_{MV}}{\eta_{SV}} = \frac{1}{S} \left(1 + \frac{\eta_{MV}}{\eta_{SV}}\right)$$

Ved å multiplisere dette uttrykket med  $S/M$  får vi da telleren i ligning (9.3):

$$\frac{1}{S} \left(1 + \frac{\eta_{MV}}{\eta_{SV}}\right) \frac{S}{M} = \frac{1}{M} \frac{1}{\eta_{SV}} (\eta_{MV} + \eta_{SV}) \quad (9.4)$$

Samme fremgangsmåte kan benyttes på det andre uttrykket, men utledningen krever noe mer arbeid:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\frac{T_S}{T_M})}{dM} \Big|_{dV=0} &= \frac{1}{S\eta_{MV}} \left[ \beta_{MS} + \eta_{SM}\beta_{MM} + \eta_{SV} \right] \\
&+ \frac{M}{S^2\eta_{MV}} \left[ \beta_{SS} - \eta_{SV} + \eta_{SM}\beta_{MS} \right] \left( -\frac{S}{M} \frac{\eta_{MV}}{\eta_{SV}} \right) \\
&= \frac{1}{S\eta_{MV}} \left[ \beta_{MS} + \eta_{SM}\beta_{MM} + \eta_{SV} \right] \\
&- \frac{1}{S\eta_{SV}} \left[ \beta_{SS} - \eta_{SV} + \eta_{SM}\beta_{MS} \right]
\end{aligned}$$

Ved å multiplisere dette med  $T_M/T_S$  får vi da nevneren i ligning (9.3):

$$\frac{1}{M} \frac{1}{\eta_{SV}} \left[ 2\beta_{MS} + \eta_{SM}\beta_{MM} + \frac{1}{\eta_{SM}}\beta_{SS} + \eta_{MV} + \eta_{SV} \right] \quad (9.5)$$

Setter vi (9.4) og (9.5) inn i (9.3) og benytter sammenhengen  $\eta_{MS} = 1/\eta_{SM}$  får vi da:

$$\omega_{SM} = -\frac{\eta_{MV} + \eta_{SV}}{2\beta_{MS} + \eta_{SM}\beta_{MM} + \eta_{MS}\beta_{SS} + \eta_{MV} + \eta_{SV}}$$

**Bevis 7** *Hesse-matrisen og egenverdier*

Ligningen  $\ln V = \ln T(M, S)$  definert i (6.3) er gitt på logaritimisk form, noe som gir en konkav transformasjon av den "virkelige" ligningen  $V = T(M, S)$ . Når vi tester for konvekksitet er det derfor naturlig å se på sistnevnte versjon. De førstederiverte av denne er gitt i bevis 5. Med produktregelen får vi da de andrederiverte gitt ved:

$$\begin{aligned}
 T_{MM} &= \frac{\partial^2 T}{\partial M^2} = \frac{T}{M^2}(\beta_{MM} - \beta_M - \beta_{MM} \ln M - \beta_{MS} \ln S) \\
 &+ \frac{T}{M^2}(\beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S)^2 \\
 &= \frac{T}{M^2}(\beta_{MM} - \eta_{MV} + \eta_{MV}^2) \\
 T_{SS} &= \frac{\partial^2 T}{\partial S^2} = \frac{T}{S^2}(\beta_{SS} - \beta_S - \beta_{SS} \ln S - \beta_{MS} \ln M) \\
 &+ \frac{T}{S^2}(\beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M)^2 \\
 &= \frac{T}{S^2}(\beta_{SS} - \eta_{SV} + \eta_{SV}^2) \\
 T_{MS} &= \frac{\partial^2 T}{\partial M \partial S} = \frac{T}{MS} \beta_{MS} \\
 &+ \frac{T}{MS}(\beta_M + \beta_{MM} \ln M + \beta_{MS} \ln S)(\beta_S + \beta_{SS} \ln S + \beta_{MS} \ln M) \\
 &= \frac{T}{MS}(\beta_{MS} + \eta_{MV} \eta_{SV})
 \end{aligned}$$

Disse størrelsene kan settes inn i Hesse-matrisen:

$$H(M, S) = \begin{pmatrix} T_{MM} & T_{MS} \\ T_{MS} & T_{SS} \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til Hesse-matrisen må i følge Sydsæter et al (2006) tilfredstille  $\det(H - \iota I) = 0$ , hvor  $I$  er identitetsmatrisen med dimensjon  $2 \times 2$ :

$$\det \begin{pmatrix} T_{MM} - \iota & T_{MS} \\ T_{MS} & T_{SS} - \iota \end{pmatrix} = 0$$

som gir en 2.gradsligning:

$$\iota^2 - \iota(T_{MM} + T_{SS}) + T_{MM}T_{SS} - T_{MS}^2 = 0$$

Ligningen kan løses for egenverdien  $\iota$  ved hjelp av ABC-formelen. Vi får da to løsninger:

$$\begin{aligned}\iota_1 &= \frac{1}{2} \left[ T_{MM} + T_{SS} + \sqrt{T_{MM}^2 + T_{SS}^2 + 4T_{MS}^2 - 2T_{MM}T_{SS}} \right] \\ \iota_2 &= \frac{1}{2} \left[ T_{MM} + T_{SS} - \sqrt{T_{MM}^2 + T_{SS}^2 + 4T_{MS}^2 - 2T_{MM}T_{SS}} \right]\end{aligned}$$

Hesse-matrisen til funksjonen har altså to egenverdier  $\iota_1$  og  $\iota_2$ . Punktet  $(M_i, S_i)$  gir en positiv semidefinit Hesse-matrise  $H(M_i, S_i)$  dersom egenverdiene tilfredstiller:

$$\iota_1(M_i, S_i) \geq 0 \quad \iota_2(M_i, S_i) \geq 0$$

noe som betyr at vi befinner oss i et konvekst område. Dersom èn (eller begge) egenverdiene er negative er området ikke-konvekst.