Pensjonskontrakter med årlig rentegaranti

av Terje Sjåholm og Erik Kaarstad Skeie

Veileder: Professor Svein-Arne Persson

Utredning i fordypnings-/spesialområdet: Finansiell økonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

SAMMENDRAG

I denne utredningen analyserer vi pensjonskontrakter som gir en årlig rentegaranti, og vi tar utgangspunkt i en tidligere studie av Døskeland og Nordahl fra 2006. For en kunde med konstant relativ risikoaversjon som i Mertons porteføljeproblem vil ikke kontraktene være en del av ens optimale portefølje. Jo høyere garantien er, jo lavere vil forventet avkastning og nytte av kontrakten være for kunden. Vi viser også at pensjonskontraktene gir en subsidieringseffekt mellom generasjoner når en andel av overskuddsavkastningen utover garantien går til bufferoppbygging. På den måten kan kontraktene være en del av den optimale porteføljen til senere generasjoner.

Garantielementet i kontaktene gjør at det oppstår en interessekonflikt mellom selskapets kunder og eiere. Kundene ønsker en god langsiktig avkastning, mens eierne er opptatt av å beskytte sin egenkapital på kort sikt i år med svak avkastning.

FORORD

Utredningen markerer slutten på vår mastergrad i finansiell økonomi ved Norges Handelshøyskole. Oppgaveskrivingen har vært en spennende og lærerik prosess, fra den funderende starten i august til vi nå er klar med et ferdig produkt. Prosessen har gitt oss en betydelig bedre innsikt i blant annet Monte Carlo simuleringer, hvordan pensjonskontrakter kan prises og hvordan deler av livsforsikringsmarkedet fungerer.

Vi vil rette en takk til Geir Magne Bøe som hjalp oss å komme i gang med å skrive inn makrokoder i Visual Basic i begynnelsen av arbeidet. Videre ønsker vi å rette en stor takk til vår veileder, Svein-Arne Persson, for konstruktive tilbakemeldinger underveis i vårt arbeid. Det har vært et privilegium å ha en veileder med så god kompetanse på fagområdet vi skriver om.

Norges Handelshøyskole
Bergen, 21. desember 2009

Terje Sjåholm og Erik Kaarstad Skeie

INNHOLDSFORTEGNELSE

SAMMENDRAG 2

FORORD 3

1. INNLEDNING 6

1.1 BAKGRUNN FOR VALG AV OPPGAVETEMA 6

1.2 PROBLEMSTILLING OG METODEGRUNNLAG 7

1.3 OPPBYGNING AV OPPGAVEN 8

2. FRIPOLISER 9

3. KAPITALFORVALTNING OG AKTIVAALLOKERING 12

3.1 KAPITALVERDIMODELLEN 12

3.2 INVESTORENS TILPASNING 13

3.3 VALG AV INVESTERINGSSTRATEGI 15

3.4 AKTIVAALLOKERINGENS BETYDNING 15

3.5 HENSIKTEN MED Å INKLUDERE FLERE AKTIVAKLASSER 16

4. OPSJONSTEORI 17

4.1 OPSJONENS UTBETALING 17

4.2 PUT-CALL PARITET 18

4.3 OPSJONSPORTEFØLJE SOM EN REPLIKASJON PÅ EN FRIPOLISE 19

5. AKSJEKURSENS UTVIKLING OG MONTE CARLO SIMULERINGER 21

5.1 AKSJEKURSENS UTVIKLING VED RANDOM WALK 21

5.2 RISIKONØYTRAL VERDSETTELSE 24

5.3 MONTE CARLO SIMULERING 25

5.4 ANDRE EGENSKAPER VED AKSJEKURSENS UTVIKLING 26

6. MODELL FOR PENSJONSKONTRAKTER MED ÅRLIG RENTEGARANTI 28

6.1 FORUTSETNINGER FOR ØKONOMIEN 28

6.2 MERTONS PROBLEM 31

6.3 RENTEGARANTI MED KONKURSRISIKO 31

6.4 RENTEGARANTI MED EMISJONER OG UTBYTTE 34

6.5 ESTIMERING AV EN OPTIMAL PORTEFØLJE 37

6.6 UTFORMING AV RETTFERDIGE KONTRAKTER 40

6.7 FORDELING MELLOM GENERASJONER 45

6.8 OPPSUMMERING AV KAPITTELET 49

7. RESULTATER 50

7.1 MODELLENS PARAMETRE 50

7.2 RESULTATER VED LØSNING AV MERTONS PROBLEM 50

7.3 RESULTATER MATEMATISK MODELL MED KONKURSRISIKO 52

7.4 RESULTATER MATEMATISK MODELL MED EMISJONER 54

7.5 OPPSUMMERING OG EVALUERING AV RESULTATENE 55

8. LIVSELSKAPENES KAPITALFORVALTNING I PRAKSIS 56

8.1 LIVSFORSIKRINGSBRANSJEN I NORGE 56

8.2 LIVSELSKAPENES HISTORISKE KAPITALAVKASTNING 57

8.3 LIVSELSKAPENES SOLIDITET 58

8.4 LIVSELSKAPENES AKTIVAALLOKERING 61

8.5 OPPSUMMERING AV KAPITTELET 63

9. BEGRENSNINGER VED OPPGAVEN OG FORSLAG TIL VIDERE STUDIER 64

10. KONKLUSJONER 65

REFERANSER 66

APPENDIKS 69

1. INNLEDNING

1.1 Bakgrunn for valg av oppgavetema

Da vi startet prosessen med å komme frem til hva vår masterutredning skulle omhandle, var vi enig om at vi ønsket å finne et tema som var originalt og interessant. Vi har begge tatt faget FIE426 Kapitalforvaltning som vi syntes var et nyttig og interessant fag. Vi var derfor enig om at forvaltning innenfor finansfaget var et tema vi kunne skrive om. I FIE435 Applied Finance har begge skrevet en oppgave om risikostyring og Monte Carlo simuleringer, og vi mente at det kunne være svært nyttig å lære mer om denne metoden. Dette er kunnskap som er ettertraktet i deler av næringslivet, særlig når det gjelder å lære seg programmeringsspråk. Derfor var fripoliser et tema som oppfyller de kriteriene vi så etter da vi valgte oppgavetema.

Det har i de seneste årene vært en del oppslag i økonomimediene rundt fripoliser, der særlig selskapet Silver har gått hardt ut mot de store livselskapene og kritisert måten de forvalter fripolisene på. Likevel føler vi at dette er et tema som folk flest har liten kunnskap om. I tilfeller hvor vi har blitt spurt av venner og bekjente om hva vi skriver masterutredning om, har gjennomgangsmelodien vært at folk ikke vet hva en fripolise er. En undersøkelse fra Dagens Næringsliv fra 4. juni i år, som viser at kun 23 % av de spurte svarte ja på spørsmålet om de vet hva en fripolise er, underbygger at den generelle kunnskapen rundt temaet er lav. Et mål for oss med denne oppgaven er derfor å øke interessen for temaet, ganske enkelt fordi fripolisene har en stor og økende betydning for størrelsen på pensjonen til svært mange arbeidstakere i Norge. Samlet er over 100 milliarder kroner plassert i fripoliser i dag[1], og dette beløpet er økende. Da det blir mer vanlig at folk skifter arbeid oftere, vil de samlede fripoliseverdiene vokse raskt. Det er derfor svært viktig at forvaltningen gjennomføres på en hensiktsmessig måte.

[1] Dagens Næringsliv, 4. Juni 2009

[2] Dagens Næringsliv, 4. Juni 2009

1.2 Problemstilling og metodegrunnlag

Vi har formulert følgende problemstillinger som vi ønsker å besvare i denne masteroppgaven:

1. *Hvilken nytte vil en kunde med konstant relativ risikoaversjon ha av en rettferdig priset pensjonskontrakt med årlig rentegaranti, og hvordan påvirker nivået på rentegarantien kundens nytte?*
2. *Hvordan vil tidspunktet en kommer inn i kontrakten på ha betydning for hvilken avkastning kunden kan forvente?*
3. *Hvordan påvirker den årlige rentegarantien selskapets kapitalforvaltning?*

Metodisk vil vi bruke en modell som tar utgangspunkt i to forskningsartikler av Trond M. Døskeland og Helge A. Nordahl fra 2006: *Optimal Pension Insurance Design* og *Intergenerational Effects of Guaranteed Pension Contracts.* Førstnevnte gir oss et rammeverk for hvordan tradisjonelle pensjonskontrakter med et garantielement kan optimeres for å maksimere kundens velferd. Den andre artikkelen viser velferdsvirkninger av pensjonskontrakter med en årlig garantert avkastning, og hvordan slike kontrakter over tid gir en subsidiering mellom generasjoner. Når vi skal se på hvordan kontraktene er forventet å utvikle seg, vil vi bruke Monte Carlo simuleringer, en metode som forklares nærmere i kapittel 5. For å besvare den tredje problemstillingen vil vi også se på hvordan livselskapenes kapitalforvaltning har vært i praksis de seneste årene.

En fripolise er en type pensjonskontrakt som gir en årlig rentegaranti. I startfasen av denne prosessen ønsket vi å skrive mer konkret om og hvordan de blir forvaltet. Imidlertid viste det seg tidlig at livselskapene er lite transparente i forhold til hvordan fripolisene er investert, i tillegg til at det ville bli svært komplisert å beregne eksakt hvordan en fripolisekontrakt vil utvikle seg. I samråd med vår veileder fant vi derfor at det ville være en god idé å ta utgangspunkt i de to nevnte artiklene og gjøre en teoretisk analyse av pensjonskontrakter med rentegaranti.

Det vil være noen forskjeller mellom fripolisekontrakter og kontraktene i våre modeller. I dagens regelverk har kunden krav på 100 % av meravkastningen ut over rentegarantien, og kunden betaler en premie for å få garantien og andelen av meravkastningen. I våre modeller fordeler vi meravkastningen mellom selskapets kunder og eiere basert på rettferdig kontraktsprising og risikonøytral verdsettelse. Vi vil også se bort fra transaksjonskostnader og forvaltningskostnader. Kontraktene i modellene vi bruker vil imidlertid reflektere de samme sammenhengene som for fripoliser og vil derfor være relevant.

1.3 Oppbygning av oppgaven

Vi vil prøve å få til en naturlig oppbygning av oppgaven, slik at leseren er godt kjent med stoffet når man kommer til den avsluttende delen. Oppgaven vil ha både et verbalt og teknisk preg. I kapittel 2 vil vi gi en presentasjon av fripoliser og hvordan fripolisedebatten har blitt fremstilt i media de siste årene. De neste tre kapitlene vil gi oss et teoretisk rammeverk for modellene våre. Her vil vi henholdsvis se på teori om kapitalforvaltning og aktivaallokering, opsjoner, hvordan aksjekursen beveger seg, risikonøytral verdsettelse og Monte Carlo simuleringer. I kapittel 6 vil vi presentere modellene for pensjonskontrakter med årlige rentegarantier, og i kapittel 7 viser vi resultatene av modellene. Videre vil vi se på hvordan livselskapenes kapitalforvaltning har vært i praksis, før vi endelig presenterer våre konklusjoner.

2. FRIPOLISER

Hver gang du slutter hos en arbeidsgiver som har pensjonsavtale, får du en fripolise eller et pensjonskapitalbevis. Fripolisene viser hva du har opparbeidet i pensjon hos dine tidligere arbeidsgivere. De inneholder en rentegaranti (g) som gjør at man oppnår en avkastning på mellom 3 og 4 % hvert år. I tillegg til pensjonssparing omfatter fripolisene også forsikring, blant annet uførhet, barne- og ektefelleforsikring, men i vår utredning vil vi avgrense oss til å se på pensjonssparing. Fripolisene forvaltes av et livsforsikringsselskap eller et dedikert fripoliseselskap. Det er livselskapene som dominerer det norske markedet, der de to største aktørene, Vital og Storebrand, kontrollerer rundt 90 % av markedet[2]. Andre store livselskaper på markedet er Nordea, Gjensidige og Sparebank1, mens det eneste rene fripoliseselskapet er Silver Pensjonsforsikring.

Administrerende direktør i Silver, Mikkel A. Berg, har gått hardt ut mot de største aktørene og konkurransesituasjonen i markedet. Han mener at pensjonssparing gjennom fripoliser tradisjonelt har gitt skuffende lav avkastning, og at de store selskapene utnytter sin markedsmakt til å ta ut ekstra profitt på bekostning av kundene. Mer konkret har Silver kritisert livselskapenes lave aksjeandel i porteføljen, som kan gi et dårligere grunnlag for høyere avkastning på lang sikt. Øistein Medlien, som har vært med å bygge opp konkurrenten Silver, karakteriserte i 2005 måten fripolisene har blitt forvaltet på som ”et ran”, hvor kontoen for fremtidige pensjonsutbetalinger systematisk har blitt belastet med høye kostnader og gitt dårlig avkastning.[3]

De største livselskapene har på sin side kritisert regelverket når de skal forsvare sin lave aksjeandel i sine porteføljer[4]. De mener at regelverket er altfor kortsiktig for en langsiktig forvaltning, og de viser her til rentegarantiene som settes for hvert år. Selv om aksjer har høyere forventet avkastning på lang sikt, gjør de store kortsiktige verdisvingningene at det vil være en relativt høy risiko for at eiernes egenkapital må tappes hvis aksjeandelen blir for høy, fordi de hvert år må utbetale garantien til kundene. Dermed blir livselskapene og deres

[2] Dagens Næringsliv, 4. Juni 2009

[3] Dagens Næringsliv, 11. November 2005

[4] E24, 15. Juli 2009

kunder rammet av et regelverk som ikke er hensiktsmessig. Et argument som imidlertid blir brukt til fordel for den årlige garantien, er at den bidrar til en høyere sikkerhet for kundene.

De siste par årene har det blitt satt fokus på å gjøre det lettere å flytte og samle fripolisene og å redusere administrasjonskostnadene. Til tross for flytteretten er konkurransen i markedet fortsatt svak. Dette kommer frem ved at de to største selskapene dominerer markedet med så mye som 90 % markedsandel, i tillegg til at under 2 % av forvaltningskapitalen tradisjonelt har blitt flyttet årlig. Videre kan det diskuteres hvor godt flytteretten fungerer i praksis. Jon Haugan i Silver har anklaget Storbrand for bevisst trenering ved flytting av fripoliser.[5] Han begrunner dette med at flyttefullmakter som ikke har inneholdt avtalenummer på den aktuelle fripolisen, har kommet i retur. Storebrand tar imidlertid sterk avstand fra beskyldningen, og viser til at de ønsker å behandle alle flyttesaker så raskt som mulig.

Hvis den årlige avkastningen ett år er høyere enn den garanterte avkastningen, vil kundene oppnå en andel av denne meravkastningen på 100 %, mens eierne da altså står igjen med 0 % av avkastningen ut over g. På samme tid må eierne stå for 100 % av risikoen for tap ved dårligere avkastning. Kundene betaler en premie for garantien og avkastningsfordelingen som blir bestemt ved kontraktens inngåelse. Tidligere fikk eierne 35 % av gevinsten og 100 % av tapene, mens de nå kun får betalt premien for å gi kundene en garanti[6]. Imidlertid vil noe av kundens meravkastning gå til en bufferkapital som kan benyttes til å dekke garantielementet ved dårlige år. Hvis bufferkapitalen er tom, vil eiernes egenkapital tæres i et år med dårlig avkastning. Med en slik ordning vi har i dag, hvor eiernes oppside er begrenset samtidig som de har en stor nedside ved urolige markeder, kan det føre til at livselskapenes eiere blir for risikoaverse og ønsker en forsiktig investeringsstrategi med en lavere aksjeandel enn det kundene ønsker. Dette vil igjen ramme kundene som vil oppnå en lav avkastning på sin fripolise.

Eierne av livselskapene ønsker i ytterste grad å unngå at deres egenkapital blir tappet. Siden eierne ønsker å unngå en emisjon, vil livselskapene bli særlig risikoaverse når finansmarkedene er fallende og bufferkapitalen tæres. Derfor vil de selge seg ned i aksjer når aksjeporteføljen har falt mye i verdi. Selv om aksjemarkedet har falt kraftig, må kundene

[5] Dine Penger, 3. September 2009

[6] Finansavisen, 22. Oktober 2008

likefullt få utbetalt sine garantier. Journalist Steinar Grini i Finansavisen har uttalt at "*livselskapenes massive salg av aksjer er blant de sikreste tegnene på at bunnen er nådd i aksjemarkedet*[7]." Utsagnet er kanskje noe overdrevet, men journalisten viser videre til livselskapenes hyppige aksjesalg etter kraftige fall i aksjemarkedet i 1993, 1998, 2002 og 2008. Når livselskapene igjen øker sin aksjeandel, har ofte markedet allerede hatt en betydelig gjenhenting, og kundene går dermed glipp av oppgangen. Dette er en uheldig konsekvens av dagens regelverk.

For å gi en kort oppsummering av kapittelet, så er altså fripoliser en pensjonsavtale arbeidstaker får når man skifter arbeidsgiver. Fripolisen, som blir forvaltet av et livselskap, gir en årlig garantert avkastning på mellom 3 og 4 %. De siste årene har det blitt fokusert på å øke konkurransen i markedet, men på grunn av manglende kunnskap og bevissthet hos folk flest, mm, er konkurransesituasjonen fortsatt reelt sett svak. Garantielementet skaper en interessekonflikt mellom selskapets kunder og eiere, der kundene ønsker høyest mulig langsiktig avkastning, mens eierne ønsker å begrense nedsiderisikoen på kort sikt for å unngå at deres egenkapital blir tappet.

[7] Finansavisen, 22. Oktober 2008

3. KAPITALFORVALTNING OG AKTIVAALLOKERING

I dette kapittelet vil vi gi en generell teoretisk innføring i kapitalforvaltning og aktivaallokering, da dette kan være nyttig for å få en grunnleggende forståelse for tanken bak forvaltningen av fripoliser. Vi vil begynne med å forklare kapitalverdimodellen, som er en enkel, velkjent og svært mye brukt modell i finansteorien. Videre vil vi se på hvordan en investor vil tilpasse seg i finansmarkedene for å maksimere sin nytte. Her vil vi se på en tradisjonell og mye brukt nyttemodell hvor det antas relativ risikoaversjon. I de siste avsnittene vil vi se nærmere på valg av investeringsstrategi og hvilken betydning aktivaallokeringen har.

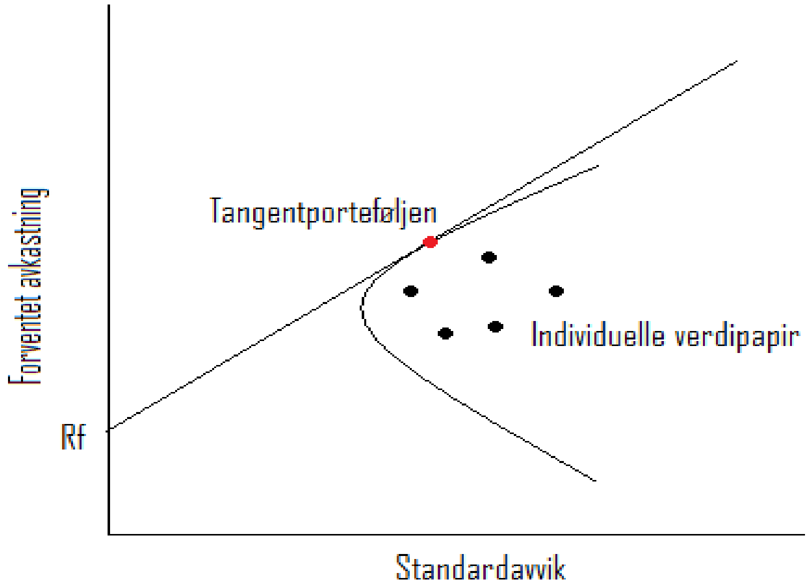
3.1 Kapitalverdimodellen

Kapitalverdimodellen (CAPM) beskriver sammenhengen mellom risiko og forventet avkastning på et aktivum, og modellen har en sentral rolle i klassisk finansteori. For at en investor skal kunne forvente høyere avkastning må man også være villig til å akseptere høyere risiko. Matematisk kan et verdipapirs forventede avkastning skrives som (Bodie, Kane, Marcus, 2007)

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i \qquad (3.1)$$

hvor $E(r_i)$ er verdipapirets forventede avkastning, r_f er risikofri rente, $E(r_m)$ er forventet avkastning til markedsporteføljen og β_i er verdipapirets beta. Betaen er et mål på systematisk risiko og beregnes ved å dividere kovariansen mellom verdipapiret og markedsporteføljen med markedsporteføljens varians. Verdipapirets risiko kan dekomponeres til systematisk og usystematisk risiko. Ved å investere i flere forskjellige verdipapir kan investoren diversifisere bort den usystematiske risikoen, mens systematisk (markeds) risiko ikke er diversifiserbar. Dette impliserer at det kun er markedsrisikoen man får betalt for i form av høyere forventet avkastning. Figuren 3.1 viser hvordan en investor tilpasser seg i markedet.

Figur 3.1: Investors tilpasning i CAPM



Det antas et investeringsunivers med en mengde risikable verdipapir, og effisiensfronten (den buede linjen) viser optimale porteføljer hvor trade off mellom avkastning og risiko er maksimert. Ved å innføre risikofri rente, vil alle rasjonelle investorer tilpasse seg langs kapitalallokeringslinjen, hvor vi finner alle kombinasjoner av en effisient portefølje og den risikofrie investeringen. Hvor stor andel risiko en investor påtar seg, bestemmes dermed ved graden av ens risikoaversjon. Høyere risikoaversjon gir en lavere andel investert i den risikable porteføljen.

Helningen på kapitalallokeringslinjen er den samme som porteføljens Sharperate, som viser avkastning i forhold til totalrisiko. Sharperaten defineres som

$$S_p = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \quad (3.2)$$

3.2 Investorens tilpasning

Som CAPM viser, er en grunnleggende tanke i finans at jo høyere forventet avkastning man ønsker, jo mer risiko må man også være villig til å ta på seg. Hvordan vil investoren tilpasse seg i forhold til dette? Harry Markowitz (1952) er blant de som har prøvd å besvare dette spørsmålet. Han gikk ut i fra at investoren ønsker høyest mulig avkastning, men samtidig lavest mulig risiko, der risiko kan måles i verdisvingninger (variansen) på porteføljen. Investoren har en risikoaversjon (γ) som bestemmer i hvor stor grad man misliker risiko.

Ved å innføre risikofri rente, vil investoren tilpasse seg et sted langs kapitalmarkedslinjen i figur 3.1, avhengig av risikoaversjonen. Investorens nytte kan for eksempel måles ved følgende formel:

$$U(\mu, \sigma^2) = \mu - \frac{\gamma}{2}\sigma^2 \qquad (3.3)$$

hvor μ er forventet avkastning til tangentporteføljen, γ er investorens aversjon mot risiko og σ^2 er variansen til tangentporteføljen. Investoren maksimerer sin nytte ved å velge en andel (θ) i tangentporteføljen og en andel $(1-\theta)$ i det risikofrie alternativet.

Mertons porteføljeproblem (1969) er en velkjent modell innen finans hvor en modell med kontinuerlig tid benyttes. I hans opprinnelige versjon av modellen antas det at investeringsmulighetene man står overfor er konstant, det vil si at forventet avkastning, standardavviket til den risikable porteføljen og risikofri rente er konstant. Investorens nyttefunksjon ved relativ risikoaversjon er dermed gitt ved uttrykket

$$U(x) = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \qquad (3.4)$$

hvor x her er sluttverdien av porteføljen. Denne nyttefunksjonen vil vi ta i bruk senere i oppgaven. Merton (1971) har videre vist at den optimale andelen i tangentporteføljen kan finnes ved uttrykket

$$\theta = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \qquad (3.5)$$

hvor r er risikofri rente. Det antas her at kunden har konstant relativ risikoaversjon (CRRA), det vil si at γ er uavhengig av formue og at θ holdes konstant og rebalanseres kontinuerlig ved verdisvingninger i tangentporteføljen.

At investoren er et rasjonelt individ som kun er opptatt av forventet avkastning og verdisvingninger i form av varians, er en forenkling av virkeligheten som har vært gjenstand for kritikk. Kahneman og Tversky (1979) finner i sitt arbeid *Prospect Theory* at individet evaluerer sin investering relativt til et naturlig referansepunkt (for eksempel det initielle investeringsbeløpet), og vektlegger tap fremfor gevinst. Investoren har dermed en aversjon mot tap fremfor verdisvingninger. En annen antakelse ved prospektteori er at individet overvurderer sannsynligheten for svært usannsynlige utfall og undervurderer sannsynligheten for mer sannsynlige utfall, noe som kalles sannsynlighetsvekting.

I vår utredning vil vi anta at kunden har CRRA slik som i Mertons porteføljeproblem for å avgrense oss, så vi vil derfor ikke gå dypere inn i prospektteori. Vi føler likevel det er verdt å nevne at det er alternative teorier til hvordan en investor ønsker å tilpasse seg.

3.3 Valg av investeringsstrategi

Vi har hittil i dette kapittelet gitt en kort teoretisk fremstilling av noen grunnleggende finansteorier. Videre ønsker vi også å gi en kort innføring i temaer om hvordan kapitalforvaltning kan gjøres i praksis, og vi vil først se på hvordan man kan velge en investeringsstrategi.

Det første en bør gjøre ved et kapitalforvaltningsoppdrag, er å sette opp en investeringsstrategi. Strategien gir en god indikasjon på investorens mål om avkastning og vilje til å ta risiko. Som CAPM viste oss, vil høyere krav til avkastning gå på bekostning av høyere risiko, og investoren må derfor gjøre en avveining mellom disse.

En helt avgjørende faktor i investeringsstrategien er valg av strategisk aktivaallokering. Med dette menes den langsiktige allokeringen mellom ulike aktiva, for eksempel aksjer, obligasjoner, eiendom etc. Man bestemmer hvilke typer aktiva det skal investeres i, og hvilke vekter disse skal ha i porteføljen. Den strategiske aktivaallokeringen har den viktigste betydningen for hvilken forventet avkastning og tilhørende risiko man vil oppnå i en portefølje. Empiriske studier på amerikanske data viser at så mye som 90 % av avkastningen til et fond kan forklares ut fra dets aktivaallokering, noe vi skal forklare nærmere i neste avsnitt.

3.4 Aktivaallokeringens betydning

Det har blitt utført en rekke studier som prøver å finne hvor stor innflytelse en porteføljes aktivaallokering har på dens avkastning. En av disse er av Ibbotson og Kaplans (2000) *Does Asset Allocation Policy Explain, 40, 90 or 100 Percent of Performance?* Forfatterne undersøker aktivaallokeringens betydning for avkastningen til pensjonsfond og andre fond. Som tittelen på deres utredning antyder, finner forfatterne av artikkelen tre grunnleggende funn, som er at den strategiske aktivaallokeringen forklarer:

1. Omtrent 90 % av variasjonen i fondenes avkastning over tid.

2. Omtrent 40 % av variasjonen i avkastning mellom fondene
3. Litt mer enn 100 % av avkastningsnivået til et fond.

Dette kan virke noe forvirrende, og vi vil derfor forsøke å utdype disse sammenhengene nærmere. Altså forklares 90 % av variasjonen i fondenes avkastning over tid av deres benchmark. En viktig årsak til den store betydningen er at de større fondene velger et langsiktig mål på allokeringen som de avviker fra i liten grad. Om fondene hadde vært mer aktive, ville forklaringsgraden gått ned.

Når man ser på forskjellen i avkastning mellom fondene, har den langsiktige aktivaallokeringen omtrent 40 % forklaringsgrad. Forklaringsgraden her blir også lavere ved at fondene er mer aktive. Resultatet her viser at andre faktorer, som for eksempel timing og forskjellig markedssyn, også er med på å forklare en del av forskjellene mellom fondene.

Benchmarken til den strategiske allokeringen forklarer litt mer enn 100 % av avkastningen til et fond. Dette impliserer at fondene i gjennomsnitt ikke klarer å oppnå noe meravkastning i forhold til sin referanseportefølje. Grunnen til at det er litt mer enn 100 %, er at kostnader er tatt med i beregningen, hvilket betyr at den gjennomsnittlige forvalteren underpresterer i forhold til markedet når kostnader er hensyntatt i beregningene.

3.5 Hensikten med å inkludere flere aktivaklasser

Som vi har nevnt tidligere, vil det grunnleggende målet til en investor alltid være å oppnå høyest mulig avkastning til lavest mulig risiko. Grunnen til at man skal ta inn en ekstra aktivaklasse i totalporteføljen, vil derfor være enten å oppnå høyere forventet avkastning og/eller redusere risikoen for porteføljen. Aksjer og obligasjoner er de to mest inkluderte i fond generelt, men det er heller ikke uvanlig å inkludere for eksempel eiendom, råvarer eller private equity i porteføljen. Livselskapene i Norge har investeringer i flere aktivaklasser, som i hovedsak inkluderer aksjer, pengemarkedsfond, obligasjoner, eiendom og private equity. Hovedgrunnen til at flere aktivaklasser tas med ut over aksjer og obligasjoner er at man oppnår en diversifiseringsgevinst.

4. OPSJONSTEORI

I dette kapittelet vil vi gi en generell innføring i opsjoner og prising av opsjoner. Opsjonsteori er relevant for vår oppgave, blant annet fordi pensjonskontraktene vi skal se på har opsjonselementer i seg. Videre er opsjonsteori også sentralt ved rettferdig prising og risikonøytral verdsettelse, som vi skal se på i neste kapittel. I dette kapittelet vil vi innledningsvis forklare hva en opsjon er, og hvordan utbetalingen til en opsjon ser ut. Deretter vil vi utlede Put-Call paritet, som er en viktig sammenheng for opsjoner. I siste del av kapittelet vil vi vise hvordan utbetalingen av en fripolise kan replikeres ved hjelp av en portefølje bestående av opsjoner.

En opsjon er et derivat. Et derivat er en betegnelse på et finansielt instrument hvor verdien avhenger av kursutviklingen til et underliggende aktivum (Bodie, Kane, Marcus, 2007). Videre kan en opsjon betegnes som en rett, men ikke en plikt, til å kunne kjøpe eller selge et verdipapir på et gitt tidspunkt til en på forhånd avtalt pris. Vi har to hovedtyper opsjoner i finansverdenen: en kjøpsopsjon (Call) og en salgsopsjon (Put). En investor som kjøper en opsjon, har en lang posisjon, mens en som utsteder eller selger en opsjon har en kort posisjon av opsjonen. Opsjoner kan enten være enten av amerikansk eller europeisk type. Ved en amerikansk opsjon kan investor utøve opsjonen når som helst i løpet av løpetiden, mens en europeisk opsjon kun kan utøves ved forfallstidspunktet. I vår utredning er det kun europeiske opsjoner som vil være aktuelle.

4.1 Opsjonens utbetaling

Vi vil videre gi en forklaring på opsjonens utbetaling. Vi har i eksempelet, med en aksje som det underliggende aktivumet, følgende parametre:

$C =$ Prisen på en kjøpsopsjon
$P =$ Prisen på en salgsopsjon
$S_t =$ Verdien av aksjen i dag
$K =$ Kontraktsprisen til opsjonen
$T =$ Tidspunktet når opsjonen forfaller
$S_T =$ Verdien av aksjen på forfallstidspunktet

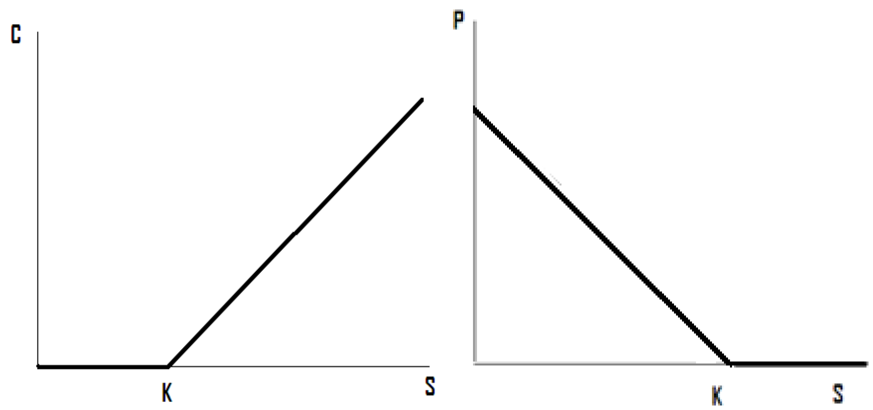
Opsjonens utbetaling er dens verdi ved forfallstidspunktet. Hvis aksjekursen på tidspunkt T ligger høyere enn kontraktsprisen, vil en kjøpsopsjon utbetale differansen mellom aksjeverdien og kontraktsprisen. Dersom aksjeprisen faller under K, vil kjøpsopsjonen ikke ha noen verdi. Vi kan oppsummere utbetalingene til en kjøps – og en salgsopsjon ved følgende uttrykk:

$$C_T = maks[S_T - K, 0] \tag{4.1}$$

$$P_T = maks[K - S_T, 0] \tag{4.2}$$

Grafisk kan vi vise utbetalingen av en lang posisjon i en kjøpsopsjon og en salgsopsjon i figurene nedenfor.

Figur 4.1: Utbetalingsprofil ved lang posisjon (f.v.) i en kjøpsopsjon eller salgsopsjon



Den horisontale aksen viser prisen på aksjen, mens den vertikale aksen viser utbetalingen til opsjonseieren. For en kjøpsopsjon ser vi at opsjonseieren ikke får noen utbetaling når S er lavere enn K, mens ved aksjekurs over K får en utbetalt differansen. For en lang posisjon i en salgsopsjon blir utbetalingsprofilen motsatt.

4.2 Put-Call paritet

En viktig sammenheng mellom Put og Call, og en forutsetning for at opsjoner skal være arbitrasjefri og riktig priset, er Put-Call paritet. Put-Call pariteten kan skrives som

$$C_t + NV(K) = P_t + S_t \tag{4.3}$$

For å utlede pariteten, kan vi betrakte to porteføljer som består av henholdsvis venstre og høyre side av likning (4.3):

Portefølje A: En Call pluss et pengebeløp tilsvarende $Ke^{-r(T-t)}$ (antar kontinuerlig tid) Portefølje B: En salgsopsjon pluss en aksje

Utbetaling ved forfallstidspunktet for de to porteføljene, gitt at det ikke er noen kontantstrømmer mellom tidspunkt *t* og T, blir da:

Portefølje A: $max[S_T - K, 0] + K = max[S_T, K]$ (4.4)

Portefølje B: $max[K - S_T, 0] + S_T = max[S_T, K]$ (4.5)

I en arbitrasjefri økonomi må portefølje A og B ha lik verdi på nåværende tidspunkt, og følgelig har vi ved Put-Call paritet at

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t \quad (4.6)$$

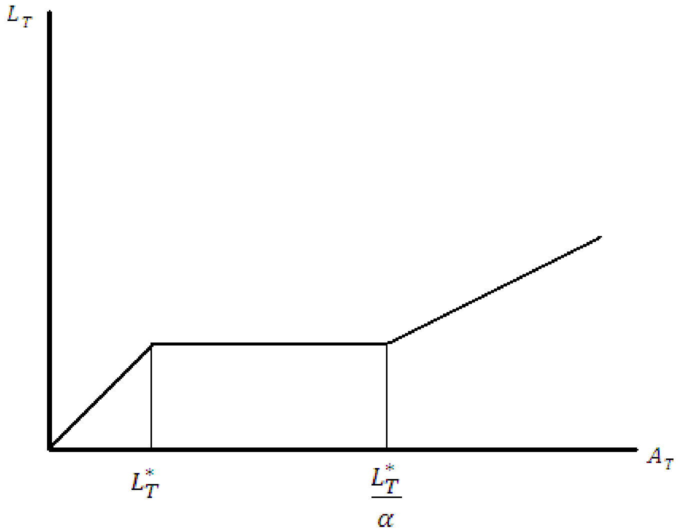
4.3 Opsjonsportefølje som en replikasjon på en fripolise

Briys og de Varenne (2001) har vist hvordan utbetalingsprofilen til en pensjonskontrakt med rentegaranti kan replikeres ved hjelp av en opsjonsportefølje. Det antas at en kunde inngår en fripolisekontrakt på tidspunkt *t*. Andelen som plasseres i kontrakten kan ses på som en forpliktelse eller gjeld for selskapet. Selskapets gjeldsandel på tidspunktet kan dermed skrives som αA_t. På tidspunkt T vil ens kontrakt L_t ha følgende utbetalingsprofil ved tre ulike scenarioer:

1. Verdien av selskapet (A_T) er mindre enn den garanterte utbetalingen (L_T^*). Selskapet vil derfor være insolvent og begjæres konkurs, og kundene vil få verdiene som er igjen i selskapet. Det vil si at $L_T = A_T$.
2. Verdien av selskapet er større enn den garanterte utbetalingen, men mindre enn grensen for at kunden skal oppnå avkastning utover garantien. I dette tilfellet vil kunden oppnå garantiavkastningen, slik at $L_T = L_T^*$.
3. Verdien av selskapet er høyere enn den garanterte utbetalingen, og kunden oppnår en ekstraavkastning utover garantien. Verdien av kundens kontrakt på tidspunkt T kan dermed skrives som $L_T = \alpha A_T$

Figur 4.2 oppsummerer kontraktens utbetalingsprofil.

Figur 4.2: Kontraktens utbetalingsprofil for kunden



Verdien av kontrakten på tidspunkt T er

$$L_T = L_T^* - \max(-A_T, 0) + \alpha \max(A_T - \frac{L_T^*}{\alpha}, 0) \quad (4.7)$$

I en arbitrasjefri økonomi med Put-Call paritet er verdien av kontrakten

$$L_t = NV(L_T^*) - P_t(A_T, L_T^*) + \alpha C_t(A_T, \frac{L_T^*}{\alpha}) \quad (4.8)$$

Fripolisekontrakten kan dermed replikeres med nåverdien av kontraktens garantisum, en Put med L_T^* som kontraktspris og en Call med L_T^*/α som kontraktspris. Opsjonene har aktivaporteføljen til fripolisekontrakten som underliggende aktivum med forfall på tidspunkt T.

5. AKSJEKURSENS UTVIKLING OG MONTE CARLO SIMULERINGER

Dette kapittelet vil ta for seg aksjekursens utvikling og Monte Carlo simulering av en aksjekurs. Teorien i dette kapittelet er relevant for simuleringen av pensjonskontraktenes utvikling senere i oppgaven. Kapittelet er basert på blant annet Hull (2006) og Bøe (2007). Vi vil først se på hvordan aksjekursen beveger seg i en stokastisk prosess hvor det antas random walk med drift. Videre vil vi se på risikonøytral verdsettelse og Monte Carlo simuleringer, før vi i slutten av kapittelet ser på andre mulige antakelser ved aksjekursens utvikling.

5.1 Aksjekursens utvikling ved random walk

I finansteorien antas det at aksjekursen er en kontinuerlig fordelt tilfeldig variabel. Det betyr at aksjekursen er en stokastisk prosess som beveger seg tilfeldig og usystematisk. I tillegg vil vi forutsette at den historiske utviklingen av aksjekursen ikke har noen betydning for den fremtidige utviklingen, hvilket sammenfaller med hypotesen om svak form effisiens (Fama, 1970). En Markov prosess er en stokastisk prosess hvor det kun er dagens verdi av variabelen som har betydning for den fremtidige utviklingen, og det antas at aksjekursen følger en slik prosess.

En wienerprosess W(t) med variansrate lik en og forventning lik null er en type Markov prosess. To grunnleggende forutsetninger for Wienerprosessen z_t er:

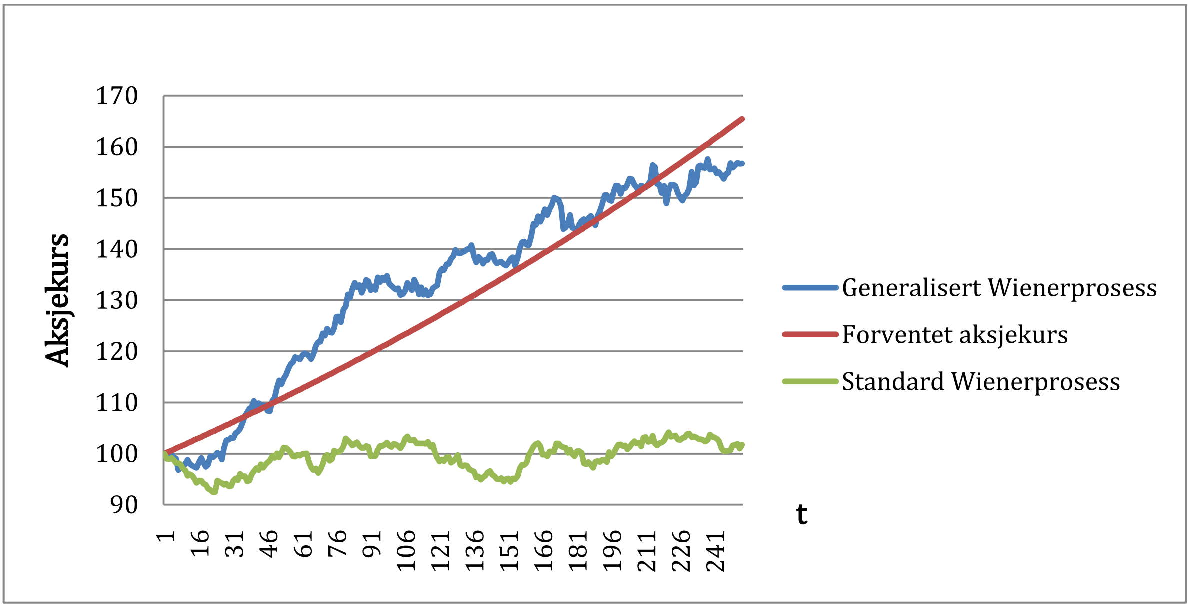
1. Endringen over en kort tidsperiode er gitt ved $\Delta z_t = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$. Parametren ε er et tilfeldig tall og er normalfordelt.
2. Endringen i z_t er uavhengig mellom ulike tidsintervaller.

For å kunne modellere en realistisk utvikling av aksjekursen, er det nødvendig å kunne avvike fra antakelsene om at forventet endring er lik null og varians er lik en. En generalisert wienerprosess kan avvike fra disse egenskapene. Anta at vi har en kort tidsperiode ($\Delta t \to 0$), og den standardiserte wienerprosessen Δz_t kan skrives som dz_t og endring i tid skrives som *dt*. Dermed har vi

$$dx_t = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz_t \qquad (5.1)$$

$\mu(x,t)dt$ viser forventet endring av kursen x, altså hvor mye kursen forventes å stige eller falle i tidsintervallet dt. $\sigma(x,t)dz_t$ er støyleddet, hvor sigma er støyens størrelse, og dette multipliseres med en standard wienerprosess dz_t. For å kunne vise forskjellen på en standard versus generalisert Wienerprosess mer intuitivt, har vi i figuren nedenfor vist bevegelsen av aksjekursen i de to tilfellene.

Figur 5.1: Aksjekursens bevegelse



Den blå grafen viser aksjekursens tilfeldige utvikling, hvor vi har lagt til en forventet avkastning på 0.2 % og en sigma på 1.5 % per dag. Den røde grafen viser den lineære forventede utviklingen i aksjekursen, og følgelig vil den blå grafen bevege seg i nærheten av den røde. Den grønne grafen viser en Standard Wienerprosess hvor forventet endring i aksjekursen er null og variansparametren er en, og kursen her forventes å bevege seg rundt aksjens startverdi på 100. Siden aksjekursen antas å ha en positiv drift, gir den generaliserte Wienerprosessen en bedre beskrivelse av aksjekursens bevegelse.

Så langt har vi ennå ikke hensyntatt at aksjonærer har begrensede forpliktelser, da kursene i figur 5.1 teoretisk sett kan bli mindre verdt enn null. For å justere for dette anvender vi en prisprosess hvor driften og volatiliteten er proporsjonal med aksjekursen. Dermed antar vi at investors avkastningskrav er prosentvis det samme uavhengig av aksjekurs. Formelen nedenfor hensyntar at forventning og standardavvik er proporsjonal med aksjekursen *S*:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz_t \tag{5.3}$$

Formelen viser en geometrisk Brownsk bevegelse. Ved å dividere begge sider med *S*, får vi periodens prosentvise avkastning.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz_t \tag{5.4}$$

Vi antar at daglige aksjeavkastninger er lognormal fordelte, da empiriske studier viser at daglige logavkastninger er tilnærmet normalfordelt (Harris, 2009).

Itôs lemma er et viktig resultat i finansmatematikk og brukes blant annet ved utledning av Black-Scholes. Et tilfelle hvor μ og σ er stokastiske er en Itô-prosess

$$dx_t = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz_t \tag{5.5}$$

hvor dz_t er en wienerprosess og driftraten μ og volatiliteten σ er funksjoner av *x* og *t.* I følge Itôs lemma følger funksjonen *G* av *x* og *t* prosessen

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\mu + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x^2}\sigma^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}\sigma dz_t \tag{5.6}$$

Vi setter $G = lnS$, hvilket impliserer at dG er aksjens logavkastning. Vi kan ved Itôs lemma da vise at

$$dG = d(lnS) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t \tag{5.7}$$

Dermed har vi vist at

$$d(lnS) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t <=> \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz_t \tag{5.8}$$

Vi vet at $e^{\ln S} = S$. Aksjekursen på tidspunkt *t* er dermed gitt ved den geometriske Brownske bevegelsen

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dz_t} \tag{5.9}$$

På diskret form kan aksjekursen på tidspunkt $t + \Delta t$ skrives som

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \tag{5.10}$$

Ovenstående likning danner grunnlaget for Monte Carlo simulering.

5.2 Risikonøytral verdsettelse

Risikonøytral verdsettelse er basert på at man kan sikre opsjoner for å oppnå risikofri rente som avkastning. Dette kan gjøres ved å kjøpe delta antall aksjer, låne risikofritt i banken og rebalansere porteføljen kontinuerlig. For at økonomien skal være arbitrasjefri må da følgende likning holde:

$$r_f = \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \tag{5.11}$$

Denne likningen kalles Black-Scholes-Mertons (BSM) differensiallikning. Merk at likningen ikke inneholder forventet aksjeavkastning μ og er derfor uavhengig av forskjellige risikopreferanser. For å omgå problemet med å estimere forventet aksjeavkastning, kan vi bruke Girsanovs teorem for å finne aksjens kursendring (Øksendal, 2003). Antar vi at aksjer utbetaler en kontinuerlig dividenderate Ψ, kan aksjens kursendring uttrykkes som

$$dS = (r - \Psi)Sdt + \sigma S dz_t \tag{5.12}$$

Siden alle utbytter reinvesteres kontinuerlig vil utbytter ikke være av spesiell interesse for oppgaven vår. Aksjekursen har nå en driftrate på $(r - \Psi)$ og wienerprosessen dz_t, der z_t er en standard Brownsk bevegelse. Det subjektive sannsynlighetsmålet P har endret seg til det ekvivalente martingale målet Q (Harrison og Kreps, 1979), og en rettferdig priset opsjon er ekvivalent under Q. Ved hjelp av den ovenstående likningen kan vi da ta i bruk risikonøytral simulering av aksjekursen til å verdsette opsjoner. Aksjekursens utvikling i diskret tid ved risikonøytral verdsettelse kan skrives som

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left((r-\Psi) - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \tag{5.13}$$

Denne likningen vil vi benytte når vi senere skal simulere utviklingen av en effisient pensjonskontrakt med årlig rentegaranti.

5.3 Monte Carlo simulering

Monte Carlo simulering er en numerisk metode for å beregne utfallet av stokastiske prosesser. I finansfaget var Phelim Boyle først ute med å bruke Monte Carlo simulering til verdsettelse av opsjoner i 1977. Metoden har siden utviklet seg til å bli et stadig mer populært verktøy, ettersom datamaskinenes kapasitet har forbedret seg opp gjennom årene.

Når man skal prise en kontrakt ved hjelp av Monte Carlo simulering, skjer dette i praksis i flere steg:

1. Man simulerer en prisbane på aksjekursens utvikling ved for eksempel å benytte likningen for risikonøytral verdsettelse ovenfor. Dette for å beregne kontraktens avkastning ved forfall.
2. Når aksjens kursutvikling er simulert, diskonterer man kontraktsverdien ved forfall med risikofri rente tilbake til starttidspunktet.
3. De foregående stegene repeteres etter *n* antall simuleringer.

Hvis vi gjentar simuleringen nok antall ganger og regner ut snittet av de diskonterte utfallene finner vi estimatet på den rettferdige kontraktsprisen. Ved å øke antall simuleringer tilstrekkelig vil store talls lov sørge for at estimatet konvergerer mot den riktige verdien (Glaserman, 2003). Feilestimatet er tilnærmet normalfordelt med en forventingsverdi på 0 og standardfeil $(\sigma_j/\sqrt{n})$. En halvering i feilestimatet krever en firedobling i antall simuleringer, mens en reduksjon til en tidel krever hundre så mange ganger antall simuleringer. Konvergeringsraten $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ viser at nytten av å øke antallet simuleringer med én er avtakende med antallet simuleringer. Det kreves derfor *mange* simuleringer for å få feilestimatet til å konvergere mot null.

En utfordring er at mange simuleringer øker kravet til programmeringsspråkets kapasitet. Vi bruker Visual Basic (VBA) i denne utredningen, og i dette programmet vil det være en svært tidkrevende prosess å bruke mer enn 10 000 eller 100 000 simuleringer, avhengig av hvor avansert modellen som skal simuleres er. For eksempel er C++ et vesentlig raskere programmeringsspråk, men vi ble anbefalt å bruke VBA da det ville blitt en del mer komplisert å lære seg C++ fra ”scratch”. Man må alltid gjøre en avveining mellom nytten av at resultatene forbedres ved å gjøre ting mer komplisert og kostnaden med at tidsforbruket økes ved å gjøre ting mer vanskelig.

5.4 Andre egenskaper ved aksjekursens utvikling

Vi gikk i del 5.1 relativt grundig gjennom aksjekursens utvikling når avkastningsprosessen følger en random walk med drift. Det vil si at aksjekursen beveger seg tilfeldig fra dag til dag samtidig som den har en driftrate som er positiv. Dersom avkastningsprosessen følger en random walk, vil variansen til avkastningen øke proporsjonalt med tiden (eller standardavviket øke med kvadratroten av tiden). Dette kan uttrykkes som

$$\widehat{\sigma_T} = \hat{\sigma}_t\sqrt{T} \tag{5.14}$$

Hvis uttrykket holder empirisk, kan vi si at aksjekursens utvikling følger en random walk. Det har blitt gjennomført en del empiriske studier for avkastningsprosessen til både aksjer og obligasjoner. En hypotese blant mange forskere er at det er negativ autokorrelasjon i aksjekursens bevegelse og positiv autokorrelasjon for obligasjoner. Disse fenomenene kalles henholdsvis *mean reversion* og *mean aversion.* Ved mean reversion vil standardavviket til avkastningen øke *mindre enn* proporsjonalt med kvadratroten av tiden, og dermed vil

$$\widehat{\sigma_T} < \hat{\sigma}_t\sqrt{T} \tag{5.15}$$

I tilfellet mean aversion vil virkningen være motsatt, noe som kan uttrykkes på følgende måte:

$$\widehat{\sigma_T} > \hat{\sigma}_t\sqrt{T} \tag{5.16}$$

Hvis tesen om mean reversion for aksjer og mean aversion for obligasjoner stemmer, impliserer det at aksjer har relativt lavere risiko jo lengre tidsperspektiv investor har, samtidig som det motsatte gjelder for obligasjoner. Dette er et mye debattert emne i finansmiljøet, og konklusjonene blant forskjellige forskere er ikke entydige. Poterba og Summers (1988) finner en svak mean reversion trend hos aksjer for lange tidshorisonter, men forfatterne vil heller ikke forkaste hypotesen om random walk. Gropp (2004) har påvist klare bevis for mean reversion, mens Jorion (2003) konkluderer med at mean reversion ikke kan påvises. Ser vi på avkastningsprosessen for obligasjoner, er det imidlertid en bred enighet om at det eksisterer en positiv autokorrelasjon og mean aversion trend.

Selv om vi er klar over at avkastningsprosessen til forskjellige aktivaklasser ikke nødvendigvis fullt og helt følger en random walk, vil dette være en antakelse bak resultatene av våre simuleringer som kommer senere i denne utredningen. Dette er fordi det ville blitt betydelig mer komplisert å legge inn andre forutsetninger. Implikasjonen av våre forutsetninger er at når vi skal optimere en portefølje for en lang investeringshorisont, vil optimal aksjeandel isolert sett være noe for lav.

6. MODELL FOR PENSJONSKONTRAKTER MED ÅRLIG RENTEGARANTI

I dette kapittelet vil vi presentere ulike modeller for pensjonskontrakter med en årlig rentegaratni. Utgangspunktet for modellene er Trond M. Døskeland og Helge A. Nordahls artikler *Optimal Pension Insurance Design* og *Intergenerational Effects of Guaranteed Contracts* fra 2006. Forfatterne gir oss et rammeverk for hvordan tradisjonelle pensjonskontrakter med en garantert årlig avkastning kan optimeres for å maksimere kundens nytte. Vi vil også se på en alternativ modell der vi har gjort om på noen av forutsetningene, ved å legge til emisjoner og dividender. Modellene vil bli sammenlignet med Mertons porteføljeproblem (1969).

Kapittelet vil bygges opp på følgende måte: Vi vil begynne med å se på forutsetninger for økonomien vi antar i modellene. Deretter vil vi presentere Mertons porteføljeproblem. Videre vil vi presentere modellen med årlige garantier som Døskeland og Nordahl har utledet, for så å se på andre mulige forutsetninger som vi har lagt til grunn. Vi vil også presentere hvordan en effisient portefølje kan beregnes, og hvordan vi kan prise de forskjellige kontraktene rettferdig. I den siste delen av kapittelet vil vi se på hvordan det kan oppstå en subsidiering mellom generasjoner som innlemmes i kontraktene på forskjellige tidspunkt.

6.1 Forutsetninger for økonomien

Innledningsvis kan det være hensiktsmessig å gi en samlet oversikt over alle parametrene som benyttes i modellen. Disse er oppsummert i tabell 6.1.

Tabell 6.1: Modellens parametre

Økonomien	
Verdien av én enhet av aksjeindeksen på tidspunkt t	S_t
Verdien av én enhet i risikofri konto på tidspunkt t	D_t
Risikofri rente	r
Aksjeindeksens forventede avkastning	μ
Aksjeindeksens volatilitet	σ
Standard Brownsk bevegelse	z_t
Selskapet	
Verdien av den totale porteføljen på tidspunkt t	A_t
Porteføljens aksjeandel på tidspunkt t	θ
Egenkapital på tidspunkt t	E_t
Forpliktelsene (kundenes krav) på tidpunkt t	L_t
Bufferkapital på tidpunkt t	B_t
Selskapets gjeldsgrad	α
Konstant garantert årlig avkastning	g
Gjenværende andel av totalavkastningen (etter garanti og "α" split) som går til kunden	δ
Tidspunkt ved eventuell konkurs	τ
Andel av bonus som blir kreditert til bufferkapital	b
Transaksjonens størrelse ved en eventuell dividende / emisjon	φ_t

Det antas en økonomi uten arbitrasjemuligheter hvor det kan velges mellom risikofri bankkonti og ulike typer risikable aktivaklasser. Videre antas det at forventet avkastning, risiko og korrelasjonen i avkastningen mellom aktivaklassene er konstant. Hvis vi gjør en enkel forutsetning om rasjonelle risikoaverse investorer, vil investorene investere i den effisiente sammensetningen av risikable aktivaklasser. Dermed får vi to typer aktivaklasser, en risikofri bankkonto (D) og en risikabel portefølje (S). Utviklingen i de to aktivaklassene kan vises i likningene nedenfor.

$$dD_t = rD_t dt, \quad D_0 = d \tag{6.1}$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t, \quad S_0 = s \tag{6.2}$$

Risikofri rente, forventet avkastning og volatilitet i den risikable porteføljen antas å være konstant i modellen. En andel θ_t er investert i aksjeindeksen, og det antas at denne andelen holdes fast ved kontinuerlige rebalanseringer, slik at $\theta_t = \theta$. Den totale porteføljen A_t under sannsynlighetsmålet P er dermed gitt ved

$$dA_t = (rA_t + \theta(\mu - r)A_t)dt + \theta A_t \sigma dz_t, \quad A_0 = a. \tag{6.3}$$

Prisprosessen til A_t under det ekvivalente martingale målet Q (Harrison og Kreps, 1979) skrives som

$$dA_t = rA_t dt + \theta A_t \sigma dz_t^Q, \quad A_0 = a \tag{6.4}$$

hvor z_t^Q er en standard Brownsk bevegelse under Q. Dette følger av risikonøytral verdsettelse og forutsetningen om at verdien av en finansiell eiendel er ekvivalent med nåverdien av fremtidige forventede avkastninger.

Balansen til forsikringsselskapet vil se slik ut ved kontraktsstart:

Tabell 6.2: Selskapets balanse ved starttidspunktet

A_0	$E_0 = (1-\alpha)A_0$ $B_0 = 0$ $L_0 = \alpha A_0$

Høyresiden i balansen består av E_t, selskapets egenkapital, L_t er reservene eller kundenes kapital og B_t er forsikringsselskapets bufferkapital (denne forklares mer inngående senere).

Videre vil vi se på to alternative produkter og hvordan disse produktene påvirker kundens foretrukne aktivaallokering og forventede nytte. Vi har følgende to typer kontrakter:

1. Kunden velger selv aktivallokering i henhold til Mertons porteføljeproblem (Merton, 1969).
2. Kontrakten inneholder et garantielement som sikrer kunden en garantert årlig avkastning. Dette er sammenfallende med betingelsene for en pensjonskontrakt med årlig garantiavkastning.

6.2 Mertons problem

Kunden velger selv aktivallokering ved å investere direkte i den risikofrie bankkontoen og den risikable porteføljen. For å maksimere egen nytte tilpasser man seg på følgende måte:

$$\max_{\theta} U = \max_{\theta} E(u(L_T)) \tag{6.5}$$

Her er u kundens nyttefunksjon, og det antas positiv og avtakende marginalnytte, slik at $u' > 0$ og $u'' < 0$.

6.3 Rentegaranti med konkursrisiko

Ved å implementere årlige garantier for avkastningen, blir modellen mer komplisert. Vi løser denne delen ved å bruke årlige simuleringer, og selskapet erklæres konkurs hvis egenkapitalen er negativ ved årets slutt. Buffer blir også kalkulert ved årets slutt og kreditert reserven. For enkelhets skyld vil det i denne modellen ikke være mulig for selskapet å betale ut dividender eller tilføre egenkapital, og selskapet kan heller ikke ha negativ egenkapital for en periode.

Vi har

$$L_0 = \alpha A_0 \quad E_0 = (1-\alpha) A_0 \tag{6.6}$$

hvor $(1-\alpha)$ er egenkapitalandelen eller (E_0/A_0).

Videre har vi følgende betingelser i modellen på tidspunkt *t*.

$$L_t = \begin{cases} A_t & \text{hvis} \quad A_t \leq L_{t-1}e^g \\ L_{t-1}e^g & \text{hvis} \quad L_{t-1}e^g \leq A_t \leq \frac{1}{\alpha} L_{t-1}e^g \\ L_{t-1}e^g + \delta\alpha(A_t - L_{t-1}e^g) & \text{hvis} \quad A_t \geq \frac{1}{\alpha} L_{t-1}e^g \end{cases} \tag{6.7}$$

$$E_t = A_t - L_t \tag{6.8}$$

Her er g den garanterte årlige avkastningen.

Det antas at det ikke er noen konkurskostnader, og i et tilfelle med konkurs vil kundene motta hele verdien av selskapets eiendeler. Videre antas det at disse midlene investeres i den risikofrie bankkontoen, slik at:

$$E_T = 0 \tag{6.9}$$

$$L_T = A_\tau e^{r(T-\tau)} \tag{6.10}$$

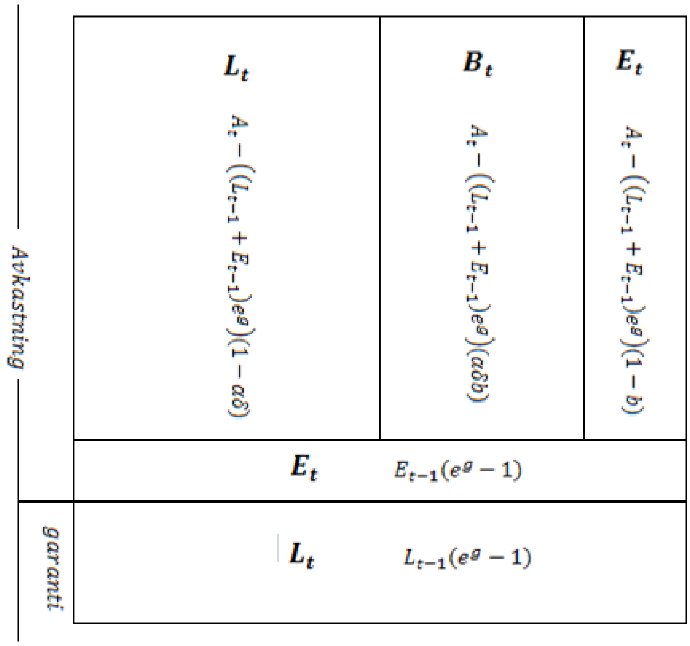
Her er τ det stokastiske tidspunktet for selskapets konkurs. Antakelsen om at investeringer etter selskapets konkurs kun vil plasseres risikofritt, gir kundene en straff som kanskje er urealistisk hard. Imidlertid blir denne straffen delvis utlignet av forutsetningen om null konkurskostnader (Døskeland og Nordahl, 2006).

6.3.1 Opparbeidelse av bufferkapital

Myndighetene vil gi livselskapene adgang til å bygge opp bufferkapital (B_t), slik at selskapene skal være i stand til overleve dårlige år i aksjemarkedet. I tillegg er hensikten å redusere risikoen for at egenkapitalen må tappes. Bufferkapitalen blir tappet hvis oppnådd avkastning er svakere enn garantien for ett år. Dersom bufferkapitalen er tom, vil egenkapitalen tæres.

For å kunne allokere til bufferkapitalen brukes det her en allokeringsmekanisme beskrevet av Miltersen og Persson (2003). Vi krediterer bufferen med en andel b. Figur 6.1 illustrerer allokeringsreglene. Den nederste delen av avkastningen dekker garantien. Ved avkastning utover garantien vil en andel av meravkastningen gå til eierne. Eventuelt resterende beløp splittes opp proporsjonalt mellom egenkapital, reserver og bufferkapital.

Figur 6.1: Oversikt over hvordan avkastningen splittes opp



Matematisk kan skriver vi

$$L_0 = \alpha A_0 \tag{6.11}$$

$$E_0 = (1 - \alpha) A_0 \tag{6.12}$$

$$B_0 = 0 \tag{6.13}$$

$$L_t \begin{cases} A_t & \text{hvis} \quad A_t \leq L_{t-1}e^g \\ L_{t-1}e^g & \text{hvis} \quad L_{t-1}e^g < A_t \leq L_{t-1}e^g + E_{t-1}e^g + B_{t-1} \\ L_{t-1}e^g + \delta\alpha(1-b)(A_t - (L_{t-1}e^g + E_{t-1}e^g + B_{t-1}) & \text{hvis} \quad A_t \geq \frac{1}{\alpha} L_{t-1}e^g + E_{t-1}e^g + B_{t-1} \end{cases}$$

(6.14)

$$B_t = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad A_t \leq L_{t-1}e^g + E_{t-1} \\ A_t - L_{t-1}e^g - E_{t-1} & \text{hvis} \quad L_{t-1}e^g + E_{t-1} < A_t \leq L_{t-1}e^g + E_{t-1} + B_{t-1} \\ B_{t-1} & \text{hvis} \quad L_{t-1}e^g + E_{t-1} + B_{t-1} < A_t \leq L_{t-1}e^g + E_{t-1}e^g + B_{t-1} \\ B_{t-1} + \delta\alpha b(A_t - (L_{t-1}e^g + E_{t-1}e^g + B_{t-1})) & \text{hvis} \quad A_t \geq L_{t-1}e^g + E_{t-1}e^g + B_{t-1} \end{cases}$$

(6.15)

$$E_t = A_t - L_t - B_t \tag{6.16}$$

Hvis selskapet skulle gå konkurs ($A_t < L_{t-1}e^g$) får vi

$$E_T = 0 \tag{6.17}$$

$$B_T = 0 \tag{6.18}$$

$$L_T = A_\tau e^{r(T-\tau)} \tag{6.19}$$

hvor τ er det stokastiske tidspunktet for selskapets konkurs. For at kundenes nytte skal maksimeres får vi dermed følgende uttrykk:

$$\max_{\alpha,\theta,g,b} E(u(L_T + B_T)) \tag{6.20}$$

Dette er basert på forutsetningen om at kontraktene er rettferdig priset, ved at δ settes slik at meravkastningen utover g fordeles rettferdig mellom selskapets eiere og kunder.

6.4 Rentegaranti med emisjoner og utbytte

En forutsetning bak modellen i forrige avsnitt er at det ikke vil bli gjennomført emisjoner eller betales ut utbytter. Dersom verdien av egenkapitalen er negativ, vil selskapet likvideres og resterende kundemidler settes inn på risikofri bankkonto for resten av perioden. I virkeligheten er det meget usannsynlig at et livselskap vil gå konkurs, da myndighetene har ilagt strenge regler og soliditetskrav for å unngå slike tilfeller, særlig i Norge hvor reglene er blant Europas strengeste. Vi mener derfor det vil være hensiktsmessig å se hvordan resultatene blir påvirket av at vi endrer på forutsetningene om konkurs. Følgelig har vi laget en alternativ modell som er lik modellen i forrige avsnitt, med unntak av at vi tar bort konkursrisikoen og legger til dividender og emisjoner.

I denne alternative modellen vil vi anta at myndighetene har ilagt selskapet et soliditetskrav, slik at det må gjennomføres en emisjon hvis egenkapitalandelen går under kravet. For at eierne ikke bare skal risikere å måtte skyte kapital inn i selskapet, vil vi også legge til en antakelse om at de kan ta ut utbytte hvis egenkapitalandelen overgår en gitt prosent. Dermed vil den nye modellen ha en øvre og en nedre grense for egenkapitalandelen. Videre antar vi at eierne har en eierkonto som vil fylles opp eller tappes i tilfeller ved dividendeutbetaling eller emisjon. Eierkontoen (ϕ_t) har ingen økonomisk betydning, men er en teknisk løsning for å kunne prise kontraktene på en enkel måte. ϕ_t settes til 0 i utgangspunktet, og den vil vokse med risikofri rente. På slutten av kontraktsperioden legges eierkontoen og gjenstående egenkapital i selskapet sammen. Dermed kan vi sammenligne forventet avkastning og risiko på eierens hånd på en meningsfylt måte.

ϕ_t kan være både positiv og negativ og vil øke ved utbytte og tappes ved en emisjon. For å unngå at det vil bli gjennomført for mange utbetalinger eller emisjoner i løpet av kontraktsperioden, antar vi at disse beløpene vil være relativt store. Hvis egenkapitalandelen beveger seg utenfor de gitte grenseverdiene, vil størrelsen på utbyttet eller emisjonen være så stor at den nye egenkapitalandelen vil være lik andelen ved kontraktens begynnelse.

Egenkapitalen på tidspunkt *t* er i denne modellen gitt ved:

$$E_t + \lambda_t * \varphi_t \;\; = A_t - L_t - B_t + \lambda_t * \varphi_t \qquad (6.21)$$

hvor $\lambda_t \epsilon (0,1)$ er en dummyvariabel som er 1 når det gjennomføres emisjoner eller dividender. φ_t er transaksjonens størrelse på emisjonen/dividenden og er positiv ved emisjon og negativ ved dividende. Dette medfører imidlertid at totalkapitalen før neste simulering endres, slik at egenkapitalen må endres med mer enn absoluttverdien for å nå kravet for at vi skal komme tilbake til initiell egenkapitalandel.

For å få en bedre intuitiv forståelse vil vi her komme med et gitt eksempel. Vi antar at egenkapitalandelen er 20 % ved kontraktens begynnelse, og en nedre og en øvre grenseverdi på henholdsvis 10 og 30 %. Anta at vi for eksempel har hatt en positiv utvikling i pensjonskontrakten, og egenkapitalen overstiger 30 %. Her kan livselskapet gjøre en utbyttetransaksjon til eierne, og etter at utbyttet er gjennomført vil egenkapitalandelen igjen være tilbake til 20 %.

Ved emisjoner forsøker man å nå samme andel egenkapital som ved oppstarten. Gjeldsandelen i selskapet etter emisjon/utbytte kan dermed skrives som:

$$\alpha_t = \frac{L_t + B_t}{A_t + \varphi_t^*} \qquad (6.26)$$

hvor φ^* er en emisjon eller utbytte som gir riktig α etter gjennomføring. Ved å snu på ligningen, kan dermed φ_t^* utrykkes som:

$$\varphi_t^* = \frac{(1-\alpha)(L_t+B_t)-\alpha E_t}{\alpha} \tag{6.27}$$

Muligheter for emisjoner og utbytter er fullt ut priset inn, slik at forventet risikojustert avkastning på egenkapitalen, inkludert emisjoner og utbytter er lik risikofri rente på tidspunkt 0. Imidlertid vil ikke dette nødvendigvis gjelde for emisjoner og utbytter underveis. Dette skyldes måten kontraktene er sammensatt på. Risikojustert avkastning er ikke konstant for alle kontoene for hvert år, men er rettferdig over hele perioden. Forventet risikojustert avkastning for neste periode og de videre periodene frem til kontraktens slutt er også avhengig av utfall i tidligere perioder. Dette har interessante implikasjoner dersom for eksempel kundene har realopsjoner, hvor de for eksempel kan gå inn og ut av kontrakter på gitte tidspunkt.

La oss ta et eksempel hvor andelen egenkapitalen har gått ned etter oppstarten. Andelen av overskuddsavkastning som går til eierne er konstant, men grunnlaget den skal fordeles på er redusert. Garantiavkastningen er skalert med inngående egenkapital før perioden, så denne er uavhengig av andelen egenkapital. Samtidig vil kundemidlene som eierne garanterer for være konstant, men grunnlaget garantien skal fordeles på, reduseres. En økt risiko for tap mot garantiavkastningen for kundene vil imidlertid redusere den siste effekten. Nettoeffekten er at redusert egenkapitalandel, alt annet likt, øker forventet risikojustert avkastning på egenkapitalen. På samme måte vil risikojustert avkastning gå ned hvis egenkapitalandelen blir relativt høy. Eierne vil derfor ha incentiver til å minimere egenkapitalen de har plassert i selskapet til enhver tid. Det vil si, de vil ønske å foreta utbytter så ofte som mulig og emisjoner så sjelden som mulig. For kundene vil dette være helt motsatt. Selv om utslagene på risikojustert avkastning er ganske beskjedne, skjer emisjoner og utbytter dermed alltid mot en parts vilje. Emisjoner og utbytter må derfor være nedfelt i kontrakten og bestemt på forhånd.

En grunnleggende egenskap med aksjeselskaper generelt er at eierne har begrensede forpliktelser. Den enkleste forutsetningen å gjøre, er å anta at selskapet er en del av et større foretak og at man har tilgang på kapital som kan skytes inn ved behov. Alternativt måtte vi forutsatt at selskapet må ut i markedet for å hente penger. I så fall måtte andelen aksjer tildelt investorer som tegner seg under emisjonen justeres slik at forventet risikojustert avkastning på emisjonen er minst lik risikofri rente. Det er en nødvendig forutsetning for at en slik emisjon skal være fulltegnet. Dette kunne hatt ganske interessante implikasjoner for de eksisterende eierne i selskapet under ulike forutsetninger. Vi valgte ikke å kjøre dette alternativet siden det krever mye ekstra simulering for å bestemme et riktig forhold mellom eksisterende eiere og nye eiere, og vi har begrenset kapasitet siden vi simulerer med VBA. For kundene er det imidlertid ikke av særlig interesse hva slags fordeling som måtte skje mellom eksisterende eiere og eiere som kommer inn via emisjoner, slik at kontraktsutformingen ikke er avhengig av hvordan dette blir løst.

En av egenskapene med kontrakter av denne typen er at den konstante andelen av overskuddsavkastningen gir utjevningseffekter over levetiden mellom kontoene til eiere og kunder. Kontraktene vil dermed ha en rebalanserende evne gjennom at høy avkastning på en konto medfører lavere forventet risikojustert avkastning fremover og omvendt. Implikasjonen er at forventet drift på α_t hele tiden søker mot α_o. Emisjoner og utbytter vil forsterke kontraktens rebalanserende evne ved å tvinge egenkapitalandelen tilbake mot α_o når avviket er for stort.

6.5 Estimering av en optimal portefølje

Som nevnt antar vi en arbitrasjefri økonomi hvor man kan investere i risikofritt og risikabelt aktivum. Vi antar videre at det risikable aktivumet er en portefølje bestående av tre aktivaklasser: aksjer, eiendom og lange obligasjoner. Bakgrunnen for valget av nevnte aktivaklasser er at livselskapene i høy grad har investeringer i akkurat disse markedene.

6.5.1 Risikopremier i aktivaklassene

For å kunne optimere en portefølje, er det nødvendig å finne forventet avkastning og risiko for hver av aktivaklassene, i tillegg til korrelasjonen mellom dem. En måte å gjøre dette på kan blant annet være å gjøre en empirisk analyse av ulike datasett. Det kan imidlertid være vanskelig å finne gode nok data, særlig i et tilfelle hvor vi ønsker å finne langsiktige risikopremier. Heldigvis finnes det god litteratur på feltet, særlig der risikopremiene i aksje- og obligasjonsmarkedene drøftes.

Boka *Triumph of the Optimists: 101 years of global investment returns* av Dimson, Marsh og Staunton (2002) presenterer en studie av risikopremier I aksje- og obligasjonsmarkedet. For perioden 1900 – 2002 har de estimert den årlige globale risikopremien for aksjer over pengemarkedet til 5.7 % i aritmetisk gjennomsnitt, mens risikopremien i obligasjonsmarkedet var 0.8 %. Forfatterne argumenterer i bokens kapittel 13 for at risikopremien i fremtiden bør være lavere enn den historiske. Begrunnelsen er lavere politisk risiko, mindre handelsbarrierer og at landenes sentralbanker er blitt mer inflasjonsstyrt. Vi velger å anta en konservativ risikopremie på 5 % i aksjemarkedet og 1 % for obligasjoner. Korrelasjonen i forventet avkastning mellom aksjer og obligasjoner antas å ligge på 0.4, basert på Norges Banks estimat av langsiktige korrelasjoner. Risikoen for aksjer målt i standardavvik, har ligget rundt det dobbelte i forhold til obligasjoner. Vi antar et annualisert standardavvik på 20 % for aksjer og 7 % for obligasjoner.

Risikopremien i eiendomsmarkedet er enda mer komplisert å sette. Det finnes få gode dataserier, og de som finnes er gjerne preget av stor usikkerhet. Når man investerer direkte i eiendom vil, man oppnå avkastning gjennom verdistigning på eiendommen samt leieinntekter. Utviklingen på verdien er vanskelig å fastsette til enhver tid. Eicholz, Koedjik og Schweitzer (2001) har gjort en empirisk analyse på eiendomsinvesteringer i perioden 1984-1998. Forfatterne finner at man kan forvente en diversifiseringsgevinst ved å inkludere eiendom i sin investeringsportefølje. De fastsetter ingen konkret risikopremie på eiendom, men en rimelig antakelse er at eiendomsinvesteringer på generell basis har mindre risiko enn aksjer og høyere risiko enn obligasjoner. Vi velger å anta en risikopremie på 3.5 % for eiendom, og en tilhørende risiko på 16 % målt i standardavvik. Korrelasjonen er også vanskelig å fastsette. Booth et al (2004) ser i kapittel 5 på porteføljevalg ved pensjonskontrakter, der korrelasjonen mellom eiendom og de ulike aktivaklassene blant annet blir drøftet. Det virker plausibelt å anta at det er en rimelig høy korrelasjon mellom aksjer og eiendom, mens korrelasjonen til obligasjoner er mindre, men også den vil være positiv på lang sikt. Derfor velger vi å anta en korrelasjon på 0.8 til aksjer og 0.3 til obligasjoner.

Den risikofrie renten er i Døskeland og Nordahls modell satt til 4 %, basert på langsiktige obligasjoner. I deres modell antas det også en økonomi med kun to aktivaklasser, mens vi altså har valgt å inkludere flere aktivaklasser. Når vi skal anta en risikofri rente, baserer vi oss på pengemarkedsrenten. Etter finanskrisen har de korte rentene stupt, og vi har i skrivende stund en nullrente i USA og en tre måneders pengemarkedsrente på 2 % i Norge. Vår modell er langsiktig, og vi antar en normalrente på 3.5 %.

Tabellen nedenfor oppsummerer våre forutsetninger for valg av en optimal portefølje.

Tabell 6.3: Oversikt over forventet avkastning, risiko og korrelasjoner

Aktivaklasser	E(r)	Risikopremie	Sigma	Sharpe
Aksjer	8,5%	5,0%	20 %	0,25
Eiendom	7,0%	3,5%	16 %	0,22
Obligasjoner	4,5%	1,0%	7,0%	0,14
Pengemarked	3,5%		0 %	

Korrelasjoner	Eiendom	Obligasjoner
Aksjer	0,80	0,40
Eiendom		0,30

6.5.2 Porteføljeoptimering

Videre ønsker vi å finne en risikabel portefølje bestående av de aktivaklassene som maksimerer forventet avkastning i forhold til risiko, nærmere bestemt porteføljen som gir høyest Sharpe-rate. Dette gjøres ved å beregne optimale porteføljevekter, og dette avsnittet er basert på Harris (2009).

Matematisk kan den risikable porteføljen skrives som

$$S = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_E \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

hvor summen av vektene er 1. Porteføljevektene viser andelen som er investert i hver aktivaklasse. Forventet avkastning for den risikable porteføljen kan dermed skrives som

$$\mu = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(r_A) \\ E(r_B) \\ E(r_E) \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

Når vi inkluderer flere aktivaklasser kan det være nyttig å ta i bruk en varians-kovarians matrise. Matrisen kan skrives som

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AE} \\ \sigma_{BA} & \sigma_B^2 & \sigma_{BE} \\ \sigma_{EA} & \sigma_{EB} & \sigma_E^2 \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

Variansen og kovariansen kalkulerer vi ved å bruke standardavvikene og korrelasjonskoeffisientene vi har antatt. Vi kan nå regne ut variansen til tangentporteføljen ved hjelp av uttrykket

$$\sigma_T^2 = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} & \sigma_{AE} \\ \sigma_{BA} & \sigma_B^2 & \sigma_{BE} \\ \sigma_{EA} & \sigma_{EB} & \sigma_E^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_E \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

Vi løser problemet ved å bruke problemløseren i Excel til å maksimere Sharperaten, og vår optimale tangentportefølje vil da bestå av følgende vekter:

Tabell 6.4: Optimale vekter og forventet avkastning og risiko for tangentporteføljen

Optimale vekter tangentportefølje

	Aksjer	Eiendom	Obligasjoner
w	46%	17%	37%

Avkastning og risiko for tangentportefølje

E(rp)	6.80%
Sigma	13%
Sharpe	0.254

Optimale vekter i tangentporteføljen for aksje-, eiendoms- og obligasjonsmarkedet er altså i vårt eksempel henholdsvis 46 %, 17 % og 37 %, og den gir en forventet meravkastning på 3.3 % relativt til risikofri rente. Tallene for avkastning og risiko for tangentporteføljen er avrundet. Vi så at aksjer hadde den høyeste Sharperaten av de ulike aktivaklassene. Vår tangentportefølje har en høyere Sharperate, hvilket kommer av at man oppnår en diversifiseringsgevinst ved å inkludere flere aktivaklasser i porteføljen. Det bør understrekes at tallene er basert på våre forutsetninger, og med litt andre inputvariabler ville porteføljen sett annerledes ut. Når det er sagt, føler vi at vi våre antakelser er godt begrunnet og avveid.

Vi vil også understreke at vi har antatt at alle parametrene i modellen er konstant, slik at forventet avkastning, risiko, vekter og korrelasjoner mellom de ulike aktivaklassene er konstant. Dette er en forenkling av virkeligheten, men også en nødvendig forutsetning for å ikke komplisere modellene våre for mye.

6.6 Utforming av rettferdige kontrakter

I avsnitt 4.3 viste vi at fordelingen av avkastning og risiko mellom eiere og kunder i en kontrakt med garantielement, kan sees på som summen av opsjoner med utøvelsestidspunkt når rentegarantiene inntreffer. Verdien av en slik kontrakt kan i teorien identifiseres matematisk siden alle utrykk for opsjonsverdier er på såkalt lukket form. Forutsetningene vi har tatt er i samsvar med dem i Black & Scholes prisingsformel for opsjoner. Det er imidlertid meget komplisert å regne ut summen av mange opsjoner over svært lange kontraktsperioder, særlig fordi opsjonsverdiene er avhengige av utfallet i alle tidligere perioder gjennom bufferoppbygging og forbruk fra år til år. Heldigvis kan en benytte simulering for å estimere parametre som gir rettferdige kontrakter.

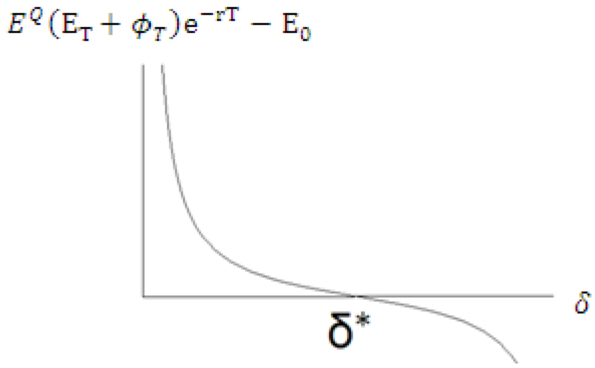
Ved å sette forventet avkastning i den risikable porteføljen lik risikofri rente og neddiskontere forventet utfall for eierne av selskapet ved kontraktsperiodens slutt over *n* simuleringer, kan en sjekke om den verdien man har valgt på residualparametren δ gir en rettferdig fordeling mellom eiere og kunder. Dette er såkalt risikonøytral verdsettelse. Kriteriet for at kontrakten gir eierne en rimelig avkastning i forhold til risiko, kan skrives som:

$$e^{-rT} E^{Q}((A_T - L_T - B_T) + \phi_T) = E_0 \tag{6.32}$$

Når man har funnet en tilfredsstillende δ, er neste steg å bruke denne i en simulering med risikopremie. Den viktigste forutsetningen for at denne metoden gir en gyldig løsning, er at selskapet ikke kan generere meravkastning utover markedsavkastningen, slik at nåverdien av investeringen selskapet gjør, er lik investeringsbeløpet. Når en går fra den risikonøytrale verden over i den virkelige verden, vil dermed både forventet avkastning på investeringer og den relevante neddiskonteringssatsen øke like mye, slik at disse effektene slår hverandre i hjel. Avhengig av hva slags parametre som blir lagt til grunn, vil en få ulike δ. Det er særlig noen parametre som betyr veldig mye. Risikoen i porteføljen selskapet holder, garantirenten, avstanden mellom garantirenten og risikofri rente, andelen egenkapital ved oppstarten og kontraktsperiodens varighet er alle av stor betydning for verdien av δ. Andelen overskuddsavkastning som brukes til bufferoppbygging og andelen av bufferen kundene får med seg ut har kun stor innvirkning hvis disse settes langt unna benchmark.

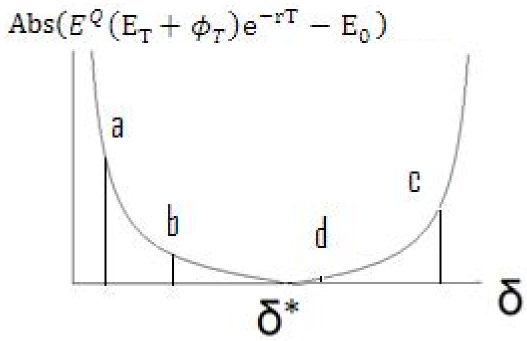
Målsøkingen mot en rettferdig kontrakt er noe av det mest kompliserte vi har gjort i denne oppgaven. Figur 6.2 viser avviket mellom forventet utfall under Q neddiskontert med risikofri rente og egenkapitalen som skytes inn i starten. En rettferdig kontrakt vil innebære at netto nåverdi av å tilby produktet er null. Selskapet er da indifferent mellom å tilby produktet eller å la være, siden den tilsvarende markedseksponeringen kan replikeres direkte i markedet.

Figur 6.2: Forventet utfall under Q for selskapet som en funksjon av δ



I stedet for å sjekke alle mulige nivåer på δ med meget korte intervall, noe som krever ekstremt lang simuleringstid, har vi brukt en optimeringsmetode basert på Judd (1998) og Newtons metode. Hvis en tar absoluttverdien av avstanden mellom gjennomsnittlig utfall under *Q* og investeringen selskapet foretar på tidspunkt 0, vil en få en funksjon med et minimum 0. Siden man ikke kjenner funksjonen på lukket form, må en sjekke punkter langs kurven for å estimere verdien av den deriverte med hensyn på δ. For å finne optimal δ setter man opp tre punkter langs deltakurven, f. eks a = 0.01, b = 0.5 og c = 1.5, hvor man er sikker på at minimumspunktet befinner seg innenfor a og c og at funksjonen av b er lavest. Deretter velger man en verdi for et gitt punkt d, som er gjennomsnittet av den lengste avstanden av b-a eller c-b. Her ligger det en avveining mellom å starte med store nok avvik mellom a, b og c for å sikre seg at b gir den laveste funksjonsverdien og at store avvik medfører at det kan ta lang tid å finne optimal δ. For å utføre dette i VBA lager man en makro som kaller opp som modellmakroen og kjører den med settet av ulike verdier av δ. Det absolutte feilleddet fra null netto nåverdi returneres som funksjonsverdi slik at disse kan sammenlignes. Dette refereres herfra som funksjonsverdien av δ.

Figur 6.3: Absolutt feilledd under Q som funksjon av δ



Neste steg er å la VBA følge en heuristikk for å søke mot δ-verdier som gir stadig lavere feilledd. En vil velge et av disse alternativene:

- Hvis d er mindre enn b og d gir høyere feilledd, bytter en ut a med d, altså ekskluderer alle verdier under a.
- Hvis d er mindre enn b, men d gir lavere feilledd, bytter man ut b med d, altså flytter referansepunktet i midten nedover.
- Hvis d er større enn b og d gir lavere feilledd, bytter man a med b og b med d. Da flytter en både minsteverdien og referansepunktet oppover.
- Hvis d er større enn b, men d gir høyere feilledd, så bytter man ut c med d, altså flyttes maksimalverdien nedover.

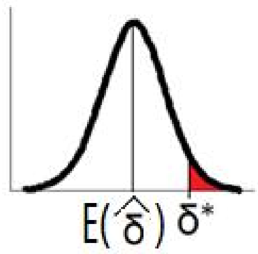
Til slutt velger man et nytt punkt d basert på de nye verdiene a, b og c, og kjører samme prosessen i en loop helt til et forhåndsbestemt kriterium er tilfredsstilt. På denne måten konvergerer de 3 punktene a, b og c mot hverandre rundt minimumsverdien til funksjonen. Kriteriet angir at den δ-verdien man har funnet gir et feilledd som er nær null og at avviket er akseptabelt. Vi satt kriteriet til en avstand mellom a og c på 0.1 % ved 100 000 simuleringer. En alternativ spesifikasjon på termineringskriteriet er maksimal absolutt feil mot sluttverdien under Q eller relativt, for eksempel:

$$Abs(E^Q(E_T e^{-rT}) - E_0) \leq \rho E_0 \text{ hvor } \rho = 0.05\ \% \tag{6.33}$$

Vi har ikke funnet at det er noen stor gevinst ved å bruke denne, siden svært små endringer i δ gir begrensede utslag i funksjonsverdien. Denne sensitiviteten kan imidlertid bli ganske stor hvis en skal sette δ-verdier for svært lange kontraktsperioder.

Presisjonsnivået bør sees i forhold til antall simuleringer som foretas, siden feilleddet i resultatene fra simuleringen reduseres med $\sqrt{n}$ simuleringer. Det er vår erfaring at det kreves minst 10 000 simuleringer for å få rimelige δ-verdier. Dette skyldes at det ved færre simuleringer, for eksempel 100 eller 1000, er stor fare for at feilleddet mellom gjennomsnittet av n utfall og forventet utfall blir for stort. Dermed vil estimeringen av funksjonsverdien av a, b, c og d få store konfidensintervall og feilleddet fra simuleringen vil kunne dominere små endringer i δ.

Figur 6.4: Usikkerhet ved estimering av δ

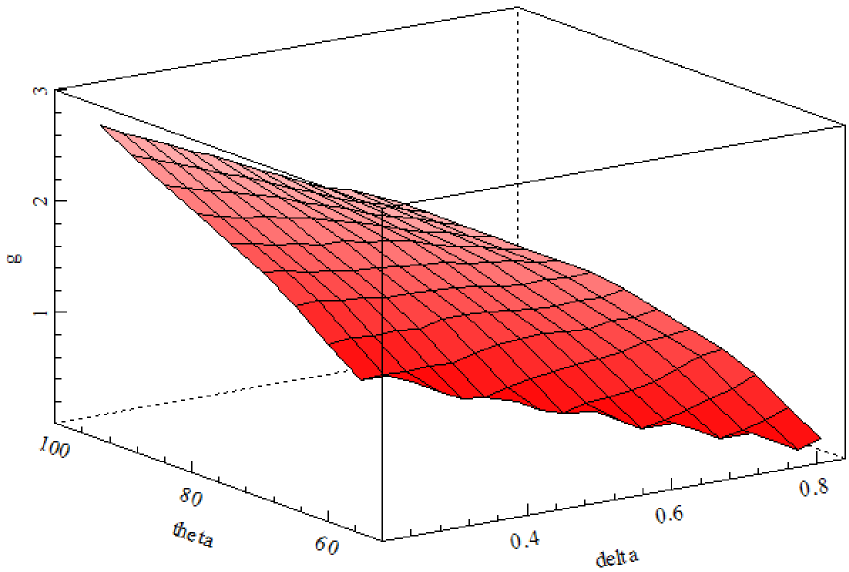


I praksis kan en se dette ved å simulere med den samme δ–verdien flere ganger og få vidt forskjellige gjennomsnittlige sluttverdier for egenkapitalen når antall simuleringer er for lavt. Som figuren over viser, vil dette medføre at når heuristikken forsøker å finne den optimale δ–verdien, så vil den ikke med sikkerhet treffe med retningsbestemmelsen eller fortegnet på den deriverte. Hvis en følger VBA- koden trinn for trinn vil en da se at målsøkingen på høyt presisjonsnivå er tilnærmet vilkårlige steg i begge retninger. Det er også stor fare for at en δ-verdi aksepteres på tross av at den egentlig ikke ligger nær den optimale hvis en bruker absolutt feilledd som termineringskriterium. Dette skyldes at δ-verdier som egentlig er mye større eller mindre enn den optimale, kan risikere å tilfredsstille termineringskriteriet som følge av tilfeldig variasjon.

Modellen slik vi har spesifisert den er generelt ikke konsistent for negativ δ, men i så tilfelle vil avkastningsprofilen til kundene ligne en såkalt ”straddle”, altså et veddemål på lav volatilitet. Vi mister imidlertid ikke generalitet ved å forutsette dette, gitt at kun kontrakter med $g > r$ krever negativ δ. Det hadde ikke vært noe problem å tillate negative verdier av δ, men da tar simuleringen lengre tid.

Figur 6.5 viser et sett av effisiente kontrakter basert på ganske grove parameterskift under forutsetning om risikofri rente for kundene etter konkurs. Settet av effisiente kontrakter ser ulikt ut avhengig av kontraktsperioden og andelen inngående egenkapital, som her er satt til henholdsvis 20 år og 20 %. $\delta\ og\ \theta$ er negativt korrelert i effisiente kontrakter, det samme er δ og g. Dette betyr at en høyere avkastningsgaranti medfører at selskapet enten tar lavere risiko, at kunden får en lavere andel av overskuddsavkastningen eller en kombinasjon av begge. Man kan se at sensitiviteten på de andre parameterne er høyest for garantirenten, siden planet er relativt flatt. De fleste av kontraktene vi har brukt i modellene senere i oppgaven ligger oppe til venstre i planet, altså med en høy garantirente og en høy risiko i porteføljen. Dette medfører som man ser en ganske lav δ. I forhold til Døskeland og Nordahl har vi brukt en noe mindre avstand mellom garantirenten og risikofri rente. Dette medfører generelt at vi får lavere δ-verdier, siden garantien får større verdi gitt et nivå på risikoen i investeringsporteføljen.

Figur 6.5 Effisiente kontrakter for ulike δ og θ



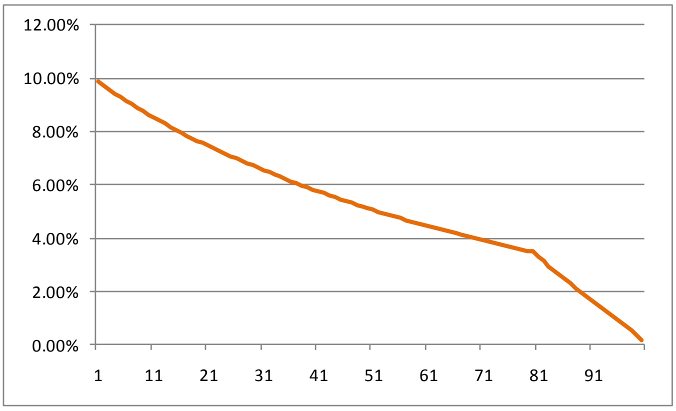
6.7 Fordeling mellom generasjoner

Døskeland og Nordahl (2006) viser at det er forskjell på forventet risikojustert avkastning for kunder, avhengig av når de kommer inn i selskapet. Vi vil nå se på hvordan slike effekter slår inn med de parametrene brukt og modelljusteringene vi har gjort. Dette er hovedsakelig for å vise hvorvidt fordelingen mellom kundene er realistisk og rimelig. For å kunne observere avkastning og risiko for kunder som kommer inn på ulike tidspunkt under produktets levetid, må en splitte opp kundekapitalen til flere generasjoner. Vi opprettet derfor matriser i VBA for å holde styr på hver generasjon.

Innskuddene til selskapet skjer etter et deterministisk mønster. I utgangspunktet er den mest realistiske forutsetningen at innskuddene fra hver generasjon vokser med inflasjonen π, satt til 2 %. Uttakene fra selskapet skjer når kundens midler har vært i selskapet over 20 år og er dermed avhengig av stokastiske bevegelser i tidligere perioder. For å vise sammenhengene har vi brukt 80 overlappende generasjoner over en 100 års periode hvor selskapet tilbyr produktet. I stedet for å få store effekter av oppbygging av kundekapital, har vi forutsatt at selskapet på oppstartstidspunktet inngår eller overtar et antall kontrakter med en uniform fordeling av gjenstående levetid mellom 1 og 20 år. Hvis en forutsetter at alle kontraktene i oppstarten har like lang levetid, vil en få et hopp etter 20 år som skyldes at store mengder kundekapital betales ut.

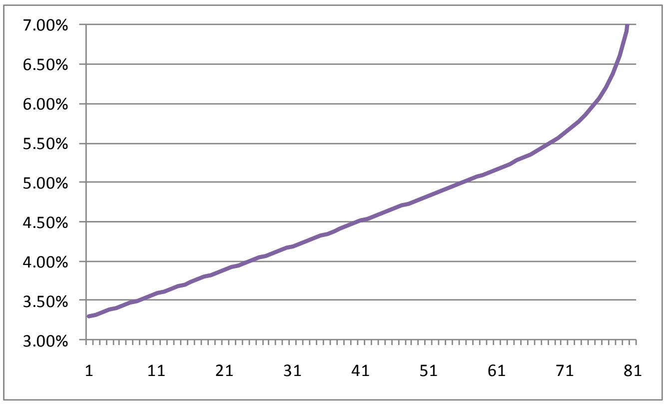
Vi tar først utgangspunkt i modellen der selskapet kan gå konkurs. For å se utviklingen klart, har vi simulert utviklingen med en inngående andel kundemidler på 10 % og andelen i tangentporteføljen 10 %. Dette er for å unngå at effekter som skyldes konkurs skal dominere.

Figur 6.6: Forventet gjeldsandel under Q i modellen med konkurs



Gjeldsandelens forventede utvikling er at den synker gradvis ned mot år 80. I år 80 vil man ikke lenger ta imot nye kunder og bare betale ut. Mellom år 80 og år 100 er det kun mellom 20 og 1 generasjon igjen i selskapet, slik at utviklingen akselereres. Siden δ er satt konstant over kontraktsperioden får dette store konsekvenser for fordelingen mellom kundene, spesielt når produktets levetid er såpass lang. Gjeldsandelens utvikling er imidlertid konveks som følge av "smoothing"-effektene som virker på kontoene. Når andelen kundemidler er på vei ned, går også forventet risikojustert avkastning opp. Dette motvirker til en viss grad et videre fall i gjeldsandelen.

Figur 6.7: Risikojustert avkastning under Q for Generasjon 1 til 80 for modellen med konkursrisiko



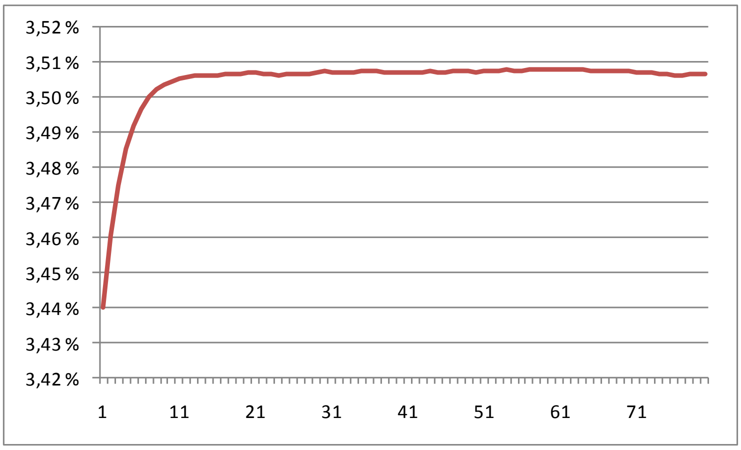
Som man ser av grafen vil kundene som kommer inn på slutten av kontrakten subsidieres urealistisk mye. Faktisk ser man at den gjennomsnittlige avkastningen over tid på kundens midler er langt over 3.5 %. De ekstreme utslagene i risikojustert avkastning mot slutten av perioden kan forklares med at det er omtrent ingen kundemidler igjen til å fordele overskuddsavkastningen på. Det er relativt mye kundemidler i selskapet i de første årene og generasjon -19 til 10 har en forventet risikojustert avkastning på under 3.5 %. Det vil si at kundene de første 30 årene av selskapets levetid subsidierer kundene de neste 70 årene og at det er spesielt noen få generasjoner mot slutten som får svært gode betingelser. Denne fordelingen virker direkte urealistisk. Kilden til problemet er i all hovedsak at gjeldsandelen drifter altfor langt unna den initiale ved oppstarten. Jo lengre perioder man ser på, jo større avvik vil oppstå. Dette spiller ingen rolle for eierne, siden denne driften er priset inn på forhånd. Imidlertid blir det vanskelig å forutsette at kundene vil være interessert i dette produktet for alle generasjoner, hvis skjevfordelingen blir såpass ekstrem.

Siden gjeldsandelen er en brøk, så er det flere måter å utjevne denne på over tid for å redusere skjevhetene. Det første alternativet er å la innskuddene vokse med risikofri rente i stedet for inflasjonen. Dette medfører at netto uttak fra selskapet gjennom levetiden reduseres vesentlig, slik at gjeldsandelen synker mye saktere. Problemet med denne løsningen er at det er vanskelig å forsvare at innskuddene skal vokse såpass mye, slik at for eksempel nåverdien av innskuddet til generasjon 1 er det samme som generasjon 80.

Hvis innskuddene fortsatt skal få vokse med inflasjonen, er en da nødt til å rebalansere andelen gjeld og egenkapital underveis direkte eller indirekte. Her har vi undersøkt 2 ulike løsninger. Døskeland og Nordahl har brukt årlig rebalansering av andelen egenkapital og kundemidler. Ved årets slutt tvinger man gjeldsandelen rett og slett tilbake til den initiale og sikrer seg dermed mot utslag som skyldes ulike vekstfaktorer på innskudd og uttak. Da ser man bare på subsidieringseffekten som skyldes oppbygging av bufferkapital. Denne metoden er den mest effektive med tanke på å holde risikojustert avkastning stabil, men krever 99 rebalanseringer av egenkapitalen over levetiden.

Den tredje løsningen er å bruke modellen vi allerede har presentert hvor det foretas emisjoner og utbytter. Dette kan sees på som en indirekte løsning, hvor det vil skje rebalansering for å motvirke synkende andel kundemidler, men emisjoner og utbytter slår som regel ikke inn så ofte som hvert år. Jo smalere intervallet rundt α_0 settes, jo oftere vil emisjoner og utbytter foretas. Ved et uendelig lite intervall, vil løsningen innebære det samme som årlig rebalansering. Når en bruker modellen med emisjoner og utbytter trenger en heller ikke å tilpasse risiko og egenkapitalandel for å unngå at konkurs skal dominere, siden emisjoner vil redusere risikoen for tap mot kundekapitalen til svært nær null. Vi har derfor her brukt en gjeldsandel på 80 % og en θ på 80 %, som ligger ganske tett opp mot kundens preferanser. Som vi ser av figuren på neste side, er det små effekter å spore relatert til en utvikling i gjeldsandelen. Det eneste som er verdt å merke seg er at det er en del små svingninger rundt trenden som skyldes at risikojustert avkastning går opp og ned i steg når det foretas henholdsvis emisjoner og utbytter.

Figur 6.8: Risikojustert avkastning under Q for Generasjon 1 til 80 med emisjoner og utbytte



Figuren viser resultatet av 100 000 simuleringer som gir en tilnærmet steady state etter ca 15 generasjoner. Årsaken til dette ligger i at man i gjennomsnitt forventer å bygge opp noe bufferkapital de første årene som senere generasjoner vil dra nytte av. På et ganske tidlig tidspunkt vil forventet oppbygging av bufferkapital tilsvare forventet forbruk, siden tildelingen til bufferkontoen er ganske moderat ved overskuddsavkastning. Emisjoner og utbytter vil tilnærmet perfekt utligne effekten av at andelen kundemidler under Q synker. Selv om det er visse forskjeller mellom risikojustert avkastning mellom generasjonene, er disse mye mindre enn i det forrige tilfellet.

CRRA-investorer vil normalt sett ikke være interessert i slike produkter når de får en risikojustert avkastning lik risikofri rente. Dette skyldes at de ikke har tapspreferanser, slik at garantien ikke tilfører nok verdi for kunden til å forsvare kostnaden i form av redusert oppside. Døskeland og Nordahl viser imidlertid hvordan slike produkt vil inngå som en del av kundens optimale portefølje for senere generasjoner, når disse blir subsidiert. Den eneste forskjellen er at vi får et steady state, som medfører at den optimale andelen holder seg stabilt fra generasjon 11 og utover.

6.8 Oppsummering av kapittelet

Vi har i dette kapittelet presentert ulike modeller for pensjonskontrakter, i tillegg til å vise hvordan kontrakter kan prises rettferdig og hvordan man kan estimere en optimal portefølje. Videre har vi vist hvordan pensjonskontraktene kan gi en subsidiering mellom generasjoner, slik at senere generasjoner blir subsidiert ved at tidligere generasjoner bygger opp bufferkapital i selskapet. Selv om kontraktene i utgangspunktet ikke trenger å være en del av en CRRA-investors optimale portefølje, kan de være det for senere generasjoner, da de vil oppnå en risikojustert avkastning som er høyere enn risikofri rente.

I det neste kapittelet skal vi presentere resultatene av modellene som vi har fremstilt i denne delen.

7. RESULTATER

I denne delen vil vi presentere de numeriske resultatene vi fikk fra modellene som ble presentert i forrige kapittel. I kapittelet vil vi innledningsvis gi en forklaring på våre valg av parametre i modellen. Deretter vil vi presentere resultatene av henholdsvis Mertons porteføljeproblem, pensjonskontraktene med rentegaranti og konkursrisiko og kontraktene med emisjoner og utbytte.

7.1 Modellens parametre

Vi har valgt følgende parametre, hvor noen av disse er basert på forrige kapittel:

Risikofri avkastning:	$r = 3.5$ %
Forventet avkastning risikabel portefølje:	$\mu = 6.8$ %
Standardavvik risikabel portefølje:	$\sigma = 13$ %
Selskapets gjeldsandel:	$\alpha = 0.8$
Andel av bonus som krediteres buffer:	$b = 0.2$

Når det gjelder modellen med emisjoner og dividender, har vi satt en øvre og nedre grense av egenkapitalandelen til henholdsvis 30 og 10 %.

7.2 Resultater ved løsning av Mertons problem

Investors portefølje vil her bestå av en andel av tangentporteføljen og en andel i risikofritt aktivum, der størrelsen på disse vektene bestemmes ut fra den enkelte investors risikoaversjon.

Merton (1971) har funnet at vi kan løse et standard aktivaallokeringsproblem ved å bruke formelen

$$\theta = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \qquad (7.1)$$

Vi løser problemet hvor kunden har en risikoaversjon fra 1 til 5. Dette gir følgende resultater:

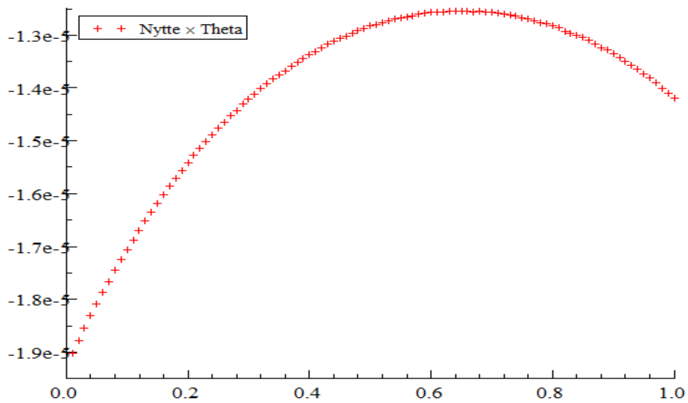
Tabell 7.1: Løsning Mertons problem

CRRA	theta	andel aksjer	andel eiendom	andel obligasjoner	andel risikofritt	forventet avkastning	risiko-premie	sigma
5	39%	18%	14%	7%	61%	4.8%	1.3%	5%
4	49%	22%	18%	8%	51%	5.1%	1.6%	6%
3	65%	30%	24%	11%	35%	5.6%	2.1%	8%
2	98%	45%	36%	17%	2%	6.7%	3.2%	12%
1	195%	90%	72%	33%	-95%	9.9%	6.4%	25%

Vi ser at ved en risikoaversjon på 1 blir optimal θ 195 %. I dette tilfellet vil investor låne 95 % risikofritt for å kunne plassere sin ønskede andel i tangentporteføljen. Ved en høyere risikoaversjon, vil investor ha en lavere andel plassert i den risikable porteføljen. En mer moderat risikoaversjon på 3 gir en optimal θ på 65 %. En viktig egenskap ved denne løsningen er at den er uavhengig av investeringshorisonten, siden vi har forutsatt at det ikke er noen tidsdiversifiseringsgevinst.

I figuren nedenfor har vi plottet kundens nytte for θ fra 1 til 100 % med intervaller på 1 % og γ lik 3, med 1 000 000 simuleringer for hver θ for å få et minst mulig feilestimat. Vi ser at nytten har et toppunkt når θ er 65 %. Resultatet er i samsvar med ligning 7.1.

Figur 7.1: Kundens nytte ved Mertons porteføljeproblem



7.3 Resultater matematisk modell med konkursrisiko

Vi har gjort 100 000 Monte Carlo simuleringer for hver test for å finne resultatene av Døskeland og Nordahls modell som vi beskrev i kapittel 6, gitt de parameterne vi har antatt fra del 7.2. Siden dette er en svært tidkrevende prosess ved bruk av Visual Basic, har vi antatt at kunden har en relativ risikoaversjon (γ) på 3. Vi har gjort tester for garantier fra 0 til 3 %. Da vi har antatt en risikofri rente på 3.5 %, vil det ikke være hensiktsmessig å ha garantier som ligger for nær eller over dette nivået. Tabell 7.2 oppsummerer våre resultater.

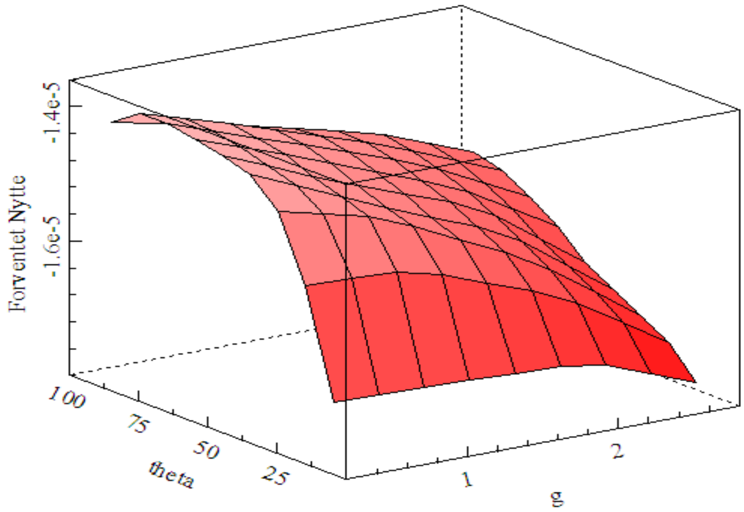
Tabell 7.2: Resultater modell med konkursrisiko

g	theta	andel aksjer	andel obligasjoner	andel eiendom	andel risikofritt	delta	snitt-avkastning	Konkurs-sannsynlighet
0%	74%	34%	27%	13%	26%	0.703	5.17%	11%
0.5%	77%	35%	28%	13%	23%	0.625	5.04%	14%
1.0%	82%	38%	30%	14%	18%	0.535	4.93%	19%
1.5%	88%	40%	33%	15%	12%	0.441	4.82%	24%
2.0%	92%	42%	34%	16%	8%	0.356	4.68%	29%
2.5%	95%	44%	35%	16%	5%	0.269	4.50%	32%
3.0%	100%	46%	37%	17%	0%	0.189	4.35%	37%

Vi observerer at kundens optimale θ er høyere for høyere garantiavkastninger, samtidig som den gjennomsnittlige avkastningen blir lavere når g øker. Det er to faktorer som gjør at snittavkastningen synker for høyere g. Den ene faktoren er beregningen av δ. For at en kontrakt skal være rettferdig utformet, må eierne få en større del av kaka ved å ta høyere risiko. Derfor vil δ være lavere når θ og g øker, og dette gir isolert sett en lavere avkastning til kundene. Den andre faktoren er konkurssannsynligheten. En forutsetning som er lagt til grunn for modellen er at kunden vil oppnå risikofri avkastning resten av perioden dersom selskapet skulle gå konkurs ved tidspunkt $\tau < T$. Ved et konkurstilfelle vil følgelig forventet avkastning bli lavere. Videre vil kundens optimale θ konvergere mot løsningen vi fant under Mertons problem ved lavere garantiavkastning.

Vi har også oppsummert resultatene vi fikk i denne modellen i figur 7.2. Figuren viser kundens nytteverdi av kontrakten som en funksjon av g og θ.

Figur 7.2: Kundens nytte som en funksjon av g og θ



Av figuren kan vi blant annet observere at kundens forventede nytte er lavere for høyere verdier av g, og forventet nytte er lavere enn ved Mertons optimale løsning for samtlige kontrakter. Videre ser vi at optimal θ er høyere for høye garantiavkastninger.

Konkurssannsynlighetene i modellen virker høye, særlig i tilfeller med høy garantiavkastning og θ. En årsak til at sannsynlighetene er såpass høye er at de optimale andelene i den risikable porteføljen er en god del høyere enn hva som er tilfelle i virkeligheten. Blant annet får vi en optimal aksjeandel på 46 % ved en garantiavkastning på 3 %, mens de norske reglene tilsier at maksimal aksjeandel i totalporteføljen er 35 %. I dag er også aksjeandelene til de norske livselskapene langt lavere enn den tillatte andelen.

Et annet moment som kommer frem av resultatene, er at det er en interessekonflikt mellom kundene og eierne av selskapet. Når den årlige garantiavkastningen går opp, vil det være hensiktsmessig for selskapets eiere å begrense risikoen ved å redusere θ. Dette for å beskytte deres egenkapital, da vi vet at garantien må betales ut hvert år uavhengig av aksjemarkedets utvikling. Samtidig ser vi at det vil være optimalt for kunden å øke θ når g øker. Dermed oppstår det en konflikt mellom eiernes og kundenes interesser som gjør selskapets rammebetingelser for kapitalforvaltningen vanskeligere.

7.4 Resultater matematisk modell med emisjoner

På samme måte som under avsnitt 7.3, har vi gjennomført 100 000 simuleringer for g fra 0 til 3 % med 0.5 % intervaller. Tabell 7.3 oppsummerer resultatene.

Tabell 7.3: Resultater modell med emisjoner og utbytte

g	theta	andel aksjer	andel obligasjoner	andel eiendom	andel risikofritt	delta	snitt-avkastning
0.0%	76%	35%	28%	13%	24%	0.776	5.11%
0.5%	79%	36%	29%	13%	21%	0.719	4.98%
1.0%	84%	39%	31%	14%	16%	0.633	4.77%
1.5%	88%	40%	33%	15%	12%	0.526	4.45%
2.0%	94%	43%	35%	16%	6%	0.410	4.20%
2.5%	97%	45%	36%	16%	3%	0.285	3.89%
3.0%	100%	46%	37%	17%	0%	0.152	3.64%

Hvis vi sammenligner resultatene med det vi fikk i modellen med konkursrisiko, observerer vi at snittavkastningen i denne modellen er lavere for samtlige g, og forskjellen i snittavkastningen øker med g. En forklaring på dette er at eierne forsikrer kundene mot at selskapet skal gå konkurs ved å skyte inn emisjoner ved dårlige år, men denne sikkerheten må kundene betale for i form av lavere forventet avkastning. Ellers viser modellen de samme tendensene. Høyere g gir en høyere optimal θ for kunden, men samtidig en lavere snittavkastning fordi eierne tar en større del av meravkastningen ut over g.

En annen observasjon er at verdiene av δ ligger på et noe høyere nivå enn i modellen med konkurser, med unntak av tilfellet $g = 3$ %. Sannsynligheten for at eierne får utbetalt utbytte være høyere enn sannsynligheten for å måtte skyte inn kapital ved en emisjon, og den isolerte effekten av dette er en høyere δ. Når $g = 3$ % er derimot δ i tilfellet her lavere enn ved modellen med konkursrisiko. Konkursrisikoen øker med g, og i tillegg reduseres sannsynligheten for at det blir utbetalt utbytte til eierne, da et større beløp må betales ut til kundene hvert år. Hvis g blir høy nok, i dette tilfellet 3 %, vil derfor δ bli lavere i modellen med emisjoner enn ved konkurs.

7.5 Oppsummering og evaluering av resultatene

Resultatene vi har kommet frem til viser at garantielementet i kontraktene har en negativ innvirkning på både forventet avkastning og forventet nytte til en CRRA-investor. Sammenlignet med Mertons løsning, vil ikke kontraktene være en del av investorens optimale portefølje. En mulig forklaring på at kontrakter med garantier likevel er etterspurt, kan være at investorer heller har preferanser som samsvarer med prospektteori fremfor CRRA-preferanser (Døskeland og Nordahl, 2006). Mulige viktige egenskaper ved kontraktene, som transaksjonskostnader, skatter og forsikringstekniske elementer er ikke inkludert i denne analysen, og det kreves grundigere undersøkelser for å kunne se på effektene av disse.

8. LIVSELSKAPENES KAPITALFORVALTNING I PRAKSIS

I dette kapittelet vil vi se nærmere på hvordan kapitalforvaltningen i livselskapene er i praksis. Et problem som oppstod for oss da vi ønsket å finne ut hvordan de forskjellige livselskapene forvalter sine fripoliser, var at de fleste livselskapene dessverre var lite transparente og lite villige til å gi ut informasjon om hva de konkret investerer i. Av den grunn fikk vi ikke tilgang til all nødvendig data, og kapittelet vil derfor gi en fremstilling om livselskapenes kapitalforvaltning generelt fremfor forvaltningen av fripoliser spesielt.

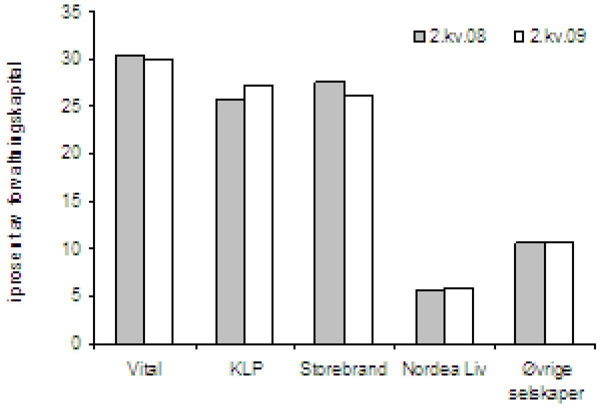
I kapittelet skal vi blant annet se på markedssituasjonen i livsforsikringsbransjen og hvilken kapitalavkastning selskapene oppnådd historisk. Vi ønsker videre å undersøke egenkapitalandelen, da den er avgjørende for hvor stor risiko selskapene er i stand til å ta på seg. Endelig vil vi se på selskapenes aktivaallokering og sammenligne den med aktivaallokeringen i våre modeller. Kapittelet vil hovedsakelig basere seg på rapporter og analyser fra Kredittilsynet.

8.1 Livsforsikringsbransjen i Norge

Livselskapene i Norge består av ni norske, to utenlandske selskaper og en del mindre utenlandske filialer. De tre største selskapene, Vital, Storebrand og KLP, har samlet en markedsandel på 90 % av den totale forvaltningskapitalen. I figuren nedenfor er det laget en oversikt over markedsandelene som er hentet fra Kredittilsynet[8].

[8] Kredittilsynet, *Rapport for finansinstitusjoner 1. Halvår 2009,* 3. September 2009

Figur 8.1: Livselskapenes markedsandeler målt i prosent av forvaltningskapital



Det meldes videre i Kredittilsynets rapport fra første halvår 2009 at de store selskapene samlet har redusert sine markedsandeler noe, men endringene er små. Dette kan tyde på at konkurransesituasjonen i markedet forbedrer seg marginalt, men endringen skjer samtidig langsomt.

8.2 Livselskapenes historiske kapitalavkastning

Figuren nedenfor viser historisk avkastning hos livselskaper og pensjonskasser fra 2000 til 2009.

Figur 8.2: Kapitalavkastning livselskaper og pensjonkasser 2000-2009[9]

[9] Kredittilsynet, *Rapport for finansinstitusjoner 1. Halvår 2009*, 3. September 2009

Det første vi merker oss, er at svingingene i avkastningen hos livselskapene er markant mindre enn hos pensjonskassene. En viktig årsak til dette er selskapstypenes ulike rammebetingelser. Mens livselskapene må utbetale en garanti til kunden hvert år, har pensjonskassene sluppet dette. Dermed har pensjonskassene rom for å ta på seg mer risiko enn livselskapene, hvilket resulterer i at svingningene der er større. Livselskapene må sørge for at de kan gjennomføre sine forpliktelser til enhver tid og er derfor mindre fleksibel på kort sikt. Den samlede avkastningen til livselskapene har variert fra opp mot 10 % til en negativ avkastning på like under 1 %.

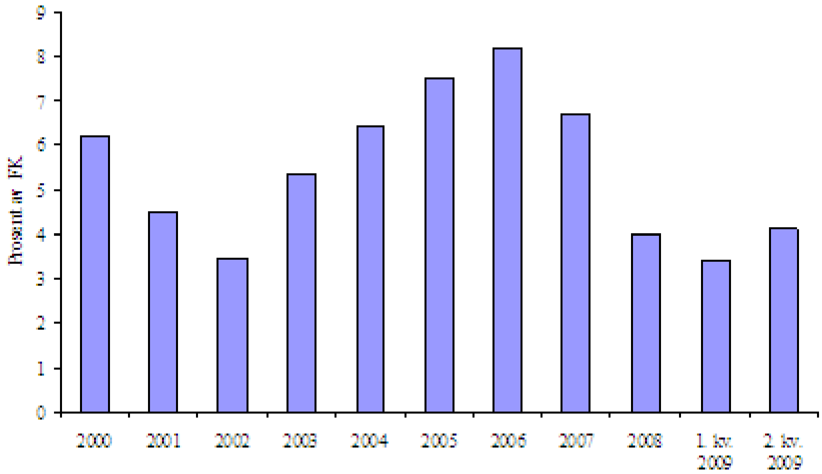
8.3 Livselskapenes soliditet

Livselskapenes evne til å ta risiko, er sterkt avhengig av deres bufferkapital og forpliktelser. Økte kortsiktige forpliktelser grunnet rentegarantier øker sårbarheten ved å ha en lav bufferkapital, og det kan hevdes at selskapene driver med kortsiktig forvaltning av langsiktige pensjoner på grunn av rentegarantien. En høyere bufferkapital vil imidlertid øke selskapets evne til å investere i mer risikable aktiva, og er derfor en viktig faktor for hvilken langsiktig avkastning kundene kan forvente. I tillegg er bufferkapitalen naturligvis en nødvendighet for selskapenes evne til å overleve.

Kredittilsynet har gjort stresstester på livselskapene for å undersøke deres evne til å oppfylle tilsynets soliditetskrav. I *Stresstest II*[10] defineres bufferkapital som *overskytende kjernekapital (kjernekapitalmargin), tilleggsavsetninger begrenset oppad til årets renteforpliktelse, delårsresultat, kursreguleringsfond og risikoutjevningsfond*. Tilsynet tester videre hva som vil skje med selskapenes bufferkapital gitt at en betydelig nedgang i alle aktivaklasser i porteføljen inntreffer samtidig. Den antatte nedgangen består av et parallelt skift i rentekurven på 1.5 %, et fall i aksjekursene på 20 %, et fall i eiendomsmarkedene på 12 % og en endring i valutakursen på 12 %. Basert på stresstestrapporteringen, viser figur 8.3 utviklingen i selskapenes buffer fra 2009.

[10] Kredittilsynet, *Rapport for finansinstitusjoner 1. Halvår 2009*, 3. September 2009, side 37

Figur 8.3: Selskapenes bufferkapital hentet fra Kredittilsynets stresstester 2000-2009



Bufferkapitalen varierer fra en topp på rundt 8 % i 2006 til rett over 3 % første kvartal 2009, og vi ser altså at det er betydelige svingninger i bufferkapitalen. Det sterke fallet i aksjemarkedet høsten 2008 har ført til en sterk reduksjon av bufferkapitalen. Når selskapenes bufferkapital synker, øker risikoen for at egenkapitalen til aksjonærene blir tappet. For å unngå at dette skjer vil selskapene gjerne redusere aksjeandelen, noe vi skal studere nærmere når vi ser på livselskapenes aktivallokering.

Selv om bufferkapitalen kanskje ser lav ut til enkelte tider, er sjansen for tapt pensjon grunnet insolvens særdeles liten. De norske reglene for livselskap er de strengeste i Europa, og den korte horisonten for utbetalinger gjør at pensjonene er svært trygge. Kravet til egenkapital øker med risikoen i plasseringen til pensjonspengene. I følge Caspar Holter junior i konsulentselskapet Pensjon og Finans AS er det ekstremt lite sannsynlig at norske livselskap vil bli satt under offentlig administrasjon, på grunn av de strenge reglene for dekning til enhver tid[11].

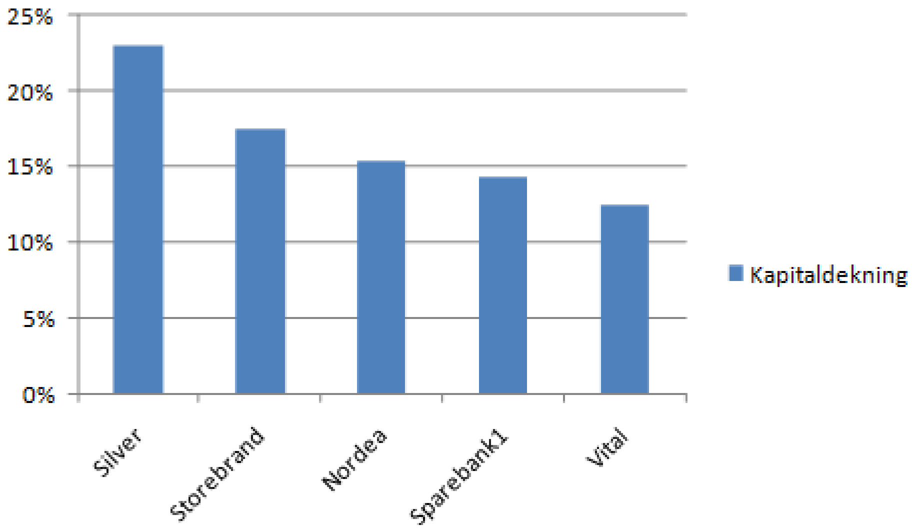
Hvor høy aksjeandel selskapet kan inneha er altså avhengig av selskapets soliditet. Det kan derfor være interessant å se på hvilke av fripolisetilbyderne som har den høyeste kapitaldekningen. Figur 8.4 viser en oversikt over hvordan kapitaldekningen hos fem av tilbyderne av fripoliseselskaper var ved slutten av 2008[12].

---

[11] E24.no, *Trygg norsk pensjon*

[12] Silvers årsberetning, 2008

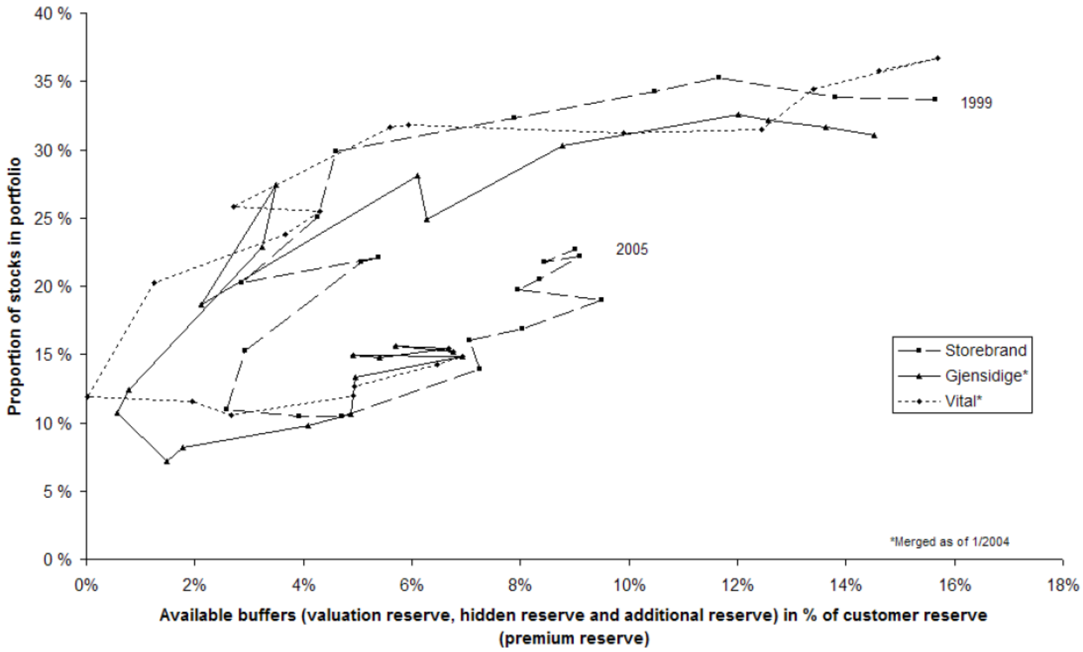
Figur 8.4: Fripoliseselskapenes kapitaldekning etter 2008



Det er en stor spredning i kapitaldekningen mellom det mest og det minst solide selskapet. Silver, som har den største kapitaldekningen, har dermed betydelig større rom for å plassere midlene i aksjer enn Vital, som hadde mer enn 10 % lavere kapitaldekning på det gitte tidspunktet. Silver har også en markant høyere aksjeandel i sin portefølje enn det Vital har. Vi vil understreke at figuren viser kapitaldekningen til selskapene på et gitt tidspunkt, det er ingen garanti for at selskapene vil ha den samme kapitaldekningen fremover.

Døskeland og Nordahl (2006) har sett på norske livselskaps aksjeandel og bufferkapital i perioden 1999-2005. Figur 8.5 viser forfatternes funn. Figuren illustrerer at det er en positiv sammenheng mellom buffer og andel aksjer i forvaltningsporteføljen. Videre kan vi se at selskapene tenderer til å følge hverandres aktivaallokering nøye. Forfatterne forklarer dette med at man risikerer å tape kunder hvis man velger en investeringsstrategi som avviker fra ”malen” hvis strategien slår feil, samtidig som oppsiden ved å skille seg ut er mer begrenset.

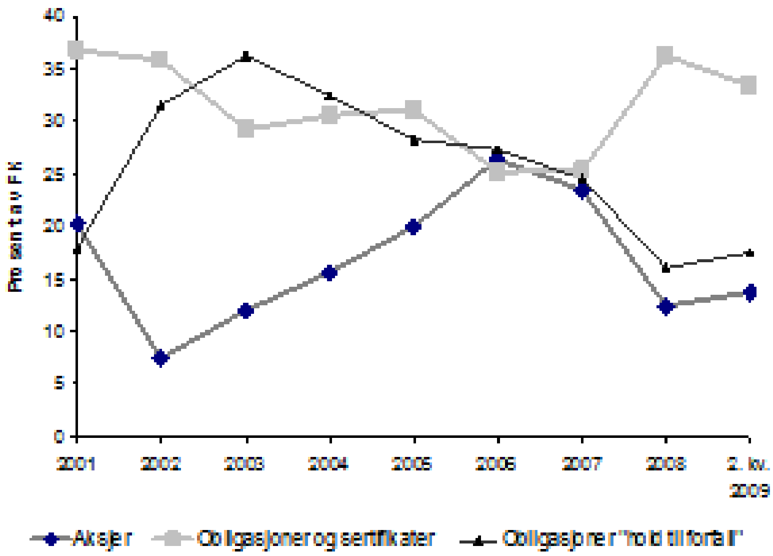
Figur 8.5: Kvartalsvis aksjeandel og buffer 1999-2005 (Døskeland og Nordahl, 2006)



8.4 Livselskapenes aktivaallokering

Figuren nedenfor oppsummerer utviklingen i andel aksjer og obligasjoner av livselskapenes kollektivportefølje i perioden 2001-2009.

Figur 8.6: Andel aksjer og obligasjoner i kollektivporteføljen[13]

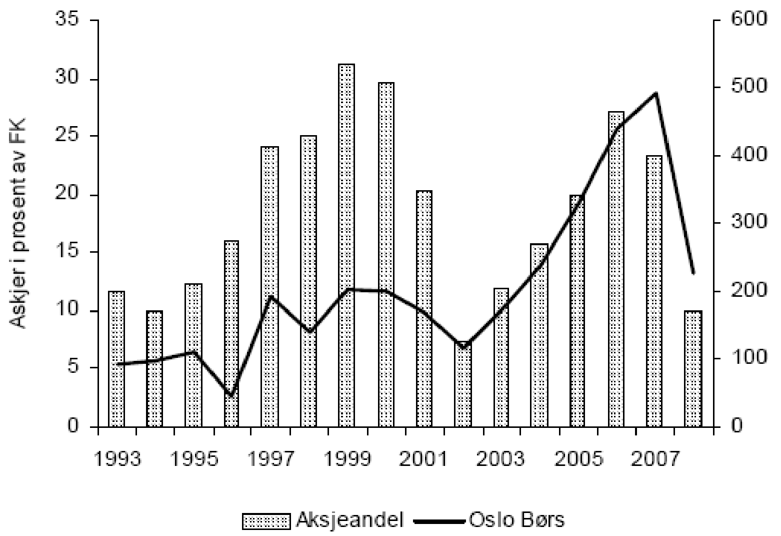


---

[13] Kredittilsynet, *Rapport for finansinstitusjoner 1. Halvår 2009*, 3. September 2009

Vi kan se at aksjeandelen i perioden varierer fra i overkant av 5 % til over 25 % av forvaltningskapitalen. Fra 2007 til 2008 falt aksjemarkedet dramatisk, noe som førte til en kraftig reduksjon i aksjeandelen. I tillegg til at aksjeandelen automatisk reduseres som følge av at verdien av aksjeporteføljen faller, blir livselskapene også tvunget til å selge seg ned i aksjer for å beskytte sin bufferkapital. Når bufferkapitalen blir svekket, vil det ta tid å bygge den opp igjen. I løpet av den tiden er det imidlertid en sjanse for at aksjemarkedet allerede har hentet seg inn igjen. Dermed vil selskapene og deres kunder gå glipp av en betydelig del av oppturen i markedet. Noe spissfindig formulert kan det derfor hevdes, grunnet selskapenes varierende evne til å ta risiko, at selskapene delvis blir tvunget til å selge når aksjemarkedet er på bunn og kjøpe på topp. For å gi en illustrasjon på dette, viser figur 8.7 en utvikling av livselskapenes aksjeandel sammen med utviklingen på Oslo Børs 1993-2008.

Figur 8.7: Livselskapenes aksjeandel og utviklingen på Oslo Børs[14]



Kredittilsynet uttaler selv i sin siste tilstandsrapport at *"det har vært en klar samvariasjon mellom livsforsikringsselskapenes aksjeandel i balansen og utviklingen i norske aksjekurser over tid, hvor selskapene har foretatt nedsalg når markedene har falt og ikke kjøpt når markedene stiger".* En slik investeringsstrategi vanskeliggjør oppgaven med å oppnå en tilfredsstillende avkastning over tid og er ikke hensiktsmessig verken for selskapets eiere eller kunder.

[14] Kredittilsynets tilstandsrapport for finansinstitusjoner 2008

8.5 Oppsummering av kapittelet

I dette kapittelet har vi sett nærmere på hvordan kapitalforvaltningen i livselskapene er i praksis. Vi har sett at bufferkapitalen har vært sterkt varierende over tid, og at svekket bufferkapital som et resultat av fallende aksjemarked tvinger livselskapene til å begrense risikoen. En konsekvens av dette er at selskapene ofte må selge seg ut av aksjer når markedet faller kraftig, mens de ofte ikke får anledning til å kjøpe seg inn igjen før aksjemarkedet allerede har hentet seg inn igjen. Dermed går selskapets kunder glipp av en betydelig del av oppturen.

9. BEGRENSNINGER VED OPPGAVEN OG FORSLAG TIL VIDERE STUDIER

Å skrive en masterutredning er en tidkrevende og omfattende prosess, og det vil alltid være enkelte momenter man kunne ønske at man hadde hatt tid til å se nærmere på. Man må imidlertid sette en grense å si seg fornøyd på ett tidspunkt. I dette avsnittet vil vi komme med noen forslag til hvordan man kan tilnærme seg temaet på en litt annerledes måte, samt noen generelle tips til andre som eventuelt ønsker å skrive en oppgave om et lignende tema senere.

Når man skal skrive en teoretisk oppgave, blir man tvunget til å ta en del forutsetninger og gjøre noen forenklinger av virkeligheten. I vår oppgave har vi blant annet forutsatt null transaksjonskostnader, at vektene i de forskjellige risikable aktivaklassene i kontraktene holdes konstant uavhengig av kontraktenes utvikling og effisiente markeder. Når man gjør forenklinger, er det viktig at man ikke forutsetter vekk så mye at gyldigheten av funnene våre blir for mye svekket. Vi føler at selv om vi har gjort en del antakelser, så er de viktigste sammenhengene vi har funnet i samsvar med virkeligheten. Dette kommer også frem i kapittel 8, der vi ser på hvordan livselskapenes forvaltning har vært i praksis.

Vi har som tidligere vist utledet pensjonskontraktene basert på to forskningsartikler fra Døskeland og Nordahl. I disse kontraktene er avkastningsfordelingen mellom kunder og eiere gitt ved en rettferdig fordeling basert på risikonøytral verdsettelse. Det finnes alternative metoder å gjøre dette på. Ett eksempel kan være at kundene får en fast andel av meravkastningen ut over g, og man må da gjennomføre Monte Carlo simuleringer for å finne en rettferdig premie som kundene må betale inn til selskapet. Man kunne også gjort andre antakelser om kundenes preferanser, for eksempel ved å anvende prospektteori.

Et annet viktig moment er at man bør være klar over kapasitetsbegrensningene til VBA og særlig Excel, før man bestemmer seg for å skrive en slik oppgave. Det kan være nyttig å lære seg et mer avansert simuleringsprogram, som for eksempel C++, slik at man kan gjøre et større antall simuleringer betydelig mer effektivt. Om man i en tidlig fase kommer seg på et avansert nok nivå i C++, kan det nok lønne seg å bruke dette programmet fremfor VBA.

10. KONKLUSJONER

I denne utredningen har vi analysert pensjonskontrakter som gir kunden en årlig rentegaranti. Vi har presentert tre forskjellige kontrakter: Mertons porteføljeproblem (Merton, 1969), modell med årlig garantiavkastning og konkursrisiko (Døskeland og Nordahl, 2006) og en modifisert versjon av Døskeland og Nordahls modell hvor vi har antatt emisjoner og dividender istedenfor konkurser for å omgå problemet med høy konkursrisiko. Resultatene viser at kontraktene med årlig rentegaranti gir dårligere forventet avkastning og lavere nytte enn ved Mertons løsning. Vi har også sett at desto høyere garantiavkastningen er, jo lavere er forventet avkastning og nytte for kunden, da eierne får en større del av meravkastningen når de må ta på seg høyere risiko. Pensjonskontraktene vil ikke være en del av investors optimale portefølje hvis en forutsetter konstant relativ risikoaversjon.

Vi har videre funnet at det eksisterer en subsidieringseffekt mellom ulike generasjoner, ved at tidlige generasjoner bygger opp bufferkapital til de som inngår kontraktene senere. Ved å inngå en kontrakt på et sent tidspunkt kan man dermed forvente å oppnå en risikojustert avkastning som er høyere enn risikofri rente. For senere generasjoner kan således pensjonskontraktene være en del av deres optimale portefølje, og det vil være mer gunstig å velge selskaper som har tilbudt produktet i minst et tiår i forhold til nystartede.

Kunder som skal pensjonere seg langt frem i tid, har en langsiktig investeringshorisont. Livselskapene blir likevel tvunget til å tenke kortsiktig fordi garantiene skal utbetales hvert år. For å beskytte eiernes egenkapital må livselskapene begrense risikoen, noe som innebærer at de har en aksjeandel i sin portefølje som sannsynligvis er lavere enn hva som er optimalt for kunden. Livselskapene har også ofte blitt tvunget til å redusere sine aksjeandeler etter kraftige fall i aksjemarkedet for å begrense eiernes risiko, og samtidig ikke vært i stand til å komme inn i markedet igjen før oppturen har kommet.

REFERANSER

Avis og tidsskriftartikler

Dagens Næringsliv, 4. Juni 2009, *Folk skjønner lite av pensjon*

Dagens Næringsliv, 11. November 2005, *Dette er et ran*

Dine Penger, 3. September 2009, - *Storebrand hindrer konkurranse*

E24, 15. Juli 2009, - *Livselskapenes aksjefrykt skaper bare tapere*

E24, *Trygg norsk pensjon*, http://e24.no/arkiv/article1097597.ece

Finansavisen, 22. Oktober 2008, *Livselskapene selger alltid på bunn*

Bøker

Back, K., 2005, *A course in Derivative Securities: Introduction to Theory and Computation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A. J., 2006, *Investments*, 7th Edition

Booth, P., Chadburn, R., Haberman, S., James, D., Zaki, K, Robert, H. P., Rickayzen, B., 2004, *Modern Actuarial Theory and Practice*, Chapman & Hall

Briys, É., de Varenne, F., 2002, *Insurance: from underwriting to derivatives : asset liability management in insurance companies*, John Wiley

Dimson, E. Marsh, P., Staunton, M., 2002, *Triumph of the optimists: 101 years of global investment returns*, Princeton University Press

Glasserman, P., 2003, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York

Hens, T., Bachman, K., 2009, *Behavioural Finance for Private Banking*, John Wiley & Sons

Hull, J., 2006, *Options, Futures, and Other Derivatives*,6th Edition, Prentice Hall

Jackson, M., Staunton, M., 2001, *Advanced modeling in finance using Excel and VBA*, Wiley Finance, Chichester – West Sussex

Judd, K. L., 1998, *Numerical Methods in Economics*, MIT Press.

McDonald, R. (2006). *Derivatives Markets*, 2nd edition, Boston, Pearson Education

Øksendal, B., 2003, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 6th Edition, Springer Verlag Berlin Heidelberg

Forskningsartikler

Black, F., Scholes, M., 1973, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81 (3): 637–654.

Boyle, P. P., 1977, *Options: a Monte Carlo approach*, Journal of Financial Economics 4, pp323-338

Cochrane, J. H., 1999, *Portfolio Advice for a Multifactor World*, , Economic Perspectives, pp 59-78,

Cummins, J. D., Miltersen, K., R., Persson, S.-A., 2004, *International comparison of interest rate guarantees in life insurance*, Discussion Paper, NHH

Døskeland, T. M., Nordahl, H. A., 2006, *Intergenerational Effects of Guaranteed Pension Contracts*, Geneva Risk and Insurance Review

Døskeland, T. M., Nordahl, H. A., 2006, *Optimal Pension Insurance Design*, Journal of Banking and Finance, pp 382-392

Eicholtz, P., Koedijk, K., Schweitzer, M., 2001, *Global Property Investments and the Costs of International Diversification*, Journal of International Money and Finance, pp 349-346

Fama, E. F., 1970, *Efficient Capital Markets: A Review of Empirical Work*, Journal of Finance, pp 383-417

Gropp, J., 2004, *Mean Reversion of Industry Stock Returns in the US*, Journal of Empirical Finance, pp 537-551

Harrison, J. M., and D. M. Kreps, 1979, *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, Journal of Economic Theory, 20, pp 381–408

Ibbotson, R. G., Kaplan, P. D., 2000, *Does Asset Allocation Explain 40, 90 or 100 Percent of Performance?* , Financial Analyst Journal, pp 26-33

Itô, K., 1951, *Multiple Wiener integral*, J. Math. Soc. Japan 3, pp 157-169

Jorion, P., 2003, *The Long-Term Risks of Global Stock Markets*, Financial Management, p 5

Kahneman, D., & Tversky, A., 1979, *Prospect theory: An analysis of decisions under risk*, Econometrica, pp 313-327

Kahneman, D., Tversky, A., 1992, *Advances in Prospect Theory: Cumulative Represen-tation of Uncertainty*, Journal of Risk and Uncertainty, pp 297–323

Markowitz, H. M., 1952, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, pp 77–91

Merton, R. C.,1969, *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous case*, Reviews of Economical Statistics 51, 247-257

Merton, R. C., 1971, *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*, Journal of Economic Theory, 3, 373–413

Miltersen, K., R., Persson, S.-A., 2000, *Guaranteed investment contracts: distributed and undistributed excess return,* Discussion Paper, NHH

Master- og siviløkonomutredninger

Bøe, G. M., 2007, *Analyse av strukturerte spareprodukt : et Kinderegg for banknæringen?,* SNF-Prosjekt nr 7000, NHH

Holthe, M. D., 2006, *Rammebetingelsenes innvirkning på kapitalforvaltningen i livsforsikringsselskaper og pensjonskasser,* masteroppgave, NHH

Pettersen, R. F., Samnøy, E. M., 2004, *Prising av kontrakter med rentegaranti*, SNF-Prosjekt nr 7000, NHH

Skretting, S., 2007, *Forvaltningen av statens pensjonsfond - utland: en vurdering av investeringsstrategi og aktivaallokering,* masteroppgave, NHH

Annet

Harris, R., 2009, *FIE435 Applied Finance Lecture notes,* NHH

Kredittilsynet, 2009, *Rapport for finansinstitusjoner 1. Halvår 2009*

Kredittilsynet, 2008. *Tilstanden i finansmarkedet 2008,*

Silver, 2008, *2008- Et avslørende år,* Silvers årsberetning 2008, www.fripolisen.no

APPENDIKS

Eksempel på VBA- kode: Submakro for optimering av delta med funksjoner

```
Option Base 1
'Setter globale variabler
Public delta_avvik As Double

Sub Delta()
'Deklarering
Dim min, max, referanse As Variant
Dim min_avvik, max_avvik, referanse_avvik, g, theta As Double
Dim m, w, optimus As Long
Dim antall_g As Long
Dim testverdi, testverdi_avvik As Double
Application.ScreenUpdating = False

'Finner effisient kontrakter for m ulike kombinasjoner g og w ulike kombinasjoner theta
antall_g = 1
antall_t = 10
Rf = 0.035
ra = 0.068
For m = 1 To antall_g
g = 0.03

'Ytre loop for endring i thetaverdier
For w = 1 To antall_t
theta = 0.5 + w / 20
'Restarter termineringskriteriet
optimus = 0

referanse = 0.8

'Må ha ulik avstand, delta kan aldri bli null
min = 0.01
max = 1.5

Do While optimus = 0

'Sjekker funksjonverdier for min, max, referanse
Delta = min
Call Deltatesting(Delta, g, theta)
min_avvik = delta_avvik

Delta = referanse
Call Deltatesting(Delta, g, theta, Rf)
referanse_avvik = delta_avvik

Delta = max
Call Deltatesting(Delta, g, theta, Rf)
max_avvik = delta_avvik

If referanse - min < max - referanse Then
testverdi = (referanse + max) / 2
Else
testverdi = (min + referanse) / 2
End If
```

```
'Finn avvik for testverdien
Delta = testverdi
Call Deltatesting(Delta, g, theta, Rf)
testverdi_avvik = delta_avvik

'Velg nytt sett av parametre
If testverdi < referanse Then
If testverdi_avvik > referanse_avvik Then

'Flytter oppminstegrensen
min = referanse
Else

'testverdi_avvik < referanse_avvik
referanse = testverdi
End If
Else
If testverdi_avvik < referanse_avvik Then
min = referanse
referanse = testverdi
Else
max = testverdi
End If
End If

'Termineringskriteriet
If max - min < 0.001 Then

'Skriver ut til celler i regneark
Cells(2 + w + m * antall_t, 1) = g
Cells(2 + w + m * antall_t, 2) = theta
Cells(2 + w + m * antall_t, 3) = min
Cells(2 + w + m * antall_t, 4) = referanse
Cells(2 + w + m * antall_t, 5) = max

'Kjører med risikoaversjon
Call Deltatesting(Delta, g, theta, ra)

'Angir at man har funnet en tilfredsstillende verdi
optimus = 1
End If
Loop
Next w
Next m

'Oppdaterer excelark
Application.ScreenUpdating = True

End Sub
```

```
Function Deltatesting(Delta As Variant, g As Variant, theta As Variant, ra As Variant) As Double

'Deklarerer variable
Dim Rf, Vola, Vara As Single
Dim i, j, m As Long
Dim Rp, Volp, Varp, b As Single
Dim alpha As Double
Dim CRRA As Single
Dim At, Lt, Et, Bt, Et_min1, Lt_min1, Bt_min1, At_min1, Et_min2, Lt_min2, Bt_min2, At_min2 As Double
Dim Antobs, Restobs, Sqrt_restobs, nsim, Timestep As Double
Dim Xj As Double
Dim N01 As Double
Dim Konkurs As Long
Dim AvkLt, AvkLt_2, SumAvkLt, SumAvkLt_2 As Double
Dim d1 As Double
Dim d2 As Double
Dim Dummy_konkurs As Double
Dim Ek_krav, emisjon As Double
Dim NV_emisjoner As Double
Dim Presisjonssteg As Double
Dim At_snitt, Lt_snitt, Et_snitt, Bt_snitt As Double
Dim q, forventet_nytte, forrige_obs_nytte As Double
Dim deltajustering As Double
Dim optimus As Double
Dim EQ As Double
Dim Start_verdi_ek, Start_verdi_kunder, Start_verdi_buffer As Double
Dim Snitt_NV_emisjoner As Double
Dim Forventning_a, Forventning_l, Forventning_e, Forventning_bu, Forventning_lbu, Forventning_emi As Double
Dim Varians_a, Varians_l, Varians_e, Varians_bu, Varians_lbu, Varians_emi As Double
Dim Eierkonto As Double
Dim Eierkonto_snitt As Double
Dim Absolutt As Double
Dim sim As Long
Dim start_verdi_eierkonto As Double

'Angir variabler eksplisit
nsim = 10000
sim = 10000
Vola = 0.13
Volp = theta * Vola
Varp = Volp ^ 2
Vara = Vola ^ 2
Rf = 0.035
Rp = theta * ra + (1 - theta) * Rf
b = 0.2
Antobs = 21
Timestep = 1
Ek_krav = 0.2
At_snitt = 0
Lt_snitt = 0
Et_snitt = 0
Bt_snitt = 0
EQ = 0
Eierkonto_snitt = 0
```

```
For i = 1 To nsim

'Nødvendig forutsetning for å kunne kjøre første simulering
    Start_verdi_ek = 20
    Start_verdi_kunder = 80
    Start_verdi_buffer = 0
    start_verdi_eierkonto = 100
    Et = Start_verdi_ek
    Lt = Start_verdi_kunder
    Bt = Start_verdi_buffer
    At = Et + Lt + Bt
    alpha = 0.8
    NV_emisjoner = 0
    Lt_min1 = Lt
    Et_min1 = Et
    Bt_min1 = Bt
    At_min1 = Lt + Et + Bt
    Eierkonto = start_verdi_eierkonto - Et

    For j = 1 To Antobs - 1
    Restobs = Antobs - j
    Sqrt_restobs = Sqr(Restobs)

    'Simulerer ny verdi av assets
        Xj = Rnd
        N01 = Moro_NormSInv(Xj)
        At = At * Exp((Rp - (Varp / 2)) * Timestep + (Volp * Sqr(Timestep) * N01))
        Eierkonto = Eierkonto * Exp(Rf)


    'Reduserer verdi at Lt hvis egenkapitalen tapes
    If At <= Lt_min1 * Exp(g) Then
    Lt = At
    ElseIf Lt_min1 * Exp(g) < At And At <= Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1 * Exp(g) + Bt_min1 Then
    Lt = Lt_min1 * Exp(g)
    Else
    Lt = Lt_min1 * Exp(g) + Delta * alpha * (1 - b) * (At - (Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1 * Exp(g) + Bt_min1))
    End If

    'Buffer
    If At <= (Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1) Then
    Bt = 0
    ElseIf (Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1) < At And At <= (Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1 + Bt_min1) Then
    Bt = At - Lt_min1 * Exp(g) - Et_min1
            ElseIf (Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1 + Bt_min1) < At And At <= (Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1 * Exp(g) +
       Bt_min1)  Then
    Bt = Bt_min1
    Else
    Bt = Bt_min1 + Delta * alpha * b * (At - (Lt_min1 * Exp(g) + Et_min1 * Exp(g) + Bt_min1))
    End If

    'Beregner Egenkapital (residualt)
    Et = At - Lt - Bt


'Foretar nodvendige emisjoner
    'Hvis ek < 10%, kjør opp til 20%, hvis ek >30%, kjør ned til 20%
    If Et < At * (1 - alpha - 0.1) Or Et > At * (1 - alpha + 0.1) Then
    emisjon = (Ek_krav * (Lt + Bt) + (Ek_krav - 1) * Et) / (1 - Ek_krav)
    Et = Et + emisjon
    At = At + emisjon
    Eierkonto = Eierkonto – emisjon
```

```
    'Resetter neste emisjon
    emisjon = 0
    End If

   'Angir neste periodes inngående verdier
    Lt_min1 = Lt
    Et_min1 = Et
    Bt_min1 = Bt
    At_min1 = Lt + Bt + Et
Next j

Eirkonto = Eierkonto + Et
Eierkonto_snitt = (Eierkonto + Eierkonto_snitt * (i - 1)) / i
Next i

'Finner absoluttverdi
If Eierkonto_snitt * Exp(-Rf * (Antobs - 1)) > 100 Then
Absolutt = Eierkonto_snitt * Exp(-Rf * (Antobs - 1)) - 100
Else
Absolutt = 100 - Eierkonto_snitt * Exp(-Rf * (Antobs - 1))
End If

delta_avvik = Absolutt

End Function
```

```
Function Moro_NormSInv(u As Double) As Double[15]
'  Calculates the Normal Standard numbers given u, the associated uniform number (0, 1)
'  VBA version of the Moro's (1995) code in C
'  Option Base 1 is necessary to be declared before this function for vector elements positioning to work
   Dim c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9
   Dim X As Double
   Dim r As Double
   Dim a As Variant
   Dim b As Variant
   a = Array(2.50662823884, -18.61500062529, 41.39119773534, -25.44106049637)
   b = Array(-8.4735109309, 23.08336743743, -21.06224101826, 3.13082909833)
   c1 = 0.337475482272615
   c2 = 0.976169019091719
   c3 = 0.160797971491821
   c4 = 2.76438810333863E-02
   c5 = 3.8405729373609E-03
   c6 = 3.951896511919E-04
   c7 = 3.21767881768E-05
   c8 = 2.888167364E-07
   c9 = 3.960315187E-07
   X = u - 0.5

   If u = 0 Then
   u = 0.000000000001
   Else: End If


   If Abs(X) < 0.42 Then
      r = X ^ 2
      r = X * (((a(4) * r + a(3)) * r + a(2)) * r + a(1)) / ((((b(4) * r + b(3)) * r + b(2)) * r + b(1)) * r + 1)
   Else
      If X > 0 Then r = Log(-Log(1 - u))
      If X <= 0 Then r = Log(-Log(u))
      r = c1 + r * (c2 + r * (c3 + r * (c4 + r * (c5 + r * (c6 + r * (c7 + r * (c8 + r * c9)))))))
      If X <= 0 Then r = -r
   End If
   Moro_NormSInv = r
End Function
```

```
Function NormsDist(u As Double) As Double
NormsDist = Application.WorksheetFunction.NormsDist(u)
End Function
```

[15] Denne makrokoden er hentet fra Jackson og Staunton (2001)