

NORGES HANDELSHØYSKOLE

Bergen, høsten 2007



Utredning i Finansiell Økonomi; investerings- og porteføljeanalyse

Veileder: Doktorand John Martin Nilsen

Fra Markowitz til Statens Pensjonsfond – Utland;

Porteføljevalg i teori og praksis

av

Morten Løhre

*«Denne utredningen er gjennomført som ledd i siviløkonomutdanningen ved Norges Handelshøyskole og godkjent som sådan. Godkjenningen innebærer ikke at Høyskolen innestår for de metoder som er anvendt, de resultater som er fremkommet eller de konklusjoner som er trukket i arbeidet.»*

## Sammendrag

Harry Markowitz (1952) delte porteføljens konstruksjonsprosess i to faser. Den første fasen setter forventninger om fremtiden gjennom en kombinasjon av observasjon av historien og erfaring. Den andre fasen benytter disse forventningene til å bestemme riktig portefølje.

I denne utredningen diskuterer vi begge fasene. For første fase ser vi på hvordan historiske aksjedata kan benyttes som input i optimeringsmodeller. Vi gjennomgår i tillegg hvordan Statens Pensjonsfond – Utland danner forventningsinput gjennom historiske observasjoner, teoretiske modeller og egne vurderinger. For andre fase diskuterer vi ulike optimeringsmodeller med utgangspunkt i Markowitz' opprinnelige *mean variance* MV-modell. Denne utvider vi i to steg gjennom først å begrense oss til positive porteføljevækt, og deretter gjennom å beskrive risiko som nedsiderisiko. Det vises hvordan slike modeller kan benyttes i Excel. Vi gjennomgår også ny utvikling innen modellteori.

Porteføljens konstruksjonsprosess settes i en teoretisk-praktisk ramme. Vi gjennomgår de viktigste utfordringene i prosessen og diskuterer sentrale områder som beslutningsadferd, investors holdning til risiko, manglende normalfordeling i utfallsrommet for avkastningsdata, historiske datas manglende prediksjonsgrad og tendensen til endring i risiko over tid.

Med bakgrunn i teori og observasjoner kritiserer vi MV-modellen og direkte bruk av historiske data i optimeringsmodeller. Videre kritiserer vi sentrale forutsetninger i modelleringen til Norges Bank som forutsetning om normalfordeling av avkastningsdata, *mean reversion* for aksjemarkedene og mulig overvurdering av fremtidig aksjeavkastning. Vi påviser også inkonsistens i form av at dersom vi legger Norges Banks egne forventninger til grunn vil Statens Pensjonsfond – Utland oppnå lavere realavkastning enn 4 % og dermed ikke oppfylle investors krav.

# Innholdsfortegnelse

<b>1. INNLEDNING .....</b>	<b>8</b>
1.1 BAKGRUNN OG MOTIVASJON .....	8
1.2 OPPBYGGING .....	8
1.3 AVGRENSNING .....	9
<b>2. OVERGANGEN MELLOM TEORI OG PRAKSIS.....</b>	<b>11</b>
2.1 DEN RASJONELLE TEORIEN OG DEN HEURISTISKE VIRKELIGHETEN .....	11
2.2 INVESTOR BENYTTET EN PORTEFØLJE FOR Å MAKSIMERE NYTTE UNDER USIKKERHET .....	12
2.3 INDUKSJONSPROBLEMET .....	12
2.4 MODELLBYGGING OG EGENSKAPER VED TIDSSERIER .....	13
2.5 OPPSUMMERING .....	14
<b>3. PORTEFØLJEMODELLER BASERT PÅ HISTORISKE AKSJEDATA .....</b>	<b>15</b>
3.1 INNLEDNING .....	15
3.2 MODELL 1: MV-MODELL MED SHORTSELLING .....	17
3.3 MODELL 2: MV-MODELL, NO SHORTSELLING ALLOWED .....	19
3.4 MODELL 3: MINIMERING AV NEDSIDE VHA. SEMIVARIANS .....	20
3.5 INN-DATA FRA OSLO BØRS.....	22
3.6 BESKRIVELSE AV DATASERIENE .....	23
3.7 KOSTNAD MED LONG PORTEFØLJE I FORHOLD TIL LONG/SHORT PORTEFØLJE .....	27
3.8 MODELLRESULTATER.....	28
<b>4. KRITIKK OG STATE OF THE ART.....</b>	<b>32</b>
4.1 KRITIKK AV MV-MODELLEN .....	32
4.2 BETYDNINGEN AV TIDSHORISONTEN .....	33
4.3 STATE OF THE ART: MGH OG ES .....	34
<b>5. HVORDAN SPU SETTER FORVENTNINGENE TIL AVKASTNING OG RISIKO ....</b>	<b>37</b>
5.1 INNLEDNING.....	37
5.2 STATENS PENSJONSFOND – UTLAND (SPU) .....	37
5.3 EFFEKTE AV Plassering og avkastning i valuta .....	38
5.4 VALG MELLOM REELL OG NOMINELL FORVENTET AVKASTNING.....	38
5.5 FORVENTET VOLATILITET I AKSJEMARKEDET OG OBLIGASJONSMARKEDET.....	39
5.6 FORVENTET KORRELASJON MELLOM MARKEDENE .....	40
5.7 FORVENTET AVKASTNING I OBLIGASJONSMARKEDENE .....	40
5.8 FORVENTET AVKASTNING I AKSJEMARKEDENE .....	42
5.9 TEST AV FORVENTNINGENE I MODELLSIMULERINGER .....	45
5.10 OPPSUMMERING OG SPU’S FORVENTNINGER DE NESTE 15 ÅRENE .....	47

<b>6.</b>	<b>SPU'S REFERANSEPORTEFØLJE VERSUS EN LONG MV-PORTEFØLJE.....</b>	<b>50</b>
6.1	INNLEDNING.....	50
6.2	FORVENTET AVKASTNING OG RISIKO.....	50
6.3	OPPNÅDD AVKASTNING.....	52
6.4	STYRING AV SPU GJENNOM REFERANSEPORTEFØLJEN.....	53
6.5	REFERANSEPORTEFØLJENS SAMMENSETNING.....	56
6.6	SPU'S AVKASTNING OG RISIKO GITT NORGES BANKS EGNE FORVENTNINGER.....	58
6.7	ALTERNATIVE PORTEFØLJER FOR SPU FRA EN LONG MV-MODELL.....	59
<b>7.</b>	<b>KONKLUSJON.....</b>	<b>66</b>
<b>8.</b>	<b>APPENDIKS.....</b>	<b>70</b>
8.1	BEGRENSNINGER I EXCEL, OG ALTERNATIVE DATAVERKTØY.....	70
8.2	FRA MERTON VIA VEKTORFORM TIL EXCEL FORMAT.....	70
8.3	OSLO BØRS 25 MEST OMSATTE AKSJER 2001...2006.....	72
8.4	BESKRIVELSE AV DE TO TREÅRS PERIODENE MED AKSJEKURSER FRA OSLO BØRS.....	72
8.5	PORTEFØLJEVEKTER FRA OPTIMERINGEN.....	77
8.6	REFERANSEPORTEFØLJEN TIL SPU PR 30. SEPTEMBER 2007.....	79
<b>9.</b>	<b>LITTERATURLISTE.....</b>	<b>80</b>

## Tabeller

Tabell 1: Varians og avkastning for 25 aksjer inndelt i 5 desiler i to 3-års perioder (1.1.2001-31.12.2003 og 1.1.2004-31.12.2006). Desil 1 = høy, desil 5 = lav. Papirer i samme desil i begge perioder i uthevet skrift. ....	26
Tabell 2: Porteføljeresultater sammenlignet med benchmark; Daglige data 1.1.2004-31.12.2006 .....	28
Tabell 3: Dekomponering av Gordons vekstmodell i delfaktorer for 5 aksjemarkeder de neste 15 årene.....	43
Tabell 4: Norges Banks forventninger til aksje- og obligasjonsmarkedene de neste 15 årene	49
Tabell 5: Norges Banks forventninger til korrelasjon mellom aksje- og obligasjonsmarkedene de neste 15 årene .....	49
Tabell 6: Simulert realavkastning hvert år 1900-2006 for aksjeporteføljen i Statens Pensjonsfond – Utland. Lokal valuta.....	52
Tabell 7: Oppnådd årlig avkastning for Statens Pensjonsfond - Utland 1997-2006. Kolonnen lengst til høyre er geometrisk avkastning. Fondets valutakurv. Avkastning i prosent.....	53
Tabell 8: Differanseavkastning og standardavvik mellom Statens Pensjonsfond - Utland og Referanseporteføljen 1998-2006. Norske kroner og i lokal valuta. Prosent og prosentpoeng.	54
Tabell 9: Sammensetningen av Benchmark Porteføljen basert på Referanseporteføljen til Statens Pensjonsfond - Utland .....	58
Tabell 10: Beregning av forventet avkastning og risiko for Statens Pensjonsfond - Utland gitt Norges Banks forventninger og sammensetningen av Referanseporteføljen .....	58
Tabell 11: Optimal portefølje for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt investors risikotoleranse og Norges Banks forventninger .....	60
Tabell 12: Optimal portefølje for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt Referanseporteføljens avkastning, preferanse om å minimere risiko og Norges Banks forventninger .....	61
Tabell 13: Sammensetning av minimum varians portefølje i long MV-modell for Statens Pensjonsfond - Utland, gitt Norges Banks forventninger.....	62
Tabell 14: Portefølje for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt forventning om minimum 4 % realavkastning og Norges Banks forventninger .....	63
Tabell 15: Overgang fra Merton via Vektorform til Excelformler .....	71
Tabell 16: De 25 mest omsatte aksjene på Oslo Børs 1.1.2001-31.12.2006 .....	72
Tabell 17: Første periode. Beskrivelse av daglige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2001-31.12.2003. T=748.....	73
Tabell 18: Første periode. Beskrivelse av månedlige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2001-31.12.2003. T=36. ....	74
Tabell 19: Andre periode. Beskrivelse av daglige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2004-31.12.2006. T=757.....	75
Tabell 20: Andre periode. Beskrivelse av månedlige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2004-31.12.2006. T=36. ....	76
Tabell 21: Modell 1-3; Andel av hvert verdipapir i optimale porteføljer. Alle modeller er optimert på historiske data fra 1.1.2001-31.12.2003.....	77
Tabell 22: Benchmark porteføljene: Optimale porteføljer basert på faktiske data i periode 2; MV-modell; 1.1.2004-31.12.2006.....	78
Tabell 23: Referanseporteføljen til Statens Pensjonsfond - Utland per 31. september 2007 ...	79

## Figurer

Figur 1: Ved optimering i modell 3 søker vi å minimere ned siden, det vil si avstanden mellom verdiutviklingen i investert beløp (blå linje), og investeringens geometriske gjennomsnitt (lilla linje).....	22
Figur 2: Histogram TAA 1.1.2001-31.12.2003. TAA er minst symmetrisk rundt 0 i perioden. ....	24
Figur 3: Histogram ORK 1.1.2001-31.12.2003. ORK er mest symmetrisk rundt 0 i perioden. ....	24
Figur 4: 10 dagers rullende varians for ALX (størst std.avvik) og ORK (minst std.avvik) i perioden 1.1.2001-31.12.2006. Logaritmisk skala. ....	25
Figur 5: Investors kostnad ved long portefølje (lilla) vs. long/short portefølje (blå); MV-modell; Daglig avkastning 1.1.2001-31.12.2003.....	27
Figur 6: Simuleringer av utviklingen de neste 15 årene i Statens Pensjonsfond – Utland. Realverdi av 1 krone investert i år 0. Simulert med tilførsel av ny kapital basert på oljeprisforutsetninger i Nasjonalbudsjettet 2007. Den gule linjen i midten viser det mest typiske utfallet på hvert tidspunkt (logaritmisk skala). ....	47
Figur 7: Sammenligning av månedlige avkastningsutfall i Statens Pensjonsfond - Utland og Referanseporteføljen 1998-2006. Prosent. ....	55
Figur 8: Sammenheng mellom avkastningen i Statens Pensjonsfond - Utland og Referanseporteføljen 1998-2006.....	56
Figur 9: Effektiv porteføljefront for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt Norges Banks forventninger .....	63
Figur 10: Utvikling i andel i hvert aktivum langs den effektive porteføljefronten for økende realavkastningskrav i long MV-modell, gitt Norges Banks forventninger.....	64
Figur 11: Fordeling mellom aksjer og obligasjoner langs den effektive porteføljefronten ved ulike realavkastningskrav i long MV-modell, gitt Norges Banks forventninger.....	65

## Forord og takk

I denne utredningen belyser vi ulike områder innen valg av en portefølje der det ofte viser seg å være avstand mellom teori og praksis. Vi påpeker at Harry Markowitz ikke benyttet sin egen teori i sine egne investeringer, og vi ser hvordan Norges Bank benytter *mean reversion* som forutsetning i aksjemarkedene når empirien tilsier at dette har mest hold i rentemarkedene. Videre belyser vi grundig utfordringene ved vanlige forutsetninger som symmetrisk risikomål, konstant risiko i tid og normalfordeling i avkastningsutfall, og viser utfordringene i praksis gjennom å benytte historiske data fra Oslo Børs. Selv om vi kan påvise betydelige utfordringer er mange av disse forutsetningene sentrale i forvaltningen av 2000 milliarder i Statens Pensjonsfond – Utland.

Utredningen viser også hvor utfordrende det er å benytte optimeringsmodeller i porteføljeforvaltningen. Ukritisk bruk med uklare forutsetninger og dårlige data som input kan gi en vesentlig høyere reell risiko enn det investor tror og forventer. Finanskonsepter kan også benyttes på feil måte, som for eksempel at et finanskonsern uttrykker sin totale risiko gjennom å summere *value at risk* for alle virksomhetene. Dersom man identifiserer slike bristende forutsetninger i arbeidet med å sette sammen porteføljen er det ofte bedre å fordele investeringen i like store deler i stedet for å fordele etter en modellteoretisk «sannhet». Vi ser spor av slik tankegang i allokeringen i Statens Pensjonsfond - Utland ved at det settes et tak på investeringer i enkeltmarkeder, og at markeder som teoretisk burde vært utelatt også er med.

Innenfor rammene av denne utredningen har det ikke vært mulig å gå i dybden på alle områder. Utredningen er derfor mer bred enn dyp. Likevel har det vært rom for å belyse områder som forholdet mellom *value at risk* og *expected shortfall*, og utledningen av Merton's formler via vektorform til Excel. Modellarbeidet er begrenset av at Excel er benyttet som verktøy. En spesialisert finans-statistisk regnepakke som Matlab, med tilleggsmoduler for finansoptimering, ville gitt bedre beskrivelse av data og flere optimeringsmuligheter.

Takk til min kjære kone Hanne og våre tre barn som har gitt meg rom til å skrive denne utredningen. Takk til min veileder John Martin Nilsen for gode råd og faglige diskusjoner underveis. Takk til Sigbjørn Atle Berg i Norges Bank for klargjøring av metodiske spørsmål i seksjon 5. Takk til Børsprosjektet ved NHH og Helge Flataker som har hentet ut alle aksjekurser som er benyttet i seksjon 3.

# 1. Innledning

## 1.1 Bakgrunn og motivasjon

Nasjonen Norge er blant verdens mest velholdne. Grunnlaget for den nasjonale formuen ble lagt med funn av store olje- og gassforekomster i Nordsjøen for 40 år siden. De siste 15-20 årene har inntektene fra disse forekomstene bygget nasjonalformuen i Norge. Mest synlig er etableringen og oppbyggingen av Statens Pensjonsfond – Utland, som per tredje kvartal 2007 har passert 2000 milliarder norske kroner i størrelse.

Også den private formuesbyggingen har vært stor. I skatteoppgjøret for 2006 var det registrert 236.702 personer med en *skattbar* formue på 1 million kroner eller mer. Dette er 24 % flere enn året før. I gjennomsnitt hadde nordmenn en skattbar formue på 319.300 kroner i 2006.

Med denne formuesbyggingen øker etterspørselen etter forvaltningskompetanse. Norges Bank har bygget et betydelig operasjonelt forvaltningsmiljø de siste 10 årene. Finansdepartementet har også nylig etablert en egen avdeling for formuesforvaltning. Tidlig på 90-tallet var det få tilbud for privatpersoner innen fondsforvaltning, i dag er det et meget bredt utvalg av miljøer og fondskategorier for folk flest. I følge Verdipapirfondenes Forening har norske forvaltningsselskaper per oktober 2007 over 400 milliarder kroner under forvaltning.

Utviklingen innen formuesbygging i privat og offentlig sektor ser ikke ut til å avta med det første. Dermed kan vi anta at etterspørselen etter forvaltningstjenester vil øke.

Denne utredningen handler om hvordan investor kan velge en portefølje blant usikre verdipapirer, og hvilke utfordringer han i så måte står ovenfor.

## 1.2 Oppbygging

Harry Markowitz (1952) delte porteføljens konstruksjonsprosess i to faser. Den første fasen setter forventninger om fremtiden gjennom en kombinasjon av observasjon av historien og erfaring. Den andre fasen benytter disse forventningene for å bestemme riktig portefølje.

Den første fasen beskrives med to innfallsvinkler i denne utredningen. Den ene er å sette forventninger bare ved å observere historien. Dette gjøres i seksjon 3. Den andre er å sette forventninger gjennom en kombinasjon av historie, teoretiske modeller og erfaring. Dette



eksemplifiseres i seksjon 5 der vi diskuterer hvordan Statens Pensjonsfond – Utland setter forventningene til aksje- og rentemarkedene de neste 15 årene.

Den andre fasen beskrives gjennom ulike optimeringsmodeller. Vi benytter Markowitz' opprinnelige modell som tillater short posisjoner, og som benytter risiko beskrevet symmetrisk gjennom varians. Denne modellen tilnærmes deretter investors faktiske preferanser i to steg. Først ved å ekskludere muligheten for short posisjoner, og deretter ved å beskrive risiko som nedsiderisiko, såkalt semivarians. Disse modellene utvikles i seksjon 3.

Disse to fasene settes inn i en teoretisk-praktisk ramme der de viktigste utfordringene i fasene diskuteres. I tillegg diskuteres utviklingen innen risikomål og porteføljemodellering. Dette gjøres i seksjon 2 og 4, og diskuteres i en praktisk sammenheng i seksjon 3 og 6.

### **1.3 Avgrensning**

I denne utredningen fokuserer vi på porteføljemodeller som minimerer risiko uttrykt ved varians eller semi-variens. Vi diskuterer nyere utvikling der risiko måles med *Value at Risk* (VaR) eller *Expected Shortfall* (ES) og avkastningsserier beskrives som en multivariat og generalisert hyperbel (mGH), men benytter ikke dette i modellene. Vi benytter kun usikre verdipapirer og markeder, og forutsetter at investor investerer hele sin formue. Vi diskuterer derfor ikke allokeringen mellom risikofritt og risikofyllt alternativ.

Modellene vi benytter er en-periode modeller. Det vil si at investor investerer hele formuen sin i starten av perioden, holder investert posisjon gjennom hele perioden, og søker å maksimere formuen ved slutten av perioden. Etter dette finnes ingenting, selv om investor kunne ha gjentatt prosedyren for en tenkt andre periode. Vi tar ikke hensyn til transaksjonskostnader i optimeringen.

Vi benytter ikke indeks-modeller, og berører i liten grad kapitalmarkedsteorien (CAPM). Av dette følger det at vi heller ikke ser på typiske prestasjonsmål i forhold til indeks som er vanlige i porteføljeforvaltning, som for eksempel porteføljens Alpha og Beta, *fitness* til indeks (R-kvadrat), samt mål på relativ risk/reward som *Sharpe* og *IR*.

Som data- og modellverktøy benytter vi Microsoft Excel 2002 slik dette programmet tilbys i standard form. Fordelen er en lav terskel i form av høy tilgjengelighet og tilnærmet null marginalkostnad. Ulempen er at dataanalysene, grafmulighetene i forhold til porteføljefronten

og porteføljevalg, samt optimeringsmulighetene er rudimentære. Vi har vurdert å benytte Mathworks Matlab i stedet, men selv i studentversjon ville kostnaden være betydelig på grunn av tilleggspakkene som er nødvendige for vesentlig å heve kvaliteten ut over det som er mulig å vise i Excel. Se appendiks 8.1 for ytterligere diskusjon om valg av dataverktøy.

Utreddingen er i omfang og innhold innrettet i henhold til 4-årig siviløkonomutdanning for studenter tatt opp før 2002.

## 2. Overgangen mellom teori og praksis

### 2.1 Den rasjonelle teorien og den heuristiske virkeligheten

Når vi tar beslutninger i hverdagen er disse ofte basert på enkle tommelfingerregler som kan være enten genetiske ryggmargsreflekser basert på evolusjonsprosessen, se Darwin (1859), eller innlært adferd. Diskusjonen om hvordan vi foretar beslutninger hører i hovedsak inn under fagfeltet psykologi, men er særlig relevant innen økonomisk teori siden denne ofte er basert på en forutsetning om at vi faktisk velger basert på det *normative* svaret på hva vi *burde* gjøre. Med andre ord at vi velger det som er *rasjonelt*.

Innen den kognitive psykologien beskrives vår normale beslutningsstrategi som *heuristisk*. Det vil si at vi beslutter i forhold til en enkel regel som ikke garanterer riktig resultat, men som har vist seg å fungere i vanlige eller typiske tilfeller.

Basert på blant annet sannsynlighetsberegninger kan vi innen mange områder finne *normative* svar på hva vi *burde* gjøre, men som vi kan observere at vi likevel ikke gjør. Studier av pionerene Tversky og Kahneman, se Gilovich, Griffin og Kahneman (2002), viser at vi som oftest foretrekker enkle, heuristiske beslutningsstrategier, fremfor de normative og rasjonelle strategiene. Kahneman vant Nobelprisen i økonomi i 2002, etter Tversky's død i 1996. Tversky og Kahneman viste også at vi er mer opptatt av nedsiderisiko (risiko for tap), enn oppsiderisiko («risiko» for gevinst).

For valg av porteføljer finner vi *en* heuristisk hovedregel: Ikke legg alle eggene i én kurv. Dette tidløse rådet finner vi i varianter i tekster helt tilbake til det femte århundre, basert på fortellertradisjon ytterligere tusen år tilbake i tid, se Aha (400).

Regelen omtales som en naivistisk strategi, eller *1/N-regelen*. Vi merker oss spesielt at Harry Markowitz, den moderne porteføljeteoriens far, selv benyttet denne regelen for egne investeringer, se Zweig (1998). Det synes å være forskjell mellom teori og praksis, også for den som unnfanget teorien.

## 2.2 Investor benytter en portefølje for å maksimere nytte under usikkerhet

Den grunnleggende forutsetningen i finansteorien er at investor er rasjonell. Investor søker å maksimere sin nytte. Maksimal nytte er knyttet til hvilket beløp som er igjen ved investeringshorisontens utløp. Investor er grådig i økonomisk forstand.

Valg av aktiva gjøres under usikkerhet. Dersom investor kunne velge blant aktiva der hvert aktivum har 100 % sikker avkastning vil en rasjonell investor velge det aktivum som gir høyest avkastning. Investor trenger ingen portefølje i en slik situasjon.

Historisk informasjon viser at ulike aktivaklasser gir ulik avkastning, og at aktiva med mulighet for relativt sett høyere avkastning har en tendens til å medføre høyere risiko. Risiko beskrives som variasjon i avkastning.

Ulike aktiva har i større eller mindre grad samvariasjon i avkastning. Ved å kombinere aktiva med lav samvariasjon kan investor motvirke variasjonen i sin portefølje og dermed dempe risikoen.

## 2.3 Induksjonsproblemet

I vitenskaplig metode er det vanlig å formulere en teori basert på empiri. Imidlertid kan vi ikke med 100 % sikkerhet vite at et fenomen vi har observert i 100 % av tilfellene i fortiden vil gjenta seg hver gang i fremtiden. Vi kan ikke føre *bevis* for en teori basert på slik induksjon, se Hawking (1998). Dette problemet kalles induksjonsproblemet. Karl Popper, se Popper og Miller (1983), satte vitenskaplig metode inn i en sammenheng der kun teorier som lot seg falsifisere kunne sies å være en vitenskaplig teori. Han henviste til at stadig falsifisering av gjeldende teori gjennom å utvikle en ny og bedre teori er beskrivende for hvordan teori har utviklet seg innen mange områder. Han mente derfor at teorier burde ha falsifiserende egenskap for å kunne kalles vitenskapelig.

Logisk sett må teori basert på empiri forutsette at det induktive prinsippet er gyldig for at teorien skal holde. I praksis benyttes ofte *abduktiv inferens* i utvikling av finanst teori, først beskrevet av Charles Peirce for omtrent 100 år siden. Se Peirce med flere (1992). Abduktiv inferens betyr at man tar utgangspunkt i et datasett basert på fakta, observasjoner og definisjoner. Basert på disse utvikles en hypotese som skal ha de egenskapene at dersom den

er sann, så vil den forklare datasettet, og at det ikke skal være noen annen hypotese som gir en bedre forklaring. På dette grunnlaget kan hypotesen sies å sannsynligvis være korrekt.

## 2.4 Modellbygging og egenskaper ved tidsserier

Når vi ønsker å beskrive virkeligheten gjennom en modell er det nødvendig å forutsette at visse sammenhenger er gyldige for at modellen ikke skal bli for kompleks. Disse sammenhengene kan være i form av dekomponering av én størrelse i et antall andre størrelser, eller i form av virkningsgraden én størrelse har på en annen størrelse.

Ofte benyttes historiske tidsserier som grunnlag for å bygge en modell. Modellens sammensetning og parametere påvirkes av tidsseriens observerte egenskaper.

En av de vanligste forenklingene er forutsetningen om *Mean Reversion*. Denne forutsetningen benyttes blant annet av Norges Bank, se seksjon 5. Mean Reversion betyr at tallserien over tid vil svinge rundt sitt eget gjennomsnitt. Dette impliserer at avkastningskurven vil ha en tendens til å gå tilbake til sitt eget gjennomsnitt etter at den har nådd sitt maksimum eller minimum. En annen implikasjon er at dersom risiko kan sies å ha Mean Reversion, så vil risikoen avta over tid. Dette benyttes av Norges Bank for å argumentere for at det er lavere risiko ved å holde en aksje i 15 år, enn å holde den i 1 år. Exley, Mehta og Smith (2004) viser at det først og fremst er i rentemarkedene man har et *case* for Mean Reversion, og i mindre grad i aksjemarkedene. Andre mener at Mean Reversion i aksjemarkedene er sterk nok til å danne grunnlaget for en handlestrategi som gir bedre investeringsresultat enn en indeksporfølje, se Gropp (2004).

En annen egenskap som ofte forutsettes er at variansen følger en konstant prosess. Variansen er *homoskedastisk*, det vil si at den er jevnt fordelt over tidsserien. Utfordringen er at finansielle dataserier ofte er *heteroskedastiske*, som vil si at det underliggende aktivum kan observeres å ha en stabil varians over en lengre periode, men at det deretter kommer en periode med spesielt høye utslag i variansen, før den «roer» seg igjen. Når vi beregner risikoen til et aktivum med varians målt over en periode som viser heteroskedastisitet kan vi med andre ord komme til å overvurdere risikoen i en rolig periode, og undervurdere risikoen i en urolig periode. Se også appendiks 8.4 for definisjon av kurtosis og skjevhet, samt seksjon 4.3 om mGH.

Mange modeller bygger på en forutsetning om at prisene utvikler seg som en *Random Walk*. Dette ble først utledet basert på observasjon av prisserier, se Osborne (1959). Samuelson (1965) viste at dersom deltagerne i et marked har riktige forventninger, det vil si at alle deltagere kjenner til og forstår all informasjon, så vil prisene fluktuere tilfeldig. I modellbygging benyttes *martingale* eller Levy prosesser, se Applebaum (2004), for å beskrive en tilfeldig tidsrekke der sannsynligheten er like stor for utfall oppover som nedover til enhver tid. I markeder der verdien av assets har en tendens til å øke over tid er det nødvendig å legge inn *drift* i prosessen. En prosess med positiv drift er en *submartingale*, og negativ drift en *supermartingale*.

## 2.5 Oppsummering

I denne seksjonen har vi diskutert utfordringer med å overføre teori til praksis.

I mange sammenhenger er det forskjell på hva investor faktisk velger, og det han burde velge. Forsøk viser at investor ikke nødvendigvis er rasjonell i sine beslutninger, men at han vektlegger erfaring og heuristiske regler i vel så stor grad som modellresultater. Dette spissformuleres gjennom hvordan Harry Markowitz selv investerer sine midler.

Den heuristiske tilnærmingen til beslutninger utfordres av teoretisk vitenskap. Selv om alle observerte data har nøyaktig samme utfall kan vi likevel ikke med 100 % sikkerhet vite at dette også blir utfallet i fremtiden. Observasjoner av et fenomen kan ikke føres som bevis for en sammenheng. Derfor utvikles finansteorien i form av hypoteser. Riktig hypotese defineres ved at ingen annen hypotese kan forklare det observerte fenomenet bedre. Det er interessant at vitenskapen dermed har store likhetstrekk med heuristikk, og at teori nærmest kan betraktes som beskrevet praksis.

For å bygge modeller er det ofte nødvendig med forenklinger i forhold til observert virkelighet. Et eksempel er at risiko defineres som en fast størrelse i hele tidsperioden, mens vi ofte kan observere at det ikke er slik. Et annet eksempel er at vi forutsetter normalfordeling for avkastningsdata, mens vi ofte kan observere asymmetri og tunge haler i historiske data. Slike forenklinger fører til at resultatet fra modelleringen blir mer usikkert. Dersom vi baserer våre beslutninger på slike modellresultater kan vi komme til å velge posisjoner med vesentlig større risiko enn tilsiktet.

## 3. Porteføljemodeller basert på historiske aksjedata

### 3.1 Innledning

Harry Markowitz krediteres som originatoren av moderne porteføljeteori. I sin originale artikkel fra 1952 er han den første som beskriver dual-målet til investor som på den ene siden er å maksimere avkastningen, og på den andre siden er å minimere risiko beskrevet gjennom varians. Han beskriver også hvordan porteføljens totale varians blir lavere når den settes sammen av verdipapirer med lav kovarians, og hvordan porteføljens optimale sammensetning endres og gir økt avkastning etter som investor aksepterer høyere varians. Modellen ble senere utvidet av Tobin (1958) ved å introdusere et risikofritt investeringsalternativ.

Selv om Markowitz' optimeringsmodell hadde betydelig appell hos academia var den vedheftet kompleksitet i praktisk bruk fordi varians-kovarians matrisen for  $n$  verdipapirer inneholder  $n$  ganger  $n$  elementer, og i tillegg krever en tilsvarende invertert matrise. Sharpe (1963) forenklet matrisen til en vertikal vektor gjennom å relatere alle verdipapirer til en felles indeks. Dette forenklet optimeringen fra en matrise til en vektor. Senere ble dette utvidet til en fler-indeks modell, se Ross (1976). Denne modellen er grunnlaget for APT – arbitrasjeteorien.

Sharpe med flere utvidet også Markowitz' modell til finansmarkedsmodellen (CAPM), se Sharpe (1964), Lintner (1965) og Mossin (1966). For dette arbeidet fikk Markowitz og Sharpe hver sin 3dje-del av «Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel» i 1990, sammen med Merton Miller, som vant prisen for arbeid innen corporate finance.

Frem til 1972 var det vanlig å vise hvordan investor velger porteføljer med flere enn tre verdipapirer kvalitativt ved hjelp av grafer. Robert C. Merton viste i artikkelen «An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier» (Merton 1972) hvordan porteføljefronten kan utledes matematisk ved hjelp av Lagrange multiplikatorer. Merton's løsning viser hvordan man kan finne den optimale porteføljefronten i Markowitz' modell med og uten et risikofritt investeringsalternativ. Se seksjon 3.2 og 8.2 for en nærmere utledning.

Dersom man introduserer beskrankninger som for eksempel at *short selling* ikke er tillatt, omdannes problemet til et kvadratisk optimeringsproblem som må løses iterativt. Markowitz (1956) viste hvordan dette kan løses ved hjelp av *Critical Line Algorithm* (CLA).

I denne utredningen benytter vi en en-periode modell der investor investerer hele sin formue i verdipapirer med risiko i starten av perioden. Investors *nytte* beskrives som total formue ved utløp av perioden. Investor holder investert posisjon gjennom hele perioden. Investor er grådig, det vil si at han ønsker å maksimere sin nytte. Nytte er definert som total formue.

Investor er risiko-avers i den forstand at han ønsker å minimere risiko for hvert avkastningsnivå. Investor forutsettes å være rasjonell, slik at han velger blant de optimale porteføljene som minimerer risiko for hvert avkastningsnivå – alternativt blant de optimale porteføljene som maksimerer avkastning for hvert risikonivå.

Vi benytter tre optimeringsmodeller.

Den første forutsetter at investor er tvunget til å investere hele sin formue i risikable verdipapirer. For denne porteføljen vil han minimere sin risiko. Investor kan velge blant null eksponering, positiv eksponering (*long*) og negativ eksponering (*short*) i hvert verdipapir. Denne modellen er den opprinnelige Markowitz-modellen, se Markowitz (1952). Vi benytter den matematiske utledningen beskrevet av Merton (1972). Vi kaller denne *modell 1*. Vi overfører løsningen til matriseregning, og viser hvordan ligningene oversettes til Microsoft Excel.

Den andre modellen benytter de samme forutsetningene som i den første modellen, men i tillegg innføres begrensningen om at investor ikke kan ha negativ eksponering mot et verdipapir (*no short selling*). Denne begrensningen gjøres for å øke porteføljens relevans i forhold til at det er vesentlig mer vanlig for investor å velge *long* porteføljer. Denne begrensningen omdanner problemstillingen til et kvadratisk optimeringsproblem; med andre ord at det er nødvendig med iterasjoner for å finne optimal løsning. For å løse dette benytter vi en simpleks-algoritme via dataverktøy (Solver i Microsoft Excel).

Modell tre bygger på modell to, men i stedet for å minimere risiko beskrevet som symmetrisk avvik fra gjennomsnittet (standardavvik), minimeres bare nedside-risikoen (semivarians). Denne metoden benyttes for ytterligere å nærme seg investors faktiske preferanser. Investor er



mer opptatt av å unngå tap, enn å begrense gevinst. Denne modellen kaller vi *modell 3*. Modellen løses ved hjelp av Solver i Excel.

Det benyttes et datasett med aksjekurser fra Oslo Børs for modell en til tre i denne delen av utredningen. Datasettet deles i to tidsmessig like perioder. Porteføljoptimeringen benytter data fra den første perioden for å danne statistiske forutsetninger og forventninger. Deretter *benchmarkes* resultatene fra optimeringen på data fra andre periode.

### 3.2 Modell 1: MV-modell med shortselling

I modell 1 skal vi finne den porteføljesammensetningen som gir lavest risiko, definert som lavest varians, gitt at investor investerer hele sin formue i usikre verdipapirer.

Vi skal velge en portefølje blant  $n$  verdipapirer som alle har risiko. Forventet avkastning for det  $i$ -te verdipapiret er  $E_i$ , kovariansen i avkastningen mellom det  $i$ -te og  $j$ -te verdipapiret er  $\sigma_{ij}$ , og variansen i avkastning i det  $i$ -te verdipapiret er  $\sigma_{ii}=\sigma_i^2$ . Vi lar  $x_i$  representere hvilken andel verdipapir  $i$  skal ha i porteføljen, og videre at hele formuen skal plasseres, det vil si at summen av alle andeler er 1;

$$\sum_1^n x_i = 1.$$

Vi ønsker å finne andelen som hvert verdipapir skal ha i porteføljen, gitt at investor må investere hele formuen i verdipapirene og at han ønsker å minimere porteføljens varians. Vi skal minimere porteføljens varians, gitt ved

$$\sigma^2 = \sum_1^n \sum_1^n x_i x_j \sigma_{ij},$$

der porteføljens avkastning  $E$  er vektet sum av avkastningen per andel

$$E = \sum_1^n x_i E_i.$$

Dette kan omskrives ved hjelp av Lagrange multiplikatorer til

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n x_i x_j \sigma_{ij} + \gamma_1 \left[ E - \sum_1^n x_i E_i \right] + \gamma_2 \left[ 1 - \sum_1^n x_i \right] \right\},$$

der  $\gamma_1$  og  $\gamma_2$  er multiplikatorene. Første ordens betingelsene blir tilsvarende

$$0 = \sum_1^n x_j \sigma_{ij} - \gamma_1 E_i - \gamma_2, \text{ for } i = 1, \dots, n, \text{ og } 0 = E - \sum_1^n x_i E_i, \text{ og } 0 = 1 - \sum_1^n x_i.$$

Vi introduserer den inverse av varians-kovarians matrisen, der det  $i$ -te og  $j$ -te element er  $v_{ij}$ , og forenkler ved å definere variablene A, B, C og D (som alle er konstante når forventet avkastning, standardavvik og varians-kovarians matrisen er gitt):

$$A \equiv \sum_1^n \sum_1^n v_{ij} E_j$$

$$B \equiv \sum_1^n \sum_1^n v_{ij} E_j E_i$$

$$C \equiv \sum_1^n \sum_1^n v_{ij}$$

$$D \equiv BC - A^2$$

Det kan vises at porteføljefronten er strengt konveks (har form som en hyperbel), og vi finner porteføljens minimum varians ved å sette kurvens deriverte til 0. I dette punktet er porteføljens forventede avkastning

$$\frac{A}{C}$$

og standardavviket

$$\sqrt{\frac{1}{C}}.$$

Andelen av hvert verdipapir  $x_i$  finnes med

$$x_i = \frac{E \sum_1^n v_{ij} (CE_j - A) + \sum_1^n v_{ij} (B - AE_j)}{D}, \text{ for } i=1, \dots, n.$$

Porteføljene langs porteføljefronten finnes som en funksjon av forventet avkastning  $E$ ,

$$\sigma = \sqrt{\frac{CE^2 - 2AE + B}{D}}$$

Vi overfører denne modellen til Excel. Vi benytter formlene over, men omskriver dem på matriseform for å kunne benytte vektorregning i Excel. Dette forenkler betydelig når vi ønsker å skalere modellen fordi vi kan benytte formlene på områder (matriser) i stedet for å håndkode  $N \times N$  formler. Se appendiks 8.2 for gjennomgang av overføring til Excel.

### 3.3 Modell 2: MV-modell, No shortselling allowed

I *modell 1* viser vi løsningen som minimerer variansen på investors portefølje. I mange tilfeller vil denne løsningen innebære negativ vektning av ett eller flere verdipapirer – altså at det er optimalt å være *short* i dette papiret.

Flertallet av porteføljer er i virkeligheten *long* porteføljer, det vil si med positiv eksponering i hvert verdipapir. For å nærme oss preferansene til flertallet av investorer legger vi inn denne begrensningen i *modell 2*.

Når vi legger til denne begrensningen utvides problemet fra et lineært problem, som kan løses direkte, til et kvadratisk optimeringsproblem. Det betyr at problemet må løses iterativt. Markowitz (1956) viste hvordan dette kunne gjøres gjennom kritisk linje algoritmen (CLA), men vel så vanlig er det å benytte simpleks algoritme, som vist i Wolfe (1959). Simpleks algoritmen benyttes av Solver i Excel.

Når vi går fra en statisk løsning til en iterativ løsningsprosess bygger vi om regnearket for modell 2. Vi *snur* modellen fra eksplisitt å regne ut porteføljevektene til å betrakte porteføljevektene som statiske, og deretter regne ut avkastningen og standardavviket for porteføljen. Så benytter vi Solver for å endre porteføljevektene innenfor de samme beskrankningene som i modell 1 (summen av porteføljevektene er lik 1, og vi ønsker å minimere porteføljens varians), men med det tillegget at hver verdipapirvekt må være i intervallet  $[0,1]$ . Vi definerer porteføljens sammensetning som en  $N \times 1$  vektor  $\underline{X}$ , der hvert element  $x_1 \dots x_n$  er andelen for hvert verdipapir  $1 \dots n$ ;

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

og vektor  $\underline{X}'$  som transponert  $\underline{X}$ . Varians-kovarians matrisen definerer vi som

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & 1 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

der  $\sigma_{ij}$  er kovariansen mellom avkastningen til verdipapir  $i$  og avkastningen til verdipapir  $j$ . En portefølje med denne sammensetningen har standardavviket

$$\sigma = \sqrt{\underline{X}' \underline{\Omega} \underline{X}}.$$

Det er verdt å merke seg at dersom *modell 1* gir en løsning med en eller flere negative porteføljevækt vil det være en kostnad i form av lavere avkastning, gitt samme risiko, forbundet med beskrankningen i *modell 2*. Vi kan også med sikkerhet vite at den effektive porteføljefronten for *modell 2* er på eller innenfor porteføljefronten for *modell 1*. Se figur 5 i seksjon 3.7 for illustrasjon.

### 3.4 Modell 3: Minimering av nedside vha. semivarians

Et av ankepunktene med *MV-modellen* er at den forutsetter at investor har et likevektet, symmetrisk syn på risiko der nedsiderisiko og oppsiderisiko er like mye verdsatt. Som vi diskuterte i seksjon 2.1 har Tversky og Kahneman vist at dette som oftest ikke stemmer med virkeligheten. Den negative verdien av å tape en krone er større en den positive verdien av å vinne en krone. Dessuten beskriver standardavviket store *positive* utslag i avkastningen som økt risiko, mens investor tvert imot ønsker slik «risiko».

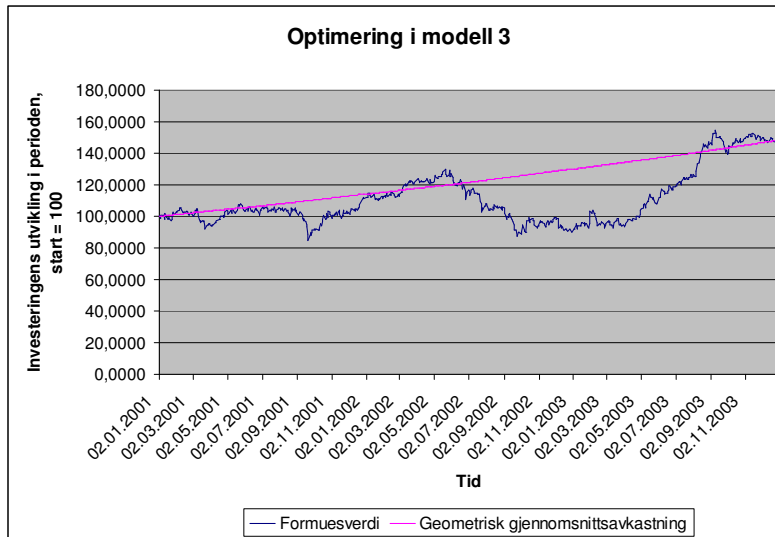
For å gjøre en ytterligere tilnærming til investors faktiske preferanser ønsker vi å benytte *modell 3* til ensidig å minimere nedsiderisiko.

Markowitz introduserer selv denne ideen i Markowitz (1959), men det er først fra midten av 90-tallet at nedside-minimering har gått fra teori til virkelighet. Vi kan anta at dette har

sammenheng med utbredelsen av dataverktøy som takler kompleksiteten i beregningen. Minimering av nedsiderisiko er en tilnærming som faller inn under kategorien «post-moderne porteføljeteori» (PMPT), se Rom og Ferguson (1994).

Utfordringen med bare å minimere nedsiden er at vi ikke kan benytte Markowitz' rammeverk for å løse problemet. Teknisk forklart er utfordringen at semi-variansen ikke er kvadratisk, og vi kan ikke beregne porteføljens semi-varians ved hjelp av semi-variansen og ko-semivariansen til de underliggende verdipapirene, se Grootveld og Hallerbach (1999). I praksis betyr dette at vi må traversere hele tallserien i hver iterasjon i optimeringen.

Vår tilnærming er å minimere *akkumulert* semi-varians (nedside) for hele porteføljen i forhold til porteføljens geometriske avkastning. Prosedyren starter med lik porteføljevekt for alle verdipapirer. Så beregnes avkastningen for porteføljen ved hvert datapunkt for de underliggende papirene. I vårt tilfelle daglige datapunkter. Når dette er utført for hele måleperioden får man porteføljens avkastning i form av en kurve i tid. Avkastning til enhver tid sammenlignes så med en rett linje beskrevet av geometrisk gjennomsnittsavkastning for porteføljen i hele perioden. Optimeringen søker å minimere den akkumulerte avstanden mellom avkastningskurven og kurven representert ved geometrisk gjennomsnittsavkastning. Vi anser porteføljesammensetningen som optimal når det ikke lenger er mulig å få maksimal akkumulert nedside i perioden (representert ved avstand mellom linjene) ytterligere redusert gjennom å endre porteføljevektene.



Figur 1: Ved optimering i modell 3 søker vi å minimere nedsliden, det vil si avstanden mellom verdiutviklingen i investert beløp (blå linje), og investeringens geometriske gjennomsnitt (lilla linje).

Vi benytter de samme beskrankningene som i modell 2, det vil si at porteføljevektene må være i intervallet  $[0,1]$  og at de i sum må være 1.

### 3.5 Inn-data fra Oslo Børs

Vi ønsker å teste modell 1-3 på reelle markedsdata. Som grunnlag benytter vi aksjer notert på Oslo Børs. Papirene velges blant de aksjene som har vært notert på Oslo Børs i 6 års perioden fra og med 2001 til og med 2006. Perioden på 6 år er å betrakte som et absolutt minimum i forhold til å kunne dele denne perioden i to like deler, og fremdeles ha et akseptabelt antall målepunkter i forhold til månedsdata (36 observasjoner) uten uakseptabelt stor standardfeil. Denne utfordringen har vi i mindre grad når vi benytter daglige data i 3 år.

Aksjene sorteres etter omsetning målt i kroner i perioden, og de 25 mest omsatte aksjene velges som datagrunnlag. Med denne prosedyren velger vi papirene ALX, CRU, DNB NOR, DNO, ELT, EME, FOE, FRO, IGE, JIN, NHY, NSG, OCR, ORK, PAN, PGS, PRS, RCL, SCH, STB, TAT, TEL, TGS, TOM og TAA. Se appendiks 8.3 for omsetningsdata.

Ett av disse papirene, RCL, har én mindre noteringsdag i perioden enn de andre. Dette er fordi Oslo Børs, i likhet med andre europeiske børser, suspenderte de aksjene som var primærnotert i USA fra notering 12. september 2001, dagen etter terrorangrepene mot tvillingtårnene i World Trade Center i New York. Oslo Børs ønsket å få klarhet i om selskapenes operasjon og

evne til å møte sine informasjonsforpliktelse var berørt av angrepet. Vi har benyttet siste notering 11. september som notering på RCL også 12. september. FRO har notering 12. september fordi denne først ble suspendert etter en halv dags handel. Merk at PAN nå er MHG, og at ALX hadde siste noteringsdag på Oslo Børs 12. oktober 2007.

For hvert papir tar vi ut daglig sluttkurs i perioden. Vi benytter kurser justert for splitter, emisjoner og utbytte for å få reelle verdiskapningstall. Kursdata er beregnet og hentet ut av Børsprosjektet ved NHH.

Vi deler dataserien i to like deler og benytter den første 3-års perioden som input for å lage en portefølje som vi sammenligner i de neste 3 årene for modellene 1-3.

### 3.6 Beskrivelse av dataseriene

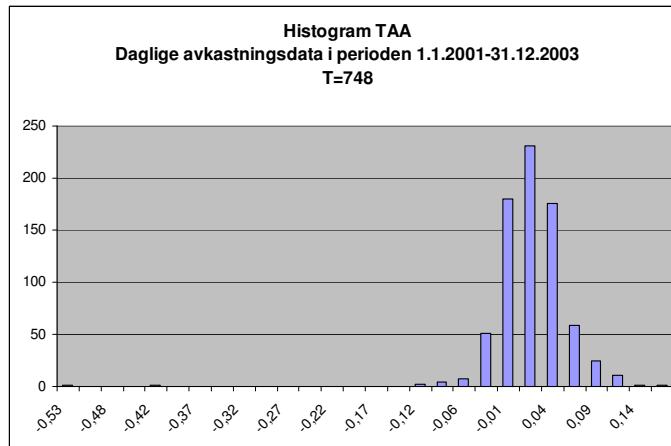
Se appendiks 8.4 for en oppstilling av de statistiske beskrivelsene av dataseriene.

I seksjon 2 diskuteres to poenger som vi skal illustrere. Det ene er formen på avkastningsutfall i forhold til en normalfordeling, og det andre er endringen i varians og dermed risiko over tid. Vi benytter de daglige noteringene som utgangspunkt siden disse har vesentlig flere observasjoner og er mer granulert innenfor tidsperioden.

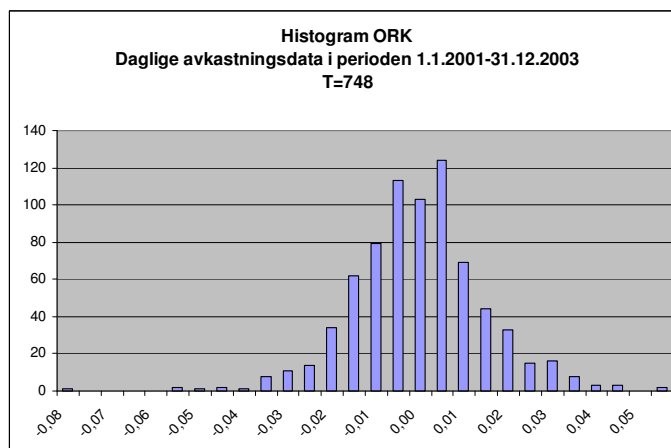
I forhold til normalfordeling indikerer *skjevhet* graden av asymmetri og *kurtosis* hvorvidt kurven er bred med fete haler eller spiss med tynne haler. Se appendiks 8.4 for en nærmere definisjon.

Vi ser på den første treårs perioden med daglige data som består av 748 observasjoner for hvert verdipapir. Av de 25 tidsseriene er det 12 som kan sies å være nokså symmetriske, det vil si med en skjevhet i intervallet  $\pm|0..0,5\rangle$ . Fem av papirene er svakt skjeve, mens åtte papirer er asymmetriske med skjevhet  $\pm|1..∞\rangle$ . TAA er det papiret som er minst symmetrisk, mens ORK er mest symmetrisk. Alle avkastningskurvene har positiv kurtosis. Dette sier oss at formen er spissere enn normalfordelingen, og at vi i liten grad kan observere fete haler i dette datagrunnlaget.

Vi kan illustrere fordelingen gjennom å sammenligne histogrammene til TAA og ORK.



*Figur 2: Histogram TAA 1.1.2001-31.12.2003. TAA er minst symmetrisk rundt 0 i perioden.*

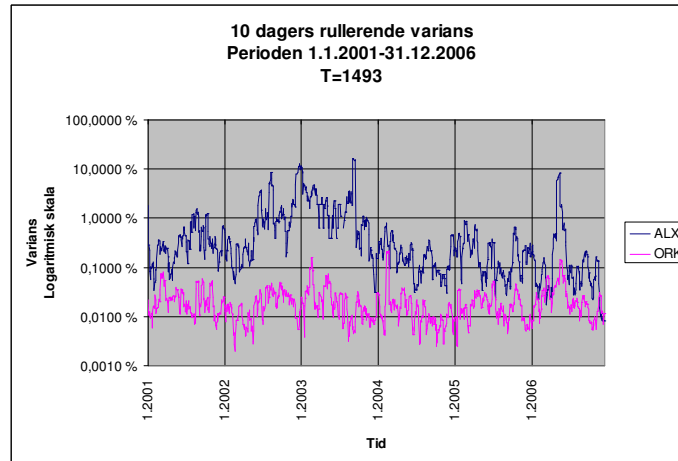


*Figur 3: Histogram ORK 1.1.2001-31.12.2003. ORK er mest symmetrisk rundt 0 i perioden.*

Vi ser tydelig hvordan avkastningsprofilen for TAA har tyngdepunktet til høyre for null (negativ skjevhet), samtidig som profilen er nokså spiss (betydelig positiv kurtosis) i forhold til en normalfordeling. Dette i kontrast til avkastningsprofilen for ORK som er tilnærmet symmetrisk rundt null, men som også har en noe spissere profil enn normalfordelingen (noe positiv kurtosis).

For å illustrere hvordan variansen endrer seg over tid sammenligner vi to ytterpunkter. ALX har høyest standardavvik i perioden, og ORK har lavest standardavvik. Vi beregner rullerende 10-dagers varians over begge de to treårs periodene for å illustrere vårt poeng.





Figur 4: 10 dagers rullende varians for ALX (størst std.avvik) og ORK (minst std.avvik) i perioden 1.1.2001-31.12.2006. Logaritmisk skala.

Vi har benyttet logaritmisk skala for at vi skal kunne se utslagene tydeligere. Vi ser at ALX er et vesentlig mer volatilt papir enn ORK slik standardavviket beskriver, men vi ser også at variansen til ALX er relativt stabil på et lavere nivå over lengre perioder. Dette illustrerer at dersom vi hadde målt variansen til ALX i en «stabilt lav» periode ville vi målt en for lav risiko, og at det kan være nokså tilfeldig om den perioden en måler faktisk gir et riktig bilde av papirets reelle risiko. Se seksjon 2.4 for generell diskusjon av dette fenomenet.

Når vi sammenligner den første perioden med den andre perioden ser vi at det er 13 av 25 papirer i periode to som er tilnærmet symmetriske. Selv om dette er omtrent samme antall som i første periode, er det bare 8 som er tilnærmet symmetriske i begge perioder. Når vi sammenligner symmetrien for alle papirene ser vi at 15 av papirene har tilsvarende egenskaper i begge perioder. Parallelt ser vi at 12 papirer har tilnærmet samme kurtosis i begge perioder. Fra dette utleder vi at det er en svak, om noen, sammenheng mellom symmetri fra en periode til den neste.

For å sammenligne avkastning og standardavvik deler vi papirene inn i 5 desiler i begge perioder, sortert høy-lav i forhold til periodens avkastning og i forhold til periodens standard avvik.

Tabell 1: Varians og avkastning for 25 aksjer inndelt i 5 desiler i to 3-års perioder (1.1.2001-31.12.2003 og 1.1.2004-31.12.2006). Desil 1 = høy, desil 5 = lav. Papirer i samme desil i begge perioder i uthevet skrift.

		Avkastning		Standardavvik	
		Periode 1	Periode 2	Periode 1	Periode 2
Desil 1		<b>ALX</b>	<b>IGE</b>	<b>ALX</b>	<b>PAN</b>
		JIN	PAN	<b>PAN</b>	<b>IGE</b>
		<b>IGE</b>	<b>ALX</b>	PGS	<b>ALX</b>
		FRO	DNO	OCR	JIN
		TAA	FOE	<b>IGE</b>	EME
Desil 2		DNO	JIN	EME	DNO
		CRU	OCR	ELT	CRU
		RCL	PGS	<b>TAT</b>	<b>TAT</b>
		TEL	TGS	JIN	<b>TAA</b>
		SCH	FRO	<b>TAA</b>	PGS
Desil 3		<b>NHY</b>	<b>PRS</b>	<b>TOM</b>	TGS
		DNB NOR	TAT	<b>FOE</b>	<b>TOM</b>
		TGS	CRU	<b>FRO</b>	<b>FOE</b>
		<b>PRS</b>	<b>NHY</b>	CRU	OCR
		NSG	TEL	RCL	<b>FRO</b>
Desil 4		TAT	<b>ORK</b>	TGS	ELT
		<b>ORK</b>	TAA	DNO	PRS
		<b>STB</b>	<b>STB</b>	<b>STB</b>	NHY
		FOE	DNB NOR	<b>SCH</b>	<b>SCH</b>
		PGS	SCH	TEL	<b>STB</b>
Desil 5		<b>ELT</b>	<b>ELT</b>	PRS	TEL
		<b>EME</b>	<b>TOM</b>	<b>NSG</b>	<b>NSG</b>
		<b>TOM</b>	<b>EME</b>	<b>DNB NOR</b>	RCL
		OCR	RCL	NHY	<b>ORK</b>
		PAN	NSG	<b>ORK</b>	<b>DNB NOR</b>

Mens det er 1/3 av papirene som er i samme avkastningsgruppe i periodene, har halvparten av papirene samme risikogruppe. Risikoen er noe mer stabil fra en periode til en annen i forhold til avkastningen. Sammenhengen kan likevel ikke sies å være annet enn meget svak mellom periodene.

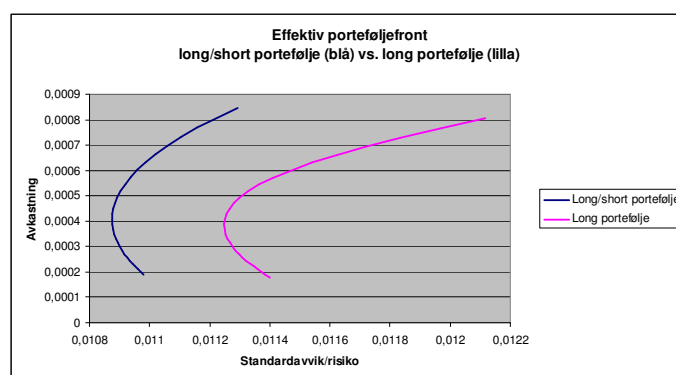
Vi har funnet indikasjoner på mange av de samme innvendingene som vi diskuterte i seksjon 2. Avkastningsseriene viser en tendens til å være asymmetriske og spissere i formen sammenlignet med normalfordeling. Videre har vi indikasjoner på at variansen kan endre seg betydelig over tid. Når vi sammenligner de to periodene finner vi at den første perioden i svak eller liten grad evner å forutsi neste periode.

På denne basis kan vi ikke forvente at noen av de tre modellene kan gi bedre resultater enn referansemodellen  $1/N$ .

### 3.7 Kostnad med long portefølje i forhold til long/short portefølje

I Markowitz (1952) vises det hvordan man finner effektive porteføljer uten beskrankninger. Dette viser vi i vår modell 1. Når vi innfører at optimeringen kun kan velge blant positive aktivaposisjoner vil dette medføre en kostnad dersom den optimale porteføljen ville inneholdt negative posisjoner. Det kan vises at den effektive porteføljefronten for en utelukkende long portefølje er på eller innenfor den effektive porteføljefronten for portefølje som tillater short posisjoner.

Vi kan vise dette ved å beregne den effektive porteføljefronten for modell 1, som tillater både long og short posisjoner, og modell 2, som er begrenset til long posisjoner. Vi benytter den første tre års perioden med daglige avkastningsdata som grunnlag.



Figur 5: Investors kostnad ved long portefølje (lilla) vs. long/short portefølje (blå); MV-modell; Daglig avkastning 1.1.2001-31.12.2003

Kostnaden ved å innføre beskrankningen i modell 2 (long) fremkommer som avstanden mellom kurvene. Vi ser tydelig hvordan investor enten må akseptere høyere risiko for å oppnå samme avkastning, eller må akseptere lavere avkastning for samme risiko. Vi ser også at investor i modell 2 (long) ikke kan redusere sin risiko ned på samme minimum som i modell 1 (long/short).

Empiriske studier viser at det svært ofte er slik at de effektive porteføljene innebærer short posisjoner, se Green og Hollifield (1992) og Levy (1983). Dette er med andre ord typisk at det er en kostnad forbundet med å begrense porteføljen til *long* posisjoner i aksjer og rentepapirer.

### 3.8 Modellresultater

Se appendiks 8.5 for porteføljevæker fra optimeringen.

Investeringsresultat dersom hver portefølje investeres i starten av periode 2, og holdes til slutten av periode 2 (perioden 1.1.2004 - 31.12.2006), uten endringer i investeringsperioden. Alle resultater er fra samme periode.

*Tabell 2: Porteføljeresultater sammenlignet med benchmark; Daglige data  
1.1.2004-31.12.2006*

		Årlig Geometrisk Gjennomsnitt	Daglig Geometrisk Gjennomsnitt	Daglig Aritmetisk Gjennomsnitt	Daglig Median	Daglig Stdavvik	Maks negativt avvik fra geometrisk linje i perioden	Sluttverdi etter 3 år ved 100 investert
Modell 1	Minimere varians Short posisjon tillatt Daglige data	52 %	0,1663 %	0,1742 %	0,2064 %	1,2630 %	-11,6829 %	351,67
	Minimere varians Short posisjon tillatt Månedlige data	46 %	0,1498 %	0,1604 %	0,1050 %	1,4550 %	-18,2215 %	310,57
Modell 2	Minimere varians Kun long posisjoner Daglige data	52 %	0,1657 %	0,1738 %	0,2065 %	1,2712 %	-10,2860 %	350,13
	Minimere varians Kun long posisjoner Månedlige data	60 %	0,1868 %	0,1966 %	0,1718 %	1,4056 %	-10,8030 %	410,68
Modell 3	Minimere semivarians Kun long posisjoner Daglige data	63 %	0,1937 %	0,2065 %	0,2492 %	1,6025 %	-20,8719 %	432,63
Benchmark	1/N modell 4% i hver av 25 assets Ikke rebalansering i perioden	60 %	0,1857 %	0,2014 %	0,3656 %	1,7689 %	-13,5446 %	407,22
	Optimere faktiske data Minimere varians Short posisjoner tillatt	27 %	0,0955 %	0,1000 %	0,1462 %	0,9449 %	-14,5382 %	205,97
	Optimere faktiske data Minimere varians Kun long posisjoner	31 %	0,1059 %	0,1106 %	0,1421 %	0,9662 %	-12,0051 %	222,84
	Optimere faktiske data Minimere semivarians Short posisjoner tillatt	270 %	0,5204 %	0,6155 %	0,5205 %	4,4392 %	-0,0001 %	5085,24
	Optimere faktiske data Minimere semivarians Kun long posisjoner	40 %	0,1325 %	0,1379 %	0,2147 %	1,0373 %	-5,9394 %	272,49
	OBX	37 %	0,1256 %	0,1330 %	0,2029 %	1,2168 %	-13,8125 %	258,59

De fem første resultatene i tabellen (modell 1, 2 og 3) er basert på porteføljevæker som fremkommer av optimeringen når modellene får input fra første treårsperiode [2001..2003].

De neste seks resultatene er benchmark resultater. Disse resultatene er sammenligningsgrunnlaget. I disse resultatene gjengir vi resultatet fra en portefølje der vi har lik andel av alle verdipapirer ( $1/N$ ), fire porteføljer som viser optimalt resultat fordi de optimeres med de faktiske tallene fra perioden, samt OBX som indikerer investors resultat dersom han hadde investert i indeksen i perioden. Merk at OBX oppdateres hvert halvår og er en verdivektet og utbyttejustert indeks av de 15 mest omsatte aksjene på Oslo Børs siste 6 måneder. Vårt utvalg på 25 aksjer er derfor større. OBX er imidlertid relevant som benchmark fordi den er tilnærmet mekanisk investerbar med lave kostnader for investor, og fordi OBX har høy korrelasjon med børsens totale utvikling. OBX kan derfor sies å være en forventningsindikator i forhold til markedets risk/reward. Investor vil neppe si seg fornøyd med likt avkastningsresultat og høyere risiko, eller lavere avkastningsresultat til samme risiko.

Vi tar også med oss observasjonen i forrige seksjon, der vi konkluderte med at vi ikke kan forvente at modellene våre gir bedre resultater enn  $1/N$  modellen på grunn av lav prediksjonsgrad mellom periodene.

Vi har to risikomål i tabellen. Det ene er daglig standardavvik og det andre er maksimalt avvik fra en geometrisk rettlinjet avkastningskurve. Godheten i modell 1 og 2 måles i forhold til det første, og modell 3 i forhold til det andre.

Av resultatene ser vi at daglige data gir entydig bedre resultat enn månedlige data. Dette er også å forvente, siden daglige data har betydelig lavere standardfeil og dermed høyere forklaringsgrad målt over samme periode. Vi finner at investor bør velge så høy grad av granulering av inndata som mulig.

Vi har slått fast i tidligere seksjoner at prediksjonsgraden mellom periodene er lav. Vi legger merke til at dette ser ut til å være en større utfordring for semivarians enn for varians. Både modell 1 og modell 2, som begge søker å minimere risiko gjennom standardavvik gir bedre nedsidebeskyttelse enn modell 3, som søker å minimere nettopp nedsiden. Resultatet i modell 3 er heller ikke bedre enn resultatet vi får i  $1/N$  modellen. Vi finner at ved lav prediksjonsgrad bør investor heller velge en  $1/N$  modell. Dersom investor likevel ønsker å optimere porteføljen basert på data med lav prediksjonsgrad bør investor velge et symmetrisk risikomål. Dette blir støttet av at modell 1 og 2 gir lavere standardavvik enn modell 3. Vi må likevel være forberedt på at resultatene kan gi andre utslag enn forutsatt, som vist gjennom at

modell 3 gir høyere nedside enn modell 1 og 2, selv om målsetningen med optimeringen var det motsatte.

Når vi betrakter benchmark-resultatene har vi fordelene av 100 % prediksjonsgrad. Vi kan derfor studere forskjellen mellom å minimere risiko gjennom varians og semivarians. Vi finner at minimering av nedside er en entydig bedre strategi. Dersom investors risiko i stor grad kan beskrives gjennom motvilje mot nedside i sin investering vil han tolerere daglige svingninger bedre enn minimering av standardavviket tilsier, så lenge investeringen ikke avviker betydelig på nedside i forhold til langsiktig trend. Belønningen gjennom slik risikotoleranse ser vi i ytterste konsekvens i modellen som minimerer nedside og tillater short-posisjoner på faktiske data. Denne porteføljen gir høyest standardavvik av alle porteføljene, men har ingen nedside slik vi har definert det i modellen. Alle avkastningspunktene er på eller over geometrisk linje. Investor vil få fantastisk godt betalt for dette synet på risiko, siden porteføljen er blitt 50 ganger større på 3 år.

Optimering på faktiske data synliggjør også kostnaden ved å beskränke investors mulighet til å kun velge long posisjoner. Vi kan observere noe kostnad for investor når vi minimerer variansen, men en betydelig kostnad når vi minimerer semivariansen. Siden vi ikke har inkludert transaksjonskostnader og i praksis har forutsatt 0 % lånekostnad i short-posisjonene vil den reelle kostnaden være lavere. Dessuten har vi observert en lav prediksjonsevne mellom periodene. Dette øker usikkerheten i input, og utnyttelse av short-posisjoner med usikre inndata kan resultere i helt andre utfall enn forventet. Vi finner at investor ikke bør benytte short-posisjoner når input er usikre data, og finner støtte i resultatene fra 1/N-modellen.

Modellene gir jevnt over høyere risiko enn OBX, men også bedre investeringsresultat. At risikoen er høyere indikerer igjen at prediksjonsevnen i inputdata er dårlig fra en periode til en annen. At investeringsresultatet er bedre kan indikere at vi har fordel av den generelle effekten av at høyere risiko har en tendens til å gi bedre avkastning.

Det siste poenget vi vil trekke frem er at samtlige modeller, enten de er basert på prediksjon eller optimering på faktiske data, velger en kombinasjon av flere papirer. Minimum antall er 6 papirer, som velges av modell 2 med månedlige data, mens maksimum er 25 papirer som velges av alle short porteføljene. Long porteføljene har en tendens til å bestå av færre papirer.

Generelt finner vi entydig støtte for at investor bør velge en portefølje fremfor enkeltassets uansett risikomål.

## 4. Kritikk og state of the art

### 4.1 Kritikk av MV-modellen

I Aase (2003) gjengis en historie fra slutten av 60-tallet. Professor James Tobin ved Yale University, senere Nobelprisvinner i økonomi, hadde omfavnet MV-modellen i den grad at han hadde planlagt et eget nasjonalt institutt i USA som skulle fokusere på bruk av *mean-variance* analyse i makroøkonomisk modellering. Planleggingen hadde kommet så langt at finansiering forelå. Imidlertid publiserte *Review of Economic Studies* i 1969 to artikler med kritikk av modellen, den ene skrevet av Karl Borch, se Borch (1969), og den andre av Martin Feldstein, se Feldstein (1969). Tobin svarte selv på kritikken i samme publikasjon, se Tobin (1969). Etter denne kritikken hørte man ikke mer om det nasjonale instituttet.

I sin kritikk viste Borch med flere at MV-modellen bare ville gi optimalt resultat (maksimere nytten) dersom nyttefunksjonen til investor er kvadratisk, eller dersom avkastningen til verdipapirene man velger blant er symmetrisk sfærisk distribuert.

En kvadratisk nyttefunksjon er svært lite sannsynlig fordi en slik funksjon impliserer *økende* i stedet for avtagende absolutt risikoaversjon, samt *negativ* marginalnytte over en viss terskelverdi. Dette skulle i så fall bety at verdipapirer med risiko er et *mindreverdige gode*, noe vi kan observere at ikke er tilfelle (*konsumet* av verdipapirer faller *ikke* med økende inntekt).

Symmetrisk distribusjon utelukker per definisjon *asymmetrisk* distribusjon. Spesielt for lengre investeringshorisoner har aksje-avkastningen en tendens til å ha en asymmetrisk, tilnærmet log-normal distribusjon. Dette blant annet fordi verdien ikke kan gå under null (nedsiden er med andre ord *begrenset*), og det faktum at vi kan observere at aksjer i gjennomsnitt har en positiv realavkastning over tid. Dermed blir *varians* et mindreverdige mål på risiko. Nedsiden er begrenset, mens oppsiden er «ubegrenset», og varians, som er et mål på symmetrisk risiko, straffer den ubegrensede, og ønskede oppsiden like hardt som den uønskede nedsiden.

Kritikken er blant annet imøtegått av Markowitz, se Markowitz (1990), og Kroll med flere (1984). Kroll viser at kvadratiske nyttefunksjoner er en robust *lokal* tilnærming, noe som gjør MV-modellen til en relativt god tilnærming i praksis. At det finnes få andre praktiske tilnærminger er Markowitz' poeng i sitt Nobel foredrag (1990).



MV-modellen har en tendens til å velge store posisjoner i et relativt lite antall aksjer, se Green og Hollifield (1992). Dette fører til at det som skulle være en *vel-diversifisert* portefølje med kontrollert risiko likevel ikke er det fordi porteføljen i stor grad vil følge svingningene i disse få, store postene. Dermed vil nedsiden i porteføljen ikke være godt nok sikret mot forhold som konkursrisiko, naturkatastrofer og svindel.

For at modellen skal være en relativt god tilnærming fordrer det imidlertid at inn-data er pålitelige. Brennan og Torous (1999) har diskutert hvordan feil inn-data kan gi signifikant reduksjon i nytte, noe vi også ser av våre resultater i seksjon 3.

En vesentlig enklere modell enn MV-optimering – lik fordeling mellom alle tilgjengelige verdipapir – for en rimelig diversifisert portefølje kan gi en sammensetning som er overraskende nært en optimal portefølje, se Fisher og Statman (1997).

## **4.2 Betydningen av tidshorizonten**

Statistisk sett er det nødvendig med dataserier som måles over nøyaktig like lange tidsintervall som investeringshorizonten (eller *en investeringsperiode* i fler-periode modeller), og det er også et krav at man har tilgjengelig et signifikant antall av slike uavhengige perioder (*sample size*) for å få standardfeilen ned på et lite signifikant nivå i forhold til måleresultatet.

Hvis man for eksempel har en forventet årlig avkastning på 12 %, men benytter månedlige avkastningsdata og 1 % forventet månedlig avkastning, kan man få en portefølje med vesentlig høyere risiko enn nødvendig. Dette er fordi avkastningen kan ha en tendens til å bli mindre risikofylt over tid, eller, sagt på en annen måte, ha en tendens til å variere mer på kort sikt.

I mange sammenhenger er det også slik at perioder med spesielt høy varians er av kortere varighet. Dersom vi benytter månedsdata eller årsdata har vi derfor lavere sannsynlighet for å fange opp «urolighetene». Sjansen er lavere for at vi måler på det tidspunktet da uroligheten inntreffer. Dette kan igjen medføre at målt risiko er lavere enn reell risiko. Denne faktoren har en tendens til å bli undervurdert. Det er for enkelt å konkludere med lavere risiko over tid, siden dette ofte er basert på variansen i lange dataserier med årlige datapunkter sammenlignet med variansen i kortere dataserier med månedlige eller daglige datapunkter. Granuleringen i dataseriene må være den samme for at vi skal kunne gjøre slike sammenligninger.

I seksjon 3 benytter vi daglige og månedlige avkastningsdata. Modell 1 og 2 plukker i praksis ut porteføljer som optimerer i forhold til daglige eller månedlige resultater. Dette gir imidlertid ikke riktig resultat dersom investeringshorisonten er 3 år, som i dette tilfellet. Det vi *burde* ha gjort i et slikt tilfelle er å måle over et tilstrekkelig antall 3-års perioder, og så benytte dette som input i modellene.

I modell 3 benytter vi daglig avkastning over hele forrige 3-års periode for å optimere porteføljen for neste 3-års periode. Med en slik tilnærming unngår vi noen av feilkildene fordi vi måler avkastning og risiko over hele 3-års perioden med daglige avkastningsdata.

I seksjon 5 viser vi hvordan man i praksis ofte må gjøre kompromisser som forringer resultatene (øker standardfeilen). Når SPU har en investeringshorisont på 15 år er det denne horisonten som er relevant i forhold til forventet avkastning. Imidlertid finnes det ikke tilgjengelig data med et signifikant antall uavhengige 15-års perioder. Det betyr blant annet at standardfeilen må tas hensyn til i standardavviket, noe som i modellsammenheng gir en risiko som kanskje er høyere enn det som faktisk er tilfelle.

En annen svakhet i dataserier som spenner over svært mange tiår er at de i større eller mindre grad unnlater å ta med papirer som er annullert i perioden, eller at man ikke har med markeder med vanskelig tilgjengelige data. Størrelsen på problemet med annullerte papirer kan illustreres med et datasett fra NYSE, AMEX og NASDAQ i 22-års perioden januar 1983 til desember 2004. Dersom man tar med samtlige aksjer som har vært børsnoterte på disse tre børsene i løpet av denne perioden er det i sum 24057 ulike papirer. Imidlertid var kun 11384 av disse børsnotert i slutten av perioden. Hadde vi tatt utgangspunkt i disse aktive papirene ville vi med andre ord kun analysere halvparten av markedet, i tillegg til at nyere data ville bli tillagt for stor vekt. Datasettet ville også ha en tendens til å vise for høy avkastning siden vi bare måler på de papirene som «overlevde» (*survivor bias*). Se Wilcox og Crittenden (2005).

### **4.3 State of the art: mGH og ES**

Som vi ser i denne utredningen, og som er i tråd med en rekke empiriske studier, så er det allment akseptert at historiske aksjeavkastningsdata ikke er normalfordelte. Videre har vi slått fast at standardavvik er et mindreverdige mål på risiko, blant annet fordi investor er mest opptatt av å unngå tap.

Disse utfordringene er søkt løst gjennom to utviklinger; den ene er å finne en bedre beskrivelse av historiske avkastningsdata, og den andre er å finne bedre risikomål.

Avkastningspopulasjonen gjerne asymmetrisk, som vi også ser i denne utredningen, og vil i noen sammenhenger ha en tung hale med en rekke avkastningsutfall på siden av og utenfor en normalfordeling. Det er derfor utviklet en måte å beskrive en slik populasjon på gjennom en generalisert beskrivelse av en hyperbel, såkalt *multivariate generalized hyperbolic* (mGH). Hyperbelen beskrives med et sett av variabler som gjør at den i stor grad tar hensyn til kurtosis og skjevhet, og er generalisert slik at normalfordeling blir et spesialtilfelle. Empiri viser at mGH er dominant i forhold til normalfordeling ved beskrivelse av avkastningsdata for en rekke finansielle tidsserier. Blant miljøene som deltar i utviklingen av denne delen av finansteorien er Norsk Regnesentral, se Aas og Hobæk Haff (2006).

I finansmiljøer er det vanlig å kvantifisere risikoposisjoner gjennom *value at risk* (VaR). VaR er definert som det maksimale potensielle tap (beløp) som en portefølje kan påføres i de *beste*  $x\%$  tilfellene over en gitt tidsperiode. VaR benyttes blant annet for å styre risiko på makronivå i finanskonsern, for å bestemme fullmakter og for posisjonsrapportering mot for eksempel myndigheter. Som man ser av definisjonen beskriver ikke VaR hele risikoen. VaR beskriver ikke hva som skjer i  $1 - x\%$  av tilfellene. Teknisk sett er vi også nødt til blant annet å forutsette *Gaussiansk* avkastningsfordeling for at VaR skal være *subadditiv*, som vil si for at vi skal kunne addere VaR for to ikke-overlappende posisjoner for i sum å få VaR som er garantert lavere eller lik, se Artzner med flere (1998). Når vi så har slått fast at avkastningsfordelingen sjelden er symmetrisk, ser vi at VaR i noen tilfeller kan underestimere risikoen (summen av VaR for to posisjoner kan i praksis være mer enn posisjon 1 + posisjon 2) og dermed ikke er et godt nok mål på risiko slik det benyttes (og adderes) på makronivå i dag. Noen finansinstitusjoner benytter derfor *Expected Shortfall* (Conditioned VaR) i sin interne risikostyring, mens de rapporterer VaR til myndighetene.

Expected Shortfall (ES) er definert som *forventet* tap i de  $1-x\%$  verste tilfellene over en gitt tidsperiode. Med andre ord; dersom det først går galt, hvor mye kan vi forvente å tape. ES beskriver for det første hele risikoen, og for det andre er den *subadditiv*.

Det er fremdeles slik at VaR og ES i mange tilfeller benyttes sammen med standardavvik. Som vi argumenterer for over forutsetter det at distribusjonen er normalfordelt. I en normalfordelt verden er VaR og ES bare standardavviket multiplisert med en konstant, som i

«95 % VaR = 1,64 standardavvik og ES = 2,06 standardavvik». I optimeringssammenheng gir en slik definisjon ingen ekstra verdi ut over standardavviket.

Det er når vi kombinerer beskrivelsen av avkastningsdata som en mGH med beskrivelse av risiko som ES at vi får en lukket modell der vi kan optimere i risk/reward dimensjonen. Dette er å betrakte som *state of the art* i slutten av 2007, se Hellmich og Kassberger (2007).

Vi merker oss at i løpet av 55 år har utviklingen først og fremst gitt oss riktigere beskrivelser av avkastning og risiko. Selve konseptet som ble introdusert med Markowitz i 1952 er det samme; modellene forsøker fremdeles å optimere avkastning i forhold til risiko.

## **5. Hvordan SPU setter forventningene til avkastning og risiko**

### **5.1 Innledning**

I denne delen drøftes hvordan forventninger til fremtidig avkastning og risiko settes for et av verdens ledende fond – Statens Pensjonsfond – Utland (SPU).

Hensikten er tre-delt. For det første er sammenstillingen ment å gi et inntrykk av hvordan en profesjonell forvalter benytter en kombinasjon av finanst teori, historiske observasjoner og egne vurderinger for å sette fremtidige forventninger. For det andre vil vi gjennom en slik gjennomgang være i stand til å vurdere antagelsene til SPU mot andre funn i denne utredningen. Seksjon 5 konkluderer med en sammenstilling av forventningene slik at de kan benyttes som datagrunnlag i seksjon 6.

Vurderingene er basert på det siste publiserte materialet fra Norges Bank i såkalte Staff Memo's i perioden 2005-2007. Formelt er Norges Bank operasjonell forvalter, mens det er Finansdepartementet som skal gjøre seg slike vurderinger ut fra sin forvalterrolle. Før et egnet fagmiljø ble etablert fra høsten 2006 lente departementet seg på fagkompetanse fra Norges Bank. Fremover vil vurderinger som vi her diskuterer bli gjort i regi av *avdeling for formuesforvaltning* i Finansdepartementet.

### **5.2 Statens Pensjonsfond – Utland (SPU)**

Statens pensjonsfond ble etablert 1. januar 2006 med utgangspunkt i Statens petroleumsfond og Folketrygdfondet. Fondet består av to deler; «Statens pensjonsfond - Utland» og «Statens pensjonsfond - Norge». Pensjonsfondet forvaltes av Finansdepartementet, som har delegert den operative forvaltningen til Norges Bank (Statens pensjonsfond - Utland) og Folketrygdfondet (Statens pensjonsfond - Norge).

Fondet er statens instrument for å flytte formue fra olje- og gassreserver til en bred portefølje av internasjonale verdipapirer. Målet er en bedre balanse mellom forventet avkastning og forventet risiko i den samlede formuesforvaltningen. Fondet har plassert midlene i utenlandske finansobjekter (aksjer, obligasjoner, pengemarkedsplasseringer og derivater) i 42 utviklede og fremvoksende aksjemarkeder og 31 valutaer for renteinvesteringer. Norges Bank

Investment Management (NBIM) forvalter kapitalen dels internt med egne porteføljeforvaltere og dels ved kjøp av eksterne forvaltningstjenester.

Vårt anliggende i denne utredningen er hvilke faktorer og metoder som benyttes for å sette forventningsparametrene og risikoen til de enkelte delmarkedene for å møte de forventningene som nasjonen Norge har til SPU med hensyn til avkastning og risiko.

Disse forventningene skal så benyttes i seksjon 6.

### **5.3 Effekten av plassering og avkastning i valuta**

SPU er å regne som en nasjonal formue. Dermed er formålet med forvaltningen å maksimere den reelle fremtidige kjøpekraften i forhold til Norges import. Avkastningen bør derfor måles i forhold til den fremtidige importveide valutakurven, justert for tilsvarende importveid inflasjon, se Memo (2006) side 22.

Norges Bank tar utgangspunkt i kjøpekraftsparitet og har som ståsted at på lang sikt vil prisforholdet være relativt stabilt. Diskusjonen om valutaeffekter er ment å påvise at valutaforhold ikke har særlig effekt i det lange løp.

I diskusjonen om valutaeffekter diskuteres særlig fire områder. For det første sammenlignes sammensetningen av fondet med en estimert utvikling i importen. Dette for å vise at fondet er tilnærmet valutaneutral. For det andre sammenlignes sentrale verdensvalutaer med en syntetisk importveid valuta (IMP) for å påvise kjøpekraftsparitet. For det tredje vises det at endringer i valutakursen ikke kan regnes med som en særlig sikker avkastningsfaktor hverken på oppsiden eller nedsiden. Avslutningsvis diskuteres risiki som kinesisk revaluering av renminbi og effekten av utviklingen i det amerikanske budsjettunderskuddet.

Konklusjonen i diskusjonen er at Norges Bank ikke er i stand til å kvantifisere effekten av valutaendringer med rimelig grad av sikkerhet. I stedet inkluderes valutavirkningene som mulig risiko og bias i SPUs generelle porteføljeanalyse.

### **5.4 Valg mellom reell og nominell forventet avkastning**

I tråd med SPUs formål er det den reelle kjøpekraften som er relevant som mål på avkastningen. Den reelle avkastningen fremkommer som nominell avkastning fratrukket

inflasjon. Estimatene på reell forventet avkastning og volatilitet bygger i stor grad på historisk utvikling de siste 50 årene.

De reelle forventningene fremkommer i hovedsak i Memo (2005) , mens de nominelle forventningene i ulike scenarier diskuteres i Memo (2006) og Memo (2007).

I de tilfellene Norges Bank benytter nominell avkastning er dette for å skille mellom ulike scenarier, blant annet ved hjelp av ulik inflasjonsutvikling. Dette gjøres for å stress-teste antagelser og for å observere mulige utfall av ulike sannsynlige hendelser gjennom simuleringer. I Memo (2006) sammenlignes for eksempel et lavinflasjons basisscenario (i praksis en fremskriving av dagens situasjon) med et scenario med deflasjon og et scenario med stagflasjon. Resultatene fra scenariene sammenlignes for å diskutere om nåværende forvaltningsstrategi er robust, eller om resultatene gir grunnlag for anbefalte endringer i forvaltningsstrategien.

## **5.5 Forventet volatilitet i aksjemarkedet og obligasjonsmarkedet**

Ideelt sett burde man måle det samme historisk som man forsøker å beskrive for fremtiden. Det hadde derfor vært ønskelig med et signifikant antall ikke-overlappende 15-års perioder. Dette foreligger dessverre ikke siden dette innebærer et ønske om tall for mer enn 400 år i alle markeder. Derfor benyttes kortere tidsserier som basis, med tillegg av en rimelighetsvurdering.

I forhold til basisscenariet settes volatiliteten i markedene som en direkte fremskriving av historisk observert volatilitet de siste 20 årene, se Memo (2006) side 32.

Vurderingen er at siden hovedforutsetningen i basisscenariet er en videreutvikling med lav inflasjon, vil de siste 20 årene være det mest relevante observasjonsgrunnlaget. Alternativet ville være å observere lengre datasett, som Dimson med flere (2002), og så justere observasjonene for det man mener er relevante forhold de neste 15 årene. Denne siste tilnærmingen blir brukt i Memo (2005) og har den fordelen at metoden inneholder datapunkter som beskriver flere utfall, og at den dermed er mer generell.

For å beregne volatiliteten benyttes annualiserte månedsdata for å få nok datapunkter til at observasjonene skal være signifikante. For aksjer benyttes de relevante del-indeksene for markedene fra indeksserien FTSE World. For obligasjoner benyttes delindekser fra Citigroup

World Government Bond Index (3-7 år). For to av obligasjonsmarkedene benyttes tilnærminger. For Asia/Pacific-ex-Japan benyttes Australia, og for Europe-ex-UK benyttes en verdiveid indeks basert på indeksen for Frankrike, Tyskland, Italia og Nederland.

## **5.6 Forventet korrelasjon mellom markedene**

Etter samme mønster som for volatilitet beregnes korrelasjonen i aksjemarkedene og obligasjonsmarkedene ved å benytte observert korrelasjon de siste 20 årene. De samme dataseriene inngår, det vil si nominelle månedsdata fra FTSE World indekser for aksjemarkedene og Citigroup World Government Bond Index (3-7 år) for obligasjonsmarkedene. En viss usikkerhet legges inn i tallene ved å oppgi korrelasjonen med kun en desimal.

For korrelasjonen mellom de ulike delmarkedene i aksjemarkedet og de ulike delmarkedene i obligasjonsmarkedet justeres disse noe i forhold til observert korrelasjon.

Enkelte studier, se Pan, Liu og Roth (2001) og Norges Banks egne undersøkelser, viser at korrelasjonen er noe høyere i realiteten enn det måleresultatet vil vise over en kortere periode. Norges Bank beregner denne effekten til 10 prosentpoeng. Den observerte korrelasjonen internt mellom delmarkedene i aksjemarkedet og internt mellom delmarkedene i obligasjonsmarkedet justeres derfor opp av Norges Bank med 0,1 på grunn av denne effekten.

## **5.7 Forventet avkastning i obligasjonsmarkedene**

Forventet avkastning i obligasjonsmarkedene bestemmes ut fra å dekomponere avkastningen i del-elementer, og så estimere disse del-elementene.

Obligasjonene deles i to del-markeder; ett for obligasjoner og sertifikater utstedt eller garantert av stater og myndigheter, og ett for selskaper og finansinstitusjoner. Forskjellen mellom de to del-markedene er et estimert risiko-tillegg for den siste kategorien.

Forventet avkastning for obligasjoner dekomponeres i *naturlig likevekts realrente, inflasjon, samt avkastning som kompensasjon for tid til forfall*. For obligasjoner utstedt av selskaper estimeres et fjerde element i form av et *risikotillegg*.

Motivasjonen for denne dekomponeringen er blant annet at den gir fordeler når Norges Bank skal diskutere ulike scenarier. De ulike scenariene beskrives ved hjelp av svingninger i de tre



(fire) faktorene og dette er intuitivt enklere å følge for leseren, samtidig som dekomponeringen er forankret i finansteorien.

De ulike faktorene settes for hvert av markedene.

Når det gjelder naturlig rente for USA benyttes et estimat gjort av Fels og Pradhan (2006a) basert på metoden til Laubach og Williams (2001). Estimaten på 2,25 % nedjusteres til 2 % av Norges Bank for å justere for skatteeffekten som oppstår gjennom forskjellen mellom langsiktig likevektsrente og gjennomsnittlig inflasjon estimert til 4,39 %, se Memo (2006) side 62.

For Euro-området vises det til en annen studie av Fels og Pradhan (2006b) som konkluderer med at tilsvarende rente i Europa er 1 % lavere enn i USA, dvs. ca. 1,3 %, men at differansen mellom Europa og USA er økende grunnet forskjeller i utviklingen i produktivitet, befolkningsvekst og tiltagende lavere sparetilbøyelighet i USA. Samtidig pekes det på andre studier som konkluderer med høyere rente i Europa, blant annet en som konkluderer med samme rente begge steder. Norges Banks egen vurdering er at lavere sparerate i Europa enn i USA, samt lavere befolkningsvekst i Europa enn i USA, peker på en lavere grunnrente i Europa enn i USA. Det konkluderes med en grunnrente på 1,5 %, se Memo (2006) side 70.

For Japan benyttes samme estimat for grunnrenten som for Euro-sonen, 1,5 %, basert på et resonnement om at den demografiske utviklingen ligner hverandre, se Memo (2006) side 72.

Tilsvarende resonnementet for Asia-ex-Japan er ikke ført eksplisitt av Norges Bank, men forventningsestimatet er gjengitt i Memo (2007). Dette er 2,3 %-poeng høyere enn for Japan, og ved å følge tilsvarende resonnement som over kan vi forklare denne forskjellen med at inflasjonen i Asia-ex-Japan for tiden er flere %-poeng høyere enn i Japan, og at kurven for de neste 15 årene dermed starter flere %-poeng høyere. Alternativt er obligasjonsmarkedet Asia-ex-Japan basert på forventningene fra det amerikanske markedet, slik banken har gjort det i Memo (2006) side 98 for aksjemarkedet.

For inflasjonen så settes denne til de respektive sentralbankenes implisitte inflasjonsmålsetting. For USA er dette 2,5 %, for Euro-sonen 2,0 %, og for Japan 2,0 %.

Det tredje del-elementet, avkastning som kompensasjon for tid til forfall, beregnes med utgangspunkt i arbeidet til Ang og Bekaert (2005). De viser at denne kompensasjonen historisk i gjennomsnitt har vært 1 %, se Memo (2006) side 63. Norges Bank mener at dette

estimatet er påvirket av historisk høy inflasjon, og justerer estimatet ned til 0,8 % i sitt basis scenario (som er et lav-inflasjons scenario). Dette estimatet blir benyttet globalt i alle obligasjonsmarkedene.

For å estimere risikopremien for selskapsobligasjoner tar banken utgangspunkt i obligasjoner med *A rating* fra Standard and Poor's. Risikopremien settes til 0,8 % for alle markeder. Det pekes på flere studier som dette tallet er basert på; Elton med flere (2001), Verloot (2002), Dimson med flere (2002) og Iilmanen (2004).

Endelig avkastningsforventning finnes ved å vekte avkastningen for statsobligasjoner og selskapsobligasjoner med en fordeling på 75 % statsobligasjoner og 25 % selskapsobligasjoner, som er en fordeling nært porteføljens benchmark, se Memo (2005) side 36.

Forventningene som her diskuteres fungerer som et siktepunkt på 15 års sikt. For hvert delmarked tar man så utgangspunkt i dagens reelle situasjon og estimerer et forløp 15 år frem i tid som «treffer» dette siktepunktet. I hovedsak vurderes det hvor raskt markedet flytter seg mot tilstanden man forventer om 15 år. Se Memo (2006) sidene 65-73 for eksempler. Forventningsbanen fra nå og frem 15 år i tid danner en kurve. Basert på denne kurven estimeres geometrisk gjennomsnittsavkastning i neste 15-års periode, og dette tallet benyttes som forventning for perioden, se Memo (2006) side 59.

## **5.8 Forventet avkastning i aksjemarkedene**

Utgangspunktet er at investor ønsker en kompensasjon for den ekstra risikoen han tar ved å investere i aksjer. Denne kompensasjonen, meravkastningen, oppgis som avkastning utover en relativt risikofri plassering, representert ved avkastningen for lange statsobligasjoner.

Størrelsen på denne meravkastningen er ett av de mest diskuterte tallene innen finans i dette tiåret. Diskusjonen holdes ved like fordi tallet er nødvendig for å kunne foreta vurderinger i forhold til for eksempel fremtidig aksjeandel i en portefølje. I tillegg har senere tids undersøkelser vist at denne meravkastningen er vesentlig lavere enn det man hittil har tatt utgangspunkt i. Denne innsikten er blant annet basert på etablering av et bedre historisk datagrunnlag, se Dimson med flere (2002), og et skift etter markedsnedgangen i 2000-2002 fra fremskriving basert på trendmodeller (for eksempel ekstrapolering av aksjekursutviklingen

på 90-tallet forklart med «new economy – new rules») til fremskriving basert på verdiorienterte modeller, se utbyttmodellen til Fama og French (1988).

Modellen er bygget på Gordons vekstmodell (1962). Se Memo (2005) side 44. Se også Memo (2005) side 47 om å legge til gjenkjøp av aksjer i Gordon-modellen.

Emnet diskuteres grundig i Memo (2005). Det konkluderes med en langsiktig forventet ekstra avkastning for aksjer i forhold til lange statsobligasjoner på 2,5 %, med et standardavvik på +/- 1,5 %-poeng. Resultatet fremkommer gjennom å vurdere nylige akademiske studier, undersøkelser blant institusjonelle investorer, samt estimater fra andre store pensjonsfond, se Memo (2006) side 85 for en gjennomgang.

For å sette forventningstall for avkastning i de ulike aksjemarkedene for de neste 15 årene benyttes i hovedsak vekstmodellen til Gordon og Fama/French. Resultatet rimelighetsvurderes så i forhold til sammenlignbare resultater fra en tilnærming basert på en «Earnings/yield»-modell og en P/E modell. Disse resultatene vurderes så opp mot utsiktene i økonomien de neste 15 årene. Konklusjonen fra denne gjennomgangen i hvert delmarked benyttes for å justere ned eller justere opp forventningene for de neste 15 årene i forhold til det generelle utgangspunktet på 2,5 % meravkastning for aksjer.

På samme måte som i obligasjonsmarkedet settes de endelige forventningstallene basert på geometrisk gjennomsnitt de neste 15 årene der det trekkes en kurve fra dagens situasjon basert på summen av den estimerte rentebanen og det estimerte avkastningstillegget for aksjer. For nominell avkastning plottes i tillegg inflasjonsforventingen i det aktuelle markedet.

*Tabell 3: Dekomponering av Gordons vekstmodell i delfaktorer for 5 aksjemarkeder de neste 15 årene*

	Memo: Real GDP growth	Real dividend Growth (g)	Dividend/Price (D/P)	Stock repurchases (rp)	Real government bond yield (R)	ERP=D/P+g+rp- R
US	2,5 %	2,0 %	1,8 %	1,0 %	2,5 %	2,3 %
Europe	1,75 %	1,45 %	2,7 %	0,75 %	2,0 %	2,9 %
UK	1,75 %	1,45 %	3,1 %	0,75 %	2,0 %	3,3 %
Asia/Pacific	2,5 %	2,0 %	2,9 %	0,75 %	2,5 %	3,2 %
Japan	1,5 %	1,2 %	1,0 %	0,75 %	1,0 %	2,0 %

*Kilde: Memo (2006) side 90, modell bygget på Fama/French*

*Dividend/Price er US dividend yield som er hentet fra Annual US stock index data, R. Shiller.*

*Nominal bond yield* er US 10-year bond hentet direkte som markedsdata (5,0%).

Inflasjonsforventningen estimeres ved å ekstrapolere rullende 5-års historisk gjennomsnitt på CPI (2,5%).

Begrepet *real dividend growth* inkluderer både faktisk dividendevekst og en justering for inntjeningsvekst. Argumentet er at det er inntjeningsveksten som gir grunnlaget for fremtidige utbytter. Når det gjelder dividendeveksten kan denne kalkuleres historisk til 1,0 % (data fra R. Shiller), og kan justeres opp til 1,2 % ved begrense måleperioden til nyere data (fra FTSE). Ser man på veksten i inntjening har denne vært 1,7 % etter 2. verdenskrig (R. Shiller). Sommeren 2006 er situasjonen høy inntjening for selskapene, vist ved at veksten er godt over trendveksten de siste 3 årene. Dette forsvaret estimatet på 2,0 %.

Gjenkjøpsestimatet er basert på et arbeid av Liang og Sharpe (1999) som estimerer denne basert på historiske verdier (1982-1998) til 0,75 - 1,00 %. Dette estimatet er usikkert fordi en del av gjenkjøpet mot slutten av 90-tallet ble drevet av at selskapene kjøpte aksjer for å nøytralisere opsjonstildelinger. En alternativ tilnærming til gjenkjøp ser på den totale effekten av dividende og gjenkjøp i forhold til vekst-takten. Liang og Sharpe estimerer at summen over tid maksimalt kan være i intervallet 40-50 % i forhold til reell vekst for å kunne opprettholde denne utdelingen over lang tid. Siden reelle gjenkjøp, justert for opsjonseffekter, er estimert på lang sikt til ca. 1/6-del av total utdeling er gjenkjøpseffekten sannsynligvis vesentlig mindre enn 0,75 % - 1,00 %.

Vurderingen er imidlertid at ved å nedjustere gjenkjøpsestimatet til for eksempel et mer langsiktig korrekt 0,3 %, vil ERP-estimatet bli urealistisk lavt. Et slikt lavt ERP estimat (1,6 %) ville implisere at investor forventer avkastning godt under 2,5 % som er det langsiktige estimatet. Dette impliserer igjen at aksjemarkedet i USA er kraftig overvurdert, og at det forventes en betydelig korleksjon i den neste 15-års perioden.

For ytterligere å undersøke om aksjemarkedet er overpriset undersøkes inntjeningen til selskapene i forhold til aksjeprisen (E/P) og aksjeprisen i forhold til bokførte verdier (P/B) i en historisk sammenheng.

For inntjening undersøkes årlig vekst i inntjening for selskapene som inngår i S&P 500 i perioden fra 1968 (fra Datastream), se Memo (2006) side 90. Ved å se på tallene i historisk sammenheng ser man at dagens observerte vekst på 5,5 % er historisk lav. Deretter

undersøkes utbytte graden, som observeres i samme periode til å være relativt stabil rundt 0,5% av inntjeningen, men lavere mot slutten av perioden.

Pris/Bok måles til 2,9 i juli 2006, og det påpekes at dette sannsynligvis er en del høyere enn trend, som av Société Generale er beregnet til 2,0 i 2006.

Gjennomgangen peker på at risikoen i forhold til estimatet på 2,3 % er på *nedsiden*. Konklusjonen er *likevel* å beholde estimatet, og samtidig peke på at det er nødvendig med vekst i inntjeningen til selskapene over trend i perioden for å realisere estimatet. Dette er implisitt basisscenariet til forvalter for det amerikanske aksjemarkedet.

Tilsvarende resonnementer føres for de andre aksjemarkedene, men vesentlig forenklet. For eksempel sjablon-justeres gjenkjøpsfaktoren i de andre markedene ned fra 1% til 0,75 % for å kompensere for lavere historiske gjenkjøp. Lange statsobligasjoner i Frankrike benyttes som mal for realavkastningen for lange renter i Europa-ex-UK. Der det ikke finnes datagrunnlag for Asia/Pacific ex Japan settes data lik det som er satt for Amerika.

Det er verdt å merke seg at dividendemodellen benyttes konsekvent, og at estimatene som denne gir ikke er justert i forhold til andre vurderinger.

## **5.9 Test av forventningene i modellsimuleringer**

Etter at de relevante forutsetningene om avkastning, risiko og korrelasjon er satt, benyttes dette som input av Norges Bank i en modellsimulering for å teste forventningene og for å beskrive ulike mulige utfall gitt disse forventningene. Et eksempel på bruk er argumentasjon i forhold til aksjeandelen i SPU.

Modellen som benyttes er skreddersydd til formålet, og kan beskrives som en enkel korrelativ modell basert på en stokastisk prisprosess for fem aksjemarkeder og fem obligasjonsmarkeder. Modellen avviker i hovedsak fra en *random walk* modell ved at prisene er moderat *mean reverting* for aksjemarkedene. Vi merker oss dette spesielt, siden dette er motsatt forutsetning i forhold til funn av Exley, Mehta og Smith (2004). De påpeker at *mean reversion* i hovedsak kun kan påvises i rentemarkedene. Modellen er også basert på normalfordeling i avkastningsratene, en forutsetning vi setter spørsmål ved i seksjon 2 og seksjon 4.

Modellen simulerer markedsutviklingen over en 15 års periode og produserer en avkastnings sannsynlighetsfordeling for hvert marked og for porteføljen. Valutakurs hensyntas ved å simulere utviklingen for USD, JPY, GBP og EUR i forhold til NOK. NOK er valgt som basisvaluta for å ha et fast valutaanker. Asia/Oceania ex Japan forutsettes å være del av USD.

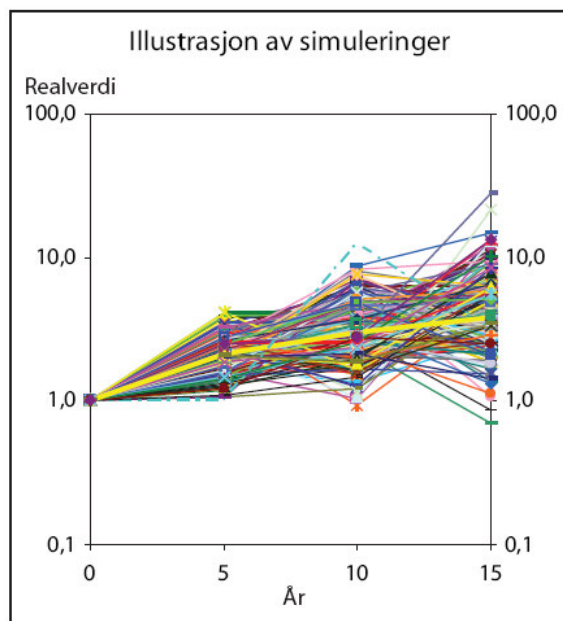
Modellen benyttes i hovedsak til å studere ulike utfall i forhold til ulik vekting av de forskjellige markedene. Hver gang modellen kjøres lages en avkastningsserie på 15 år for hvert marked. En hel simulering består av 6000 slike avkastningsserier for hvert marked. Disse seriene beskrives deretter statistisk. For hver simulering sammenlignes årlig avkastningstall (geometrisk gjennomsnitt), årlig standardavvik, årlig aritmetisk gjennomsnittlig realavkastning, standardavvik samt sannsynligheten for negativ akkumulert realavkastning.

Simuleringen kjøres normalt for flere scenarier – ett positivt, ett negativt og ett hovedscenario.

Fordelen med en slik simulering er at man oppnår en bedre beskrivelse av utfallsrommet enn det som er tilfellet ved bruk av en MV-modell. Fremgangsmåten gjør det også mulig å i større grad beskrive hvilke deler av allokeringen som har stor grad av usikkerhet og som derfor bør vurderes spesielt, og hvilke deler som ikke har stor innvirkning på sluttresultatet. Dernest er det mulig å teste hvor robuste de ulike input-variablene er, som igjen kan danne grunnlaget for hvor innsatsen bør settes inn for å få frem sikrere estimater.

Ulempen ved fremgangsmåten er at modellen er basert på forutsetninger som i høyeste grad er diskuterbare. Dette gjelder både antagelser om markedenes utvikling som er innebygd i modellen, og for forutsetningen om normalfordeling av avkastningsdata. Samlet kan dette bety at modellresultatene gir falsk trygghet ved at metoden *virker* solid for politikere og menigmann gjennom tall som «6000 simuleringer», men at den ikke er det fordi man undervurderer risikoen gjennom forutsetning om normalfordeling og *mean-reverting* aksjemarkeder.

I Stortingsmelding 24 (2006-2007) side 48 er resultatene av en simulering gjengitt:



*Figur 6: Simuleringer av utviklingen de neste 15 årene i Statens Pensjonsfond – Utland. Realverdi av 1 krone investert i år 0. Simulert med tilførsel av ny kapital basert på oljeprisforutsetninger i Nasjonalbudsjettet 2007. Den gule linjen i midten viser det mest typiske utfallet på hvert tidspunkt (logaritmisk skala).*

*Kilde: Finansdepartementet*

## **5.10 Oppsummering og SPU's forventninger de neste 15 årene**

Forventningene til SPU dannes med basis i historiske observasjoner. Observasjonene settes inn i et rammeverk, der observasjonene dekomponeres ved hjelp av teoretiske modeller, som vekstmodellen til Gordon. Hver av disse delkomponentene rimelighetsvurderes så fra ulike vinkler, og diskuteres i lys av dagens markedsutvikling og de nære forventningene.

I forhold til observert historisk utvikling trekkes globaliseringen frem som den viktigste bidragsyteren til en fortsatt god utvikling i aksjemarkedene. Fremvoksende økonomier som Brazil, India, Russland og Kina deltar i økende grad i det internasjonale vare- og tjenestebyttet, og dette fører til en globalt økt velstand.

På den negative siden trekkes det frem at investor nå har et mye bredere investeringsunivers enn i forrige århundre. Investor har nå anledning til å spre investeringene og risiko på en rekke nye markeder. Sammen med lavere transaksjons- og informasjonskostnader kan

investor akseptere en lavere risikopremie, og dermed en lavere aksjeavkastning. Strategirådet (2006) har beregnet at aksjer ville ha gitt en årlig reell meravkastning på 5,7% i forhold til obligasjoner i perioden 1900-2005, mens forventet meravkastning fremover er satt til 2,5%.

Et viktig trekk ved metoden er at forventningene beskrives som en kurve over de neste 15 årene. Denne kurven dannes med utgangspunkt i dagens situasjon, som så fremskrives til et forventet punkt om 15 år. Deretter benyttes det geometriske, årlige gjennomsnittet av denne kurven som forventet årlig avkastning.

Av gjennomgangen ser vi imidlertid at også Norges Bank benytter forutsetninger som det er all grunn til å sette spørsmålstegn ved. Dette gjelder både en noe haltende argumentasjon rundt bruken av Gordons vekstmodell, og også primærforutsetninger om *mean-reverting* aksjemarkeder og normalfordelte avkastningsutfall.

Vi merker oss spesielt at Norges Bank vurderer meravkastningen de neste 15 årene i det amerikanske aksjemarkedet til 2,3 %, til tross for at deres egen analyse peker mot et lavere estimat på 1,6 %. Norges Bank forutsetter at lønnsomhetsveksten i amerikanske selskaper vil være over trendveksten de neste 15 årene. Dette kan være en kilde til at forventningen til avkastning i dette markedet er overvurdert.

Dette viser både at praksis innen porteføljeforvaltningen har et potensiale for forbedring, og at forvaltningen på mange områder er basert på skjønn og erfaring.

I neste seksjon benyttes nominelle avkastningsforventninger fra basisscenariet. Norges Bank har estimert at veid verdensinflasjon i dette scenariet er 2,1 %. Vi gjør den forenklingen at vi estimerer reell porteføljeavkastning ved først å optimere porteføljen basert på nominelle tall, for deretter å trekke fra verdensinflasjon. Dette har den ulempen at optimeringen vil ha en tendens til å overvurdere avkastningen i høy-inflasjonsmarkeder, og dermed overvekte disse, og tilsvarende undervekte lav-inflasjonsmarkeder. Dette motvirkes imidlertid av at volatiliteten er oppgitt i forhold til nominelle tall. Spesielt i obligasjonsmarkedene vil høyere inflasjon gi høyere volatilitet, se stagflasjons-scenariet i Memo (2006), og høyere volatilitet vil tendere mot undervekting i optimeringen. Korrelasjonen er også oppgitt i nominelle verdier. Dette betyr at arbitrerings mellom markedene i liten grad påvirkes av om det er nominell eller reell avkastning. En fordel ved å benytte nominelle tall er at vi arbeider med et konsistent og oppdatert datasett.



Konklusivt benytter vi de siste tilgjengelige estimatene. Forventet avkastning, volatilitet og korrelasjon hentes i hovedsak fra Memo (2006), men er oppdatert med tall fra Memo (2007) der tallene fra 2006 er eksplisitt justert.

De siste tilgjengelige forventningene, som gjengitt i Memo (2007):

*Tabell 4: Norges Banks forventninger til aksje- og obligasjonsmarkedene de neste 15 årene*

<b>Marked</b>	<b>Nominell årlig avkastning</b>	<b>Standardavvik</b>
Bonds US	5,40 %	4 %
Bonds Japan	2,90 %	4 %
Bonds Asia/Pac ex Japan	5,20 %	5 %
Bonds UK	4,70 %	5 %
Bonds Europe ex UK	4,20 %	3 %
Stocks US	6,60 %	15 %
Stocks Japan	4,70 %	20 %
Stocks Asia/Pac ex Japan	6,60 %	21 %
Stocks UK	7,60 %	16 %
Stocks Europe ex UK	5,70 %	18 %

Korrelasjonskoeffisienter:

*Tabell 5: Norges Banks forventninger til korrelasjon mellom aksje- og obligasjonsmarkedene de neste 15 årene*

	Bonds US	Bonds Japan	Bonds Asia/Pac ex Japan	Bonds UK	Bonds Europe ex UK	Stocks US	Stocks Japan	Stocks Asia/Pac ex Japan	Stocks UK
Bonds US									
Bonds Japan	0,4								
Bonds Asia/Pac ex Japan	0,6	0,3							
Bonds UK	0,5	0,4	0,4						
Bonds Europe ex UK	0,6	0,4	0,5	0,7					
Stocks US	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0				
Stocks Japan	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5			
Stocks Asia/Pac ex Japan	-0,1	0,0	0,2	0,0	0,0	0,7	0,5		
Stocks UK	-0,1	0,0	0,2	0,2	0,1	0,9	0,5	0,8	
Stocks Europe ex UK	-0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8	0,5	0,7	0,8

Disse forventningene benyttes i neste del som input i modell 2 for å sammenligne resultatet med referanseporteføljen.

## **6. SPU's referanseportefølje versus en long MV-portefølje**

### **6.1 Innledning**

I foregående seksjon har vi diskutert hvordan Norges Bank og Finansdepartementet setter forventninger for markedene de neste 15 årene. I denne seksjonen diskuterer vi først investors avkastnings- og risikopreferanser i forhold til SPU, og deretter hvilken avkastning som er oppnådd. Vi ser så på hvordan SPU styres gjennom referanseporteføljen, og viser at referanseporteføljen følger den faktiske porteføljens utvikling i svært stor grad. Deretter benytter vi input fra forrige seksjon om forventninger til markedene i en MV-modell med long porteføljer (modell 2 fra seksjon 3) og sammenligner resultatene med referanseporteføljen.

### **6.2 Forventet avkastning og risiko**

Stortingsmelding 24 (2006-2007) side 44 diskuterer investors preferanser. Disse oppsummeres:

*«Det er bred politisk enighet om at risikoen skal være moderat, men også at en skal søke å oppnå en høyest mulig avkastning. I likhet med tidligere vurderinger er det en lang horisont på investeringene.»*

Videre settes det i praksis en nedre grense for hva som er akseptabel årlig avkastning gjennom å kombinere handlingsregelen på 4% med at bruken – uttaket – over tid skal tilsvare realavkastningen.

Som en korrigerende faktor ønsker investor å sammenligne med andre fond. Implisitt i dette ligger det at SPU ikke skal være «the odd man out» – investeringsstrategien skal av omverdenen oppfattes som godt innenfor gjeldende forvaltningsnormer og allmenne oppfatninger av markedsutviklingen. Innen estiske investeringer, som gjennomføres ved ekskludering av investering i selskaper assosiert med områder som våpen og barnearbeid, skal fondet oppfattes som ledende.

Investors preferanser kan oppsummeres med at man ønsker å minimere risiko, gitt en realavkastning på minst 4 %.

Hvorvidt det faktisk er slik at et bredt sammensatt, globalt fond kan beskrives å ha en moderat risiko med et mål på minst 4 % realavkastning kan diskuteres.

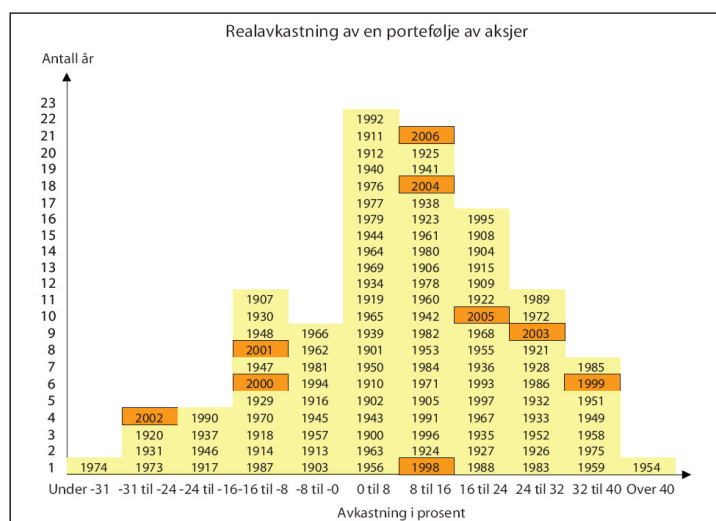
Finansdepartementet peker da også på at investor ser ut til å ha økt sin risikovillighet siden oppstarten av fondet. To faktorer trekkes frem. For det første har erfaringene med forvaltningen i perioden vist at selv om avkastningen har variert relativt mye har denne variansen vært allment tolerert og akseptert. Investor har med andre ord sovet godt om natten selv i turbulente perioder. Forvalter er heller ikke blitt nevneverdig plaget av spørsmål fra media og offentligheten om at formuen i perioder har hatt negativ avkastning. For det andre pekes det på den betydelige kompetansebyggingen som er gjort innen forvaltning. Dette inkluderer også anerkjennelse internasjonalt for det arbeidet som er gjort.

Adferden i turbulente tider har vist at investor er mer risikovillig enn først antatt. Videre er det opparbeidet en tillit mellom investor og forvalter som gjør at investor er villig til å ta en høyere risiko. Denne risikoviljen er også nødvendig for at det skal være realistisk å oppnå 4 % realavkastning.

## 6.3 Oppnådd avkastning

I avveiningen mellom forventet avkastning og risiko veies også erfaringene med fondet siden 1998, da fondet første gang investerte i aksjer. I deler av denne perioden har svingningene i aksjemarkedet historisk sett vært store. Dette er illustrert i tabellen gjengitt nedenfor, se Stortingsmelding 24 (2006-2007) side 46, som er en simulering av avkastningen til en aksjeportefølje lik vektingen i SPU's aksjeportefølje.

Tabell 6: Simulert realavkastning hvert år 1900-2006 for aksjeporteføljen i Statens Pensjonsfond – Utland. Lokal valuta.



Kilde: Finansdepartementet/Dimson, Marsh og Stauton

I figuren er årene siden 1998 rammet inn. Det fremgår at 1999 var et av de beste årene i aksjemarkedet de siste 107 årene, og 2002 var det nest dårligste året siden 1900.

Som vi ser av tabellen under hadde fondet negativ utvikling både i 2001 og i 2002. Vi ser at i 2002, som betegnes som det nest dårligste siden 1900, var realavkastningen negativ med 6,62%. Aksjevekten var da 40 %. Erfaringene var likevel at disse svingningene var håndterbare.

*Tabell 7: Oppnådd årlig avkastning for Statens Pensjonsfond - Utland 1997-2006. Kolonnen lengst til høyre er geometrisk avkastning. Fondets valutakurv. Avkastning i prosent.*

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	1997-2006
<b>Nominell avkastning</b>											
- Aksjeporteføljen	-	12,85 %	34,81 %	-5,82 %	-14,58 %	-24,39 %	22,84 %	13,00 %	22,49 %	17,04 %	7,02 %
- Renteporteføljen	9,07 %	9,31 %	-0,99 %	8,41 %	5,04 %	9,90 %	5,26 %	6,10 %	3,82 %	1,93 %	5,37 %
<b>- Totalporteføljen</b>	<b>9,07 %</b>	<b>9,26 %</b>	<b>12,44 %</b>	<b>2,49 %</b>	<b>-2,47 %</b>	<b>-4,74 %</b>	<b>12,59 %</b>	<b>8,94 %</b>	<b>11,09 %</b>	<b>7,92 %</b>	<b>6,49 %</b>
Prisstigning	1,75 %	0,92 %	1,28 %	2,02 %	1,17 %	1,91 %	1,57 %	2,37 %	2,33 %	2,14 %	1,75 %
<b>Reell avkastning</b>	<b>7,19 %</b>	<b>8,26 %</b>	<b>11,02 %</b>	<b>0,46 %</b>	<b>-3,59 %</b>	<b>-6,53 %</b>	<b>10,85 %</b>	<b>6,41 %</b>	<b>8,57 %</b>	<b>5,65 %</b>	<b>4,67 %</b>
Forvaltningskostnader	0,04 %	0,06 %	0,09 %	0,11 %	0,07 %	0,09 %	0,10 %	0,11 %	0,11 %	0,10 %	0,09 %
<b>Netto realavkastning</b>	<b>7,15 %</b>	<b>8,20 %</b>	<b>10,93 %</b>	<b>0,35 %</b>	<b>-3,66 %</b>	<b>-6,62 %</b>	<b>10,75 %</b>	<b>6,30 %</b>	<b>8,46 %</b>	<b>5,55 %</b>	<b>4,58 %</b>

*Kilde: Statens Pensjonsfond – Utland, Årsrapport 2006*

## 6.4 Styling av SPU gjennom referanseporteføljen

Stylingen av SPU skjer ved at eier av midlene, den norske stat representert ved Stortinget, vedtar lover (pensjonsfondsloven) og retningslinjer (stortingsmeldinger) for forvaltning av midlene. Finansdepartementet er i pensjonsfondsloven gitt i oppgave å forvalte fondet. Den operative forvaltningen av Statens pensjonsfond - Utland (SPU) utføres av Norges Bank.

Finansdepartementet rapporterer om forvaltningen til Stortinget gjennom en årlig melding, mens Norges Bank Investment Management (NBIM) rapporterer offentlig kvartalsvis om utviklingen.

Den langsiktige strategien for SPU som fastsatt av Stortinget avspeiles i en *referanseportefølje* sammensatt av Finansdepartementet gjennom en forskrift. Denne referanseporteføljen gir rammene for den operative forvaltningen.

Totalavkastningen til porteføljen i den operative forvaltningen vil i det alt vesentlige bli bestemt av beslutningene om referanseporteføljens sammensetning. Dette kan vises gjennom resultatene som er oppnådd. Fra Stortingsmelding 24 (2006-2007) , side 23:

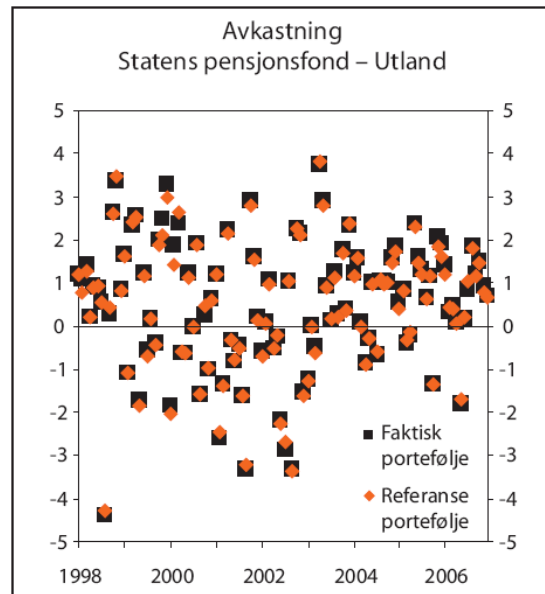
*Tabell 8: Differanseavkastning og standardavvik mellom Statens Pensjonsfond - Utland og Referanseporteføljen 1998-2006. Norske kroner og i lokal valuta. Prosent og prosentpoeng.*

	Faktisk portefølje	Referanseportefølje	Differanseportefølje
<i>Avkastning i norske kroner (1)</i>			
Gjennomsnittlig avkastning pr. år	6,13 %	5,67 %	0,46 %
Standardavvik	8,51 %	8,45 %	0,38 %
<i>Avkastning i lokal valuta (2)</i>			
Gjennomsnittlig avkastning pr. år	6,18 %	5,72 %	0,46 %
Standardavvik	5,29 %	5,18 %	0,38 %
<i>Forskjell mellom (1) og (2)</i>			
Gjennomsnittlig avkastning pr. år	-0,05 %	-0,05 %	0,00 %
Standardavvik	3,22 %	3,26 %	0,00 %

*Kilde: Norges Bank og Finansdepartementet*

Av tabellen ser vi at 90 - 95 % av avkastningen er gitt av referanseporteføljen. Resten av avkastningen, 5 - 10 %, kommer av de frihetsgradene som oppstår gjennom at referanseporteføljen oppgir intervaller for andeler i markedene og intervaller for risiko. Disse frihetsgradene benyttes i den operative forvaltningen til å søke meravkastning utover referanseporteføljen.

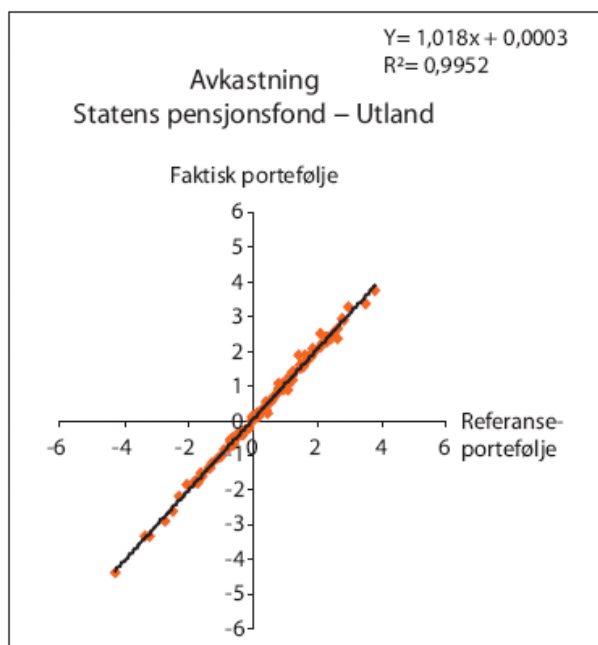
Høy grad av korrelasjon kan også vises figurativt gjennom sammenligning av månedsavkastningen til referanseporteføljen og faktisk portefølje, se Stortingsmelding 24 (2006-2007) , side 25:



*Figur 7: Sammenligning av månedlige avkastningsutfall i Statens Pensjonsfond - Utland og Referanseporteføljen 1998-2006. Prosent.*

*Kilde: Norges Bank og Finansdepartementet*

Statistisk er porteføljene tilnærmet perfekt korrelerte, se Stortingsmelding 24 (2006-2007) , side 26:



Figur 8: Sammenhengen mellom avkastningen i Statens Pensjonsfond - Utland og Referanseporteføljen 1998-2006

Kilde: Norges Bank og Finansdepartementet

Vi kan slå fast at referanseporteføljens sammensetning i stor grad bestemmer avkastningen til porteføljen. Referanseporteføljen er derfor et relevant sammenligningsgrunnlag i denne utredningen.

## 6.5 Referanseporteføljens sammensetning

Finansdepartementet har definert en referanseportefølje som består av konkrete aksjer og obligasjoner. Disse verdipapirene uttrykker oppdragsgiverens investeringsstrategi for Statens pensjonsfond - Utland (tidligere Petroleumsfondet). Referanseporteføljen er viktig for styring av risikoen i Fondet og for målingen av Norges Banks prestasjon som operativ forvalter.

Ved valg av regionvekter er det blant annet tatt hensyn til Norges importvekter. Sammensetningen av referanseporteføljen innenfor hver region bestemmes av markedsverdivektene mellom land.



Fondet har en referanseportefølje som består av aksjer som inngår i FTSE aksjeindekser i 27 land og av obligasjoner som inngår i Lehman Global Aggregate obligasjonsindekser i valutaene til 21 land.

Aksjer skal i utgangspunktet utgjøre 60 prosent av referanseporteføljen for Fondet. Innenfor aksjedelen av referanseporteføljen utgjør aksjer notert på børser i Europa 50 prosent, aksjer notert på børser i Amerika and Afrika 35 prosent og Asia/Oceania 15 prosent.

Obligasjoner skal i utgangspunktet utgjøre 40 prosent av referanseporteføljen. Innenfor obligasjonsdelen skal obligasjoner utstedt i europeiske valutaer utgjøre 60 prosent, amerikanske valutaer 35 prosent og asiatiske valutaer 5 prosent. Disse vekter utgjør fondets strategiske referanseportefølje, se Nasjonalbudsjettet (2008).

Det har vært betydelige endringer i sammensetningen av referanseporteføljen de siste 10 årene. Som en del av Revidert Nasjonalbudsjett 1996 ble det vedtatt en forskrift om at det som den gang het Petroleumsfondet skulle plasseres i statsobligasjoner, altså 0 % aksjeandel, etter omtrent samme retningslinjer som gjaldt for Norges Banks valutareserver. Våren 2007 ble aksjeandelen i referanseporteføljen besluttet økt fra 40 til 60 %. Endringen har vært nødvendig for å bevare fondets kjøpekraft over tid, gitt at inntil 4 % av fondet skal kunne benyttes hvert år, og må også ses i lys av den langsiktige tidshorisonen. Ved utgangen av september 2007 var den faktiske aksjeandelen i fondet 45,4 %, opp fra 42,3 % i juni. Norges Bank vil ikke offentliggjøre hvilken strategi som følges for å øke aksjeandelen til 60 %, men dersom økningen fortsetter i samme tempo vil en slik andel oppnås innen fire til fem kvartaler.

For å finne «vår» referanseportefølje – eller Benchmarkportefølje - tar vi utgangspunkt i fordelingen fra referanseporteføljen som gjengitt i Nasjonalbudsjettet (2008). For å fordele andelene etter samme markedsvalg som er benyttet i seksjon 5 av utredningen benytter vi markedsvektene fra dagens faktiske referanseportefølje som gjengitt i appendiks 8.6.

Mål-referanseportefølje fordelt på «våre» markeder:

*Tabell 9: Sammensetningen av Benchmark Porteføljen basert på Referanseporteføljen til Statens Pensjonsfond - Utland*

	Aksjer	Obligasjoner	Fordeling fra faktisk referanseportefølje	Benchmark Portefølje
	60 %	40 %		
<b>Bonds US</b>		35 %		14,0 %
<b>Bonds Japan</b>		5 %	90 %	1,8 %
<b>Bonds Asia/Pac ex Japan</b>			10 %	0,2 %
<b>Bonds UK</b>		60 %	17 %	4,0 %
<b>Bonds Europe ex UK</b>			83 %	20,0 %
<b>Stocks US</b>	35 %			21,0 %
<b>Stocks Japan</b>			51 %	4,6 %
<b>Stocks Asia/Pac ex Japan</b>	15 %		49 %	4,4 %
<b>Stocks UK</b>			31 %	9,3 %
<b>Stocks Europe ex UK</b>	50 %		69 %	20,7 %

## 6.6 SPU's avkastning og risiko gitt Norges Banks egne forventninger

Vi har nå både Norges Banks forventninger til markedene de neste 15 årene, som utledet i seksjon 5, og porteføljesammensetningen fordelt på de samme delmarkedene som utledet i seksjon 6.5. På denne basis kan vi finne forventet avkastning og risiko for SPU.

*Tabell 10: Beregning av forventet avkastning og risiko for Statens Pensjonsfond - Utland gitt Norges Banks forventninger og sammensetningen av Referanseporteføljen*

	Benchmark porteføljen	Avkastning
Bonds US	14,0000 %	0,7560 %
Bonds Japan	1,8000 %	0,0522 %
Bonds Asia/Pac ex Japan	0,2000 %	0,0104 %
Bonds UK	4,0000 %	0,1880 %
Bonds Europe ex UK	20,0000 %	0,8400 %
Stocks US	21,0000 %	1,3860 %
Stocks Japan	4,6000 %	0,2162 %
Stocks Asia/Pac ex Japan	4,4000 %	0,2904 %
Stocks UK	9,3000 %	0,7068 %
Stocks Europe ex UK	20,7000 %	1,1799 %
SUM	100,0000 %	
	<b>Porteføljeavkastning</b>	<b>5,6259 %</b>
	<b>Porteføljens standardavvik</b>	<b>9,1746 %</b>

Norges Bank forventer verdensinflasjon på 2,1 % de neste 15 årene. Vi kan dermed beregne realavkastningen for benchmarkporteføljen til  $5,6 \% - 2,1 \% = 3,5\%$ .

Vi ser at dersom Norges Banks egne forventninger slår til, vil SPU oppnå en realavkastning på 3,5% de neste 15 årene. Fondet vil med andre ord ikke oppnå investors forventninger til avkastning under disse forutsetningene.

I seksjon 5.8 om forventet avkastning i aksjemarkedene påviste vi at Norges Bank har forutsatt en meravkastning for aksjer de neste 15 årene på 2,3 % i det amerikanske aksjemarkedet. Norges Bank fremhever at risikoen i dette estimatet er på nedsiden. Estimatet er blant annet basert på at veksten i inntjeningen i selskapene i de neste 15 årene må være *over trend*.

Av benchmarkporteføljen ser vi at 21% av totalporteføljen vil være plassert i det amerikanske markedet når aksjeandelen blir 60%. Dersom meravkastningen i det amerikanske aksjemarkedet viser seg å være i linje med det lavere estimatet til Norges Bank på 1,6 % (som pekt på av Gordon's vekstmodell, se seksjon 5.8), så vil SPU's avkastning bli redusert med 0,147 %. Dersom Norges Bank har overvurdert aksjemarkedet i USA vil dette alene kunne bringe realavkastningen for SPU ned i intervallet 3,3 - 3,4 %.

## **6.7 Alternative porteføljer for SPU fra en *long* MV-modell**

Vi benytter modellresultatene i seksjon 6.6 som et uttrykk for investors preferanser.

Vi benytter MV-modellen fra seksjon 3, med beskrankning om positive porteføljevækt, og Norges Banks forventninger fra seksjon 5.10. Dette er nominelle forventningstall og korrelasjoner for de neste 15 årene.

Siden investor har realavkastning som mål lar vi modellen optimere med nominelle tall, og deretter trekker vi fra en beregnet global prisstigning på 2,1 %, som i basis-scenariet til Norges Bank.

Med bakgrunn i investors risikotoleranse kan vi finne en alternativ portefølje for SPU med samme risiko (standardavvik) som benchmarkporteføljen, men med maksimert avkastning. Teknisk sett flytter vi porteføljen ut til den effektive porteføljefronten i MV-modellen.

Tabell 11: Optimal portefølje for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt investors risikotoleranse og Norges Banks forventninger

	Andel	Avkastning
Bonds US	42,5809 %	2,2994 %
Bonds Japan	0,0000 %	0,0000 %
Bonds Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Bonds UK	0,0000 %	0,0000 %
Bonds Europe ex UK	0,0000 %	0,0000 %
Stocks US	0,0000 %	0,0000 %
Stocks Japan	0,0000 %	0,0000 %
Stocks Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Stocks UK	57,4191 %	4,3639 %
Stocks Europe ex UK	0,0000 %	0,0000 %
SUM	100,0000 %	
	<b>Porteføljeavkastning</b>	<b>6,6632 %</b>
	<b>Porteføljens standardavvik</b>	<b>9,1746 %</b>

Med de forbehold og forutsetninger som gjelder for en MV-modell ser vi at dersom vi legger investors risikotoleranse til grunn, vil det være mulig å oppnå en realavkastning på mer enn 4,5 % dersom forventningene til Norges Bank er riktige. Som et ikke uvanlig utslag av en MV-optimering ser vi imidlertid at dette ville innebære plassering i kun to av ti markeder, med de risiki som dette introduserer.

Dersom vi i stedet benytter resultatet fra benchmarkporteføljen som et uttrykk for investors nytte kan vi la modellen finne den porteføljen som gir samme nytte (avkastning), og samtidig minimerer risiko (standardavvik):

*Tabell 12: Optimal portefølje for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt Referanseporteføljens avkastning, preferanse om å minimere risiko og Norges Banks forventninger*

	<b>Andel</b>	<b>Avkastning</b>
Bonds US	85,8999 %	4,6386 %
Bonds Japan	0,0000 %	0,0000 %
Bonds Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Bonds UK	0,0000 %	0,0000 %
Bonds Europe ex UK	2,4032 %	0,1009 %
Stocks US	0,0000 %	0,0000 %
Stocks Japan	0,0000 %	0,0000 %
Stocks Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Stocks UK	11,5604 %	0,8786 %
Stocks Europe ex UK	0,1365 %	0,0078 %
SUM	100,0000 %	
	<b>Porteføljeavkastning</b>	<b>5,6259 %</b>
	<b>Porteføljens standardavvik</b>	<b>3,7848 %</b>

Vi ser at modellen kan redusere risikoen betraktelig uten å gi avkall på forventet avkastning. Vi ser imidlertid at modellen i hovedsak anbefaler plassering i amerikanske rentebærende papirer, samt en andel i UK aksjer. På grunn av denne konsentrasjonen fra 10 til 4 markeder er det derfor ikke gitt at den reelle risikoen minsker.

Amerikanske rentebærende papirer har et gunstig risk/reward forhold i Norges Banks forventninger. Dette gjelder også for aksjer i UK, som også har negativ korrelasjon med amerikanske rentebærende papirer. Denne kombinasjonen gjør at MV-modellen favoriserer ulike kombinasjoner av disse to papirene langs porteføljefronten.

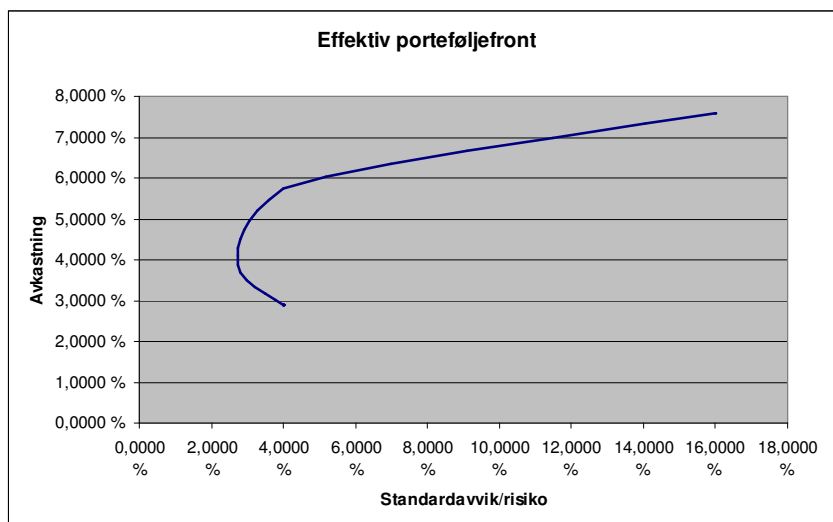
Dersom investor kun hadde vært risikoavers, men måtte plassere formuen i disse markedene, ville vi fått følgende porteføljesammensetning:

*Tabell 13: Sammensetning av minimum varians portefølje i long MV-modell for Statens Pensjonsfond - Utland, gitt Norges Banks forventninger*

	<b>Andel</b>	<b>Avkastning</b>
Bonds US	11,2945 %	0,6099 %
Bonds Japan	23,7738 %	0,6894 %
Bonds Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Bonds UK	0,0000 %	0,0000 %
Bonds Europe ex UK	61,2374 %	2,5720 %
Stocks US	1,3728 %	0,0906 %
Stocks Japan	0,9691 %	0,0455 %
Stocks Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Stocks UK	0,0000 %	0,0000 %
Stocks Europe ex UK	1,3524 %	0,0771 %
SUM	100,0000 %	
	<b>Porteføljeavkastning</b>	<b>4,0846 %</b>
	<b>Porteføljens standardavvik</b>	<b>2,7323 %</b>

Realavkastningen ville bli ca. 2 %, som er godt under målsetningen til investor på minst 4%.

Vi kan betrakte hele utfallsrommet til MV-modellen gitt forventningene til Norges Bank. Vi beregner den effektive porteføljefronten for å betrakte hvordan investor må velge mellom avkastning og risiko:



Figur 9: Effektiv porteføljefront for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt Norges Banks forventninger

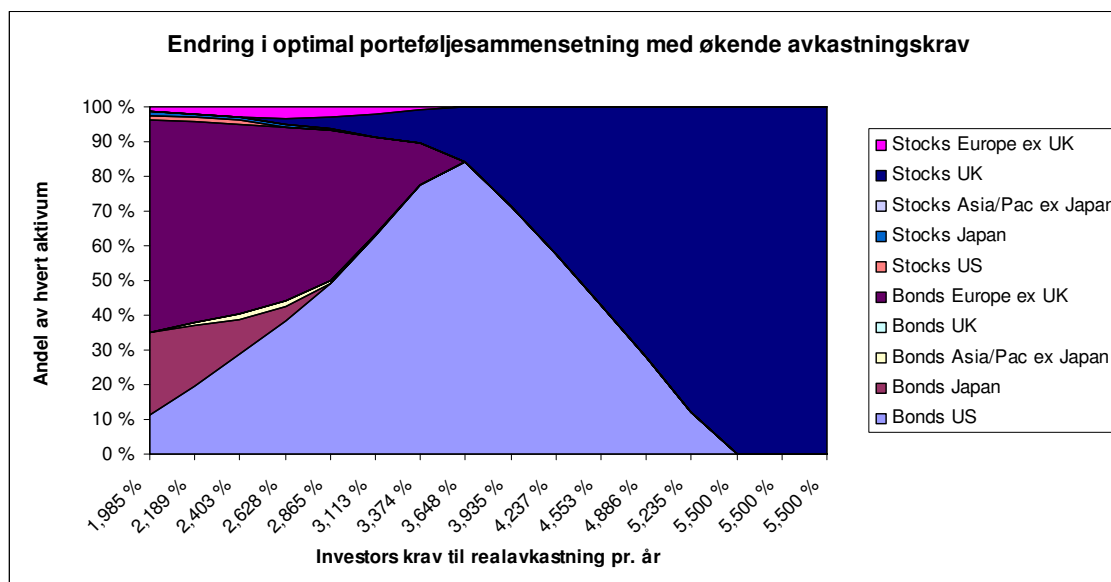
Avkastningen er her nominell. For å få en realavkastning over 4,0 % (6,1% nominelt) må investor i følge figuren akseptere å doble risikoen (standardavviket). Porteføljen med minimums risiko, gitt at avkastningen må være mer enn 6,1 % nominelt (4% reelt) ser slik ut:

Tabell 14: Portefølje for Statens Pensjonsfond - Utland i long MV-modell gitt forventning om minimum 4 % realavkastning og Norges Banks forventninger

	Andel	Avkastning
Bonds US	68,1818 %	3,6818 %
Bonds Japan	0,0000 %	0,0000 %
Bonds Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Bonds UK	0,0000 %	0,0000 %
Bonds Europe ex UK	0,0000 %	0,0000 %
Stocks US	0,0000 %	0,0000 %
Stocks Japan	0,0000 %	0,0000 %
Stocks Asia/Pac ex Japan	0,0000 %	0,0000 %
Stocks UK	31,8182 %	2,4182 %
Stocks Europe ex UK	0,0000 %	0,0000 %
SUM	100,0000 %	
	<b>Porteføljeavkastning</b>	<b>6,1000 %</b>
	<b>Porteføljens standardavvik</b>	<b>5,5298 %</b>

Vi ser at modellen kun anbefaler plassering i 2 av 10 markeder for å sikre mer enn 4 % realavkastning. Som vi har diskutert tidligere ser vi hvordan MV-modellen har en tendens til å anbefale en stor andel i enkeltmarkeder/enkeltassets. I dette tilfellet ville SPU vært svært eksponert i amerikanske rentebærende papirer og aksjer i UK. Endringer i disse markedene ville gitt store utslag i avkastningen. Når vi i tillegg vet at forventningene i stor grad er basert på historikk de siste 20 årene innser vi at dette ikke ville vært en fornuftig strategi. Det er sannsynlig at aksjene i UK har hatt en avkastning de siste 20 årene som er godt over trend, samtidig som amerikanske rentepapirer i perioden har vært påvirket av store kjøp fra nasjoner som Kina, Sør-Korea, Russland og Brasil. Når disse landene reallokerer sin sparing og distribuerer denne bredere kan dette få en negativ effekt for etterspørselen etter amerikanske rentebærende papirer.

Vi ønsker å studere hvordan porteføljen utvikler seg ettersom investors avkastningskrav øker. Vi lar modellen velge porteføljesammensetninger langs den effektive porteføljefronten. Vi kan vise denne utviklingen som en graf:

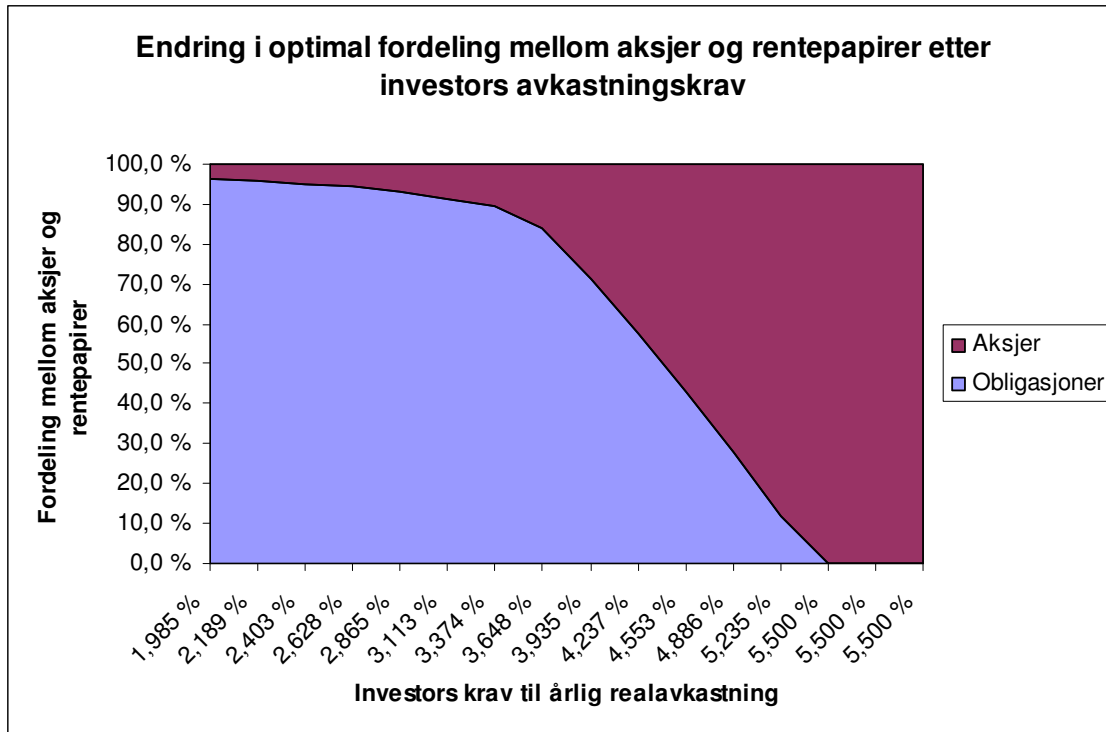


Figur 10: Utvikling i andel i hvert aktivum langs den effektive porteføljefronten for økende realavkastningskrav i long MV-modell, gitt Norges Banks forventninger

Vi ser at modellen i hovedsak ønsker å plassere i obligasjoner i hhv Europa-ex-UK, Japan og USA i lav-risiko tilfellet, og at aksjer i UK fases gradvis inn ettersom avkastningskravet øker.



Vi kan også se på hvordan aksjeandelen endrer seg med investors avkastningskrav (reelt):



*Figur 11: Fordeling mellom aksjer og obligasjoner langs den effektive porteføljefronten ved ulike realavkastningskrav i long MV-modell, gitt Norges Banks forventninger*

I lys av diskusjonen om porteføljens aksjeandel kan det være verdt å merke seg at modellen ikke anbefaler en høyere aksjeandel enn ca. 32 % for å nå avkastningsmålet på 4 %.

Som vi diskuterte i seksjon 4 har MV-modellen en tendens til å anbefale relativt store poster i enkeltpapirer eller markeder. Når Norges Bank betrakter den totale risikoen er dette imidlertid ikke så klokt fordi fondet da blir utsatt i forhold til eventuelle sjokk i dette enkeltmarkedet. Noe av poenget med et globalt fond er å unngå slike effekter.

Av referanseporteføljens sammensetning kan vi utlede at Norges Bank vegrer seg for å sette andelen i noe delmarked høyere enn rundt 20 % for nettopp å dempe risikoen. På dette området velger altså Norges Bank å følge heuristikken – det er ikke lurt å legge alle eggene i samme kurv.

## 7. Konklusjon

I denne utredningen har vi ønsket å sammenligne moderne porteføljeteori med praksis. Vi tok utgangspunkt i Markowitz' klassiske artikkel fra 1952 og gjennomgikk hvordan man kan finne optimale porteføljer ved både å maksimere avkastningen og minimere risikoen. Vi utviklet to varianter av Markowitz originale modell for å nærme oss de preferansene som investor gjennom empiri viser seg å ha i praksis. I seksjon 3 viste vi hvordan historiske aksjekurser kan benyttes som grunnlag for å lage porteføljer. Disse porteføljene ble sammenlignet med resultatene i en ny historisk periode. Alle modellene ble utviklet i Microsoft Excel og overført på vektorform basert på matematiske utledninger i klassiske artikler. For alle modellene beregnet vi også den effektive porteføljefrontene og viste denne grafisk.

Vi gjennomgikk i seksjon 5 hvordan en ledende porteføljeforvalter, representert ved Statens Pensjonsfond – Utland (SPU), setter sine forventninger til fremtiden.

I seksjon 6 benyttet vi disse forventningene som input i en MV-modell, og sammenlignet resultatet med referanseporteføljen fra SPU.

I seksjon 2 og 4 gjennomgikk vi sentrale utfordringer med å sette forventninger og benytte modeller i porteføljesammensetningen. Mange av disse poengene ble illustrert i praksis i seksjon 3, 5 og 6.

I seksjon 2 diskuterte vi at vi ikke alltid velger rasjonelt eller normativt, selv om dette ofte er en forutsetning i finansteorien. Videre har vi en tendens til å vektlegge tidligere erfaring i høyere grad enn det som er den normativt riktige strategien. Til tross for dette dilemmaet vil vi velge en porteføljestrategi for å redusere vår risiko både med basis i heuristikk, og med basis i det normative. Vi stilte spørsmål ved forutsetningen om *mean reversion* og fant at denne bare kunne benyttes i rentemarkedene, og at risiko ikke er en konstant i tid, men en volatil prosess.

I seksjon 3 gjennomgikk vi det grunnleggende arbeidet til Markowitz, og viste hvordan CAPM og APT er utledet som en videreutvikling av dette. Videre så vi hvordan utviklingen i datakraft også har være en bestemmende faktor i utviklingen og praktiseringen av teorien. Vi diskuterte også hvordan risikomålet har utviklet seg fra varians til semivarians. På den praktiske siden viste vi overgangen fra matematiske modeller til matriseregning til Excel,

hvordan aksjekurser kan benyttes som input i optimeringsmodeller, og hvordan Excel benyttes som optimeringsverktøy med beskrankninger. Vi utviklet også en strategi for implementering av semi-varians optimering, og gjennomførte slik optimering i Excel.

Som diskutert i den teoretiske delen viste også våre observasjoner at avkastningsdata avviker fra normalfordeling, og at risikoen endrer seg over tid. Videre viste vi at en periode i historien kan være en nokså dårlig predikator for neste periode. Når vi likevel benytter historiske data så vi at daglige data og høyere granulering ga bedre resultater enn månedlige data. I likhet med teorien viser våre data at en *long* portefølje har en kostnad i forhold til en short portefølje. Videre peker våre resultater på at dersom investor har input data med lav prediksjonsgrad bør han heller velge en 1/N-modell, fremfor resultatene fra en MV-modell. Dersom han likevel benytter seg av en optimeringsmodell bør han velge en modell med symmetrisk risiko i en slik situasjon, fremfor en modell med asymmetrisk risiko. Han bør også unngå short-modeller når input data er usikre.

Vi viste videre hvordan investor kan ha en betydelig oppside dersom risikotoleransen er større på oppsiden enn på nedsiden. Avkastningspotensialet kan da være betydelig større. Imidlertid kan den symmetriske risikoen vise svært mye høyere verdi for en slik portefølje sammenlignet med en typisk markedsportefølje, og investor kan derfor bli nødt til å akseptere større svingninger i porteføljen.

I sum har vi også meget god støtte for at investor bør velge en portefølje, og ikke enkeltassets.

I seksjon 5 fant vi at SPU har satt sine forventninger basert på historiske observasjoner satt inn i et teoretisk rammeverk, justert for vurderinger om markedsutviklingen fremover. Vi fant at en ledende porteføljeforvalter i praksis i stor grad bygger på historiske observasjoner slik vi benyttet i seksjon 3, og så forsøker å øke sin treffsikkerhet ved å relatere resultatene til en teoretisk modell og gjøre egne vurderinger. I tillegg fant vi at dagens porteføljeforvaltere fremdeles beskriver input til porteføljemodellen på samme måte som i Markowitz klassiske artikkel fra 1952; som forventet avkastning, forventet standardavvik og en varians-kovariansmatrise. Spesifikt fant vi at dette blir benyttet som rammeverk i simuleringsmodeller der hensikten blant annet er å vurdere allokering i porteføljen. Vi påviste svakheter i disse modellene ved at de forutsetter normalfordelt avkastningsutfall og *mean reversion* i aksjemarkedene. Videre så vi hvordan Norges Bank har benyttet en forutsetning om

overskuddsvekst i amerikanske selskaper over trend de neste 15 årene, og at denne forutsetningen kan være en kilde til overvurdering av forventet avkastning i SPU.

Utfordringene diskuteres blant annet i kritikken vi fremførte i seksjon 2 og 4, der vi påpeker betydelige svakheter ved MV-modellen og symmetriske risikomål. I seksjon 4 tok vi frem en mer konsistent beskrivelse av risiko gjennom *expected shortfall* (ES) og mer virkelighetsnær beskrivelse av avkastningsutfall gjennom *multivariat geometrisk hyperbel* (mGH).

I seksjon 6 utledet vi en benchmarkportefølje av sammensetningen av referanseporteføljen slik at vi kunne benytte denne til å bestemme forventet avkastning og risiko for SPU. Vi fant at dersom Norges Banks egne forventningsdata og sammensetningen av referanseporteføljen legges til grunn, så er forventet realavkastning til SPU under 4 %. Vi diskuterte så forskjeller mellom referanseporteføljen og en portefølje valgt av en MV-modell med Norges Banks forventningsdata som input. Vi genererte ulike alternative porteføljer på den effektive porteføljefronten ved hjelp av MV-modellen, som, dersom forventningsdata er riktige, og under forutsetning av normalfordelte avkastningsutfall, vil gi lavere risiko med samme implisitte avkastning som referanseporteføljen, eller alternativt høyere avkastning med samme implisitte risikotoleranse.

I disse resultatene fant vi støtte i en del av kritikken av MV-modellen som vi diskuterte i seksjon 4; at modellen har en tendens til å velge relativt store posisjoner i et relativt lite antall papirer.

Gjennom arbeidet med denne utredningen har vi erfart en del av utfordringene man står overfor i sammensetningen av en portefølje. Selv om en del av disse utfordringene kan møtes gjennom å benytte nyutviklet teori ser vi at det ofte er slik at man i praksis benytter direkte og indirekte forutsetninger som fører til at konklusjonene i porteføljemodellene blir mer usikre og tildels inkonsistente. Vi har erfart betydningen av å dokumentere de forutsetningene som er benyttet slik at den reelle risikoen trer frem og bidrar til å tone ned modellresultatene. Resultatene har ellers en tendens til å bli tolket for bokstavelig, som for eksempel når simuleringer gjengis direkte i Stortingsmeldinger.

I et videre arbeid kunne vi ha utviklet modellene i seksjon 3 for å øke treffsikkerheten (fremtidig prediksjon basert på historiske data). Fra empirisk materiale vet vi at avkastningen fra aksjer på mellomlang sikt, 6-18 måneder, har en tendens til å fortsette i samme retning. Investeringsstrategier som utnytter slike trender, såkalt trendbasert forvaltning, faller inn

under kategorien *behavioural finance* som diskutert i seksjon 2. Vi kunne for eksempel forsøkt å forbedre treffsikkerheten ved å undersøke hvor mange dager med avkastningsdata som gir best prediksjon i forhold til en fremtidig periode ved å traversere avkastningsdata, enten i form av kursserier for enkeltpapirer eller grupperte kursserier, for eksempel papirer gruppert i bransjer eller enkeltmarkeder.

En videreføring på modellfronten kunne være å utvikle en modell som benyttet ny teori som mGH og ES i optimeringen, og så sammenligne denne modellen med resultatene i denne utredningen.

Vi fant også interessante egenskaper ved 1/N-modellen i situasjoner med høy usikkerhet i input data. Dette kunne vi ha utviklet ved å sammenligne en 1/N-modell med en typisk verdivektet indeks-modell, og deretter sammenligne ulike strategier for rebalansering i forhold til tid, transaksjonskostnad og markedsforhold.

Når lengre avkastningsserier fra SPU foreligger vil det være mulig å sammenligne ulike optimeringsmodeller, for eksempel modeller utledet fra MV-modellen, semi-varians modellen, 1/N-modellen og mGH/ES-modellen, med de resultatene som oppnås gjennom sammensetningen av referanseporteføljen.

## 8. Appendiks

### 8.1 Begrensninger i Excel, og alternative dataverktøy

I denne utredningen benyttes standard Microsoft Excel og Solver fordi det er praktisk og tilstrekkelig i forhold til 25 verdipapirer (del 1) og 10 markeder (del 3). Metoden vist i Excel i modell 1 og modell 2 i denne utredningen har en begrensning på 52 verdipapirer på grunn av begrensninger i hvor store matriser som håndteres av Excel. Dette kan man omgå ved å håndkode formlene i modell 1, som da får en begrensning i forhold til antall kolonner i regnearket. Standard Solver har en begrensning på 200 variabler, som vil være den begrensende faktoren for modell 2 og modell 3. Solver benytter en simpleks algoritme.

For store optimeringsproblemer med flere tusen verdipapirer kan man oppgradere til *premium Solver*, som er utviklet av Frontline Systems ([www.solver.com](http://www.solver.com)) som også står bak Solver som følger med Excel. I siste versjon kan *premium Solver* håndtere 8.000 variabler. I slike tilfeller bør man også benytte Microsoft Excel 2007 eller senere versjon som håndterer 16.384 rader (opp fra 256) og 1.048.576 kolonner (opp fra 65.536).

Alternativt benyttes matematikk- og statistikk-verktøy som Mathworks Matlab, Ilog Cplex, Lindo Lingo og Mathematica, modellerings- og optimeringsverktøy som GAMS, eller spesialiserte porteføljestyresystemer som fra Advent.

### 8.2 Fra Merton via vektorform til Excel format

Vi definerer en  $N \times 1$  avkastningsvektor

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 + E_1 \\ 1 + E_1 \\ \vdots \\ 1 + E_n \end{bmatrix}$$

for verdipapirene  $1 \dots n$ , og en  $N \times 1$  hjelpevektor med bare 1-ere,  $\underline{1}$ .

Varians-kovarians matrisen definerer vi som

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & 1 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

der  $\sigma_{ij}$  er kovariansen mellom avkastningen til verdipapir  $i$  og avkastningen til verdipapir  $j$ . Videre innfører vi "t"-merket som notasjon for en transponert vektor, som i  $\underline{1}'$ , og "minus I"-merket som notasjon for den inverse matrisen.

Vi kan da skrive om formlene [1]...[5] på vektorform. I tabellen vises også hvordan dette oversettes til Excel:

Tabell 15: Overgang fra Merton via Vektorform til Excelformler

Formel	Tilsvarende vektorformel	Excel (1)
[1] $A \equiv \sum_1^n \sum_1^n v_{ij} E_j$	$A \equiv \underline{1}' \underline{\Omega}^{-1} \underline{E}$	{=MMULT(MMULT(TRANSPOSE(enere vektor);MINVERSE(varians-kovarians matrise));1+forventet avkastning vektor)}
[2] $B \equiv \sum_1^n \sum_1^n v_{ij} E_j E_i$	$B \equiv \underline{E}' \underline{\Omega}^{-1} \underline{E}$	{=MMULT(MMULT(TRANSPOSE(1+forventet avkastning vektor);MINVERSE(varians-kovarians matrise)); 1+forventet avkastning vektor)}
[3] $C \equiv \sum_1^n \sum_1^n v_{ij}$	$C \equiv \underline{1}' \underline{\Omega}^{-1} \underline{1}$	{=SUM(MINVERSE(varians-kovarians matrise))} (2)
[5] $x_i = \frac{E \sum_1^n v_{ij} (CE_j - A) + \sum_1^n v_{ij} (B - AE_j)}{D}$	$x_i = \frac{E \underline{\Omega}^{-1} (C \underline{E} - A \underline{1}) + \underline{\Omega}^{-1} (B \underline{1} - A \underline{E})}{D}$	{=(MMULT(MINVERSE(varians-kovarians matrise);C*(1+forventet avkastning vektor) - A*(enere vektor))*E+MMULT(MINVERSE(varians-kovarians matrise);B*(enere vektor) - A*(1+forventet avkastning vektor)))/D}

(1) Merk at formlene legges inn uten {}, men at klamme-parentesene fremkommer i Excel etter at vi har markert at vi ønsker en matrise-operasjon ved å legge inn formelen med Shift-Ctrl-Enter i stedet for Enter som med en vanlig formel

(2) Merk at formlene legges inn uten {}, men at parentesene fremkommer i Excel etter at vi har markert at vi ønsker en matrise-operasjon ved å legge inn formelen med Shift-Ctrl-Enter i stedet for Enter som i en vanlig formel.

### 8.3 Oslo Børs 25 mest omsatte aksjer 2001...2006

Tabell 16: De 25 mest omsatte aksjene på Oslo Børs 1.1.2001-31.12.2006

Ticker	6 års omsetning 2001...2006 i kr	Antall noteringsdager
NHY	851 580 397 364	1505
TEL	342 775 618 888	1505
DNBNOR	221 482 287 256	1505
FRO	203 984 292 703	1505
ORK	156 774 630 157	1505
DNO	153 411 624 184	1505
TAA	143 354 531 355	1505
TOM	131 650 113 216	1505
PAN	116 135 063 919	1505
PGS	107 011 776 550	1505
STB	101 452 375 073	1505
NSG	101 341 298 491	1505
RCL	89 138 155 257	1504
TAT	66 620 326 500	1505
PRS	47 174 113 757	1505
TGS	46 002 680 548	1505
FOE	42 442 766 029	1505
JIN	40 856 356 315	1505
IGE	33 800 058 101	1505
CRU	32 431 221 945	1505
SCH	31 191 340 836	1505
OCR	30 962 096 820	1505
EME	30 861 797 267	1505
ALX	24 905 155 306	1505
ELT	20 350 975 873	1505

Kilde: Oslo Børs, Børsdatabasen NHH

### 8.4 Beskrivelse av de to treårs periodene med aksjekurser fra Oslo Børs

*Skjevhet* beskriver symmetrien i histogrammet som dannes av datagrunnlaget. Et resultat på 0 er helt symmetrisk, mens en verdi under 0,5 regnes som tilnærmet symmetrisk. Symmetrien er svakt skjevt for verdier  $|0,5..1)$  og svært skjevt for verdier over 1. Negativt tall betyr at histogrammet har tyngden av verdiene til høyre i forhold til en normalfordeling, og positivt tall betyr at tyngden er til venstre.

*Kurtosis* beskriver hvor spisst histogrammet er. Positive verdier betyr at histogrammet er spisset i toppen, mens 0 betyr at formen ligner på en Gauss-kurve. Negative verdier betyr at histogrammet er bredt eller utflytende. Dette indikerer såkalte «fat tails».



Tabell 17: Første periode. Beskrivelse av daglige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2001-31.12.2003. T=748.

	Aritmetisk Gjennomsnitt	Standardavvik	Kurtosis	Skjevhet
ALX	0,3838 %	12,0315 %	17,7685	2,2715
CRU	0,0892 %	3,7131 %	4,3747	0,7898
DNBOR	0,0353 %	1,9912 %	2,7971	0,2399
DNO	0,0921 %	2,9515 %	17,9089	1,9806
ELT	-0,0849 %	4,7873 %	4,6876	0,9966
EME	-0,0900 %	5,7090 %	31,5720	2,8696
FOE	-0,0262 %	4,1140 %	15,8105	1,1709
FRO	0,1859 %	4,0873 %	1,2955	0,1981
IGE	0,2061 %	5,7293 %	6,6362	1,3926
JIN	0,2860 %	4,6468 %	8,6447	0,8532
NHY	0,0355 %	1,5276 %	3,8054	0,3319
NSG	0,0204 %	2,1979 %	1,3140	0,1330
OCR	-0,2707 %	5,7418 %	20,8231	1,2878
ORK	-0,0002 %	1,5169 %	1,9306	-0,0504
PAN	-0,4719 %	8,7224 %	5,2977	0,5497
PGS	-0,0587 %	7,2346 %	21,4610	0,3266
PRS	0,0314 %	2,2780 %	1,7309	-0,0713
RCL	0,0699 %	3,4403 %	6,1350	-0,0929
SCH	0,0461 %	2,4584 %	3,0058	0,3458
STB	-0,0045 %	2,8872 %	11,8326	-0,0812
TAT	0,0177 %	4,6857 %	9,2123	-0,4425
TEL	0,0477 %	2,3047 %	0,5885	0,1033
TGS	0,0338 %	3,2027 %	14,8566	-1,0729
TOM	-0,1003 %	4,1982 %	13,4171	-0,8875
TAA	0,1418 %	4,2934 %	46,3443	-3,8384

Tabell 18: Første periode. Beskrivelse av månedlige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2001-31.12.2003. T=36.

	Aritmetisk Gjennomsnitt	Standardavvik	Kurtosis	Skjevhet
ALX	2,8681 %	55,0265 %	17,5037	3,7059
CRU	2,0066 %	18,4384 %	0,8741	0,7041
DNBNOR	0,8041 %	9,8651 %	1,3788	-0,0870
DNO	1,5982 %	10,8471 %	-0,3595	0,4094
ELT	-1,1175 %	23,9781 %	0,4976	0,3475
EME	-1,7680 %	26,6566 %	3,3465	1,3403
FOE	-0,3044 %	20,5281 %	1,9371	0,9207
FRO	4,1682 %	20,3761 %	0,4495	0,1149
IGE	3,2862 %	26,3363 %	12,8314	3,3762
JIN	5,0323 %	17,2543 %	1,8274	1,4749
NHY	0,7574 %	7,2941 %	0,7698	-0,0544
NSG	0,4274 %	10,1386 %	-0,7650	-0,0571
OCR	-5,3988 %	24,2541 %	-0,3197	0,0637
ORK	-0,0448 %	6,3255 %	-0,5188	-0,2588
PAN	-10,2238 %	34,2442 %	5,6900	1,5821
PGS	-1,3099 %	30,6939 %	1,5636	0,3612
PRS	0,6562 %	10,4817 %	0,0329	-0,1641
RCL	1,8561 %	17,3294 %	2,3920	-0,5094
SCH	0,6902 %	8,6719 %	-0,6569	0,5059
STB	0,2182 %	15,0274 %	0,7248	-0,3978
TAT	1,2815 %	26,6264 %	-0,1697	0,6613
TEL	0,9070 %	9,9241 %	-0,4180	0,4164
TGS	0,5695 %	13,7126 %	-0,1463	-0,4580
TOM	-2,7952 %	14,7923 %	-1,0259	-0,0875
TAA	3,3453 %	21,4698 %	1,7695	-0,7117

Tabell 19: Andre periode. Beskrivelse av daglige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2004-31.12.2006. T=757.

	Aritmetisk Gjennomsnitt	Standardavvik	Kurtosis	Skjevhet
ALX	0,3789 %	5,3585 %	62,0955	4,7228
CRU	0,1660 %	3,0317 %	6,4932	0,6539
DNBNOR	0,1171 %	1,3304 %	1,6674	-0,0684
DNO	0,3524 %	3,3577 %	16,6025	1,8860
ELT	0,0602 %	2,3784 %	2,0517	-0,0681
EME	0,0482 %	3,8858 %	21,0952	-0,1680
FOE	0,3419 %	2,6152 %	1,1755	0,0729
FRO	0,2043 %	2,5839 %	0,4204	0,1265
IGE	0,5066 %	5,5918 %	16,4314	2,3633
JIN	0,3292 %	4,7675 %	13,4981	-0,0475
NHY	0,1606 %	1,9526 %	17,0653	1,4955
NSG	0,0247 %	1,6916 %	1,8663	-0,3695
OCR	0,2770 %	2,5847 %	3,5807	0,7926
ORK	0,1533 %	1,4783 %	11,6601	1,2762
PAN	0,4370 %	8,6630 %	6,4327	1,0321
PGS	0,2676 %	2,7807 %	2,9206	0,3573
PRS	0,2024 %	2,0644 %	2,5747	0,2637
RCL	0,0322 %	1,6564 %	1,9469	0,3503
SCH	0,1152 %	1,8957 %	7,1241	0,2714
STB	0,1223 %	1,7935 %	2,2341	0,5279
TAT	0,1783 %	3,0134 %	38,3414	-1,8598
TEL	0,1558 %	1,7175 %	3,5993	0,3066
TGS	0,2674 %	2,7681 %	3,9408	0,5316
TOM	0,0565 %	2,6825 %	9,5396	0,1987
TAA	0,1314 %	2,7953 %	38,1234	-3,0941

Tabell 20: Andre periode. Beskrivelse av månedlige avkastningsutfall for 25 aksjer i perioden 1.1.2004-31.12.2006. T=36.

	Aritmetisk Gjennomsnitt	Standardavvik	Kurtosis	Skjevhet
ALX	7,2416 %	21,6194 %	2,4492	1,6408
CRU	3,3363 %	13,2629 %	1,0428	1,1473
DNBNOR	2,4021 %	4,6125 %	-0,4091	-0,0175
DNO	8,3255 %	21,9318 %	2,7244	1,5831
ELT	1,2204 %	10,5714 %	-0,2456	-0,1229
EME	0,8170 %	18,0662 %	4,0290	1,3971
FOE	7,3922 %	12,7778 %	-0,0045	0,6199
FRO	4,4572 %	13,2258 %	-0,2924	0,4649
IGE	10,2513 %	26,2723 %	8,8681	2,5173
JIN	7,1339 %	23,9022 %	2,0115	0,7292
NHY	3,3759 %	8,6994 %	0,1125	0,4995
NSG	0,4329 %	6,6468 %	-1,1679	-0,0884
OCR	5,8848 %	11,9062 %	-0,4471	0,7157
ORK	3,2743 %	7,2289 %	4,6668	1,4222
PAN	4,3024 %	25,2270 %	1,9750	1,0966
PGS	5,5643 %	11,3895 %	-0,3440	-0,6051
PRS	4,1743 %	7,9065 %	-0,7637	0,0239
RCL	0,7741 %	9,0377 %	-0,0269	0,6574
SCH	2,3141 %	7,3114 %	0,5270	0,7161
STB	2,4893 %	6,9433 %	-0,6064	0,1260
TAT	3,7585 %	13,8402 %	1,3145	-0,6663
TEL	3,1608 %	5,7285 %	1,6621	0,9050
TGS	5,6806 %	13,0081 %	1,2794	0,8752
TOM	1,2414 %	12,8578 %	-0,2007	-0,0226
TAA	2,6846 %	12,4408 %	1,3773	-0,6092

## 8.5 Porteføljevæker fra optimeringen

Resultatene fra modellene, vist i form av anbefalt vekt i hvert verdipapir:

*Tabell 21: Modell 1-3; Andel av hvert verdipapir i optimale porteføljer. Alle modeller er optimert på historiske data fra 1.1.2001-31.12.2003.*

	<b>Modell 1</b> daglige data MV-modell Minimere varians Short selling	<b>Modell 1</b> månedlige data MV-modell Minimere varians Short selling	<b>Modell 2</b> daglige data MV-modell Minimere varians No Short selling	<b>Modell 2</b> månedlige data MV-modell Minimere varians No Short selling	<b>Modell 3</b> daglige data Minimere semi-variens No Short selling
<b>ALX</b>	-0,1773 %	0,1351 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>CRU</b>	4,4285 %	6,0691 %	4,3982 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>DNBNOR</b>	13,8378 %	25,0397 %	12,2249 %	0,0000 %	0,0031 %
<b>DNO</b>	4,7613 %	19,9495 %	2,9454 %	13,7731 %	0,0000 %
<b>ELT</b>	-2,0552 %	-7,8323 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>EME</b>	-3,3668 %	0,1937 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>FOE</b>	-1,8335 %	-2,6822 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>FRO</b>	-1,6359 %	2,1447 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>IGE</b>	4,1878 %	1,4823 %	4,5025 %	4,2300 %	16,6740 %
<b>JIN</b>	3,0921 %	-1,4480 %	2,9577 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>NHY</b>	29,2308 %	32,2790 %	28,9078 %	16,9711 %	20,0497 %
<b>NSG</b>	6,9051 %	0,1573 %	4,7887 %	0,0000 %	11,8362 %
<b>OCR</b>	0,3212 %	-5,4535 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>ORK</b>	31,1772 %	31,3914 %	31,6607 %	63,1013 %	19,9627 %
<b>PAN</b>	1,1323 %	-1,7873 %	0,8804 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>PGS</b>	-0,3130 %	-4,4073 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>PRS</b>	3,9722 %	1,4853 %	1,1554 %	0,0000 %	21,3551 %
<b>RCL</b>	-2,4835 %	-3,6276 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>SCH</b>	6,0613 %	11,9562 %	4,4842 %	0,0000 %	1,7331 %
<b>STB</b>	0,3630 %	-11,2931 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>TAT</b>	-0,2525 %	-3,6715 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>TEL</b>	5,0430 %	19,4412 %	1,0941 %	1,5787 %	0,0000 %
<b>TGS</b>	-3,0798 %	-13,3269 %	0,0000 %	0,0000 %	0,0000 %
<b>TOM</b>	0,7333 %	4,5259 %	0,0000 %	0,3459 %	0,0008 %
<b>TAA</b>	-0,0493 %	-0,7207 %	0,0000 %	0,0000 %	8,3852 %

Tabell 22: Benchmark porteføljene: Optimale porteføljer basert på faktiske data i periode 2; MV-modell; 1.1.2004-31.12.2006

	Optimal min risk long/short	Optimal min risk long	Optimal min semi long/short	Optimal min semi long
ALX	-0,6226 %	0,0000 %	50,2882 %	4,3811 %
CRU	0,9042 %	0,0000 %	-9,3620 %	0,0244 %
DNBOR	25,3060 %	24,4518 %	16,5508 %	23,0348 %
DNO	-0,7267 %	0,0000 %	30,8500 %	1,4134 %
ELT	-1,8336 %	0,0000 %	-1,1405 %	1,3826 %
EME	-2,1273 %	0,0000 %	-38,1399 %	0,0000 %
FOE	-1,3257 %	0,0000 %	22,7105 %	1,2208 %
FRO	-0,6317 %	0,0000 %	12,0658 %	1,8442 %
IGE	-1,3733 %	0,0000 %	15,1770 %	1,2640 %
JIN	0,4495 %	0,0609 %	18,3169 %	0,0001 %
NHY	3,8248 %	0,8823 %	-13,1578 %	0,0000 %
NSG	9,8320 %	9,3513 %	-7,6967 %	7,5244 %
OCR	3,6553 %	2,3921 %	20,2288 %	2,7042 %
ORK	19,3544 %	18,4602 %	9,6260 %	17,4789 %
PAN	-0,2665 %	0,0000 %	24,9608 %	1,1800 %
PGS	-1,7294 %	0,0000 %	-8,0590 %	0,0000 %
PRS	5,1610 %	3,0733 %	-18,3879 %	1,1638 %
RCL	18,7609 %	17,4756 %	-2,6503 %	16,0246 %
SCH	10,6976 %	9,5836 %	3,1827 %	8,0177 %
STB	7,7266 %	6,0795 %	-2,7385 %	4,8309 %
TAT	-4,0099 %	0,0000 %	7,0454 %	0,6144 %
TEL	10,3811 %	8,1894 %	-3,5621 %	5,7738 %
TGS	-0,6537 %	0,0000 %	7,6130 %	0,0001 %
TOM	-0,0629 %	0,0000 %	-15,2928 %	0,1216 %
TAA	-0,6902 %	0,0000 %	-18,4285 %	0,0000 %

## 8.6 Referanseporteføljen til SPU pr 30. september 2007

Tabell 23: Referanseporteføljen til Statens Pensjonsfond - Utland per 31. september 2007

Land for aksjereferansen Valuta for rentereferansen	Aksjer		Renteinstrument	
	Strategisk referanse- portefølje	Faktisk referanse- portefølje	Strategisk referanse- portefølje	Faktisk referanse- portefølje
Vekt aktivklasser	1)	45,4	1)	54,6
Belgia		0,8		
Finland		1,2		
Frankrike		8,3		
Hellas		0,6		
Irland		0,5		
Italia		3,0		
Nederland		2,7		
Portugal		0,3		
Spania		3,3		
Tyskland		6,4		
Austerrike		0,4		
<i>Euro-området (EUR)</i>		27,4		48,0
Storbritannia (GBP)		15,7		10,1
Danmark (DKK)		0,7		0,6
Sveits (CHF)		4,8		0,5
Sverige (SEK)		1,9		1,2
<b>Sum Europa</b>	<b>50,0</b>	<b>50,4</b>	<b>60,0</b>	<b>60,5</b>
USA (USD)		29,7		32,4
Brasil		1,0		
Canada (CAD)		2,3		2,2
Mexico		0,5		
Sør-Afrika		0,7		
<b>Sum Amerika / Afrika</b>	<b>35,0</b>	<b>34,1</b>	<b>35,0</b>	<b>34,6</b>
Australia (AUD)		2,7		0,2
Hong Kong		1,6		
Japan (JPY)		7,8		4,4
New Zealand (NZD)		0,1		0,1
Singapore (SGD)		0,5		0,2
Sør-Korea		1,7		
Taiwan		1,2		
<b>Sum Asia / Oseania</b>	<b>15,0</b>	<b>15,4</b>	<b>5,0</b>	<b>4,9</b>

Kilde: Norges Bank

1) Når innfasingen av økt aksjeandel er gjennomført vil den strategiske referanseporteføljen ha 60 prosent aksjer og 40 prosent rentebærende instrument

## 9. Litteraturliste

- Aha, Isaac bar, rabbinder, i *Babylonian Talmud*: 'A man should always place his money, a third into land, a third into merchandise, and keep a third on hand'. Tractate Baba Mezi'a 42a, antatt skrevet ned i perioden 375-499 e.kr. ....11
- Ang, A. og Bekaert, G.: *The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation*, Columbia University, Working paper version, 19 Mai 2005.....41
- Applebaum, David: *Lévy Processes—From Probability to Finance and Quantum Groups*. Notices of the American Mathematical Society (Providence, RI: American Mathematical Society) 51 (11), side 1336-1347, Desember 2004.....14
- Artzner, Philippe med flere: *Coherent Measures of Risk*.  
<http://www.math.ethz.ch/~delbaen/ftp/preprints/CoherentMF.pdf> .....35
- Borch, K. H.: *A note on Uncertainty and Indifference Curves*, The Review of Economic Studies Volume 36: Issue 1, January 1969, pp 1-4. ....32
- Brennan J.M. og Torous W.N.: *Individual Decision-Making and Investor Welfare*, Economic Notes, 28 (2), Juli 1999.....33
- Darwin, Charles: *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*, 1859 .....11
- Dimson, E., P. Marsh og M. Staunton: *Triumph of the Optimists: 101 Years of Global Investment Returns*, Princeton University Press, 2002 .....39, 42
- Elton, E.J., M.J. Gruber, D. Agrawal og C. Mann: *Explaining the Rate Spread on Corporate Bonds*, Journal of Finance 56, 2001, pp. 247-277. ....42
- Exley, Mehta og Smith: *Mean Reversion*. Presented to: Faculty & Institute of Actuaries, Finance and Investment Conference, Brussels, June 2004  
[http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/proceedings/fib2004/Exley\\_Mehta\\_Smith.pdf](http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/proceedings/fib2004/Exley_Mehta_Smith.pdf) .....13, 45
- Fama, E. og K. French: *Permanent and temporary components of stock prices*, Journal of Political Economy, 96, 1998, side 246-273 .....43
- Feldstein, M.: *Mean-Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection*, The Review of Economic Studies Volume 36: Issue 1, January 1969, pp 5-12 .....32
- Fels, J. og Pradhan, M.: *In Search of the Natural Rate of Interest*, Morgan Stanley Research Global Economics, 10 February 2006 .....41
- Fels, J. og Pradhan, M.: *The Nat-EUR-al Rate of Interest*, Morgan Stanley Research Global Economics, 2 May 2006.....41
- Finansdepartementet: *Nasjonalbudsjettet 2008*.....57
- Finansdepartementet: *Om forvaltningen av Statens pensjonsfond i 2006*, Stortingsmelding nr. 24 (2006-2007).47, 50, 52, 54, 55, 56
- Fisher K.L. og Statman M.: *Investment Advice from Mutual Fund Companies. Closer to the Talmud than to Markowitz*, The Journal of Portfolio Management, 53, 9-25, 1997.....33
- Gilovich, Griffin, Kahneman (redaktører): *Heuristics and Biases: The Psychology of Intuitive Judgment*, Cambridge University Press; 2002.....11
- Gordon, Myron J.: *The Investment, Financing, and Valuation of the Corporation*. Homewood, 1962.....43
- Green, R. C. og B. Hollifield: *When will mean-variance efficient portfolios be well diversified?* Journal of Finance 47, 1992, side 1785-1809.....27, 33
- Grootveld, Henk og Hallerbach, Winfried: *Variance vs downside risk: Is there really that much difference?*, European Journal of Operational Research 114 (1999) 304-319 .....21
- Gropp, Jeffrey: *Mean reversion of industry stock returns in the U.S., 1926–1998*. Journal of Empirical Finance, Volume 11, Issue 4, September 2004, Sidene 537-551 .....13
- Hawking, Stephen: *A Brief History of Time*. s 11. Bantam Books 1998.....12
- Hellmich og Kassberger: *Efficient portfolio optimization in the multivariate Generalized Hyperbolic framework*.  
<http://www.mathematik.uni-ulm.de/finmath/people/kassberger/HellmichKassberger2007PortOpt.pdf> (2007)  
 .....36
- IImanen, A.: *The Long-Term Expected Real Return on Fixed Income*, Presentation at Norges Bank Investment Strategy Conference, November 5, 2004 .....42
- Kroll, Y, H. Levy, og H. M. Markowitz: *Mean-variance versus direct utility maximization*, Journal of Finance, 39 (1984), pp. 47–61. ....32
- Laubach, T. og J.C. Williams: *Measuring the Natural Rate of Interest*, Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System, November 2001.....41



Levy, H.: <i>The capital asset pricing model: theory and empiricism</i> . Economic Journal 93, 1983. side 145-165 ...	27
Liang, J.N. og S.A. Sharpe: <i>Share Repurchases and Employee Stock Options and their Implications for S&amp;P 500 Share Retirements and Expected Returns</i> , Board of Governors of the Federal Reserve System, Finance and Economics Discussion Papers Series no. 99/59. 1999 .....	44
Lintner, John: <i>The valuation of risk assets and the selection of risky in stock portfolios and capital budgets</i> , Review of Economics and Statistics 47, 1965, 13-37. ....	15
Markowitz, Harry: <i>Foundations of Portfolio Theory</i> , Foredrag ved utdeling av Nobelprisen i økonomi, 1990.....	32
Markowitz, Harry: <i>Portfolio Selection</i> , The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1 (Mar., 1952) sidene 77-91 ..2, 8, 15, 16, 36	
Markowitz, Harry: <i>Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments</i> . John Wiley & Sons, New Jersey, 1959.....	20
Markowitz, Harry: <i>The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints</i> , Naval Research Logistics Quarterly 3(1/2): 111-133. 1956.....	16, 19
Merton, Robert C.: <i>An Analytic Derivation of the efficient portfolio frontier</i> , Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1972, sidene 1851-1872 .....	15, 16
Mossin, Jan: <i>Equilibrium in a capital asset market</i> , Econometrica 34, 1966, 768-783. ....	15
Norges Bank: Staff Memo 2005/10 .....	37, 39, 42, 43
Norges Bank: Staff Memo 2006/7 .....	37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 48, 49
Norges Bank: Staff Memo 2007/1 .....	37, 39, 41, 49
Osborne, M. F. M.: <i>Brownian motion in the stock market</i> . Operations Research, 7, sidene 145-173, 1959.....	14
Pan, M.S, A.Liu og H. J. Roth: <i>Term structure of return correlations and international diversification: evidence from European stock markets</i> , The European Journal of Finance, 7, 2001, ss144-164.....	40
Peirce, Charles S.: <i>The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings</i> . To bøker; (1867-1893) og (1893-1913). Peirce Edition Project (red). Indiana University Press. 1992 .....	12
Popper, Karl og David Miller: <i>A Proof of the Impossibility of Inductive Probability</i> . Nature 302, April 21, 1983 .....	12
Rom, B.M. og Ferguson, K.W.: <i>Post-modern portfolio theory comes of age</i> , Journal of Investing Fall, 1994, s11-17.....	21
Ross, Stephen A.: <i>The arbitrage theory of capital asset pricing</i> , Journal of Economic Theory, Vol 13, Issue 3, sidene 341-360, desember 1976 .....	15
Samuelson, Paul A.: <i>Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly</i> . Industrial Management Review, 6 (2), side 41-49, 1965 .....	14
Sharpe, William F.: <i>A simplified model for portfolio analysis</i> , Management Science 11, 1963, 277-293.....	15
Sharpe, William F.: <i>Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk</i> , Journal of Finance 19, 1964, 425-442. ....	15
Strategirådet: <i>Aksjeandelen i referanseporteføljen til Statens pensjonsfond – Utland</i> , brev til Finansdepartementet, 2. juni 2006.....	48
Tobin, James: <i>Comment on Borch and Feldstein</i> , The Review of Economic Studies Volume 36: Issue 1, January 1969, pp 13-14 .....	32
Tobin, James: <i>Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk</i> , The Review of Economic Studies, No. 67, Februar 1958 .....	15
Verloot, E.: <i>Credit Sector Allocation</i> , The Quantitative Credit Analyst, Citigroup Global Fixed-Income Research, 2002 .....	42
Wilcox og Crittenden: <i>Does Trend Following Work on Stocks?</i> , Blackstar Funds, 2005 .....	34
Wolfe, P.: <i>The simplex method for quadratic programming</i> , Econometrica, 27, 382-398, 1959 .....	19
Zweig, Jason: <i>'My intention was to minimize my future regret. So I split my contributions fifty-fifty between bonds and equities' – Harry Markowitz</i> . Fra <i>Five Investing Lessons from America's Top Pension Fund</i> ; Money Magazine January 1998 .....	11
Aas, Kjersti og Hobæk Haff, Ingrid: <i>The Generalised Hyperbolic Skew Student's t-distribution</i> . Journal of Financial Econometrics, 4(2), March 2006. ....	35
Aase, Knut K.: <i>The life and career of Karl H. Borch</i> , Discussion Papers 2003/5, Norges Handelshøyskole, Bergen, 2003 .....	32