

En sammenligning av prisingsmodeller for amerikanske opsjoner

Er formelen for amerikanske salgsopsjoner funnet?

Marte Johnsen Rogde

Veileder: Svein-Arne Persson

Masterutredning i hovedprofilen Finansiell Økonomi

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Denne utredningen er gjennomført som et ledd i siviløkonomutdanningen ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at høyskolen innestår for de metoder som er anvendt, de resultater som er fremkommet eller de konklusjoner som er trukket i arbeidet.

Sammendrag

Målet med oppgaven er å analysere prisingsmodellen Song-Ping Zhu (2006) publiserte i artikkelen «An exact and explicit solution for the valuation of American put options». Zhu presenterte her en implisitt og eksakt løsning på lukket form for prising av amerikanske salgsoptjoner. En slik løsning har tidligere ikke eksistert for amerikanske salgsoptjoner med gitt tid til forfall, og er således et gjennombrudd innen finansiell matematikk. Ved implementeringen av Zhus modell finner jeg at den er kompleks samt tidkrevende, og med tilgjengelig datakapasitet er det trolig ikke mulig å få noe tilfredsstillende resultat. Videre sammenligner jeg denne eksakte metoden med eksisterende approksimeringer for prisen på amerikanske salgsoptjoner. Jeg finner da at eksisterende metoder, med fokus på den binomiske metoden av Cox et. al (1979) og Bjerksund og Stenslands (2002) metode, er mer fordelaktige. Dette kommer av nøyaktigheten ved den førstnevnte og effektiviteten ved Bjerksund og Stenslands metode.

Forord

Denne utredningen utgjør siste del av masterstudiet i finansiell økonomi ved Norges Handelshøyskole. Oppgaven er skrevet i løpet av våren 2012.

Arbeidet med oppgaven har vært en interessant og fin opplevelse. Det har vært utfordrende og jeg har lært mye underveis.

Jeg ønsker å rette en stor takk til veileder min Svein-Arne Persson for hjelpen med å finne et interessant tema for oppgaven, og for støtte og diskusjoner underveis i arbeidsprosessen.

Oversikt

1.	INNLEDNING	7
2.	TEORI	8
2.1	OPSJONER - GENERELT	8
2.1.1	<i>Posisjon</i>	8
2.1.2	<i>Salgsopsjon</i>	9
2.1.3	<i>Kjøpsopsjon</i>	10
2.1.4	<i>«Moneyness»</i>	10
2.1.5	<i>Opsjonsverdi</i>	10
2.1.6	<i>Kontrollere risiko</i>	11
2.2	PRISING AV OPSJONER	11
2.2.1	<i>Put-call paritet</i>	12
2.2.2	<i>Arbitrasjemuligheter</i>	13
2.2.3	<i>Black Scholes prisingsmetode</i>	13
2.3	AMERIKANSKE OPSJONER	14
2.3.1	<i>Amerikansk kjøpsopsjon uten utbytte</i>	15
2.3.2	<i>Amerikansk kjøpsopsjon hvor underliggende betaler utbytte</i>	15
2.3.3	<i>Amerikanske salgsopsjoner</i>	15
2.3.4	<i>Den kritiske grenseverdien</i>	16
2.3.5	<i>Tidsverdi</i>	17
3.	SONG-PING ZHUS METODE: “AN EXACT AND EXPLICIT SOLUTION FOR THE VALUATION OF AMERICAN PUT OPTIONS”	18
3.1	BESKRIVELSE AV METODEN	18
3.1.1	<i>Black-Scholes differensialligningssystem for amerikanske opsjoner</i>	18
3.1.2	<i>Transformasjon ved hjelp av HAM</i>	20

3.1.3	<i>Introduksjon av Taylor-rekker for å løse ligningsystemet</i>	22
3.1.4	<i>Løsning av de nye partielle differensialligningsystemene</i>	24
3.1.5	<i>Fra opsjonsverdien til den kritiske grenseprisen</i>	26
3.2	NUMERISKE RESULTAT.....	27
3.2.1	<i>Regningen i Maple</i>	27
3.2.2	<i>Zhus resultater:</i>	32
3.2.3	<i>Prisingsmetode på lukket form</i>	34
4.	PRISINGSMODELLER FOR AMERIKANSKE OPSJONER	35
4.1	OVERSIKT	35
4.2	ANALYTISKE TILNÆRMINGER.....	35
4.2.1	<i>Introduksjon</i>	35
4.2.2	<i>Bjerksund og Stensland prisingsmodell (2002)</i>	36
4.2.3	<i>Kvadratisk Approksimeringsmetode</i>	38
4.2.4	<i>«The American Put Valued Analytically» - Geske and Johnson (1984)</i>	39
4.2.5	<i>«The randomization approach» - Carr et. al (1998)</i>	40
4.2.6	<i>«The capped option approximation» - Broadie and Detemple (1996)</i>	42
4.2.7	<i>«Interpolation method» - Johnson (1983)</i>	42
4.2.8	<i>Integralligningsmetoden - Ju (1998)</i>	43
4.3	NUMERISKE TILNÆRMINGER	44
4.3.1	<i>Introduksjon</i>	44
4.3.2	<i>Minste kvadraters metode - Longstaff og Schwartz (2001)</i>	45
4.3.3	<i>Den binomiske modellen - Cox et al. (1979)</i>	45
4.3.4	<i>Monte Carlo simulering for amerikanske opsjoner - Broadie and Glasserman (1997)</i>	46
5.	SAMMENLIGNING AV ULIKE PRISINGSMETODER	49

5.1	ANALYSERE ULIKE ANALYTISKE TILNÆRMINGSMETODER.....	49
5.1.1	<i>Numeriske sammenligninger</i>	52
5.1.2	<i>Diskusjon rundt de analytiske metoden</i>	55
5.2	NUMERISKE TILNÆRMINGSMETODER	56
5.2.1	<i>Numeriske sammenligninger</i>	58
5.2.2	<i>Diskusjon rundt de numeriske metodene</i>	59
5.3	SONG-PING ZHU (2006)	60
5.4	FELLES RESULTATER OG KONKLUSJON	61
6.	SAMMENDRAG OG KONKLUSJON	63
7.	APPENDIKS	64
7.1.1	<i>Fra ligningssett 1 til ligningssett 2</i>	64
7.1.2	<i>Fra ligningssett 2 til ligningssett 3</i>	64
7.1.3	<i>Fra ligningssett 4 til ligningssett 7:</i>	65
	LITTERATURLISTE	66

1. Innledning

I 2006 publiserte Song-Ping Zhu en prisingsmodell for amerikanske salgsoptjoner. Dette var den første prisingsmodellen med eksakt og eksplisitt løsning på lukket form for prisen på amerikanske salgsoptjoner. Dette har siden 1973, da Black og Scholes kom frem til en lukket løsning for europeiske optjoner, vært et sentralt uløst problem innen matematisk finans. Siden den gang har flere forskere prøvd å løse prisingsproblemet, noe som har bidratt til en rekke ulike analytiske og numeriske tilnærminger av problemet, men ingen har før klart det. Det er den ukjente optimale utøvelsesprisen som gjør prisingsproblemet for amerikanske optjoner mer komplekst enn for tilsvarende europeiske optjoner. Haug et. al (1996) har til og med påstått at det trolig er umulig å finne en eksakt prisingsmetode for amerikanske salgsoptjoner på lukket form. Artikkelen til Zhu er et gjennombrudd innen matematisk finans, men den har fått overraskende lite oppmerksomhet.

I denne oppgaven vil jeg vurdere Zhu (2006) sin modell opp mot eksisterende approksimeringer, både analytiske og numeriske. Hensikten er å finne nytten denne eksakte prisingsmetoden faktisk gir ut ifra et praktisk perspektiv.

Disposisjon

Jeg vil presentere relevant teori, hvor hovedfokuset vil være på amerikanske optjoner. Deretter vil jeg gi en grundig gjennomgang av prisingsmodellen til Zhu (2006) og presentere mine numeriske resultater. Videre vil jeg presentere ulike prisingsmodeller for amerikanske salgsoptjoner, herunder både analytiske og numeriske metoder. Avslutningsvis vil jeg sammenligne og analysere disse prisingsmodellene opp mot Zhus eksakte prisingsmetode.

2. Teori

Hensikten med kapittelet er å gi en innføring i opsjonsteori som vil være relevant for den videre analysen. Jeg vil her begynne med en generell forklaring av opsjoner og viktige betegnelse i den forbindelse. Deretter vil jeg gå noe inn på prising av opsjoner og i denne anledning se på Black og Scholes (1973) prisingsmodell for europeiske opsjoner. Denne modellen er svært viktig innenfor opsjonsteori og flere av de amerikanske prisingsmodellene tar utgangspunkt i denne og antakelsene bak den. Avslutningsvis vil jeg introdusere i amerikanske opsjoner, da dette vil være fokus videre i oppgaven.

2.1 Opsjoner - Generelt

Uttrykket opsjon kommer fra det engelske ordet «option» som betyr mulighet eller valg. Enkelt forklart kan man si at en opsjon gir opsjonshaveren en fremtidig valgmulighet. Fra Black og Scholes (1973) defineres en opsjon som følger: «En opsjon er en kontrakt som gir kjøperen en rett, men ikke en plikt, til å kjøpe (eller selge) et underliggende aktivum innenfor forhåndsbestemte rammer knyttet til blant annet pris og tidspunkt for utøvelse».

Det skilles mellom en rekke ulike opsjonstyper, hvorav de mest vanlige er europeiske- og amerikanske opsjoner. En europeisk opsjon kan bare løses inn ved forfall, mens en holder av en amerikansk opsjon kan velge å utøve retten sin når som helst i levetiden til opsjonen.

Når man inngår opsjonsavtalen betaler kjøperen opsjonsutstederen en sum som betegnes som prisen på opsjonen, dette gjøres uavhengig om opsjonen blir utøvet eller ikke. Man betaler i prinsippet utstederen en pris for retten til å velge om man ønsker å kjøpe eller selge det underliggende aktivum. For utsteder er det gunstig hvis opsjonen ikke blir utøvet, da tjener vedkommende opsjonsprisen. Hvis opsjonen derimot utøves, må utsteder møte plikten sin og selge (eller kjøpe) det underliggende aktivum til forhåndsbestemt pris. Ved inngåelse avtales også opsjonens løpetid og utøvelsespris.

2.1.1 Posisjon

Man kan ha en lang posisjon (kjøp) eller en kort posisjon (salg) i opsjonen. En lang posisjon i opsjonen gir en rett, men ikke en plikt til å kjøpe (eller selge) det underliggende aktivum.

Utstederen av opsjonen, derimot, har en plikt ovenfor kjøperen av opsjonen og må møte denne plikten hvis kjøperen ønsker å løse inn opsjonen.

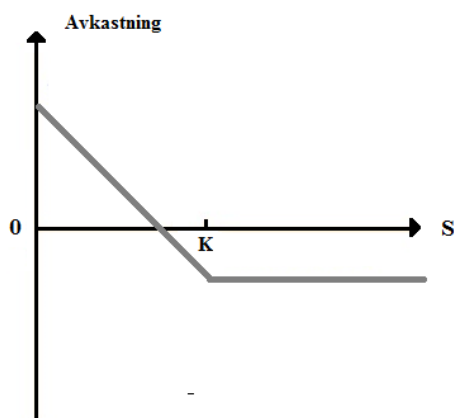
2.1.2 Salgsopsjon

En salgsopsjon gir kjøper en rett til å *selge* det underliggende aktivum til en avtalt utøvelsespris. Ved å kjøpe en salgsopsjon satser man på at prisen på det underliggende aktivum skal gå ned, slik at man ved forfall kan selge det underliggende aktivum til en pris høyere enn prisen man vil få i markedet. Man kan altså ved forfall gå inn i markedet å kjøpe det underliggende aktivum, for deretter å selge det til opsjonsutsteder til en høyere pris.

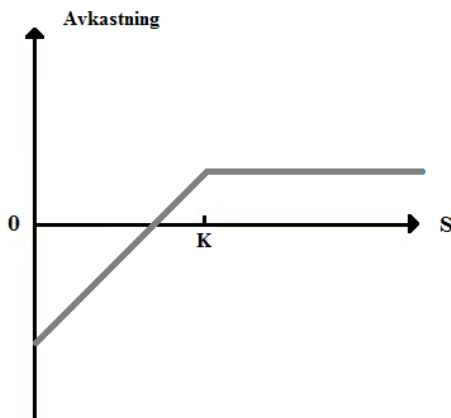
Ved forfall vil avkastningen være: $\max(0, K - S)$

hvor K og S er henholdsvis utøvelseskurs og prisen på underliggende aktivum ved forfallstidspunktet. Hvis prisen på det underliggende er høyere enn avtalt utøvelsespris vil avkastningen for kjøperen av opsjonen være 0 , derimot hvis prisen på det underliggende aktivum er lavere enn utøvelsesprisen vil avkastningen være $K-S$. Figur 1 illustrerer avkastningen ved forfall for en lang og en kort posisjon i en salgsopsjon.

Salgsopsjon - Lang posisjon



Salgsopsjon - Kort posisjon

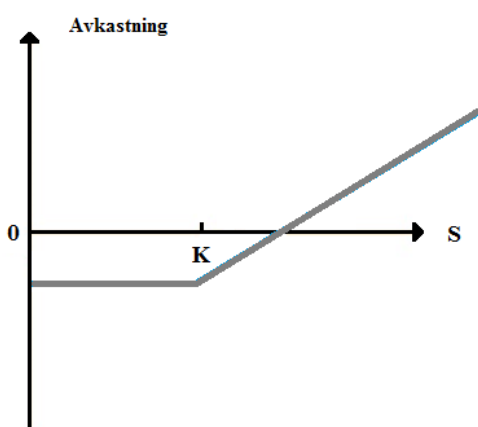


Figur 1 Avkastningen ved forfall for en lang og en kort posisjon i en salgsopsjon.

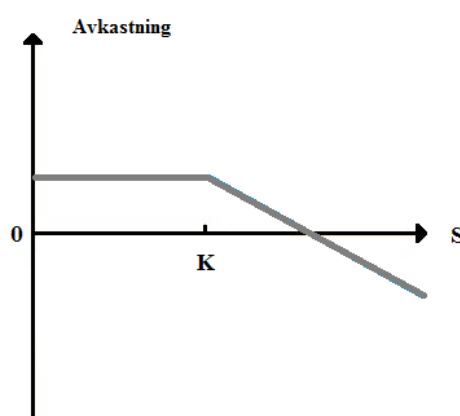
2.1.3 Kjøpsopsjon

En kjøpsopsjon gir kjøperen en rett, men ikke en plikt, til å *kjøpe* det underliggende aktivum til en avtalt pris. I dette tilfellet ønsker man at prisen på underliggende øker. På denne måten kan man kjøpe det underliggende aktivum til utøvelsesprisen og selge det i markedet til en høyere pris. Ved forfall vil avkastningen på denne posisjonen være: $\max(0, S - K)$. Figur 2 illustrerer avkastningen ved forfall for en lang og en kort posisjon i en kjøpsopsjon.

Kjøpsopsjon - Lang posisjon



Kjøpsopsjon - Kort posisjon



Figur 2 Avkastningen ved forfall for en lang og en kort posisjon i en kjøpsopsjon.

2.1.4 «Moneyness»

«Moneyness» er en term som beskriver sammenhengen mellom underliggende aktivum og utøvelseskursen til opsjonen. Man sier at en salgsopsjon er «in the money» hvis utøvelseskursen er høyere enn prisen på underliggende. Hvis utøvelseskursen derimot er lavere er opsjonen «out of the money». Opsjoner er «at the money» hvis prisen på underliggende er lik utøvelseskursen. (Wikipedia 2012a)

2.1.5 Opsjonsverdi

Man kan dele verdien av opsjonen inn i realverdi og tidsverdi. Realverdien betegner differansen mellom prisen på det underliggende aktivum og utøvelsesprisen, det vil si verdien man oppnår ved å løse inn opsjonen umiddelbart. En salgsopsjon vil ha en positiv realverdi hvis prisen på underliggende er lavere enn utøvelsesprisen. Tidsverdien svarer til forventningene til prisutviklingen for det underliggende aktivum frem til forfall. Tidsverdien

vil være høyere, jo lenger tid det er igjen til forfall. Dette kommer av at lang tid indikerer høyere grad av usikkerhet (Haug 2007). Sammenhengen mellom tidsverdi, realverdi og opsjonsverdi kan illustreres ved ligningen under.

$$\text{Opsjonsverdi} = \text{Realverdi} + \text{Tidsverdi}$$

Realverdien av opsjonen henger direkte sammen med «moneyness». Hvis en opsjon er «out of the money» eller «at the money» vil den ha en realverdi lik null. Da vil hele opsjonsverdien bestå av tidsverdien. Hvis opsjonen derimot er «in the money» vil den ha en positiv realverdi.

2.1.6 Kontrollere risiko

I tillegg til at opsjoner kan brukes for spekulasjon eller som et investeringsobjekt er opsjoner sentralt i risikostyring. Man kan se fra både figur 1 og figur 2 at nedsiden (tapsiden) ved en lang posisjon opsjonene er begrenset til den initiale investeringen (opsjonsprisen). For en kjøpsopsjon vil oppsiden være ubegrenset, siden det i prinsippet ikke er en grense for hvor mye det underliggende aktivum kan stige i verdi. For salgsoptsjoner er bilde noe annerledes, dette kommer av at man her har et tak for hvor høy verdien kan bli. Prisen på underliggende kan ikke synke for alltid, maksimal gevinst for kjøper vil være når prisen på underliggende er null. Avkastningen vil da være lik utøvelsesprisen. Det er også mulig å kombinere ulike posisjoner i opsjoner og på denne måten velge ulike avkastningsprofiler.

2.2 Prising av opsjoner

Det er flere faktorer som har innvirkning på opsjonsprisen; prisene på og dividendene til det underliggende aktivum, utøvelsespris, tid til forfall, risikofri rente og volatiliteten. Nøkkelfaktoren for prisen på opsjonen vil være prisen på underliggende og forventningene for dens prisutvikling i opsjonens løpetid. Gitt at alle andre faktorer er like, vil en høyere pris på underliggende føre til en lavere pris på en salgsoptsjon. Utøvelsesprisen har også stor påvirkning på prisen. For en salgsoptsjon vil en utøvelseskurs som er høyere enn prisen på underliggende gi en høyere opsjonspris enn hvis utøvelsesprisen er lavere. Opsjonsprisen er direkte påvirket av tid til forfall. Lang tid indikerer høyere grad av usikkerhet. Jo lenger tid det er til forfall, jo høyere tidsverdi vil opsjonen ha og som vi så tidligere vil dette igjen direkte påvirke opsjonsverdien. Kostnadene av å holde opsjonen påvirkes av den risikofrie

renten. Jo høyere rente, dess høyere er prisen på en kjøpsopsjon og jo lavere er prisen av en salgsopsjon. Det motsatte gjelder for lav rente, det vil si lavere pris på kjøpsopsjonen og høyere pris på salgsopsjonen. Høyere volatilitet gitt at de andre faktorene er uendret, vil føre til en høyere pris på opsjonen (Geske og Johnsen 1984).

Notasjonene som er benyttet for variablene i denne oppgaven følger fra tabell 1.

Variabel	Betydning
P_t	Prisen på en amerikansk salgsopsjon ved tidspunkt t
C_t	Prisen på en amerikansk kjøpsopsjon ved tidspunkt t
p_t	Prisen på en europeisk salgsopsjon ved tidspunkt t
c_t	Prisen på en europeisk kjøpsopsjon ved tidspunkt t
S_t	Prisen på underliggende aktivum ved tidspunkt t
K	Opsjonens utøvelsespris
t	Nåværende tidspunkt
T	Opsjonens forfallstidspunkt
r_f	Risikofri rente
σ	Volatiliteten til det underliggende aktivum
d	Dividenden til underliggende aktivum (antas lik 0)

Tabell 1: Notasjon for ulike variabler

2.2.1 Put-call paritet

Put-call paritet sier at det er en sammenheng mellom prisen på en europeisk salgsopsjon og en tilsvarende kjøpsopsjon gitt ved ligningen; $p = c + Ke^{-rT} - S_0$

Hvor p er prisen på salgsoptionen på tidspunkt 0, c er prisen på en tilsvarende kjøpsopjon på tidspunkt 0, K er opsjonenes utøvelsespris og S_0 er pris på det underliggende aktivum på tidspunkt 0.

Fra sammenhengen fremgår det at man kan lage en syntetisk salgsoption ved hjelp av en portefølje bestående av en lang posisjon i en tilsvarende kjøpsopjon, kort posisjon i opsjonenes underliggende aksje og en risikofri plassering av et innskudd lik utøvelseskursen for opsjonene.

For amerikanske opsjoner derimot, holder ikke denne pariteten. Men både McDonald og Schroder (1990) og Bjerksund og Stensland (1993) har kommet frem til en transformasjon som også gjelder for amerikanske opsjoner. Jeg vil komme nærmere inn på den sistnevnte transformasjonen senere i oppgaven.

2.2.2 Arbitrasjemuligheter

Når det gjelder prising av finansielle instrumenter er en grunnleggende antakelse at det skal være fravær av arbitrasjemuligheter i økonomien. Arbitrasje fører til at man kan oppnå en risikofri gevinst ved å utnytte prisskjevheter på verdipapirer. En arbitrasjemulighet er for eksempel en mulighet til å kjøpe et derivat til en lav pris for deretter umiddelbart å selge det i et annet marked til en høyere pris. Etter dette prinsippet kan ikke en posisjon hvor nettoinvesteringen er på 0 kr. gi positiv avkastning for alle realiserbare utfall.

2.2.3 Black Scholes prisingsmetode

For prising av europeiske opsjoner gir Black og Scholes (1973) en analytisk løsning på lukket form. Flere av prisingsmetodene for amerikanske salgsoptioner tar utgangspunkt i denne modellen og antakelsene den tar. Det er derfor av interesse å se noe nærmere på denne modellen.

I prisingsmodellen tar Black og Scholes (1973) en rekke antakelser. Blant annet antar de at den kortsiktige risikofri rente er kjent og konstant over opsjonens løpetid, at prisen på underliggende følger en log-normal fordeling med konstant avkastning og varians, at det er verken transaksjonskostnader eller skatter i økonomien, at kostnadsfritt shortsalg er lovlig og at man kan låne til den risikofrie renten.

En økonomi som følger disse betingelsene kan sies å være en «*Black Scholes økonomi*».

Under disse antakelsene vil prisen på opsjonen bare avhenge av aksjeprisen, tiden, risikofri rente og volatiliteten. Dette gjør at det er mulig å lage en sikret posisjon i aksjer og opsjoner slik at verdien av posisjonen ikke vil avhenge av utviklingen i det underliggende aktivum. Risikoen til porteføljen vil da være null, gitt at man justerer posisjonene for alle prisendringer i det underliggende aktivum. Ved hjelp av dette sikringsargumentet, utledet Black og Scholes (1973) den velkjente partielle differensialligningen:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

hvor V er prisen på opsjonen og tilsvarende løsningen på problemet. Her er $\frac{\partial V}{\partial t}$ førsteordens partielle deriverte av opsjonsverdien med hensyn på tiden, $\frac{\partial V}{\partial S}$ og $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ er henholdsvis førsteordens og annenordens partielle deriverte av opsjonsverdien, med hensyn på prisen på det underliggende aktivum.

Ved å introdusere nye variabelnotasjoner transformerte de denne ligningen til varmeledningsligningen (kjent fra fysikken), som det igjen finnes standardiserte metoder for å løse. Jeg vil ikke her gå videre inn på selve transformasjonen. Ved å løse varmeledningsligningen, med den grensebetingelsen $c(S,T)=\max(S-K,0)$, fikk de et uttrykket for prisen på en europeisk kjøpsoppsjon. Det kan skrives som:

$$c(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\text{hvor } d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ og } d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

I ligningen over er $N(d)$ den kumulative normalfordelingsfunksjonen. $c(S,t)$ representerer prisen på kjøpsoppsjonen på tidspunkt t , for en opsjon med pris på underliggende S og utøvelsespris K .

2.3 Amerikanske opsjoner

Man skiller mellom flere ulike typer opsjoner, blant annet europeiske, amerikanske, asiatiske, barriere og lookback opsjoner, hvorav europeiske og amerikanske opsjoner er de mest omsatte kontraktene. Videre i oppgaven vil fokuset være på den amerikanske typen.

Som nevnt over kan eieren av en amerikansk opsjon løse inn opsjonen når som helst i levetiden til opsjonen.

2.3.1 Amerikansk kjøpsopsjon uten utbytte

Det er flere grunner for at en amerikansk kjøpsopsjon uten dividende aldri vil bli utøvet før forfall. For det første; når verdien på det underliggende aktivum er over utøvelsesprisen vil en holder av en kjøpsopsjon ta del i enhver økning i prisen på underliggende. Men opsjonen har, i motsetning til det underliggende, fordelene av å være beskyttet mot risikoen for prisreduksjon. I tillegg, på grunn av tidsverdien koster det mer å utøve opsjonen i dag til en gitt pris K enn i fremtiden til en gitt pris K . Dette gjør at prisen på amerikanske kjøpsopsjoner uten dividende ikke skal være forskjellig fra prisen på en tilsvarende europeisk opsjon. Dermed vil amerikanske kjøpsopsjoner kunne prises på samme måte som tilsvarende europeiske opsjoner, noe som betyr at Black Scholes vil gi en lukket analytisk løsning.

2.3.2 Amerikansk kjøpsopsjon hvor underliggende betaler utbytte

For en amerikansk kjøpsopsjon hvor underliggende betaler dividendeutbetalinger kan det derimot i noen tilfeller lønne seg med tidlig utøvelse av opsjonen. Ved å utøve opsjonen kan eieren få dividendeutbetalingene han ellers ikke hadde hatt rett på. Dette betyr at før en dividendeutbetaling må den amerikanske kjøpsopsjonen inkludere en premie basert på en fordeling av en forventet utbetaling. Dette fører til at en amerikansk kjøpsopsjon med dividendeutbetalinger har en høyere verdi enn en tilsvarende europeisk opsjon.

2.3.3 Amerikanske salgsopsjoner

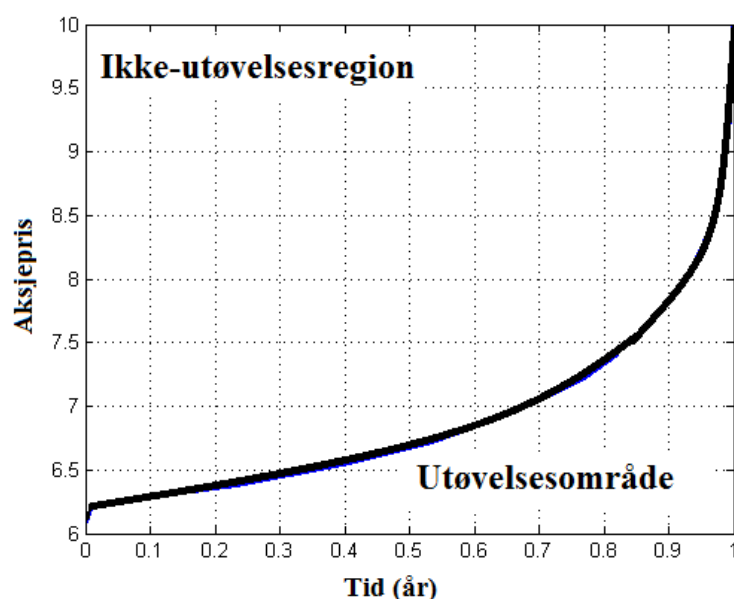
For salgsopsjoner kan man ha forskjellig verdi på amerikanske og europeiske opsjoner til og med i tilfellet hvor det underliggende aktivum ikke betaler dividende. Dette kommer av «taket» for verdien til salgsopsjonen, grunnet det faktumet at det underliggende aktivum ikke kan ha negativ verdi. For en «deep in the money» salgsopsjon kan det være optimalt å utøve retten før forfall for så å tjene risikofri rente på profitten. Dette gjør at prisen på en amerikansk salgsopsjon må reflektere denne potensielle profitten som man kan tjene ved å utøve retten før forfall. Det vil altså være en kritisk grensepris på det underliggende aktivum, og hvis prisen når denne grensen vil det lønne seg å umiddelbart utøve opsjonen. Wilmott et. al (1995) belyste at hvis ikke opsjonen blir utøvet når prisen på det underliggende

aktivum når den kritiske grenseprisen vil prinsippet «ingen arbitrasje» være brutt. Videre i oppgaven vil fokuset være på amerikanske salgsoptjoner hvor det underliggende ikke betaler utbytte.

2.3.4 Den kritiske grenseverdien

For amerikanske salgsoptjoner finnes det som nevnt ovenfor en kritisk pris på det underliggende aktivum. Hvis prisen på det underliggende aktivum er lik eller lavere enn denne kritiske prisen, vil det lønne seg å umiddelbart løse inn opsjonen. Det er denne ukjente kritiske grenseprisen som gjør det vanskeligere å prisse amerikanske optjoner enn tilsvarende europeiske. Ved ethvert tidspunkt må en holder av en amerikansk opsjon vurdere om det vil lønne seg å løse inn opsjonen eller om verdien av å beholde den videre er større. Handlingene til opsjonsholder vil altså påvirke verdien av opsjonen. Videre i oppgaven vil betegnelsen for denne kritiske verdien på underliggende være «den kritiske grenseverdien» eller «den optimale utøvelsesgrensen».

Med utgangspunkt i en metode opprinnelig brukt for issmeltingsproblem viste Erik Ekstrøm (2004) at den optimale utøvelsesgrensen for amerikanske salgsoptjoner i en standard «Black Scholes økonomi» er en konveks og økende funksjon av tiden. Ved forfall vil den kritiske grensen være lik utøvelseskursen, og i tiden før forfall vil den kritiske grensen konvergere mot denne verdien. Figur 3 illustrerer optimal utøvelsesgrense i forhold til tiden.



Figur 3 Optimal utøvelsesgrens i forhold til tiden

Fra figur 3 kan man se at den optimale utøvelsesgrensen stiger mye i tiden før forfall. Denne bevegelsen refereres av Chen og Chadam (2005) som funksjonens singulære oppførsel. Jeg vil senere i oppgaven komme nærmere inn på konsekvenser av denne veldige bevegelsen i den kritiske grenseprisen nær forfall.

2.3.5 Tidsverdi

Det lønner seg å løse inn en amerikansk salgsoptjon før forfall hvis opsjonen har en negativ tidsverdi. Dette kan være tilfellet hvis opsjoner er «deep in the money». Fra sammenhengen over, hvor opsjonens verdi ble beskrevet som en kombinasjon av tidsverdi og realverdi, fremgår det at en negativ tidsverdi fører til at realverdien er høyere enn verdien av opsjonen. Videre kan man se at hvis verdien på underliggende er høyere enn innløsningskursen vil salgsoptjonen ha en positiv tidsverdi, mens realverdien av opsjonen vil være lik null. Tidsverdien kan følgelig betraktes som verdien av ikke å innløse opsjonen ved nåværende tidspunkt.

3. Song-Ping Zhus metode: “An exact and explicit solution for the valuation of American put options”

3.1 Beskrivelse av metoden

Prisingsmodellen som Zhu publiserte i 2006 er en eksakt og eksplisitt løsning av den velkjente Black-Scholes ligningen for amerikanske salgsoptjoner. En slik lukket analytisk løsning eksisterte ikke tidligere for prising av amerikanske salgsoptjoner med en gitt tid til forfall. Zhu finner her den optimale grenseprisen ($S_f(\tau)$) for tidlig utøvelse ved hjelp av risikofri rente, volatiliteten og tid til forfall. Metoden er basert på det matematiske verktøyet homotopi analyse metode (HAM) og løsningen er skrevet i form av en uendelig Taylorrekke. Zhu viser at rundt 30 ledd er passende for å oppnå en konvergent numerisk løsning.

3.1.1 Black-Scholes differensialligningssystem for amerikanske optjoner

Zhus modell tar utgangspunkt i Black-Scholes ligningen med grensebetingelser som gjelder for amerikanske salgsoptjoner.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} V(S, t) \right) + rS \left(\frac{\partial}{\partial S} V(S, t) \right) - rV(S, t) &= 0, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) &= 0, \\ V(S_f(t), t) &= X - S_f(t), \\ \frac{\partial}{\partial S} V(S_f(t), t) &= -1, \\ V(S, T) &= \max\{X - S, 0\}, \end{aligned} \tag{1}$$

hvor $V(S, t)$ er verdien av den amerikanske optjonen som en funksjon av prisen på underliggende aktivum, S , og tiden, t . X er optjonens utøvelsespris.

Den første sidebetingelsen sier at salgsoptjonen blir verdiløs når verdien på underliggende aktivum går mot uendelig. Denne betingelsen gjelder også for europeiske salgsoptjoner. Som nevnt tidligere er forskjellen mellom europeiske optjoner og tilsvarende amerikanske at man ved sistnevnte har en kritisk grense for prisen på underliggende aktivum. Hvis underliggende synker under denne grensen vil det lønne seg å løse inn optjonen umiddelbart.

Denne forskjellen blir introdusert i andre og tredje betingelse. Den andre betingelsen sier at verdien på opsjonen er lik dens egenverdi når den kritiske prisen på underliggende er nådd og nummer tre viser til sammenhengen mellom opsjonsprisen og avkastningsfunksjonen når $S=S_f(\tau)$. Det er disse betingelsene som gjør prisingsprosessen for amerikanske opsjoner mer kompleks en for tilsvarende europeiske opsjoner. Konsekvensen er et komplekst problem hvor den kritiske utøvelsesgrensene er en del av løsningen på problemet, dette vil videre refereres til som «the free boundary» problemet. Man kan se at den ledende partielle differensialligningen i systemet er lineær i forhold til den ukjente funksjonen, $V(x,\tau)$, men det er dens ukjente grense som fører til at systemet blir ikke-lineært.

Den siste grensebetingelsen sier at ved forfall er verdien av opsjonen enten null eller lik opsjonens realverdi. Også denne betingelsen er den samme for tilsvarende europeiske opsjoner. Man kan merke seg at ved forfall er den kritiske grenseprisen lik utøvelseskursen.

For å løse differensialsystemet mest mulig effektivt introduserer Zhu de dimensjonsløse variablene.

$$V' = \frac{V}{X} \quad S' = \frac{S}{X} \quad \tau' = \tau \cdot \frac{\sigma}{2} = \frac{(T-t) \cdot \sigma}{2} .$$

Videre i artikkelen brukes disse dimensjonsløse variablene, men da uten apostrofene. Det nye partielle differensialsystemet blir da (se appendiks for utregning):

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} V(S, \tau) + S^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial S^2} V(S, \tau) + \gamma \cdot S \cdot \frac{\partial}{\partial S} V(S, \tau) - \gamma \cdot V(S, \tau) = 0 ,$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V(S, \tau) = 0 ,$$

$$V(S_f(\tau), \tau) = 1 - S_f(\tau) , \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial S} V(S_f(\tau), \tau) = -1 ,$$

$$V(S, 0) = \max\{X - S, 0\} ,$$

hvor $\gamma = 2r/\sigma^2$.

Man får da et nytt ligningssett med de nye sidebetingelsene. Sidebetingelse $V(S,0)=\max(1-S,0)$ kan forenkles noe. Ved forfall er den kritiske utøvelsesgrensen lik utøvelseskursen ($S_f=X=1$). Hvis aksjeprisen er høyere enn utøvelseskursen ved forfall vil opsjonen være

verdiløs. Hvis aksjekursen derimot er lavere enn utøvelsesprisen, og dermed også lavere enn den kritiske utøvelsesgrensen, vil man allerede ha utøvet opsjonen før forfall. Man vil umiddelbart løse inn opsjonen idet verdien av det underliggende aktivum treffer den kritiske grensen, som innebærer at ved forfall vil ikke prisen på underliggende kunne være lavere enn utøvelseskursen. Dette betyr at verdien vil være negativ hvis aksjekursen er over utøvelseskurs og null hvis aksjekursen ved forfall er lik den kritiske grensen. Betingelsen kan derfor forkortes til $V(S,0)=0$. Videre kan man se at ved å introdusere tiden til forfall τ som forskjellen mellom forfallstidspunktet T og nåværende tid t vil denne betingelsen omformes til en initialbetingelse i det nye ligningssettet.

Neste steg er å introdusere transformasjonen $x := \ln\left(\frac{S}{S_f(\tau)}\right)$. Denne transformasjonen ble først foreslått av Landau (1950) for å transformere den ukjente og tidsavhengige grensen om til en fast linje (Wu og Kwok 1997). Etter en slik Landau transformasjon blir differensialsystemet transformert om til (se appendiks for utregning):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} V(x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, \tau) - (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial x} V(x, \tau) + \gamma V(x, \tau) = \frac{1}{S_f(\tau)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} S_f(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial x} V(x, \tau)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, \tau) = 0 ,$$

$$V(0, \tau) = 1 - S_f(\tau) , \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V(0, \tau) = -S_f(\tau) ,$$

$$V(x, 0) = 0 .$$

3.1.2 Transformasjon ved hjelp av HAM

Etter omformingen over har man fjernet problemet med at den kritiske grenseprisen selv er den del av løsningen, og man står igjen med et ikke lineært system med faste grensebetingelser. Et slikt problem kan løses ved hjelp av det matematiske verktøyet HAM, for nærmere forklaring se (Wall 1972).

Ved hjelp av HAM introduseres to nye ukjente funksjoner; $\bar{V}(x, \tau, p)$ og $\bar{S}_f(\tau, p)$ som oppfyller følgende differensialsystem

$$(1 - p) \cdot \mathcal{L}[\bar{V}(x, \tau, p) - \bar{V}_0(x, \tau)] = -p \cdot \{ \mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] \} \quad \bar{V}(x, 0, p) = (1 - p) \cdot \bar{V}_0(x, \tau) ,$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(0, \tau, p) + \bar{S}_f(\tau, p) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(0, \tau, p) + \bar{S}_f(\tau, p) &= (1-p) \cdot \left[1 + \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}_0(0, \tau) - \bar{V}_0(0, \tau) \right], \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}(x, \tau, p) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

hvor $v_0(x, \tau)$ er en initial verdi, som man fritt kan velge og

$$\mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] = \mathcal{L}(\bar{V}) - \frac{1}{\bar{S}_f(\tau, p)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{S}_f(\tau, p) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(x, \tau, p), \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial x} \gamma. \quad (4.2)$$

Ved å sette p lik 0 og 1 oppnås to ulike differensialsystem:

Ved $p=0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\bar{V}(x, \tau, 0)] &= \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)], \\ \bar{V}(x, 0, 0) &= \bar{V}_0(x, 0), \\ \bar{V}(0, \tau, 0) + \bar{S}_f(\tau, 0) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(0, \tau, 0) + \bar{S}_f(\tau, 0) &= 1 + \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}_0(0, \tau) - \bar{V}_0(0, \tau), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}(x, \tau, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Ved $p=1$:

Den ledende ligningen blir $\mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] = 0$, men ved hjelp av ligning (4.2) kan denne ligningen skrives noe om og derved oppnås differensialsystemet under:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{V}(x, \tau, p)) &= \frac{1}{\bar{S}_f(\tau, 1)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{S}_f(\tau, 1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(x, \tau, 1), \\ \bar{V}(x, 0, 1) &= 0, \\ \bar{V}(0, \tau, 1) + \bar{S}_f(\tau, 1) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(0, \tau, 1) + \bar{S}_f(\tau, 1) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}(x, \tau, 1) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ligningssett (5) kan løses uten å foreta utregninger. Det fremgår fra ligningssystemet at den ukjente $V(x, \tau, 0)$, må være lik den initiale tilstanden $V_0(x, \tau)$. Dette kommer av at to funksjoner er like hvis den deriverte av funksjonene er like i tillegg til at de har samme startverdi. Ut ifra de to første ligningene i ligningssett (5) ser man at dette holder for disse funksjonene. Den ledende ligningen i systemet sier at den deriverte av funksjonene er den

samme, i tillegg fremkommer det av den første grensebetingelsen at de to funksjonene har den samme initialverdien (verdi ved $\tau=0$). Løsningen av systemet blir da;

$$v_0(x, \tau) = \bar{V}(x, \tau, 0) \text{ og } 1 - v_0(0, \tau) = \bar{S}(\tau, 0) .$$

Man kan fritt velge denne initiale verdien, $v_0(x, \tau)$, og et naturlig valg er en tilsvarende europeisk salgsoption. Det eneste kravet for denne initiale verdien er at den må tilfredsstille betingelsen $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, \tau) \rightarrow 0$. Når prisen på underliggende går mot uendelig vil verdien av en europeisk salgsoption gå mot null. Etter å ha valgt den initiale verdien, inngår bare kjente verdier i ligningssystemet. Når p settes til 1 oppnås et ligningssystem som er identisk til ligningssystem (3), som er differensialsystemet som må løses for å finne verdien av den amerikanske salgsoptionen.

3.1.3 Introduksjon av Taylor-rekker for å løse ligningssystemet

Ved hjelp av en Taylor-rekke kan man skrive en funksjon som en uendelig rekke, hvor leddene i rekken er definert ved den deriverte av funksjonen og hvor alle de deriverte har samme funksjonsargument. En versjon av en Taylor-rekke er Maclaurinrekke, hvor dette funksjonsargumentet er satt lik null (wikipedia 2012b). Det er dette som er tilfellet for Taylor-rekken i Zhus prisingsmodell. Det behøves sjelden mange ledd i en Taylor-rekke for å få en god tilnærming til funksjonen. I Zhus prisingsmetode trengs det typisk 30 ledd for at man får en god numerisk tilnærming.

Når man har et punkt og de deriverte i dette punktet, kan et neste punkt i funksjonen finnes ved en Taylor-rekke. Når man har verdien og den deriverte i punktet $p=0$, kan man finne funksjonen for alle p .

$$\bar{V}(x, \tau, 1) = \bar{V}(x, \tau, 0) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial p} \bar{V}(x, \tau, 0) \right)}{1!} \cdot 1 + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} \bar{V}(x, \tau, 0) \right)}{2!} \cdot 1^2 + \dots \quad (6.1)$$

$$\bar{S}_f(\tau, 1) = \bar{S}_f(\tau, 0) + \frac{\frac{\partial}{\partial p} \bar{S}_f(\tau, 0)}{1!} \cdot 1 + \frac{\frac{\partial^2}{\partial p^2} \bar{S}_f(\tau, 0)}{2!} \cdot 1^2 \dots \quad (6.2)$$

Det første leddet på høyresiden er kjent, og er en tilsvarende europeisk option som den amerikanske optionen man ønsker å prisen. Men her mangler alle ledd fra og med ledd 2 til og med ledd 30 for å finne løsningen den amerikanske optionsverdien.

For å finne koeffisientene i Taylorrekken finner Zhu et sett av ledende partielle differensialligninger og passende grense- og initiale betingelser. Dette gjøres ved å derivere hver ligning i systemet som fremkom ved HAM-transformasjonen n antall ganger og deretter sette $p=0$. Dette gir n ulike ligningssystem. Disse er presentert under, hvor det første er for n lik 1 og det andre for n større enn 1. Det første ligningssystemet under er den førstederiverte av ligningssystem (4) vurdert for p lik null, løsningen tilsvarer telleren til andre ledd i ligning (6.1) (se appendiks for utregning):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\bar{V}_1(x, \tau)] &= \tilde{\mathcal{A}}(x, \tau, 0) - \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)] , \\ \bar{V}_1(x, 0) &= -\bar{V}_0(x, 0) , \\ \bar{V}_1(0, \tau) + \bar{S}_1(\tau) &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}_1(0, \tau) + \bar{S}_1(\tau) &= \bar{V}_0(0, \tau) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}_0(0, \tau) - 1 , \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}_1(x, \tau) &= 0 .\end{aligned}\tag{7}$$

$$\mathcal{L}[\bar{V}_n(x, \tau)] = n \cdot \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\mathcal{A}}(x, \tau, 0) \Big|_{p=0} ,$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_n(x, 0) &= 0 , \\ \bar{V}_n(0, \tau) + \bar{S}_n(\tau) &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}_n(0, \tau) + \bar{S}_n(\tau) &= 0 , \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}_n(x, \tau) &= 0 .\end{aligned}\tag{8}$$

$$\text{hvor } \bar{S}_n(\tau) = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \bar{S}(\tau, p) \Big|_{p=0} \quad \text{og} \quad \bar{V}_n(x, \tau) = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \bar{V}(x, \tau, p) \Big|_{p=0}$$

Ved å velge europeisk salgsoption som den initiale verdien blir ligningssystemet for $n=1$ noe forenklet. Andre ledd på høyre side i den ledende ligningen faller bort i tillegg til at andre ligning i systemet kan settes lik null. Andre ledd i den ledende ligningen tilsvarer den opprinnelige Black Scholes differensialligningen, og denne er lik null for europeiske opsjoner. Videre fant man ovenfor at ved forfall vil den europeiske opsjonen tilfredsstillende $v_0(x,0)=0$. Man kan derfor konkludere med at den andre ligningen i systemet kan settes lik null.

Dette bidrar til at system (7) blir noe mindre komplekst og mer likt ligningssystem (8).

3.1.4 Løsning av de nye partielle differensialligningssystemene

Ligning (9) under representerer løsningen av disse partielle differensialsystemene, og ved å substituere $U_n(x, \tau)$ inn i ligning (10) fremkommer et eksplisitt uttrykk for hver $V_n(x, \tau)$.

$$\begin{aligned}
 U_n(x, \tau) = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{\frac{(\gamma-1)x}{2}} \int_{-\frac{x}{2}\sqrt{\tau}}^{\frac{x}{2}\sqrt{\tau}} \Psi_n(2\sqrt{\tau}\xi - x) \cdot e^{(\gamma-1)\sqrt{\tau}\xi - \xi^2} \right. \\
 & d\xi + \int_{\frac{x}{2}\sqrt{\tau}}^{\infty} \left(e^{\frac{(\gamma-1)x}{2}} \Psi_n(2\sqrt{\tau}\xi - x) + e^{-\frac{(\gamma-1)x}{2}} \Psi_n(2\sqrt{\tau}\xi \right. \\
 & \left. \left. - x) \right) e^{(\gamma-1)\sqrt{\tau}\xi - \xi^2} d\xi \right) - (\gamma+1)\sqrt{\tau} e^{-\frac{(\gamma-1)x}{2} + \frac{(\gamma+1)^2\tau}{4}} \cdot \\
 & \int_{\frac{x}{2}\sqrt{\tau}}^{\infty} \Psi_n(2\sqrt{\tau}\xi - x) \cdot e^{2\gamma\sqrt{\tau}\xi} \cdot \operatorname{erfc}\left(\xi + \frac{(\gamma+1)}{2} \cdot \sqrt{\tau}\right) d\xi \\
 & - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{(\gamma+1)^2\tau}{4}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\gamma+1)\eta}{2}} \cdot \int_{\frac{(x+\eta)}{2}\sqrt{\tau}}^{\infty} \Phi_n\left(\tau \right. \\
 & \left. - \frac{(x+\eta)^2}{4\xi^2}\right) \cdot e^{\left(-\left(\frac{(\gamma+1) \cdot (x+\eta)}{4\xi}\right)^2 - \xi^2\right)} d\xi d\eta \\
 + & \int_0^{\tau} \left(\frac{(\gamma+1)^2 \cdot \eta}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(e^{\frac{(\gamma-1)x}{2}} \cdot \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\tau-\eta}}^{\frac{x}{2\sqrt{\tau-\eta}}} f_n(2\sqrt{\tau-\eta}\xi + x, \eta) \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot e^{(\gamma-1)\sqrt{\tau-\eta}\xi - \xi^2} d\xi \int_{\frac{x}{2\sqrt{\tau-\eta}}}^{\infty} \left(e^{\frac{(\gamma-1)x}{2}} \cdot f_n(2\sqrt{\tau-\eta}\xi + x, \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \eta) + e^{-\frac{(\gamma-1)x}{2}} \cdot f_n(2\sqrt{\tau-\eta}\xi + x, \eta) \right) \cdot e^{(\gamma-1)\sqrt{\tau-\eta}\xi - \xi^2} d\xi \right) \right. \\
 & \left. - (\gamma+1) \cdot \sqrt{\tau-\eta} \cdot e^{-\frac{(\gamma-1)x}{2} + \frac{(\gamma+1)^2\tau}{4}} \cdot \right. \\
 & \left. \int_{\frac{x}{2\sqrt{\tau-\eta}}}^{\infty} f_n(2\sqrt{\tau-\eta}\xi - x, \eta) \cdot e^{2\gamma\sqrt{\tau-\eta}\xi} \cdot \operatorname{erfc}\left(\xi + \frac{(\gamma+1)}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \sqrt{\tau-\eta}\right) d\xi \right) d\eta
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$v_1 := (x, \tau) \rightarrow U_1(x, \tau) \cdot e^{-\frac{(y-1) \cdot x}{2} - \frac{(y+1)^2 \cdot \tau}{4}}. \quad (10)$$

For å gjøre selve problemet mer oversiktlig settes $L(V_n(x, \tau))$ fra den ledende ligningen i ligningssett 7 og 8 lik $f_n(x, \tau)$. Valget av den initiale verdien som europeisk salgsoption gjør, som nevnt over, at første ledd på høyresiden av ligningen for $n=1$ faller bort. Dette fører til at $f_n(x, \tau)$ får samme uttrykk for alle verdier av n :

$$\mathcal{L}(v_n(x, \tau)) = f_n(x, \tau) = n \cdot \left(\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial p^{(n-1)}} A(x, \tau, p) \Big|_{p=0} \right),$$

$$\text{hvor } A(x, \tau, p) = \left(\frac{1}{\bar{S}(\tau, p)} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{S}(\tau, p) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}(x, \tau, p) \cdot$$

For $f_1(x, \tau)$ er hele høyresiden kjent og er bare ulike varianter av den europeiske salgsoptionen.

$$f_1(x, \tau) = \frac{D_1(\bar{S})(\tau, 0) D_1(\bar{V})(x, \tau, 0)}{\bar{S}(\tau, 0)}.$$

Her representerer $D_1(S)(\tau, 0)$ førsteordens partielle deriverte av $S(\tau, 0)$ med hensyn på τ og $D_1(V)(x, \tau, 0)$ er førsteordens partielle deriverte av $V(x, \tau, 0)$ med hensyn på x . Videre har man fra resultatet av ligningssett (5) at $v_0(x, \tau) = \bar{V}(x, \tau, 0)$ og $1 - v_0(0, \tau) = \bar{S}(\tau, 0)$

For $f_2(x, \tau)$ derimot har man et uttrykk av den initiale tilstanden i tillegg til $V_1(x, \tau)$. Dette gjør at ligningssett (9) må beregnes for $n=1$ før løsningen av $f_2(x, \tau)$ kan finnes. Fra ligning (9) fremgår det at $f_n(x, \tau)$, $\phi_n(\tau)$ og $\psi_n(x)$ er av samme orden som $U_n(x, \tau)$. For $n=1$ er alle disse tre kjente, og dermed kan man løse ut $V_1(x, \tau)$ og substituere denne inn i formelen for $f_2(x, \tau)$. For å finne $f_3(x, \tau)$ må man ha verdien av $v_2(x, \tau)$, som er mulig å finne når man har et uttrykk for $f_2(x, \tau)$. Dette gjentas til man kommer til en verdi av n lik 30, da vil man oppnå en god numerisk tilnærming av prisen på amerikanske salgsoptioner.

Summeringsprosessen av leddene i Taylor-rekken starter som nevnt med en initial antakelse, $v_0(x, \tau)$, hvor tilsvarende europeisk salgsoption er valgt. Dette valget gir tre fordeler; (a) grensebetingelsen ved $x=\infty$ er automatisk tilfredsstillende og en slik initial verdi er forventet å være nær løsningen for høye verdier for x ; (b) $f_1(x, \tau)$ bli forenklet fordi det første leddet på

høyre side forsvinner; (c) siden verdien av den tilsvarende europeiske opsjonen oppfyller den initiale betingelsen $v_0(x,0)=0$ blir $\psi_n(x)=0$, det vil si at alle integralene hvor $\psi_n(x)$ inngår forsvinner.

For å løse integralene som inngår i løsningen til den kritiske grensen og verdien av opsjonen bruker Zhu numeriske tilnærmingsteknikker. Trapesregelen brukes over temporale integraler og Simpsons-regelen for spatiale integraler.

3.1.5 Fra opsjonsverdien til den kritiske grenseprisen

For å finne en løsning for verdien av opsjonen må man substituere ligning (9) inn i ligning (10) og deretter summere fra n er lik null til uendelig. Det er tilstrekkelig å summere over n lik 30 for å få en eksakt løsning.

$$V(x, \tau) = \bar{V}(x, \tau, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{V}_n(x, \tau)}{n!} .$$

Den samme sammenhengen gjelder også for den kritiske grensen $S_f(\tau)$:

$$S_f(\tau) = \bar{S}_f(\tau, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{S}_n(\tau)}{n!} .$$

Fra ligningssett (7) over kan man se ved andre sidebetingelse at verdien av $S_n(\tau)$ kan utredes ved hjelp av $V_n(x, \tau)$ for $x=0$:

$$\bar{V}_n(0, \tau) + \bar{S}_n(\tau) = 0 .$$

Ved å sette inn for $S_n(\tau)$ her og summere dem slik sammenhengen over tilsier, oppnås en eksakt løsning for den kritiske grenseverdien. Ved å velge europeiske salgsoptjon som initialverdien forsvinner $\psi_n(x)$ fra stykket, i tillegg til de andre fordelene som tidligere er nevnt. Derved fremkommer ligningen for den optimale utøvelsesgrensen (11).

$$\begin{aligned}
S_f(\tau) = & \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \cdot e^{-\frac{(y+1)^2 \cdot \tau}{4}} \cdot \sum_{n=0}^3 \left(\frac{1}{n!} \right) \left(e^{\frac{(y+1)^2 \tau}{4}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y+1) \cdot \eta}{2}} \int_{\frac{\eta}{2} \cdot \sqrt{\tau}}^{\infty} \phi_n \left(\tau - \frac{\eta^2}{4 \cdot \xi^2} \right) \right. \\
& e^{-\left(\frac{(y+1) \cdot \eta}{4 \cdot \xi} \right)^2 - \xi^2} d\xi d\eta + \int_0^{\tau} \left(e^{(y+1)^2 \cdot \left(\frac{\eta}{4} \right)} \int_0^{\infty} f_n(2 \cdot \sqrt{\tau - \eta} \cdot \xi, \eta) \cdot e^{(y-1) \cdot \sqrt{\tau - \eta} \cdot \xi - \xi^2} d\xi \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (y+1) \cdot \sqrt{\tau - \eta} \cdot e^{\frac{(y+1)^2 \cdot \tau}{4}} \int_0^{\infty} f_n(2 \cdot \sqrt{\tau - \eta} \cdot \xi, \eta) \cdot e^{2 \cdot y \cdot \sqrt{\tau - \eta} \cdot \xi} \cdot \operatorname{erfc} \left(\xi + \frac{(y+1)}{2} \cdot \sqrt{\tau - \eta} \right) d\xi \right) d\eta \right) \quad (11)
\end{aligned}$$

3.2 Numeriske resultat

Jeg vil i avsnittene under presentere selve løsningsprosessen for Zhus prisingsmodell og resultatene jeg fikk. Selve løsningsmetoden som Zhu (2006) beskriver er kompleks og tidkrevende, dette har ført til at jeg har hatt problemer med å finne en løsning for n av høyere orden enn fire. Jeg har derfor også valgt å presentere Zhus resultater, og bruke disse som sammenligningsgrunnlag videre i oppgaven.

3.2.1 Regningen i Maple

Zhu sier i artikkelen at integralene i prisingsmodellen hans konvergerer ved lave verdier. Likevel, selv ved bruk lave verdier blir den numeriske integrasjonen raskt svært komplisert. Ved numerisk integrasjon må man i tillegg velge antall delintervall det er ønskelig at arealet under grafen skal deles inn i, også dette vil ha stor innvirkning på tidsbruken til integreringsprosessen. Ved et høyt antall intervaller vil løsningen bli mer nøyaktig enn ved et lavere antall, man må altså foreta en prioritering mellom nøyaktighetsgrad og tidsbruk på utregningen.

Datamaskinen jeg har brukt har en relativt svak prosessor og er derfor ikke godt egnet til komplekse utregninger, noe som bidrar til at utregningene tar lenger tid enn nødvendig. For å finne de fire første leddene i Taylor-rekken for den kritiske grensen ($S_f(\tau)$ for $n=4$) ved relativt små integreringsareal og lavt antall gridpunkt tar utregningen over 360 000 sekunder. For en $n=3$ tar det mye kortere tid, og ved $n=2$ tar det bare et 2 minutt. Dette kommer av at

ved å øke n , blir uttrykkene som inngår i ligningen for den kritiske grenseverdien integrert flere ganger over hverandre. Dette vil jeg komme nærmere inn på under.

Det fremkommer fra ligning (11) at for å løse den kritiske grenseverdien ($S_f(\tau)$) trengs funksjonene $f_n(x, \tau)$ og $\varphi_n(\tau)$. Ved beregning av den kritiske grensen for en n av høyere orden enn 1 vil den sistnevnte funksjonen ($\varphi_n(\tau)$) være null. Dette gjør at uttrykket for den kritiske grensen blir noe mindre komplekst ved n høyere enn 1. For å finne den optimale utøvelsesgrensen må man ha et uttrykk for $f_n(x, \tau)$ for $n=1 \dots 30$ og $\varphi_n(\tau)$ for $n=1$.

Å finne uttrykk for $f_n(x, \tau)$ er som vist ovenfor uproblematisk, problemet ligger i å finne verdiene for alle de inngående parameterne. Man har fått oppgitt funksjonen for $f_n(x, \tau)$;

$$f_n := (x, \tau) \rightarrow n \cdot \left(\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial p^{(n-1)}} A(x, \tau, p) \Big|_{p=0} \right) .$$

Optimal utøvelsesgrense ved $n=1$

Fra ligningen over blir det åpenbart at $f_1(x, \tau)$ blir et uttrykk bestående av varianter av den initiale betingelsen.

$$f_1 := (x, \tau) \rightarrow - \frac{D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_0)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)} ,$$

$$\phi_1 := \tau \rightarrow v_0(0, \tau) - D[1](v_0)(0, \tau) - 1 .$$

Fra ligningen for $f_1(x, \tau)$ kan man se at verdien for $S_0(\tau)$ er blitt substituert med $-v_0(0, \tau)$. D_2 og $D[1]$ representerer henholdsvis den partielt deriverte av den initiale tilstanden med hensyn på τ og x . Så lenge man har et uttrykk for den europeiske opsjonen vil disse være uproblematisk å finne. Dette gjør at man får et uttrykk for den kritiske grenseverdien for $n=1$.

$n=1, \sigma=30\% \quad r=10\% \quad \gamma=2r/\sigma^2=2,22, \quad T=1, \quad \tau=(T-t)*\sigma^2/2r=0,045$ (tid ved forfall)

$S_f(0,045)$

-0,016966606619

Tidsbruk = 30 sekunder

Optimal utøvelsesgrense ved $n=2$

For $f_2(x, \tau)$ blir uttrykket noe mer komplekst enn det tilsvarende vist over for $f_1(x, \tau)$.

$$f_2 := (x, \tau) \rightarrow - \frac{2 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_1(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} + \frac{2 \cdot (D[2](-v_1)(0, \tau)) (D[1](v_0)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)} - \frac{2 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_1)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)}$$

Fra uttrykket ser man at i tillegg til den initiale betingelsen inngår også varianter av $v_1(x, \tau)$. Både den deriverte i forhold til τ og x og uttrykket alene vurdert for $x=0$. $v_1(x, \tau)$ kan beregnes ved ligning (9) beskrevet over. Ligning (9) er kompleks i seg selv, den består blant annet av flere doble integraler som må løses ved numerisk integrasjon. For å løse denne ligningen må en ha et uttrykk for $f_n(x, \tau)$, $\varphi_n(\tau)$ og $\psi_n(x)$. Alle disse er kjente funksjoner av den initiale tilstanden når $n=1$ og dermed kan man finne et uttrykk for $v_1(x, \tau)$. Dette er den rekursive summeringen Zhu (2006) refererer til i artikkelen. For å finne $f_2(x, \tau)$ må man ha et uttrykk for $v_1(x, \tau)$ som bygger på et uttrykk for $f_1(x, \tau)$ for å løse. Når man nå har funnet både $f_1(x, \tau)$ og $f_2(x, \tau)$ kan man finne verdien av den kritiske grenseverdien for de tre første leddene i Taylor-rekken.

$n=2, \sigma=30\%$ $r=10\%$ $\gamma=2r/\sigma^2=2,22$, $T=1$, $\tau=(T-t)*\sigma^2/2r=0,045$ (tid ved forfall)

$S_f(0,045)$

0,2286278673

Tid= 2 min

Optimal utøvelsesgrense ved $n=3$

For å løse denne kritiske grensen for $n=3$, trenger man å regne ut $f_3(x, \tau)$. Uttrykket for $f_3(x, \tau)$ er;

$$\begin{aligned}
f_3 := (x, \tau) \rightarrow & - \frac{6 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_1(0, \tau)^2}{(1 - v_0(0, \tau))^3} \\
& + \frac{6 (D[2](-v_1)(0, \tau)) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_1(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
& - \frac{6 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_2)(x, \tau)) v_1(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
& - \frac{3 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_2(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
& + \frac{3 ((D[2](-v_2)(0, \tau)) (D[1](v_0)(x, \tau)))}{1 - v_0(0, \tau)} \\
& + \frac{6 (D[2](-v_1)(0, \tau)) (D[1](v_1)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)} \\
& - \frac{3 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_2)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)}
\end{aligned}$$

Ved å se nærmere på dette uttrykket ser man at i tillegg til de samme verdiene som inngikk for $f_2(x, \tau)$, har man også her uttrykk for $v_2(x, \tau)$ som man finner på samme måte som $v_1(x, \tau)$. Det vil si ved hjelp av ligning (9) for $n=2$. Ikke uventet vil man se at $f_2(x, \tau)$ inngår i ligningen (9) for $n=2$. Man kan nå se at utregningen for $v_2(x, \tau)$ blir kompleks. For å regne ut $v_2(x, \tau)$ integreres det flere steder uttrykk hvor $f_2(x, \tau)$ inngår, noen steder inngår funksjonen også i de doble integralene. For hver $f_2(x, \tau)$ inngår flere varianter av ligning (9) for $n=1$ noe som gjør at stykket raskt blir komplekst. Men ved hjelp av Maple klarer man å løse $v_2(x, \tau)$ og dermed får man et uttrykk for $f_3(x, \tau)$ som igjen brukes til å løse den kritiske grensen for $n=3$.

Allerede her begynner utregningene å bli tidkrevende, men likevel er det overkommelig. Et problem er at ved å øke integralene tar det fort veldig lang tid, så det er problematisk å finne ut til hvilke verdier de konvergerer. Likevel, med prøving av ulike integraler ser det ut som om det konvergerer noenlunde. Det er ikke bare i ligningen for den kritiske grensen man skal velge intervallene man integrerer over, også for alle integralene som inngår i ligning (9).

$n=3, \sigma=30 \% r=10 \% \gamma=2r/\sigma^2=2,22, T=1, \tau=(T-t)*\sigma^2/2r=0,045$ (tid ved forfall)

$S_f(0,045)$

0,363579143

Tid: 29 timer og 23 min.

Optimal utøvelsesgrense for n=4

Neste steg i utregningen blir å regne ut $f_4(x, \tau)$ for deretter å finne den kritiske grensen for $n=4$. Uttrykket for $f_4(x, \tau)$ er nå gitt ved:

$$\begin{aligned}
 f_4 := (x, \tau) \rightarrow & - \frac{24 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_1(0, \tau)^3}{(1 - v_0(0, \tau))^4} \\
 & - \frac{24 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_1(0, \tau) v_2(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^3} \\
 & + \frac{24 (D_2(-v_1)(0, \tau)) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_1(0, \tau)^2}{(1 - v_0(0, \tau))^3} \\
 & - \frac{24 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_1)(x, \tau)) v_1(0, \tau)^2}{(1 - v_0(0, \tau))^3} \\
 & + \frac{12 (D_2(-v_2)(0, \tau)) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_1(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
 & + \frac{24 (D_2(-v_1)(0, \tau)) (D[1](v_1)(x, \tau)) v_1(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
 & + \frac{12 (D_2(-v_1)(0, \tau)) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_2(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
 & - \frac{12 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_2)(x, \tau)) v_1(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
 & - \frac{12 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_1)(x, \tau)) v_2(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
 & - \frac{4 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_0)(x, \tau)) v_3(0, \tau)}{(1 - v_0(0, \tau))^2} \\
 & + \frac{4 (D_2(-v_3)(0, \tau)) (D[1](v_0)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)} \\
 & + \frac{12 (D_2(-v_1)(0, \tau)) (D[1](v_2)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)} \\
 & - \frac{4 D_2(v_0)(0, \tau) (D[1](v_3)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)} \\
 & + \frac{12 (D_2(-v_2)(0, \tau)) (D[1](v_1)(x, \tau))}{1 - v_0(0, \tau)}
 \end{aligned}$$

Man kan lett se at for $f_4(x, \tau)$ er mer kompleks enn tilsvarende ligning for $n=3$. For å løse denne må man ha verdien av $v_1(x, \tau)$, $v_2(x, \tau)$ og $v_3(x, \tau)$. Hver av disse funksjonene kan man se flere steder i ligningen for $f_4(x, \tau)$. For $n=5$ blir den enda mer kompleks, da må man i tillegg ha et uttrykk for $v_4(x, \tau)$. Man kan altså se at for hver økning av n blir stykket mye mer

komplisert fordi man integrerer over alle de tidligere funksjonene. Også utregningen av $v_3(x, \tau)$ går relativt greit i Maple, men når man skal regne ut den kritiske grenseverdien for $n=4$ tar det lang tid. Som nevnt over bruker Maple over fire døgn på denne utregningen. Dette fører til at den kritiske grensen for $n=5$ vil ta mye lenger tid, godt over det dobbelte.

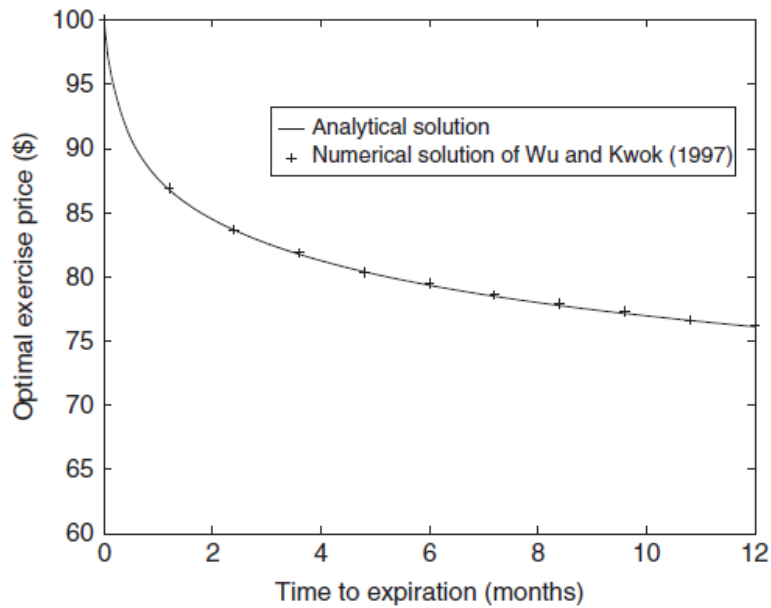
$n=4, \sigma=30\% \quad r=10\% \quad \gamma=2r/\sigma^2=2,22, \quad T=1, \quad \tau=(T-t)*\sigma^2/2r=0,045$ (tid ved forfall)		
$S_f(0,045)$	0,545329834	Tid: 100 timer og 13 min

Begrensninger ved resultatene

Tilgjengelig datakraft (prosessen jeg har brukt er en Intel® Core™2 Duo CPU E8500 3.17 GHz, med RAM 4 GB) har gjort det vanskelig å finne svaret for en n av høyere orden enn fire. For å få den eksakte løsningen Zhu finner i publikasjonen sin, må man som tidligere nevnt ha en n lik 30. Ved en n av denne ordens vil Taylor-rekken konvergere, og høyere n vil ikke gi noe mer nøyaktig løsning. Man kan se fra mine resultater at den kritiske grenseverdien ikke er i nærheten av den som Zhu finner, og flere ledd vil derfor være nødvendig for å oppnå mer nøyaktighet.

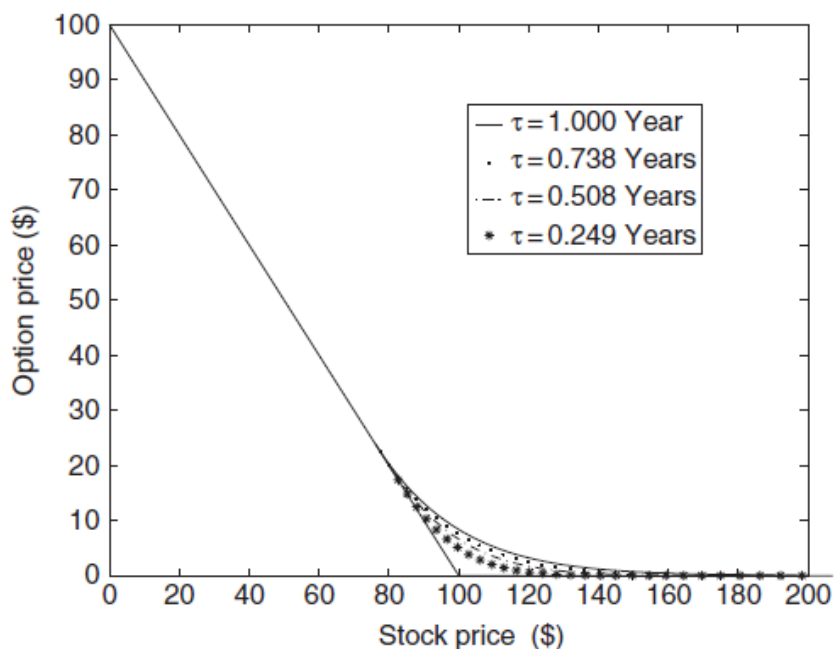
3.2.2 Zhus resultater:

Som nevnt over klarte ikke jeg å løse Zhus prisingsmodell for en n av rimelig orden. Dette gjør at til videre sammenligning vil jeg brukes resultatene som Zhu selv presenterte. Jeg vil ta utgangspunkt i eksempelet hvor utøvelseskurs og aksjepris er 100, risikofri rente lik 10 %, volatilitet lik 30 % og tid til forfall er 1 år, i tillegg til flere varianter av dette eksempelet.



Figur 4: Illustrerer optimal utøvelsespris som en funksjon av tiden

Fra figuren over kan man se at ved forfall vil den optimale utøvelsesprisen tilsvare forhåndsbestemt utøvelsespris. Ved inngåelse av opsjonen, $\tau=0,045$, fant Zhu at den kritiske grenseverdien hadde en verdi på 76,11.



Figur 5: Illustrerer opsjonspriser for opsjonen med forskjellig tid til forfall.

Den rette streken i figuren illustrerer avkastningsfunksjonen $\max(K-S,0)$. Fra figuren kan man se at desto lenger tid det er til opsjonens forfallstidspunkt, jo høyere vil prisen på opsjonen være. Videre ser man at jo mindre tid til forfall jo nærmere avkastningsfunksjonen vil verdien være.

3.2.3 Prisingsmetode på lukket form

Zhu (2006) presenterte prisingsmodellen sin som en eksakt og eksplisitt *lukket* løsning for prisen på amerikanske salgsoptjoner. Det kan diskuteres om denne prisingsmetoden faktisk er på lukket form som han selv påstår i artikkelen. Problemet ligger i hvordan man velger å definere en lukket løsning. Definisjonen Zhu bruker er gitt av Gukhal (2001) og sier at en løsning er av lukket form hvis løsningen kan skrives som et sett av standardiserte og generelt aksepterte matematiske funksjoner og operasjoner. Man observerer at løsningen er gitt fra generelt aksepterte matematiske funksjoner og operasjoner, så ut ifra denne definisjonen kan man si at løsningen er av lukket form. Men som nevnt over er ikke problemet om metoden ut ifra denne definisjonen kan bli definert som en lukket løsning, men det hvilke definisjon som er korrekt. En definisjon fra det matematiske nettstedet «wolfram alpha» sier at en løsning gitt ved en uendelig sum vil generelt ikke bli sett på som en løsning på lukket form. Som vi så over er ligningen for både opsjonsprisen og den kritiske utøvelsesgrensen oppgitt som en uendelig Taylor-rekke. Fra denne definisjonen kan man trekke konklusjonen at løsningen ikke er av lukket form (Wolfram Alpha 2012).

4. Prisingsmodeller for amerikanske opsjoner

4.1 Oversikt

Amerikanske opsjoner er de mest solgte opsjonene i markedet, man finner dem i alle store finansmarkeder inkludert aksje-, råvare-, valuta-, forsikrings- og boligmarkedet. Det har derfor vært av stor interesse å finne gode prisingsmetoder for amerikanske opsjoner. Siden Black og Scholes (1973) kom frem til sin berømte prisingsmodell for europeiske opsjoner, har forskere vært på jakt etter en tilsvarende eksakt prisingsmetode for amerikanske opsjoner. Et gjennombrudd var da McKean (1965) beviste at det optimale stoppeproblemet for å verdsette amerikanske opsjoner kunne transformeres om til et «free boundary problem». Denne innsikten hjalp ham i å utlede prisingsformelen for evigvarende amerikanske opsjoner. Mange forskere har jobbet videre, med utgangspunkt i McKean (1965) funn.

I avsnittene under vil jeg presentere ulike analytiske og numeriske tilnærminger for prising av amerikanske salgsoptjoner. Jeg vil komme nærmere inn på hva som skiller analytiske og numeriske løsninger, men selv de analytiske metodene krever en viss grad av numeriske prosedyrer for å kunne løses.

4.2 Analytiske tilnærminger

4.2.1 Introduksjon

Analytiske metoder har to klare fordeler. Faktumet at analytiske løsninger er presentert som matematiske uttrykk gjør at de gir en klar innsikt i hvordan variabler og interaksjonen mellom variabler påvirker resultatet. I tillegg er ofte metoder som er uttrykt analytisk mer datamaskineffektive enn tilsvarende numeriske implementasjoner.

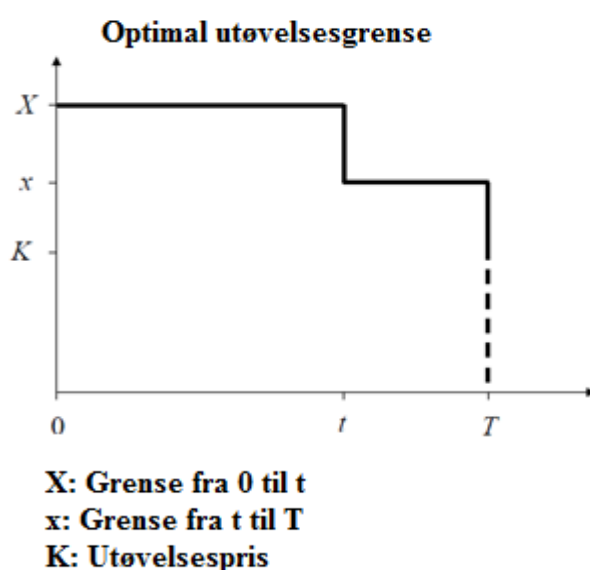
Analytiske løsninger til komplekse problemer kan lett bli veldig kompliserte. Noen av de analytiske metodene presentert krever trenger fortsatt en viss grad av beregninger for å komme frem til en løsning. I motsetning til de numeriske metodene er flere approksimeringer her foretatt for å redusere intensiteten til de siste numeriske beregningene som må foretas.

4.2.2 Bjerksund og Stensland prisingsmodell (2002)

I 1993 publiserte Bjerksund og Stensland en nøyaktig og effektiv analytisk tilnærming til amerikansk opsjonsprising. Metoden deres tar utgangspunkt i en utøvelsesstrategi hvor man har en flat kritisk utøvelsesgrense. Hvis aksjekursen er lavere enn denne grensen vil salgsoptionen umiddelbart bli utøvet. Prisingsmodellen gir et uttrykk for prisen på amerikanske kjøpsopsjoner, og man kan benytte Bjerksund og Stenslands put-call transformasjon for å finne verdien av en tilsvarende amerikansk salgsoption. Modellen deres kan også benyttes til å prise amerikanske opsjoner på aksjer, futures og valutaer. I modellen antas det en «Black Scholes» økonomi, med en positiv risikofri rente hvor underliggende følger en geometrisk Brownsk bevegelse.

I 2002 introduserte Bjerksund og Stensland en ny prisingsmodell som var en generalisering av deres tidligere arbeid. Metoden er rask og effektiv, og mer nøyaktig enn deres tidligere prisingsmetode. Videre vil fokuset være på den siste versjonen av prisingsmodellen deres.

I stedet for en flat grense, deler de opsjonens levetid inn to perioder (0-t og t-T), hvor hver delperiode har en separat flat utøvelsesgrense (hhv. X og x). Siden den optimale utøvelsesgrensen for amerikanske kjøpsopsjoner er en synkende og konkav funksjon av tiden velges den optimale utøvelsesgrensen for den første perioden til en lavere verdi enn for den andre perioden. Begge disse grensene settes igjen til en lavere verdi enn utøvelsesprisen ved forfall (K).



Figur 6: Optimal flat utøvelsesgrense som en funksjon av tiden

Figur 6 illustrerer den optimale utøvelsesgrensen for en amerikansk kjøpsopsjon. Man kan se at i første periode må aksjeprisen være høyere enn i den siste perioden for at det skal lønne seg å løse inn opsjonen. Ved forfall vil den optimale utøvelsesgrensen tilsvare utøvelsesprisen. Den vertikale stiplede linjen ved tidspunkt T illustrerer at opsjonen er «out of the money» og vil derfor i dette område ikke bli utøvet.

Gitt strategien ved å utøve opsjonen hvis prisen på underliggende når denne flate utøvelsesgrensen blir den amerikanske opsjonen bestående av: En tilsvarende europeisk opsjon med «knock out» barriere X , utøvelsespris K og utøvelsestid T , og en sum $(X-K)$ som mottas på tidlig utøvelsestidspunkt hvis opsjonen er utøvet før forfall. Dette brukes til å utlede et uttrykk for opsjonsprisen.

For å finne barrierene for de to periodene foreslås en løsning hvor man først deler tiden til forfall inn to delperioder ved hjelp av ligningen under. Første periode er fra nåværende tidspunkt til t (0,t) og andre periode er fra tidspunkt t til T (t,T).

$$t = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)T$$

Deretter finner de de optimale utøvelsesgrensene for begge periodene ved hjelp av ligning 1.1 til ligning 1.5. Denne optimale utøvelsesgrensen er en kombinasjon av utøvelseskursen (B_0) og tidlig utøvelsesgrense for en tilsvarende evigvarende amerikansk salgsopsjon (B_∞).

$$X_T = B_0 + (B_\infty - B_0)(1 - \exp\{h(T)\}) \quad 1.1$$

$$\text{Hvor: } h(T) = -(bT + 2\sigma\sqrt{T}) \frac{K^2}{(B_\infty - B_0)B_0} \quad 1.2$$

$$B_\infty = \frac{\beta}{\beta - 1} K \quad 1.3$$

$$B_0 = \max\{K, (\frac{r}{r-b})K\} \quad 1.4$$

$$\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad 1.5$$

Merk at utøvelsesgrensene for periodene er henholdsvis $X = X_T$ og $x = X_{T-t}$. Som nevnt over gjelder dette for prising av kjøpsopsjon, men ved hjelp av Bjerksund og Stenslands transformasjon kan man regne ut tilsvarende pris på en amerikansk salgsopsjon.

Transformasjonen sier:

$$P(S, K, T, r, b, \sigma) = C(K, S, T, r - b, -b, \sigma)$$

hvor høyre side av ligningen tilsvare verdien på en amerikansk salgsoption med utøvelsesprisen K , tid til forfall T på en aksje med en risikostjert drift b og volilitet σ . Transformasjonen tilsier at i en økonomi med risikofri rente $r-b$ tilsvare denne salgsoptionen verdien til en amerikansk kjøpsopjon med utøvelsespris K , volilitet σ og risikostjert drift $-b$.

4.2.3 Kvadratisk Approksimeringsmetode

MacMillan (1986) anvendte kvadratisk tilnæringsmetode for å prise amerikanske salgsoptioner på ikke dividendeutbetalende aksjer. Barone-Adesi og Whaley (1987) videreutviklet denne metoden til også å være gyldig også for optioner på råvarer. Jeg vil fokusere på den sistnevnte metoden. Hensikten bak metoden var å finne en nøyaktig prisingsapproksimering som likevel ikke var tidkrevende.

Teknikken går ut på å estimere forskjellen mellom en amerikansk option og en tilsvarende europeisk option. Som nevnt innledningsvis kan man tenke seg at verdien til en amerikansk salgsoption er lik en tilsvarende europeisk option pluss et tillegg for retten til tidlig utøvelses.

$$\textit{Amerikansk option} = \textit{Europeisk option} + \textit{Amerikansk tillegg}$$

Siden både den europeiske og den amerikanske salgsoptionen tilfredsstiller Black Scholes partielle differensialligning (PDE) konkluderte Barone-Adesi og Whaley (1987) med at dette amerikanske tillegget også måtte tilfredsstille Black Scholes PDE. Dette fører til at en ny PDE for det amerikanske tillegget kan utvikles. Denne PDE inneholder et ledd som blir tilnærmet null for lange eller korte optionkontrakter. Når dette leddet settes lik null kan man løse gjenværende ordinære differensialligning (ODE) i forhold til den kritiske grenseprisen. Denne kritiske prisen kan finnes ved iterativ søketeknikk. Det er ikke mulig med videre forbedringer av denne kvadratiske metoden, fordi det er en eksakt løsning av en tilnærming av Black Scholes PDE. Også denne metoden tar de samme antagelsene som er tatt i Black og Scholes (1973) prisingsmodell.

4.2.4 «The American Put Valued Analytically» - Geske and Johnson (1984)

Geske og Johnson (1984) presenterte en analytisk formel som tilfredsstillende den partielle differensialligningen med tilhørende grensebetingelser for amerikanske salgsoptjoner. Siden det ved hvert tidspunkt er en positiv sannsynlighet for tidlig utøvelse, er situasjonen tilsvarende som en uendelig serie av sammensatte optjoner som Geske (1977) viste hvordan man kunne verdsette. Med utgangspunkt i Geske (1977) utviklet Geske og Johnson (1984) en prisingsmetode for amerikanske salgsoptjoner ved å behandle den amerikanske salgsoptjonen som en uendelig sum av sammensatte optjoner. Løsningen er eksakt når man har en uendelig grense, men funksjonene er svært maskinkrevende og vanskelige å regne ut for en n større enn fire. Dette resulterte i at Geske og Johnson foreslo en Richardson's extrapolation teknikk for å oppnå en løsning på lukket form.

Evalueringen er veldig effektiv fordi forfatterne approksimerer en eksakt løsning av prisingsproblemet, og ikke den partielle differensialligningen eller aksjeprisbevegelsen.

Tanken bak den sammensatte prisingsmetoden

I et diskret tidsintervall kan en amerikansk salgsoptjon bli utøvet ved n intervall, $t = t_0 < t_1 \dots < t_n = T$. Men når en optjon har blitt utøvet kan den ikke bli utøvet igjen på et senere tidspunkt. Dette fører til at man kan se på den amerikanske salgsoptjonen som en serie av potensielle kontantstrømmer avhengig av at optjonen ikke har blitt utøvet på alle tidligere tidspunkt. Dette krever en utregning av den sammensatte sannsynligheten for at optjonen ender under utøvelsesgrensen og at den forblir over tidlig utøvelsesgrensen, ved alle tidlige utøvelsestidspunkt. Løsningen uttrykkes som en serie av optjoner som avhenger av en diskret tidlig utøvelsesgrense: $b_i = b_{t_i} \quad i = 1 \dots n$

Hver optjon med en utøvelse ved tidspunkt t_i blir utøvet hvis aksjeprisen ved tidspunkt i , $S(t_i)$, er lavere enn den kritiske grensen ved samme tidspunkt, b_i , gitt at optjonen ikke allerede har blitt utøvet. Som en konsekvens må man bruke sammensatt sannsynlighet for at aksjeprisen er over tidlig utøvelsesgrense for alle tidligere utøvelsestidspunkt og at den er under den optimale utøvelsesgrensen ved vurderingstidspunktet.

Mens Geske og Johnson (1984) valgte utøvelsespunkt med like intervaller, studerte Bunch og Johnson (1992) en teknikk der man velger disse punktene slik at det amerikanske tillegget maksimeres. Det viser seg at når utøvelsespunktene velges slik så oppnås nøyaktige

tilnærminger som er mer datamaskin effektive enn Geske og Johnsons (1984) opprinnelige metode.

4.2.5 «The randomization approach» - Carr et. al (1998)

Carr (1998) utvikler en prisingsmetode for amerikanske opsjoner og den tilhørende kritiske utøvelsesgrensen basert på teknikken «randomisering». Denne teknikken gir en delvis eksplisitt tilnærming av amerikanske opsjonsverdier, gitt en «Black Scholes økonomi».

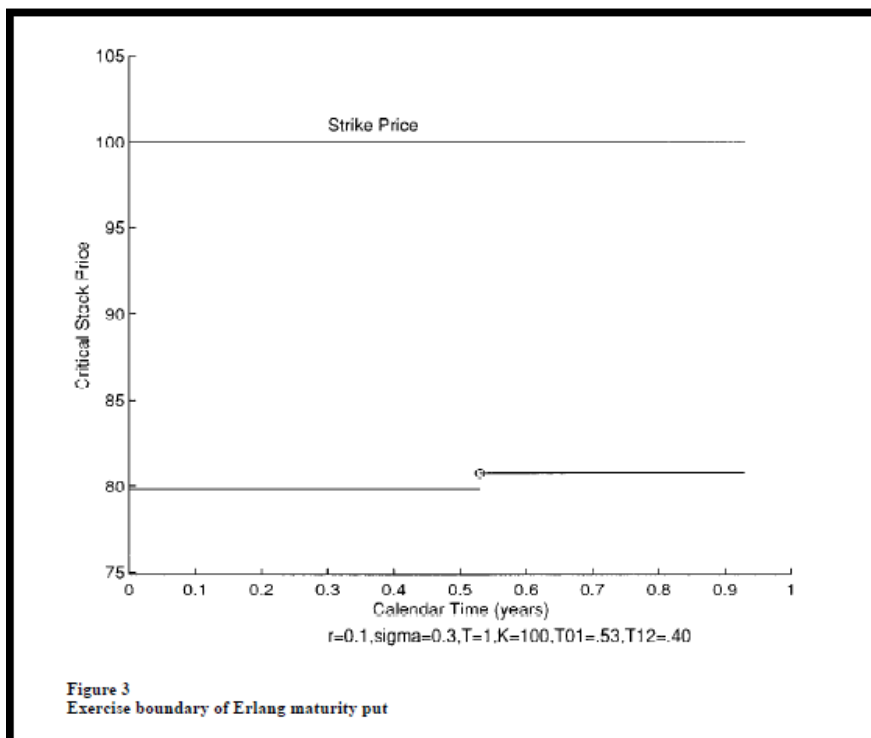
I Carrs metode randomiseres forfallsdatoen for den amerikanske opsjonen og dermed bestemmes den eksakte løsningen for dens verdi. Eieren har da mulighet til å utøve retten sin på alle tidspunkt frem til et tilfeldig utøvelsetidspunkt. En salgsoption av denne typen gir derved eieren retten til å selge underliggende for en fast pris til enhver tid frem til opsjonens tilfeldige forfallstidspunkt. I metoden er forfallstidspunktet bestemt ved ventetiden til et spesifisert nummer av hopp i en standard Poisson prosess, som er antatt å være uavhengig av prisutviklingen på det underliggende aktivum. Den eneste oppgaven til Poissonprosessen er å bestemme forfallstidspunkt.

Det letteste uttrykket fremkommer når den randomiserte amerikanske opsjonen forfaller ved første hopp i Poissonprosessen, i dette tilfellet har forfallstidspunktet en eksponentiell fordeling. Da vil opsjonen tilsvare et uendelig-horisont problem med en justert diskonteringsrate (som er vist i en portefølje optimering av Merton (1973)). McKean (1965) har vist hvordan man kan verdsette amerikanske opsjoner med uendelig horisont. En slik randomisering av forfallsdatoen fører derfor til et mindre komplekst prisingsproblem, dette er hovedsakelig grunnet dempingen av oppførselen til den optimale utøvelsesgrense.

Når opsjonen forfaller ved første hopp i Poissonprosessen vil den hukommelsesløse egenskapen til eksponentialfordelingen indikere at opsjonen ikke kommer nærmere sitt tilfeldige forfallstidspunkt. Dette fører til at verdien ikke rammes av forfalt tid. Siden utøvelsesprisen ikke avhenger av tiden blir den kritiske utøvelsesgrensen uavhengig av tiden. Dette forårsaker at man reduserer problemet fra å finne en tidsavhengig grense til en enkel kritisk aksjepris. I tilfeller hvor det underliggende ikke betaler dividende, problemet det fokuseres på i oppgaven, kan løses eksplisitt for den kritiske aksjeprisen.

Selv om antakelsen om et eksponentialfordelt forfallstidspunkt fører til enkel approksimering for amerikanske opsjoner, har approksimeringen for mye feil til å brukes i praksis. For å

forbedre approksimeringen gjør Carr (1998) antakelsen om at tiden til forfall kan deles inn i n uavhengige eksponentielle delintervall. Dette gjør at den randomiserte amerikanske opsjonen forfaller ved det n -te hoppet i den standard Poissonprosessen. Forfallstidspunktene vil da ha en Erlang-fordeling med et gjennomsnitt lik den faste forfallsdatoen til den opprinnelige amerikanske opsjonen. I dette tilfellet får den kritiske grensen en trappeform med nivåer som bestemmes ved optimeringen innen hver delperiode. Uttrykket for den randomiserte opsjonsverdien blir en trippel sum som ikke involverer noen spesielle funksjoner utenom den naturlige logaritmen. Figur 7 viser utøvelsesgrense for en realisering hvor det første hoppet kommer 0,53 år etter utstedelsen av opsjonen, mens salgsopsjonen forfaller ved andre hopp 0,93 år etter utstedelsen. Man kan se denne grensen i forhold til utøvelsesprisen på 100.



Figur 7 Utøvelsesgrense for en realisering hvor det første hoppet kommer 0,53 år etter utstedelsen av opsjonen, og salgsopsjonen forfaller ved andre hopp 0,93 år etter utstedelsen.

Ved høye antall delperioder blir variansen til metoden tilnærmet null. Ved økende periodeantall øker også nøyaktigheten til løsningen, men dette fører til at komputasjonen blir mer tidkrevende.

4.2.6 «The capped option approximation» - Broadie and Detemple (1996)

Broadie og Detempler (1996) fremstilte en ny metode for å beregne den nedre og øvre grense for amerikanske opsjonsverdier. Basert på disse grensene finner de to opsjonsprisapproximeringer, LBA, som er en approximering basert på nedre grense, og LUBA, som er basert på både en nedre og en øvre grense. De introduserte også en enkel modifikasjon av den binomiske metoden, BBSR, som er basert på Black Scholes og Richardson ekstrapolasjon. Resultatene som ble fremstilt i artikkelen tilsier at LUBA approximeringen, som både bruker nedre og øvre grenseinformasjon, har en nøyaktighet tilsvarende som et 1000-steps binomisk tre. I tillegg er utregningstiden til LUBA approximeringen like raskt som et 50 steps binomisk tre (eller rundt 500 ganger raskere enn et 1000 steps tre).

Broadie og Detempler starter med å utvikle en nedre grense for prisen på den amerikanske kjøpsopsjonen basert på en avkortet (capped) opsjon med et passende konstant lokk. Deretter finner de en prosedyre basert på denne samme klassen av opsjoner, til å regne en uniform nedre grense (L^*) for den optimale utøvelsesgrensen for amerikanske kjøpsopsjoner. Til slutt brukes integralrepresentasjonen av den tidlige utøvelsespremie sammen med L^* til å finne en øvre grense for den teoretiske prisen på opsjonen.

Broadie og Detempler fokuserer i hovedsak på kjøpsopsjoner, men det nevnes at de samme approximeringene og grensene også kan brukes for salgsopsjoner. For å redusere arbeidet kan det benyttes en put-call transformasjon, som holder under den geometriske antakelsen.

4.2.7 «Interpolation method» - Johnson (1983)

Johnson (1983) tok utgangspunkt i at verdien på amerikanske salgsopsjoner er kjent ved ulike tilfeller. Selv om det ikke på daværende tidspunktet fantes et generelt analytisk uttrykk for verdien av amerikanske opsjoner så observerte Johnson (1983) at verdien ved flere ulike tilfeller var kjent.

Johnson (1983) brukte faktumet at verdien på en amerikansk salgsopsjon er mer verdifull enn en tilsvarende europeisk opsjon, men mindre verdt enn en europeisk salgsopsjon med en konstant utøvelsesgrense i nåverditermer, til å finne et analytisk uttrykk for verdien av amerikanske salgsopsjoner.

$$p(X) \leq P(X) \leq p(Xe^{rT})$$

Hvor liten p symboliserer prisen på en europeisk salgsoption, mens stor P betegner prisen på en tilsvarende amerikansk option. Denne observasjonen fører til en nedre og øvre grense for verdien på salgsoptionen, som de igjen bruker til å approksimere den amerikanske optionsverdien. Denne approksimeringen krever tilnæringer av den kritiske grenseverdien på det underliggende.

$$P(X) = \alpha p(Xe^{rT}) + (1 - \alpha)p(X) \quad (5)$$

$$\alpha = \left(\frac{rT}{a_0 rT + a_1} \right)^l$$

where

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad l = \frac{\log_e S/S_c}{\log_e X/S_c}$$

hvor S_c er den kritiske aksjeprisen. Under denne kritiske prisen vil optionen umiddelbart bli utøvet. For å finne S_c må man løse ligningen under.

$$X - S_c = P(X, S_c, rT, \sigma^2 T).$$

Siden den amerikanske salgsoptionspriseringsformelen ikke er kjent, må ligningen for S_c bli estimert. For å estimere den kritiske prisen på underliggende aktivum bruker forfatteren det faktum at; ved $\sigma^2 T = 0$ må man ha at $S_c = X$ og for $\sigma^2 T = \infty$ (Merton's tilfelle) må man ha $S_c = \gamma \frac{X}{(1+\gamma)}$, hvor $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$

Ved å bruke dette finner Johnson (1983) et uttrykk for den kritiske grenseprisen og han kan da igjen regne ut optionsverdien for en amerikansk salgsoption på et underliggende som ikke betaler utbytte.

4.2.8 Integralligningsmetoden - Ju (1998)

Et stort fremskritt i prisingen av amerikanske optioner har utviklet seg med integralrepresentasjonen av forskjellen mellom den amerikanske optionen og en tilsvarende europeisk option på grunn av Kim (1990), Jacka (1991) og Carr et. al (1992). Man kan således finne prisen på en amerikansk salgsoption ved hjelp av en europeisk salgsoption pluss en integralrepresentasjon av premien ved tidlig utøvelse. Denne gevinsten fra tidlig

utøvelse avhenger av den optimale utøvelsesgrensen, som er løsningen av en ikke lineær integralligning i forhold til en grensebetingelse. Opsjonsprisen har en eksplisitt representasjon, mens utøvelsesgrensen på den andre siden er implisitt definert ved integralligningen så en rekursiv numerisk prosess er nødvendig for å løse utøvelsesgrensen og opsjonsprisen (Kim 1990 og Broadie og Detemple 1996).

Integralrepresentasjonen er nøyaktig, men innebærer å finne grensefunksjonen for så å regne prisen på den amerikanske opsjonen. Huang et. al (1996) foreslår å approksimere integralene i både integralpremierepresentasjonen og integralligningen til grensefunksjonen ved stykkevis konstante funksjoner. Ju (1998) på den andre siden foreslo å approksimere grensen ved delvis eksponentialfunksjon. Jeg vil ikke gå videre inn på disse metodene.

4.3 Numeriske tilnærminger

4.3.1 Introduksjon

Dette avsnittet tar for seg ulike numeriske prisingsmetoder for amerikanske opsjoner. Numeriske metoder er mer fleksible enn analytiske metoder, som betyr at man kan bruke numeriske metoder for å finne opsjonspriser for opsjonstyper som man ikke har en analytisk tilnærming til. Noen numeriske metoder vil være mer intuitive og derfor enklere å forstå.

En ulempe med numeriske metoder er at man må ha mange gjentakelser for å få noenlunde gode tilnærminger, men med dagens tilgjengelige datakraft trenger ikke dette å være veldig problematisk. I tillegg vil den kritiske grenseverdiens singulære oppførsel rundt forfall føre til at de fleste numeriske metoder får problemer med å finne nøyaktig pris i dette området (Zhu 2006).

Man kan dele numeriske metoder inn i metoder som tar utgangspunkt i Black og Scholes (1973) sin prisingsformel og metoder basert på risikonøytral verdsettelse. Fra førstnevnte kategori er endelig differansemetoder spesielt kjente. Disse metodene ble først introdusert for opsjonsprisingsformål av Brennan og Schwartz (1978). Lett forklart er dette numeriske teknikker for å løse partielle differensialligninger. Videre i oppgaven vil jeg fokusere på den sistnevnte kategorien, og metodene jeg vil se nærmere på under hører alle under denne kategorien.

4.3.2 Minste kvadraters metode - Longstaff og Schwartz (2001)

For å forstå intuisjonen bak denne metoden kan man tenke at en holder av en amerikansk opsjon sammenligner avkastningen fra umiddelbart å utøve retten sin med forventet avkastning fra å fortsette å holde opsjonen. Opsjonsholder vil da umiddelbart utøve opsjonen, hvis avkastningen her er høyest. Dette gjør at optimal utøvelsesstrategi blir bestemt av den betingete forventningen av avkastningen ved å fortsette å holde opsjonen i live. Innsikten ved denne metoden er at den betingede forventningen kan estimeres ved hjelp av minste kvadraters metode. Ved å estimere den betingede forventningsfunksjonen for hvert utøvelsestidspunkt, finner man optimal utøvelsesstrategi for hver prisbane. Slik kan amerikanske opsjoner verdsettes nøyaktig ved hjelp av simulering. Teknikken kalles minste kvadraters Monte Carlo metode (LSM). Metoden er enkel, siden det eneste som kreves er en minste kvadraters regresjon.

4.3.3 Den binomiske modellen - Cox et al. (1979)

Den Binomiske metoden er den mest brukte numeriske metoden for prising av amerikanske opsjoner. Modellen er basert antakelsen om fravær av arbitrasje og at underliggende er en binomisk stokastisk variabel som realiseres i diskret tid. Det antas konstant risikofri rente, som man kan låne hvor mye man vil til og at det ikke er noen transaksjonskostnader, skatter eller marginkrav.

Den grunnleggende ideen

For å forstå intuisjonen bak metoden viser jeg her til eksempelet som Cox et. al (1979) presenterte i artikkelen deres. De la frem et ukomplisert eksempel der man antar at nåværende aksjekurs, S_0 , er 50 kr og at verdien på aksjen i slutten av perioden, S_T , enten må være 25 kr eller 100 kr. En kjøpsopsjon med utøvelseskurs, K , på 50 kr er tilgjengelig i markedet med forfall i slutten av perioden. Det er mulig å låne til en rente på 25 %. Den eneste informasjonen som mangler er nåværende pris på denne opsjonen, C . Hvis arbitrasjemuligheter ikke skal være mulig å oppnå, påstår forfatterne at gitt denne informasjonen alene vet man hva verdien på kjøpsopsjonen må være. Det konstrueres et eksempel på en portefølje hvor man utsteder tre kjøpsopsjoner, kjøper to aksjer til 50 kr hver og låner 40 kr til 25 % rente som blir betalt tilbake ved perioden slutt. Disse posisjonene gir en sikrer portefølje uansett hva utfallet for underliggende blir. Dette gjør at summen av posisjonen må være null, for at risikofrie arbitrasjemuligheter ikke skal eksistere.

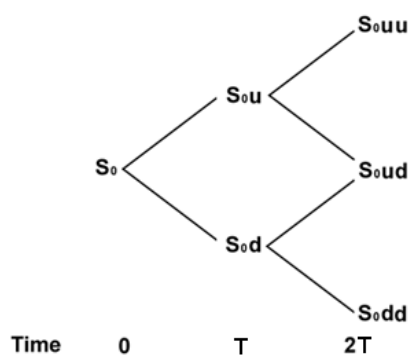
$$3C - 100 + 40 = 0$$

Som gir oss en opsjonspris på: $C = 20$

En høyere pris vil gi porteføljen over en sikker gevinst, og en lavere pris vil gi sikker gevinst til en tilsvarende portefølje med motsatte posisjoner.

De finner altså at alt man trenger for å finne prisen på opsjonen er utøvelseskurs, prisen på underliggende, bevegelsen i prisen på underliggende og den risikofrie renten. Man trenger ikke å vite hva sannsynligheten for ulike bevegelser i underliggende er.

Metoden deler tiden opp i intervaller, og over hvert intervall kan prisen på underliggende enten øke eller synke med tilhørende sannsynligheter. Aksjekursen kan over hver periode ha to ulike avkastningsmønstre; (u-1) med sannsynlighet p og (d-1) med sannsynlighet $(1-p)$.



Figur; illustrerer et to-periodisk binomisk tre.

4.3.4 Monte Carlo simulering for amerikanske opsjoner - Broadie and Glasserman (1997)

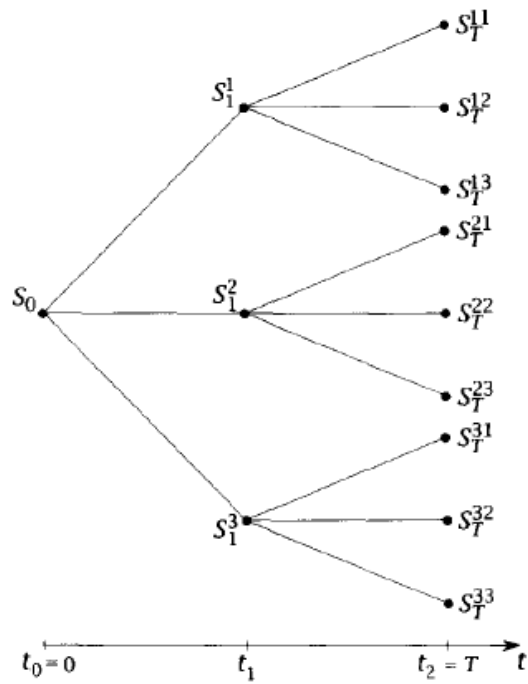
Monte Carlo metoder ble først introdusert for opsjonsprising i 1964 av David B Hertz, da for europeiske opsjoner. For prising av amerikanske opsjoner blir metoden mer kompleks enn for tilsvarende europeiske opsjoner. Retten til å utøve opsjonen til ethvert tidspunkt før forfall gjør at man ikke lenger bare estimerer den neddiskonterte forventete verdien av sluttavkastningen. Vanligvis vil simuleringene være framoverskuende, det vil si at prisbaner blir simulert fremover i tid. Men algoritmer for prisingsprosedyrer for derivater med tidlig utøvelsesegenskaper vil gå bakover. Dette kommer av at utøvelsesstrategier ved forfall er uproblematisk og løse. Ved å fortsette å jobbe bakover i tid vil man kunne bestemme pris og

optimal utøvelsesgrense. Det er slik vanlige tre-modeller løser problemet med prising av amerikanske opsjoner. Problemet ved å bruke simulering for å prise amerikanske opsjoner stammer altså fra vanskeligheten i å bruke framoverskuende metoder for å løse et problem som krever bak-overskuende metoder for å løses (Broadie og Glasserman 1997).

Flere forskere har likevel gjennom tiden lett etter metoder for å bruke Monte Carlo metoden også for amerikanske opsjoner. Fra Boyle et. al fremgår det at det var Tillet (1993) som først fant en metode for å få Monte Carlo til også gjelde for amerikanske salgsoptjoner, senere har også både Barraquand og Martineau (1995) og Broadie and Glasserman (1997) lyktes i det samme. Jeg vil videre fokusere på sistnevnte metode, og bruke denne i sammenligning med de andre prisingsmetodene (Broadie og Glasserman 1997)

Broadie og Glasserman (1997) foreslo en algoritme basert på simulerte tre. Forfatterne påstår at det ikke finnes noen generell metode for å produsere forventningsrette simulasjonsestimatorer for amerikanske opsjonsverdier. For å håndtere dette problemet utviklet de to estimatorer. Hvorav det ene estimerer er en overestimering og den andre er en underestimering av den sanne prisen. Begge estimatene er igjen asymptotisk forventningsrette og konvergerer til den sanne prisen. Et gyldig konfidensintervall for den sanne verdien av opsjonen oppnås ved en kombinasjon av disse to estimatene.

Disse estimatene er basert på simulerte tre hvor man har b antall grener ved hver node. Under kan man se en illustrasjon av et slikt tre hvor man har tre grener ved hver node. Man kan også merke seg at de ulike tilstandene bare avhenger av de nodene som de er knyttet til. Dette betyr at S_T^{33} i dette tilfellet bare avhenger av S_1^3 .



Figur 8: Figuren illustrerer utviklingen i prisen på et underliggende aktivum ved en Monte Carlo simulering.

I sin enkleste form er metoden begrenset til å prise derivater med et gitt antall utøvelsesmuligheter. Nødvendig datakraft som trengs øker eksponentielt i antall mulige utøvelsestidspunkt.

5. Sammenligning av ulike prisingsmetoder

I dette kapittelet vil jeg sammenligne ulike approksimeringene for prisen på amerikanske salgsoptaksjoner. Først vil jeg analysere ulike positive og negative egenskaper ved de ulike prisingsmetodene, for deretter å se på et numerisk eksempel hvor nøyaktighet og tidsbruk vil være i fokus. Som nevnt tidligere i oppgaven vil jeg i den numeriske sammenligning ta utgangspunkt i eksempelet som Zhu presenterte i artikkelen sin. Det vil først og fremst være viktig å vurdere de ulike tilnærmingene opp mot Zhus prisingsmodell, men det er også interessant å se disse i forhold til hverandre.

Det som hovedsakelig er viktig i sammenligningsprosessen er nøyaktigheten og tidsbruken til prisingsmetoden. Videre vil også kompleksiteten av metoden, hvor oversiktlig den er, dens fleksibilitet i forhold til også å kunne anvendes på andre derivater og nødvendig lagringsplass ha betydning. Det vil også være interessant om metoden gir en tilnærming av den optimale utøvelsesgrensen.

Først analyseres et utvalg av analytiske tilnærminger og deretter blir en analyse av de numeriske metodene fortatt. Innad i disse to kategoriene er det flere fellesnevnerer, så det virker mest hensiktsmessig å gjøre det på denne måten. Tilslutt blir de to kategoriene analysert opp mot hverandre og igjen opp mot Zhus prisingsmetode.

5.1 Analyserer ulike analytiske tilnærmingemetoder

Det som har drevet forskere til å finne analytiske approksimeringer for amerikanske salgsoptaksjoner er trolig den beskjedne datamaskinkraften som trengs. Selv om analytiske metoder ikke alltid er mer nøyaktige enn eksisterende numeriske metoder er de mye brukt på grunn av sin enkelhet. Så lenge feilene i prisingsmetodene ikke er for store og så lenge feilene er systematiske så vil disse analytiske metodene ha en viktig plass i handlepraksisen, da de signifikant forenkler prisingsprosessen.

Bjerksund og Stensland (2002) er en intuitiv og oversiktlig prisingsmetode, den gir et ikke-kompleks uttrykk for den optimale utøvelsesgrensen. Minimal datakraft og lagringskapasitet er nødvendig, og metoden gir rask svar. Videre kan det også nevnes at metoden er mer nøyaktig enn den kvadratiske metoden (Espen Gaarder Haug, 2007). Når man sammenligner metoden med andre tilnærminger er det viktig å huske at denne approksimeringen

representerer en nedre grense enn den sanne opsjonsverdien, og dermed vet man fortegnet av approksimeringsfeilen. Dette er mulig for meglere å ta hensyn til i prisingsprosessen, og vil derfor være mindre problematisk enn hvis man har tilfeldige feil av samme grad. Det finnes metoder som er mer nøyaktige, men som jeg vil komme inn på senere vil dette gå på bekostning av tidsbruk og nødvendig lagringskapasitet. Videre kan metoden sies å være fleksibel da den i tillegg til salgs- og kjøpsopsjoner også kan brukes i tilfellet hvor underliggende betaler utbytte.

Den kvadratiske approksimeringen av **Barone-Adesi and Whaley(1987)** går også veldig rask og gir en god tilnærming på opsjonsverdien. Også denne metoden er verdifull når den sammenlignes med andre metoder i forhold til nøyaktighet og tidsbruk. Den kvadratiske approksimeringen ble introdusert som et alternative for numeriske prisingsmetoder. Metoden er nøyaktig og krever mindre datakraft enn den binomiske-, sammensatte opsjoners- og endelig differanse metoden. Å bestemme tidlig utøvelsesretten er en iterativ tilnærming og dette gjør den kvadratiske metoden mer dataintensiv enn den generelle Black Scholes metoden. En annen fordel med metoden er at den også kan brukes til å prise opsjoner på råvarer i tillegg til opsjoner hvor underliggende er aksjer. Som jeg var inne på i beskrivelsen av metoden settes det ene leddet lik null. Dette leddet vil være tilnærmet null for korte eller lange kontrakter, men for kontrakter med mellomlang forfallstid kan det å sette dette leddet lik null føre til feilprising. Dette vil, som man kan se fra eksempelet under, føre til at nøyaktigheten ikke er av samme grad for alle ulike opsjoner.

Metoden av **Geske og Johnson (1984)** gir en lett forståelig tilnærming av prisingsproblemet. Forfatterne viser til at nøyaktige verdier kan oppnås selv med salgsopsjoner som er begrenset til å ha et fåtall diskrete utøvelses tidspunkt. Ved å velge flere mulige utøvelsespunkt blir metoden mer nøyaktig (ikke uniform konvergens), men forfatterne oppga at tre punkter er nok til å få en tilfredsstillende nøyaktighet. Metodene ovenfor er svært nøyaktige, men de kan ikke gjøres mer nøyaktige ved å øke en variabel. Dette er derfor interessant med denne metoden, men som det kommer frem i artikkelen deres blir metoden for kompleks ved å øke antall utøvelsespunkt og muligens derfor ikke veldig hensiktsmessig. Kritikken mot metoden deres har vært at det ikke nødvendigvis er best at disse valgte utøvelsespunktene er av samme intervallstørrelse og at dette kan føre til feilaktig prisingstilnærming. Metoden kan brukes i tilfellet hvor det underliggende betaler utbytte. Selv om metoden gir en god fremstilling av selve problemet en holder av en amerikansk salgsopsjon står ovenfor og kan

sies å ha en viss grad av fleksibilitet, vil jeg her konkludere med at de to overstående metodene vil utkonkurrere den grunnet deres høye nøyaktighet og lave tidsbruk.

Randomisering av **Carr (1998)** er en rask og effektiv analytisk metode for å prise amerikanske salgsopsjoner. Metoden har den fordel av den kan brukes til å prise et stort utvalg av derivater. I tillegg kan man bruke metoden i tilfellet hvor underliggende har dividendeutbetalinger. Metoden gir også en analytisk approksimering av den optimale utøvelsesgrensen, som er interessant og nyttig. For store verdier av n vil verdien av denne randomiserte amerikanske opsjonen bli tilnærmet den sanne verdien. Men selv om dette virker intuitivt, vil ikke Erlang-fordelingen finne enkle begrep for den n -te approksimeringen. Prisingsformelen blir fort veldig kompleks og tidkrevende.

Numeriske sammenligning fra **Broadie og Detempler (1996)** viser at både LUBA og LBA kan rask regnes ut, og at LUBA som tar for seg både en nedre og en øvre grense gir den beste tilnærming til opsjonsverdien av de to. LUBA har den fordel at den gir både en nedre og en øvre grense for opsjonsprisen og i tillegg gir den en nedre grense for kritisk utøvelsesgrense. Dette gjør at metoden er intuitiv og enkel og forstå. I tillegg er den nøyaktig og datamaskineffektiv. En negativ side ved disse metodene som Broadie og Detempler finner er at de ikke konvergerer, det er altså ikke noen parameter som man kan øke som vil føre til at man får en høyere grad av nøyaktighet. Det vil derimot være mulig å øke nøyaktigheten ved finne en bedre tilnærming til grensene. Metoden kan også brukes i tilfellet hvor det underliggende aktivum har dividendeutbetalinger.

Metoden **Johnson (1983)** presenterte gir en enkel og intuitiv approksimering til den amerikanske opsjonsprisen. Den tar også som metoden over utgangspunkt i en øvre og nedre grense, og gir i tillegg et uttrykk for den kritiske utøvelsesgrensen. Dette er som nevnt tidligere interessant, og fører til at modellen blir oversiktlig og forståelig. Metoden gjelder bare for prising av amerikanske opsjoner i tilfellet hvor det underliggende aktivum ikke betaler utbytte, og kan derfor ikke sies å ha en høy grad av fleksibilitet. I følge numeriske resultater i artikkelen er metoden nøyaktig, men den blir mindre nøyaktig hvis man har en høy risikofri rente (over 17 %). Igjen, så lenge dette er kjent kan man benytte andre prisingsmodeller i tilfeller hvor risikofri rente er svært høy.

5.1.1 Numeriske sammenligninger

Som det fremgår fra analysen over er Bjerksund og Stensland (2002) og den kvadratiske metoden svært nøyaktige i forhold til nødvendig tidsbruk og lagringskapasitet. Dette gjør at det er av interesse å sammenligne disse to metodene i forhold til tid og nøyaktighet.

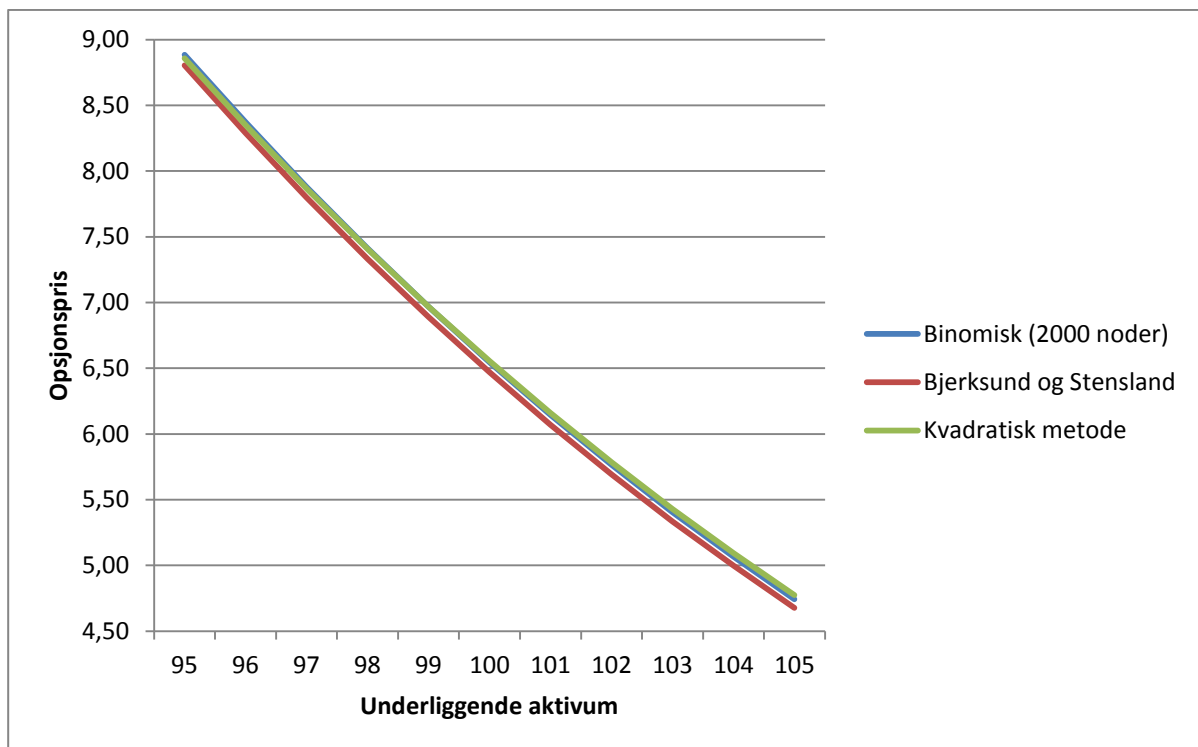
Siden jeg ikke fikk ut noe eksakt svar for verdien på den amerikanske opsjonen fra Zhus modell, sammenligner jeg her de ulike prisingsmodellene med den binomiske prisingsmodellen med et høyt antall noder (2000). Likevel vil jeg gå ut ifra eksempelet som Zhu presenterte og ulike varianter av dette (se tabell 1).

Volatilitet	30 %
Risikofri rente	10 %
Utøvelsespris	100
Løpetid	0,5 år, 1 år og 2 år
Pris på underliggende aktivum	95 til 105
Dividende	0

Tabell 1: Variabelverdier for de numeriske sammenligningene

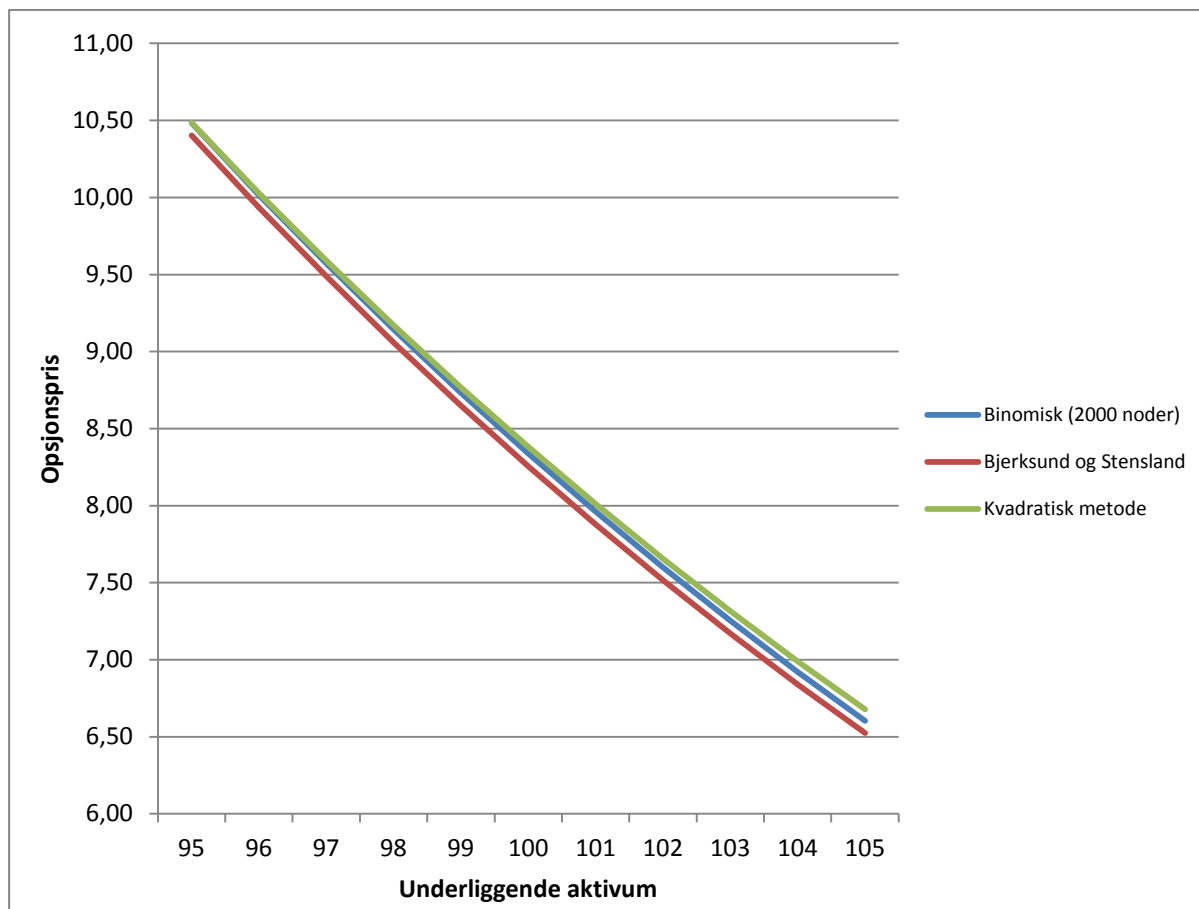
Det er av interesse å sammenligne opsjoner med forskjellig løpetid siden den kvadratiske metodens nøyaktighet vil avhenge av løpetiden. Jeg presenterer derfor tre eksempler hvor opsjonen som verdsettes har løpetid på henholdsvis 0,5 år, 1 år og 2år. I hvert eksempel studeres opsjonsprisen i forhold til prisen på underliggende. I eksemplene under vil prisen på underliggende strekke seg fra 95 til 105. Jeg vil da også se om metodenes nøyaktighet varierer i forhold til om opsjoner er «in the money», «out of the money» eller «at the money».

Beregningen av opsjonsprisen både ved Bjerksund og Stensland (2002) og den kvadratiske metoden tok i underkant av et sekund, så hovedfokus i sammenligningen mellom disse to metodene vil være nøyaktighet. Utregningen av den binomiske metoden med 2000 noder tok over 10 minutter.

Eksempel 1: Tid til forfall er 0,5 år

Figur 9 Opsjonsverdien i forhold til ulik pris på underliggende aktivum

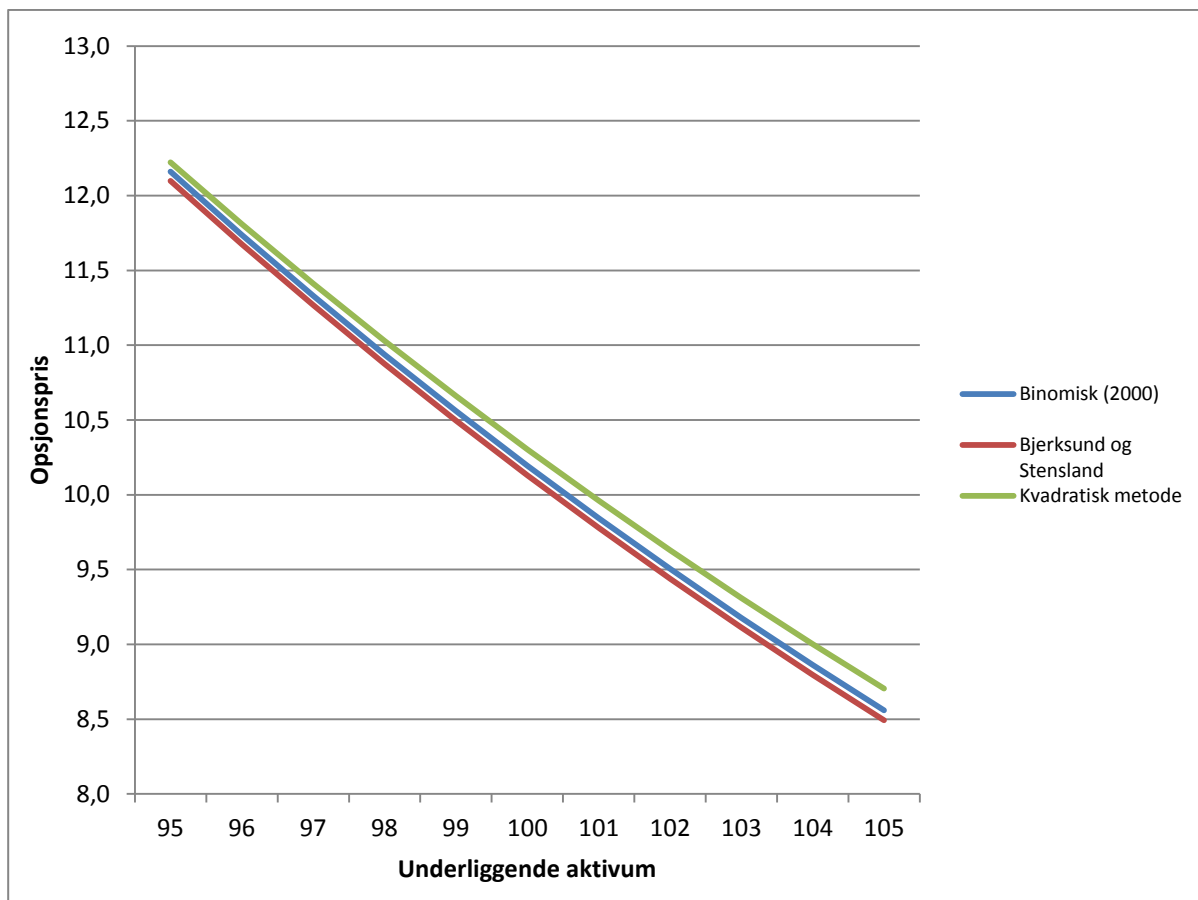
Approximeringsfeilen til den kvadratiske prisingsmetoden vil være lavest for opsjoner med lange og korte løpetider. Eksempelet over illustrerer priser for opsjoner med kort løpetid, det er derfor ikke overraskende at den kvadratiske metoden i dette eksempelet er svært nøyaktig. Det fremkommer av figuren at den kvadratiske metoden nærmest sammenfaller med den binomiske metoden, det er følgelig vanskelig å skille dem. I tillegg er det interessant å observere at prisingsmodellen til Bjerksund og Stensland (2002) representerer en nedre grense for opsjonsverdien. Deres metode vil derfor gi en konsistent undervurdering av opsjonsprisen. En slik konsistent undervurdering er ikke like problematisk som tilfeldige feil fordi det vil være mulig å ta en slik konsistent undervurdering i betraktning i prisingsprosessen.

Eksempel 2: Tid til forfall er 1 år

Figur 10 Opsjonspris i forhold til prisen på underliggende aktivum

Fra figur 10 kan det observeres at Bjerksund og Stensland (2002) også her gir en undervurdert opsjonspris, denne feilen i opsjonsprisen ser ut til å være noenlunde konstant over hele spekteret av aksjepriser. Dette er nyttig å vite og vil gjøre det lettere å ta hensyn til denne approksimeringsfeilen i en prisingsprosess. Det kan observeres at den kvadratiske metoden er noe mindre nøyaktig i dette eksempelet, noe som kommer av at man her har en lengre løpetid på opsjonen. Det observeres fra figur 10 at når opsjonen er «in the money» og «at the money» er den kvadratiske metoden mer nøyaktig, enn for opsjoner som er «out of the money». Ved å studere figur 9 og figur 10 kan en se at opsjonsprisen er betydelig høyere for opsjoner med løpetid på ett år i forhold til opsjoner med løpetid på et halvt år. Dette kommer av at lenger tid til forfall indikerer høyere grad av usikkerhet.

Eksempel 3: Tid til forfall er 2 år



Figur 11 Opsjonspris i forhold til prisen på underliggende aktivum

Fra figur 11 kan man se at Bjerksund og Stensland sin metode ligger nærmest den Binomiske metoden og kan derav sies å være mest nøyaktig i dette tilfellet. Videre kan det observeres at Bjerksund og Stenslands metode også her ligger lavere enn den binomiske noe som illustrerer den symmetriske approksimeringsfeilen. Det fremgår også av figur 11 at den kvadratiske metoden er mer nøyaktig når aksjekursen er lavere enn utøvelseskursen. Jo høyere prisen på underliggende blir, jo lenger blir differansen mellom den kvadratiske metoden og den binomiske. Videre kan man observere at ved to år til forfall er prisen på opsjonen høyere enn ved henholdsvis 0,5 år og 1 år.

5.1.2 Diskusjon rundt de analytiske metoden

Tidligere forskning viser til at det ikke er konsistent hvilken av de analytiske metodene som er best og under hvilke omstendigheter de er best (Broadie og Detempler 1996). Dette kan

gjøre det vanskeligere å konkludere med hvilken av metodene som er mest hensiktsmessig. I tillegg til at nøyaktigheten varierer avhengig av verdiene på de ulike variablene som vi ser fra eksemplene over, er det et komplekst bilde av ulike aspekter som vil påvirke hvilke metode man foretrekker. Men, man kan trekke frem nøyaktigheten og dataeffektiviteten ved den kvadratiske metoden og prisingsmetoden til Bjerksund og Stensland (2002), hvor den sistnevnte i kan sies å være noe mer konsistent når det gjelder nøyaktighet. Dette kan man se fra eksemplene over, hvor man ser at den kvadratiske metoden er svært nøyaktig i figur 9. Dette kommer av at her er opsjonens levetid svært kort. Også i figur 10 er opsjonens levetid kort, men her noe lenger og derav er den kvadratiske metoden noe mindre nøyaktig i dette tilfellet. I figur 11 er opsjonens løpetid 2 år, og her er den kvadratiske metoden mer unøyaktig. I tillegg varierer nøyaktigheten også med prisen på det underliggende aktivum.

Videre kan man merke seg den oversiktlige presentasjonen av selve problemstillingen man står ovenfor som holder av en amerikansk salgsoptjon, som Geske og Johnson (1984) gir. LUBA av Broadie og Detemple (1996) og metoden Johnson (1983) publiserte gir på sin side en oversiktig fremstilling av øvre og nedre grenser for opsjonsverdien, i tillegg til utviklingen i den optimale utøvelsesgrensen i forhold til tiden. Men hvis man er på utkikk etter en analytisk metode som er fleksibel i den forstand at den kan brukes til flere derivater, vil randomisering av Carr et. al (1998) være mest hensiktsmessig. Likevel kan man ikke konkludere før man har sett nærmere på de numeriske metodene.

5.2 Numeriske tilnæringsmetoder

Som nevnt tidligere er numeriske metoder generelt mer fleksible enn analytiske metoder, man kan bruke numeriske metoder for å finne opsjonspriser for opsjonstyper hvor man ikke har en analytisk tilnærming for å finne løsningen. Metodene kan også være mer intuitive og enklere å forstå. Jeg vil under gå nærmere inn på aspekter ved den binomiske metoden, minste kvadraters metode og Monte Carlo. Først vil jeg foreta en generell sammenligning, deretter vil jeg ved et numerisk eksempel sammenligne nøyaktighet og tidsbruk.

Longstaff og Schwartz (2001) sin prisingsmetode er en enkel, men betydningsfull tilnærming til amerikansk opsjonsverdi gjennom simulering. Minste kvadraters metode er fleksibel, i tillegg til å prise både salgs- og kjøpsopsjoner, kan den også brukes på Asiatiske og Bermuda opsjoner. En videre fordel med denne metoden er at den er praktisk å anvende i situasjoner hvor opsjonsverdien avhenger av flere faktorer. Metoden er datamaskineffektiv

og nøyaktigheten er, i følge Longstaff og Schwartz, på lik linje som for de endelige differansemetodene. Minste kvadraters metode er kjent for å generere ikke-optimale utøvelsesbestemmelser når den skal bestemme det optimale stoppetidspunktet. Konsekvensen er at prisen på opsjonen ved denne metoden blir undervurdert. Men som jeg var inne på i avsnittet om Bjerksund og Stensland (2002) vil en systematisk approksimeringsfeil ikke være like kritisk som en tilfeldig approksimeringsfeil av samme orden. Dette kommer av at det vil være mulig å ta hensyn til dette i en prisingsprosess, og feilen kan dermed bli noe nedjustert.

Den binomiske prisingsmetoden av **Cox et. al (1979)** har flere fordeler. Den er først og fremst enkel å forstå og dermed pedagogisk nyttig. I tillegg er det mulig, for et begrenset antall delintervall, og finne løsning uten tilgang på datamaskin. Metoden er rask når man ikke deler perioden inn i for mange delintervall. Likevel vil det være mulig å oppnå høyere nøyaktighet, ved å inkludere flere tidsintervall. Selv om dette går på bekostning av tidsbruken er det interessant å vite at jo høyere antall perioder man benytter jo mer nøyaktig svar vil man oppnå. Siden denne metoden konvergerer mot sann verdi når man øker antall perioder, har denne metoden vært mye brukt som sammenligningsgrunnlag for andre modeller. Kan se dette fra for eksempel Broadie og Detempler (1996), hvor de sammenligner ulike prisingsmetoder for amerikanske salgsoptjoner og bruker den binomiske metoden med et høyt antall delperioder som «eksakt» verdi. Men nøyaktigheten kommer med en kostnad, Broadie og Detempler (1996) sa at hvis man øker antall steg med en 10 faktor så vil tidsbruken øke med en 100 gang. I tillegg til å være gyldig for prising av europeiske optjoner, kan den både anvendes for amerikanske salg- og kjøpsoptjoner, med og uten dividendeutbetalinger.

Monte Carlo av **Broadie og Glasserman (1997)** er en svært fleksibel prisingsmetode for amerikanske salgsoptjoner. Metoden kan, i likhet med minste kvadraters metode, brukes for å prise kompliserte realoptjoner. Et eksempel kan være problemet ledelsen i et firma står ovenfor ved å ha valget mellom å starte et prosjekt, utvide eller «outsorce» en eller flere deler, eller å forlate prosjektet. Metoden kan altså brukes på problemer med flere enn to kilder til usikker. Selve metoden kan virke oversiktlig og forståelig, men siden simuleringen må til både for å finne den kritiske grenseprisen og for å finne verdien blir metoden fort komplisert. For å få en nøyaktig løsning må et høyt antall grener og utøvelsesmuligheter velges, og da blir metoden svært tidsintensiv. Men når det gjelder tidsbruk kan man merke seg at konvergensen vil for Monte Carlo metoder typisk være uavhengig av antall

tilstandsvariabler, mens konvergensens ved den tre-modeller vil normalt være eksponentiell i antall tilstandsvariabler.

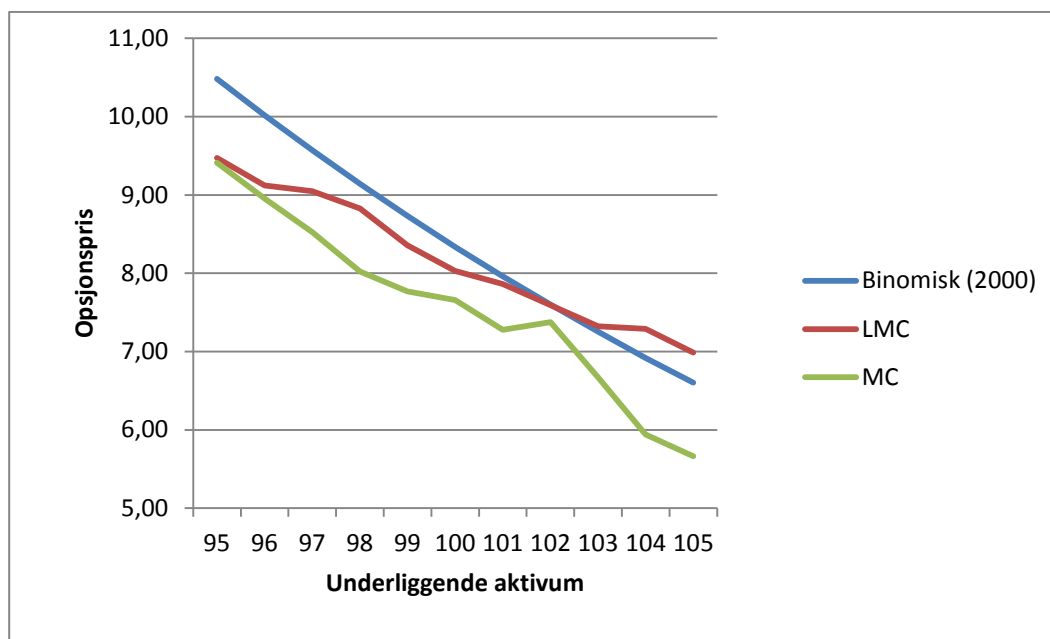
5.2.1 Numeriske sammenligninger

Jeg vil her presentere et eksempel hvor minste kvadraters metode (LMC) og Monte Carlo simulering (MC) sammenlignes opp mot den binomiske metoden med et høyt antall noder (2000). De inngående variablene vil være de samme som ble brukt i eksemplene over (se tabell 1), men i eksempelet under vil jeg bare ta for meg opsjoner med løpetid på ett år.

Når man skal finne verdien av opsjonen ved hjelp av minstekvadraters metode må man velge både antall stier av simuleringer i tillegg til antall utøvelsesmuligheter. I artikkelen av Longstaff and Schwartz (2001) valgte de henholdsvis 50 000 og 100. Dette ga nøyaktige resultater. I mine resultater valgte jeg noe lavere verdi for antall stier for å begrense utregningstiden noe, men samme antall utøvelsesmuligheter. Også dette ga gode tilnærminger til prisen. Det kan være interessant å merke seg at ved å øke antallet vil simuleringene ta lenger tid, men igjen vil man oppnår en høyere grad av nøyaktighet. Siden aksjeprisen ved de ulike stiene er simulert vil hver utregning gi noe forskjellig svar. Mitt valg av stier og utøvelsesmuligheter gir differanse på rundt $0,03$ for de ulike approksimeringene. Jo høyere antall stier som velges jo mindre vil forskjellen for hver simulering. I eksemplene under er beregningene foretatt med 4000 stier og 100 utøvelsesmuligheter. Beregningene ved minste kvadraters metode tok i underkant av ti minutter, men ved å velge et lavere antall stier og utøvelsesmuligheter gikk beregningene raskere.

For å beregne opsjonsprisen ved Monte Carlo metoden må man velge antall grener og antall utøvelsesmuligheter. Jeg valgte disse til henholdsvis 5 og 3. Ved dette valget tok beregningene av opsjonsprisene et sekund. Ved å øke antall grener og utøvelsesmuligheter erfarte jeg at resultatene ble mer nøyaktige, men utregningen ble da svært tidsintensiv.

Eksempel 1: Sammenligner den binomiske metoden (2000), LMC og MC



Figur 12 Opsjonspris i forhold til prisen på underliggende aktivum

Fra figur 12 fremgår det at minste kvadraters metode er noe mer nøyaktig enn Monte Carlo metoden, for de valgte variablene. Det kan være nyttig å merke seg at minste kvadraters metode var noe mer tidkrevende siden et høyt antall utøvelsesmuligheter og stier ble valgt. Det er åpenbart fra tabell 12 at LMC og MC ikke er like nøyaktige som de analytiske metodene i eksemplene over. Likevel, vil det være mulig å øke nøyaktigheten av MC og LMC hvis man aksepterer at beregningene tar noe mer tid. Dette kan man ikke gjøre for hverken den kvadratiske metoden eller Bjerksund og Stenslands metode. Opsjonsprisene for LMC og MC er ikke en rett linje i forhold til underliggende aktivum, og dette kommer av at prisene ble regnet ved simuleringer.

5.2.2 Diskusjon rundt de numeriske metodene

Alle de tre overforstående metodene er viktige i opsjonsprisingssammenheng. Jeg vil først peke på nøyaktigheten ved den binomiske metoden og dens oversiktlige struktur, som begge er egenskapene har bidratt til at metoden er sterkt representert innen opsjonsprisingsteori. Metodens nøyaktighet har ført til at en rekke forskere har brukt metoden som en pekepinn for eksakt løsning på problemet. Et problem med denne metoden er at nøyaktigheten kommer med en kostnad da den er veldig tidkrevende. Dette kan man se fra de numeriske

sammenligningene i avsnittet over. Men man kan alltid velge et lavere antall noder, hvis man ønsker raskere resultat. Selv med et lavt antall noder (50) var den binomiske metoden mer nøyaktig enn de to andre numeriske metodene i eksempelet over.

Det som skiller både minste kvadraters metode og Monte Carlo fra den binomiske er at disse metodene er mer fleksible da de er mer hensiktsmessige for å prise derivater hvor det er mer enn en kilde til usikkerhet. Både den binomiske og endelig differansemetodene er ikke praktiske i situasjoner hvor verdien på opsjonen avhenger av flere faktorer. I følge Longstaff og Schwartz (2001) er dette grunnen til at firmaer som priser og utsteder amerikanske opsjoner bruker en enkel en-faktor modell, selv om det er klare indikasjoner som tilsier at det er flere faktorer som driver prosessen.

Å analysere de numeriske metodene er på samme måte som beskrevet over for de analytiske metodene en kompleks oppgave. Dette kommer av at de ulike metodene har forskjellige egenskaper og det vil være vanskelig å vite hvordan de ulike egenskapene skal vektlegges. Men ved å fokusere på tid og nøyaktighet alene vil den binomiske metoden være suveren over de to andre numeriske metodene.

5.3 Song-Ping Zhu (2006)

Ved å se på Zhus prisingsmodell i forhold til punktene beskrevet innledningsvis ser man at metoden har mange svake sider i forhold til eksisterende metoder. Metoden er en eksakt løsning av prisingsproblemet, derav er den helt nøyaktig. Videre gir den et eksakt uttrykk for den optimale utøvelsesgrensen, som igjen er svært verdifullt. Men metoden er tidkrevende, den krever mye lagringsplass og selve fremgangsmåten er svært kompleks. Som jeg har fått erfare er ikke metoden lett å implementere, i tillegg tar utregningene svært lang tid. Videre gjelder metoden bare for amerikanske aksjer uten dividendeutbetalinger. Dette fører til at man kan si at metoden ikke er særlig fleksibel. Som nevnt over krever meglere at selve prisingsprosessen går raskt. I en slik sammenheng vil ikke tidkrevende metode som Zhu presenterer her være gunstig og den har dermed liten praktisk verdi for investorer.

Likevel er det av stor interesse å vite den eksakte verdien av en opsjon, spesielt ved sammenligningsformål. På denne måten er det mulig å finne akkurat hvor nøyaktige eksisterende metoder er, eller vurdere nøyaktigheten til nye approksimeringer.

5.4 Felles resultater og konklusjon

Ved å analysere Zhu (2006) opp mot eksisterende approksimeringer for prisen på amerikanske salgsoptjoner erfarer jeg flere svakheter med Zhus eksakte prisingsmetode. Dette kommer av at det ikke bare er nøyaktighet som spiller en rolle i vurderingen. Selv om Zhus metode er nøyaktig, er den svært kompleks i tillegg til at den er tidkrevende og lagringsintensiv. For å finne en løsning kreves det i tillegg at man har tilgang på datamaskin med en sterk prosessor. Metoden er heller ikke like fleksibel som andre eksisterende approksimeringer.

Valget av metode vil hovedsakelig avhenge av prioriteten mellom tidsbruk og nøyaktighet. En mer nøyaktig metode er alltid bedre, gitt alt annet like. Men dette er ikke tilfellet hvis høyere nøyaktighet krever en uakseptabel kostnad i form av lang utregningstid. I mange situasjoner er rask utregning av opsjonsprisene veldig viktig. For eksempel krever forhandlere raskt å kunne prise tusenvis av kompliserte opsjonskontrakter. I dette tilfellet vil en tidkrevende og lagringsintensiv metode være ugunstig, selv om en slik metode gir en mer nøyaktig pris. Man vil derfor trolig være villig til å bytte bort noe av nøyaktigheten mot en metode som er raskere og har lavere lagringsbehov. Bjerksund og Stenslands (2002) prisingsmetode viste seg å være nøyaktig og rask. Selv om metoden deres ikke kan konkurrere mot Zhus metode eller den binomiske metoden når det gjelder nøyaktighet, fører den beskjedne tidsbruken til at den helt klart er en sterk rival til disse metodene. Det faktum at Bjerksund og Stensland konsistent undervurderer prisen gjør den enda mer konkurransedyktig.

Valget av metode vil videre også avhenge av hva man ønsker å oppnå ved metoden. Er man interessert i å ha et uttrykk for den optimale grenseverdien vil for eksempel LUBA av Broadie og Detempler (1996) være gunstig. Ønsker man derimot å prise derivater hvor det er mer enn en kilde til usikkerhet vil Monte Carlo eller minste kvadraters metode være nyttig. Fra analysen ser man at de numeriske metoder er mer fleksible enn analytiske, man kan bruke numeriske metoder for å finne opsjonspriser for opsjonstyper hvor man ikke har en analytisk tilnærming for å finne løsningen.

Hvilken kombinasjon av nøyaktighet, tidsbruk, fleksibilitet og oversiktighet man er på utkikk etter og hvordan man vurderer de ulike egenskapene vil avhenge av formålet ved bruken. Men jeg ønsker likevel å peke ut Bjerksund og Stenslands metode som svært gunstig

av den grunn at deres metode er både er nøyaktig og rask. Videre er også den binomiske metoden svært viktig. Den gir en svært nøyaktig tilnærming til prisen, i tillegg er metoden oversiktlig og intuitiv. Metoden har vært et stort bidrag innen opsjonsprisen, og flere forskere har jobbet videre med metoden og varianter av den.

6. Sammendrag og konklusjon

Ved å analysere Song-Ping Zhu (2006) eksakte prisingsmodell for amerikanske salgsoptjoner fant jeg at denne modellen er svært kompleks. Ikke bare kan den ved første blick virke svært komplisert, den er også tidkrevende og det kreves betydelig datakraft for å få ut en løsning fra modellen. Løsningen som Zhu presenterer består av en uendelig rekke, hvor Zhu erfarte at 30 ledd er tilstrekkelig for å oppnå en konvergent numerisk løsning. Selv hadde jeg bare datakraft til å regne ut de fem første leddene i rekken, hvorav utregningstiden for det siste leddet tok over 4 døgn.

Videre analyserte jeg Zhu sin løsning opp mot eksisterende approksimeringer, både analytiske og numeriske. I analysen var fokus nøyaktighet, tidsbruk, kompleksiteten av metoden, metodens oversiktighet, dens fleksibilitet i forhold til også å kunne anvendes på andre derivater og nødvendig lagringsplass. Ved å analysere Zhus metoden opp mot andre prisingsmetoder var det innlysende at den har flere svakheter. Selv om metoden er nøyaktig, er den svært kompleks, tidkrevende og lagringsintensiv. Videre kan ikke metoden sies å være fleksibel da den bare gjelder for amerikanske salgsoptjoner hvor underliggende ikke betaler dividende.

Zhus prisingsmetode er et gjennombrudd innen matematisk finans. Prising av amerikanske salgsoptjoner har lenge vært et sentralt uløst problem. Helt siden Black og Scholes i 1973 publiserte en eksakt løsning for europeiske optjoner har forskere lett etter en tilsvarende løsning for amerikanske salgsoptjoner. Likevel vil ikke Zhus prisingsmetode erstatte eksisterende metoder. Det vil være nødvendig med raske prisingsmetoder da meglere krever at det skal være mulig å raskt kunne prise tusenvis av kompliserte optjonskontrakter. I denne sammenhengen vil jeg peke på metoden til Bjerksund og Stensland (2002) som skiller seg ut på grunn av metodens lave tidsbruk og relativt høye nøyaktighet. Også den binomiske metoden er viktig. Metoden er svært nøyaktig, fleksibel og pedagogisk nyttig.

7. Appendiks

7.1.1 Fra ligningssett 1 til ligningssett 2

$$X^* = \frac{X}{X} \quad S^* = \frac{S}{X} \quad V^* = \frac{V}{X} \quad \tau^* = \tau \cdot \frac{\sigma^2}{2} = (T-t) \cdot \frac{\sigma^2}{2},$$

hvor variablene med notasjonen (*) er de dimensjonsløse variablene.

$$\frac{dS^*}{dS} = \frac{1}{X} \quad \frac{d\tau^*}{dt} = -\frac{\sigma^2}{2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} X \cdot \frac{\partial V^*}{\partial S^*} \cdot \frac{\partial S^*}{\partial S} = X \cdot \frac{\partial V^*}{\partial S^*} \cdot \left(\frac{1}{X} \right) = \frac{\partial V^*}{\partial S^*},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(X \cdot \frac{\partial V^*}{\partial S^*} \cdot \frac{\partial S^*}{\partial S} \right) = X \cdot \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial S^{*2}} \cdot \left(\frac{\partial S^*}{\partial S} \right)^2 + \frac{\partial V^*}{\partial S^*} \cdot \frac{\partial^2 S^*}{\partial S^2} \right) =$$

$$X \cdot \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial S^{*2}} \cdot \frac{1}{X^2} + \frac{\partial V^*}{\partial S^*} \cdot 0 \right) = \frac{\partial^2 V^*}{\partial S^{*2}} \cdot \frac{1}{X},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = X \cdot \frac{\partial V^*}{\partial \tau^*} \cdot \frac{\partial \tau^*}{\partial t} = X \cdot \frac{\partial V^*}{\partial \tau^*} \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right) = -\frac{\partial V^*}{\partial \tau^*} \cdot \left(\frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot X.$$

Ved å sette disse verdiene inn i ligning (1) oppnår man ligning (2)

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} V(S, \tau) + S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} V(S, \tau) - y \cdot S \cdot \frac{\partial}{\partial S} V(S, \tau) + y \cdot V(S, \tau) = 0$$

hvor variablene som inngår er de dimensjonsløse, men uten (*)

7.1.2 Fra ligningssett 2 til ligningssett 3.

Zhu introduserer her Landau transformasjonen; $x := \ln\left(\frac{S}{S_f(\tau)}\right)$,

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \left(\frac{1}{S} \right) \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{1}{S_f(\tau)},$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{S} \right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{S^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \left(-\frac{1}{S^2} \right) \right) = \frac{1}{S^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial \tau'} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{1}{S_f(\tau)} \cdot \frac{\partial S_f(\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial \tau} \cdot 1.$$

Ved å sette disse verdiene inn i ligning (2), og får man:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} V(x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, \tau) - (y-1) \left(\frac{\partial}{\partial x} V(x, \tau) \right) + y V(x, \tau) = \frac{1}{S_f(\tau)} \cdot \frac{d}{d\tau} S_f(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial x} V(x, \tau)$$

7.1.3 Fra ligningssett 4 til ligningssett 7:

Det man gjør er å derivere mht. p og deretter sette p lik null inn i uttrykket:

$$(1-p) \cdot \mathcal{L}[\bar{V}(x, \tau, p) - \bar{V}_0(x, \tau)] = -p \cdot \{ \mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] \}$$

Noe forenklet: $\mathcal{L}[\bar{V}(x, \tau, p)] - \mathcal{L}[\bar{V}(x, \tau, p)] \cdot p - \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)] + \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)] \cdot p =$
 $-p \cdot \{ \mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] \}$

Deriverer mht. p :

$$\mathcal{L}[\bar{V}_1(x, \tau, p)] - \mathcal{L}[\bar{V}_1(x, \tau, p)] \cdot p + \mathcal{L}[\bar{V}(x, \tau, p)] \cdot 1 + \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)] \cdot 1 =$$

$$- \left(\mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] \cdot 1 + \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] \cdot p \right)$$

Setter $p=0$:

$$\mathcal{L}[\bar{V}_1(x, \tau, 0)] + \mathcal{L}[\bar{V}(x, \tau, 0)] \cdot 1 + \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)] \cdot 1 = -\mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, 0), \bar{S}_f(\tau, 0)]$$

Introduserer en ny variabel: $\tilde{\mathcal{A}}(x, \tau, p) = \frac{1}{\bar{S}_f(\tau, p)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{S}_f(\tau, p) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}(x, \tau, p)$

$$\mathcal{A}[\bar{V}(x, \tau, p), \bar{S}_f(\tau, p)] = \mathcal{L}(\bar{V}) - \tilde{\mathcal{A}}(x, \tau, p)$$

Ved å sette denne ligningen inn i ligningen over får vi:

$$\mathcal{L}[\bar{V}_1(x, \tau, 0)] + \mathcal{L}[\bar{V}_1(x, \tau, 0)] \cdot 1 + \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)] \cdot 1 = -\mathcal{L}(\bar{V}_1(x, \tau, 0)) + \tilde{\mathcal{A}}(x, \tau, 0)$$

$$\mathcal{L}[\bar{V}_1(x, \tau, 0)] = \tilde{\mathcal{A}}(x, \tau, 0) - \mathcal{L}[\bar{V}_0(x, \tau)]$$

Litteraturliste

Barone-Adesi, G. og Whaley, R. (1987): «Efficient analytical approximation of American option values». *Journal of Finance*, 42: 301–320.

Bjerksund, P. og G. Stensland (2002): «Closed Form valuation of American options». *Scandinavian Journal of Management*, Vol. 9, Suppl.: 88-99.

Bjerksund, P. og G. Stensland (1993a): «Closed-form approximation of American options». *Scandinavian Journal of Management*, Vol. 9, Suppl.: 32-45.

Bjerksund, P. og G. Stensland (1993b): «American Echange Options and a Put-Call Transformation: A note». *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol 20, 9: 761-764.

Black, Fischer og Myron Scholes (1973): «The Pricing of Options and Corporate Liabilities». *Journal of Political Economy*, 81: 637—654.

Brennan, M. og Schwartz, E (1977): «The valuation of American put Options». *Journal of Finance*, 32: 449–462.

Broadie, M. og Detemple, J. (1996): «American option valuation: new bounds, approximations, and a comparison of existing methods». *The Review of Financial Studies*, 9: 1211–1250.

Broadie, M. og Glasserman, P. (1997): «Pricing American-Style securities using simulation». *Journal of economics and control*, 21: 1323-1352.

Bunch, D.S. og Johnson, H (2000): «The American put option and its critical stock price». *Journal of Finance*, 5: 2333–2356.

Carr, P (1998): «Randomization and the American put». *The Review of Financial Studies*, 11: 597–626.

Carr, P., Jarrow, R. og Myneni, R. (1992): «Alternative characterizations of American put options». *Journal of Mathematical finance*, 2: 87–106.

Chen, J. Chadam, L. Jiang, og W. Zheng (2005): «Convexity of the exercise boundary of the american put option on a zero dividend asset». *Mathematical Finance*, 18:185–197.

Cox, J., Ross, S. og Rubinstein, M. (1979): «Option pricing—a simplified approach». *Journal of Financial Economics*, 7: 229–263.

Ekstrøm, E. (2004): «Properties of American option prices. Stochastic Process». *Appl.* 114, 265-278.

Geske, R. og Johnson, H.E. (1984): «The American put option valued analytically». *Journal of Finance*, 39: 1511–1524.

Gukhal, C.R.(2001): «Analytical valuation of American options on jump diffusion process». *Journal of Mathematical finance*, 11: 97–115.

-
- Haug, E. G. (2007): «Option pricing formulas». (Mc.Graw Hill, US).
- Haug, E. G. og Haug J. (1996): «Implied Forward Volatility». Presented at the Third Nordic Symposium on Contingent Claims Analysis in Finance.
- Hon, Y.C. og Mao, X.Z. (1997): «A radial basis function method for solving options pricing model». *Journal of Financial Engineering*, 8: 31–49.
- Huang, H.-Z., Subrahmanyam, M.G. og Yu, G.G.(1996): «Pricing and hedging American options: a recursive integration method». *The Review of Financial Studies*, 9: 277–300.
- Jacka, S.D. (1991): «Optimal stopping and the American put». *Journal of Mathematical finance*, 1: 1–14.
- Johnson, H.E. (1983): «An analytical approximation for the American put price». *Journal of Finance. Quant.*, 18: 141–148.
- Ju, N. (1998): «Pricing an American option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function» *The Review of Financial Studies*, 11: 627–646.
- Kim, I.J.(1990): «The analytic valuation of American puts». *The Review of Financial Studies*, 3: 547–572.
- Longstaff, F. og Schwartz, E.S (2001): «Valuing of American option by simulation: a simple least-squares approach», *The Review of Financial Studies*, 14: 113–147.
- MacMillan, L. (1986): «Analytical approximation for the American put option». *Adv. Fut. Opt. Res.*, 1, 119–139
- Merton, R.C.(1973): «The theory of rational option pricing». *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4: 141–183.
- McKean, Jr., H.P. (1965): «Appendix: a free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics». *Industrial Management Review*, 6: 32–39.
- Wilmott, P., Howison, S. og Dewynne, J. (1995): «The Mathematics of Financial Derivatives». (CambridgeUniversity Press: Cambridge).
- Wu, L. and Kwok, Y.K. (1997): «A front-fixing finite difference method for the valuation of American options». *Journal of Financial Engineering*, 6: 83–97.
- Wall, C.T.C.(1972): «A Geometric Introduction to Topology», p. 57, (Addison-Wesley: Reading, MA).
- WIKIPEDIA. (2012a). Moneyness. Wikipedia. Tilgjengelig: <http://en.wikipedia.org/wiki/Moneyness> [Hentet dato: 11.05.2012]
- WIKIPEDIA. (2012b). Taylorekker. Wikipedia. Tilgjengelig: <http://no.wikipedia.org/wiki/Taylorrekke> [Hentet dato: 11.05.2012]
- WIKIPEDIA. (2012b). Arbitrasje. Wikipedia. Tilgjengelig: <http://no.wikipedia.org/wiki/Arbitrasje> [Hentet dato: 11.05.2012]

WOLFRAM ALPHA (2012). Closed-Form Solution. Wolfram Alpha. Tilgjengelig: <http://mathworld.wolfram.com/Closed-FormSolution.html> [Hentet dato 11.05.2012]

Zhu, S.-P. (2006b): «An exact and explicit solution for the valuation of Americanput options», *Quantitative Finance* 6(3): 229–242.